XVII.

Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation im Raume.

Von

Prof. Dr. Guido Hauck

in Tübingen.

(Fortsetzung zu V, Heft 2.)

(Hierzu Taf. VIII, Fig. 1 — 5.)

Die folgenden Ausführungen schliessen sich direct an den Aufsatz: „Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective" im 2. Hefte des gegenwärtigen Jahrgangs dieser Zeitschrift (S. 81 flgg.) an. Sie übertragen die dort gewonnenen Resultate auf die räumliche Projection und geben damit die Grundzüge einer axonometrischen Theorie der Reliefperspective und der collinearen Verwandtschaft räumlicher Systeme. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Uebertragung von Statten geht, oder umgekehrt die Einfachheit der Specialisirungen, durch welche die Theorie der Planperspective aus derjenigen der centrischen Collineation und diese aus der Theorie der projectivischen Collineation fliesst, dürfte ein Zeugniss für die Brauchbarkeit der Methode sein. Sie ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, welches die Abbildung des Coordinatensystems der Originalfigur repräsentirt. Bei Untersuchungen über collineare Verwandtschaft wird das Bildcoordinatensystem häufig beliebig angenommen, insofern dieselbe dargestellt wird durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Den Connex zwischen dieser Darstellungsweise und unserer axonometrischen Methode stellen die §§ 13 und 14 her. Dabei wird beiläufig die collineare Abbildung eines Ellipsoids, namentlich seine Abbildung als Kugelfläche, besprochen. — § 12 giebt ein einfaches Criterium dafür, dass eine durch fünf Paare entsprechender Punkte gegebene Collineation eine centrische sei, und lehrt ein einfaches praktisches Verfahren, zwei solche Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Der

Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation wird durch die in den §§ 9, 12 und 14 enthaltenen Bemerkungen ins richtige Licht gesetzt. — § 15 bespricht die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation ebener Systeme. — Schliesslich wirft § 16 ein interessantes Licht auf die ganze Theorie, indem er die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und projectivischen Coordinaten in Beziehung setzt.

§ 8.

Allgemeine Sätze über Collineation.

Es erscheint zweckmässig, die Fundamentalsätze über Collineation im Raume, auf die wir uns im Folgenden beziehen werden, als Einleitung vorauszuschicken.*

Zwei räumliche Systeme heissen projectivisch collinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern Systems entspricht und dass solchen Punkten des einen Systems, die in gerader Linie liegen, stets solche Punkte des andern Systems entsprechen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Alsdann entspricht auch jeder Ebene wieder eine Ebene, jeder Fläche n^{ter} Ordnung wieder eine Fläche n^{ter} Ordnung.

Existiren in zwei collinearen räumlichen Systemen zwei einander entsprechende congruente Strahlenbündel, so liegt der Specialfall der centrischen oder perspectivischen Collineation vor. Man kann nämlich zwei solche Systeme in perspectivische Lage überführen, indem man jene zwei Strahlenbündel zur Coincidenz bringt. Zwei centrisch collineare Systeme in perspectivischer Lage haben ausser ihrem gemeinschaftlichen Strahlenbündel, dessen Centrum wir Collineationscentrum nennen, auch noch sämmtliche Punkte einer Ebene entsprechend gemein, welche wir die Collineationsebene nennen. Je zwei entsprechende Gerade beider Systeme müssen sich in einem Punkte der Collineationsebene schneiden, den wir die Spur der Geraden nennen.

Von zwei perspectivisch collinearen Figuren kann jede als die Reliefabbildung der andern angesehen werden. Denn die Eindrücke, welche

---

* Als wichtigste Originalarbeiten über Collineation im Raume vergleiche man: Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, S. 301 flgg. — *Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures.* Neue Ausgabe, *Paris 1865, Tome I,* S. 357 flgg. — Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, S. 72 flgg. — Richelot, Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten, Crelle's Journal Bd. 70, S. 137 flgg. — Mägis, Ueber die allgemeinste eindeutige Correlation zweier räumlicher Gebilde, Königsberg 1868. — *Stephen Smith, On the Focal Properties of Homographic Figures, Procedings of the London Mathematical Society, Vol. II, 1869,* S. 196 flgg.

beide einem im Collineationscentrum befindlichen Auge machen, sind identisch. Mit Rücksicht hierauf fassen wir von zwei collinearen Figuren die eine als Original- oder Objectfigur, die andere als Bildfigur auf,* wobei jedoch ausdrücklich constatirt werden möge, dass es vollständig gleichgiltig ist, welche Figur als Original und welche als Bild genommen wird, und dass ein Tausch zwischen Original und Bild jederzeit vorgenommen werden kann.

Diejenigen Punkte des Bildsystems, welche den unendlich entfernten Punkten des Originalsystems entsprechen, nennen wir Fluchtpunkte. Dieselben liegen alle in einer Ebene, welche wir die Fluchtebene nennen und welche das Bild der unendlich fernen Ebene des Originalsystems repräsentirt. Alle Punkte des Originalsystems, welche den unendlich fernen Punkten des Bildsystems entsprechen, nennen wir Gegenpunkte; sie liegen alle in einer Ebene, der Gegenebene,** welche der unendlich fernen Ebene des Bildsystems entspricht. Fluchtebene und Gegenebene sind beide der Collineationsebene parallel (denn die Schnittlinie der Fluchtebene mit der Collineationsebene ist der Fluchtebene und der unendlich fernen Ebene des Originalsystems entsprechend gemein, liegt also im Unendlichen).

Zu einer gegebenen Originalfigur ist die Bildfigur vollständig und eindeutig bestimmt, wenn die Lage des Collineationscentrums oder Auges, der Collineationsebene und der Fluchtebene in Beziehung zur Originalfigur gegeben ist. Man kann alsdann das Bild μ irgend einer Geraden m der Originalfigur auf folgende Weise finden: Construire (Taf. VIII, Fig. 1) die Spur M der Geraden m als Schnittpunkt derselben mit der Collineationsebene. Construire den Fluchtpunkt F als Schnittpunkt der Fluchtebene mit einer durch das Auge A zur Geraden m gelegten Parallelen. Dann ist MF das Bild μ.

Zieht man durch das Auge A eine Parallele zu μ, so schneidet diese die gegebene Gerade m in deren Gegenpunkt G. Da nun die vier Punkte $AFMG$ die Ecken eines Parallelogramms bilden, so folgt: Der Abstand des Auges von der Gegenebene ist gleich dem Abstande der Collineationsebene von der Fluchtebene.

§ 9.

Axonometrische Behandlung der Reliefperspective.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem O, xyz bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen reliefperspectivisches Bild

* Wir übertragen diese Determination auch auf projectivisch collineare Systeme.

** Vergl. S. 83 Anmerkung.

zu construiren, wenn die relative Lage von Auge, Collineationsebene und Fluchtebene gegen das Objectcoordinatensystem gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe wieder dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der räumliche Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ (Heft 2, Taf. II, Fig. 1).* Derselbe ist bestimmt durch die drei scheinbaren Axenwinkel, die wir wieder mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen, wobei aber nun

67) $$w_{12} + w_{23} + w_{31} < 360^0.$$

Im Uebrigen gelten die Ausführungen des § 1 Wort für Wort auch für die Reliefperspective. Wir haben wieder die Reductionsformeln:

I. 68) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3},$$

wo f_i und g_i wieder die Abscissen der Fluchtpunkte und Gegenpunkte repräsentiren.

Ebenso behalten die in § 3 besprochenen graphischen Methoden der Coordinatenreduction, sowie die Constructionen am scheinbaren Axensystem, durch welche das Bild eines Punktes aus seinen reducirten Coordinaten erhalten wird, in der Reliefperspective ihre volle Giltigkeit. Nur sind jetzt Taf. II, Fig. 1b und Fig. 2 als planperspectivische Abbildungen der in Wirklichkeit räumlichen Figuren anzusehen.

Die Aufgabe kommt somit wieder darauf hinaus, die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i und g_i auszudrücken als Functionen der Orientirungsconstanten.

Die auf das Objectcoordinatensystem bezogenen Coordinaten des Auges seien a_1, a_2, a_3; die Axenabschnitte der Collineationsebene seien m_1, m_2, m_3, und die Axenabschnitte der mit ihr parallelen Fluchtebene qm_1, qm_2, qm_3. Wir haben also die sieben Orientirungsconstanten a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, q.

Die drei Coordinatenaxen (Taf. VIII, Fig. 2a) mögen von der Collineationsebene in den Punkten M_1, M_2, M_3, von der Fluchtebene in den Punkten N_1, N_2, N_3, von der Gegenebene in den Punkten G_1, G_2, G_3 und von einer durch das Auge zu diesen drei Ebenen gelegten Parallelebene in den Punkten H_1, H_2, H_3 geschnitten werden. Dem am Schlusse von § 8 citirten Satze zufolge ist nun

69) $$H_i G_i = N_i M_i = m_i - q m_i.$$

Diese Bemerkung liefert uns die Mittel zur Berechnung der drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3. Die Gleichung der durch A gelegten Parallelebene ist zunächst:

---

* Auf Taf. II im 2. Hefte sind die Punkte O und Ω mit o und ω bezeichnet.

70) $$\frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Deren Axenabschnitte sind:

71) $$O_i H_i = m_i\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}\right),$$

und hieraus folgt für die drei Axenabschnitte der Gegenebene oder die drei Gegenstrecken:

72) $$g_i = O_i H_i + H_i G_i = m_i\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}+1-q\right).$$

Führt man also die Bezeichnung ein

II. 73) $$\varkappa=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}+1-q,$$

so hat man für g_i die Werthe:

IV. 74) $$g_i=\varkappa m_i.$$

Die geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ ist dieselbe wie bei der Planperspective:

75) $$\varkappa=\frac{r}{r-\varrho},$$

wenn nämlich wieder AO mit r und $A\Omega$ mit ϱ bezeichnet wird.

Um die übrigen Grundconstanten zu bestimmen, sind die Schlussfolgerungen genau dieselben wie bei der Planperspective. Die Coordinaten von Ω sind $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, woraus sich für die Strecken ΩM_i die Werthe ergeben:

III. 76) $$\mu_i^2=m_i^2-2\frac{m_i a_i}{\varkappa}+\frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Hierauf folgt aus der Bemerkung, dass die Punkte M_1, M_2, M_3 den Coordinatenaxen und deren Bildern entsprechend gemein sind:

V. 77) $$f_i=(1-\varkappa)\mu_i,$$

und schliesslich ergiebt sich aus den drei Dreiecken $M_i\Omega M_k$:

VI. 78) $$\cos w_{ik}=\frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\mu_i\mu_k}.$$

Wir sehen also, dass für die Reliefperspective genau dieselben Formeln gelten, wie für die Planperspective. Nur die Hilfsgrösse $\varkappa$ hat einen etwas andern Werth. — Hat q den Werth 1, so fällt die Fluchtebene mit der Collineationsebene zusammen, und die Reliefperspective wird zur Planperspective.

Durch die drei Axenwinkel w_{12}, w_{23}, w_{31} ist das Bildcoordinatensystem nicht vollständig bestimmt, insofern aus denselben zweierlei Axensysteme construirt werden können, die zu einander symmetrisch sind. Das eine ist mit dem Objectcoordinatensystem gleichstimmig, das andere ungleichstimmig. Zur Entscheidung über die Wahl zwischen diesen zwei Formen wird uns folgende Betrachtung die Mittel liefern:

Wir haben im Vorangehenden — entsprechend Taf. VIII, Fig. 2a — stillschweigend angenommen, Collineationscentrum und Collineationsebene liegen zwischen Gegenebene und Fluchtebene, d. h. es sei $q<1$. Man überzeugt sich jedoch leicht — vergl. hierzu Taf. VIII, Fig. 3a —, dass unsere Formeln auch für den Fall gelten, wo $q>1$ ist. Zwischen diesen zwei Fällen besteht folgender charakteristische Unterschied:

Liegen Collineationscentrum und Collineationsebene zwischen Gegenebene und Fluchtebene, so liegt jeder Punkt der Originalfigur mit seinem Bilde auf einer und derselben Seite der Collineationsebene. Hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde gleichstimmig ist. (Denn sind S_1, S_2, S_3 die Spuren der drei Strahlen, P und Π die zwei Scheitel, so liegen die Spitzen P und Π der zwei Pyramiden $S_1S_2S_3P$ und $S_1S_2S_3\Pi$ auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundfläche.) Liegen dagegen Fluchtebene und Gegenebene zwischen Collineationscentrum und Collineationsebene, so liegen irgend zwei entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Collineationsebene, und hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde ungleichstimmig ist.

Wir nennen im ersten Falle die collineare Verwandtschaft zwischen beiden Figuren eine **gleichstimmige**, im zweiten Falle eine **ungleichstimmige**.*

Aus dem Gesagten geht nun für die Construction des Bildcoordinatensystems folgende Regel hervor:

Das Bildcoordinatensystem ist gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Objectcoordinatensystem zu construiren, je nachdem $q \lesseqgtr 1$ ist.

Eliminirt man aus den obigen Gleichungen die sieben Orientirungsconstanten, so bleiben noch zwei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten. Es sind dies die aus den drei Gleichungen

$$\text{VIII. 79)} \qquad \lambda^2(g_i^2+g_k^2)=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik}$$

durch Elimination von λ^2 folgenden.

Diese Gleichungen sprechen die **Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks und des Gegenpunktendreiecks** aus, wie dies bei

---

* In der Reliefsculptur und der decorativen Kunst findet nur die gleichstimmige centrische Collineation Verwerthung. — Als wichtigster Specialfall der ungleichstimmigen centrischen Collineation ist die **involutorische** Collineation zu nennen mit $q=\varkappa$.

der Planperspective näher erörtert wurde. Alle hieraus gezogenen Folgerungen gelten also auch für die Reliefperspective. Namentlich erinnern wir an die zwei graphischen Bestimmungen eines Grundconstantensystems (s. Heft 2, S. 91 und 92). Es tritt bei diesen Constructionen nur die eine Aenderung ein, dass Punkt ω nunmehr ausserhalb der Ebene des Fluchtpunktendreiecks anzunehmen ist.

Soll ein Grundconstantensystem mittelst Rechnung aufgestellt werden, so dürfen sieben Grundconstanten willkürlich gewählt werden. Man wählt entweder f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, w_{31}, λ willkürlich und hat dann zur Bestimmung von g_1, g_2, g_3 die Gleichungen 23) oder 24), oder man wählt f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, λ willkürlich und hat zur Bestimmung von w_{12}, w_{23}, w_{31} die Gleichungen 29).

Jedem Werthsysteme der Grundconstanten entsprechen zwei Bildsysteme, — ein mit dem Originalsystem gleichstimmiges und ein mit ihm ungleichstimmiges.

Bezeichnet man wieder den Fusspunkt der vom Auge auf die Ebene des Fluchtpunktendreiecks gefällten Senkrechten als Hauptpunkt und die Länge dieser Senkrechten als Augdistanz, so gilt Alles, was in der Planperspective (vergl. Heft 2, S. 94) über Hauptpunkt und Augdistanz gesagt wurde, auch für die Reliefperspective. Auch die Formeln XIX) und XX) behalten ihre Giltigkeit.

§ 10.

Malerische Perspective. — Bemerkungen über optische Wirkung.

Unter den Specialfällen verdient in erster Linie die malerische Perspective und deren Unterfall: die Cavalierperspective, Beachtung.

Was in § 6 hierüber bemerkt ist, behält in der Reliefperspective seine volle Giltigkeit. Namentlich beachte man die zwei Gleichungen 40) und 41) und die graphische Bestimmung eines malerisch-perspectivischen Grundconstantensystems (Heft 2, Taf. II, Fig. 7). Bei letzterer tritt nur die eine Aenderung ein, dass die auf einander senkrecht stehenden Geraden F_1F_2 und $\omega\zeta$ nunmehr windschief sind. Taf II, Fig. 7 ist jetzt als planperspectivische Abbildung der in Wirklichkeit räumlichen Figur zu betrachten. — Bei der Cavalierperspective ist $w_{23} = 90^0$, die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, w_{31}, f_1, g_1, p ist vollständig willkürlich.

In der Kunst wird zu reliefperspectivischen Constructionen fast ausschliesslich die malerische Perspective verwendet; namentlich ist es die Cavalierperspective, welche die *in praxi* gebräuchlichsten Constructionsmethoden*

* Man vergl. hierüber: *Poudra, Traité de perspective-relief, Paris 1862.*

liefert. Ich glaube jedoch, dass auch eine **schiefe** Annahme der Collineationsebene in gewissen Fällen ihre volle Berechtigung hat. Die physiologische Seite der Frage, inwieweit die Annahme einer verticalen Stellung der Bildebene oder Collineationsebene in der Planperspective oder Reliefperspective nothwendig oder zweckmässig ist, wird nicht selten mit einer gewissen Leichtfertigkeit behandelt, und scheint mir daher ein genaueres Eingehen auf diesen Punkt — wenn auch von unserem eigentlichen Thema etwas abliegend — doch nicht überflüssig zu sein.

Der Grund dafür, dass im Allgemeinen die malerische Perspective unter allen Perspectivarten die naturgetreuesten Bilder liefert, liegt in dem Umstande, dass nur bei ihr verticale Linien sich als Parallelen darstellen, was mit unserer Gewohnheit, von verticalen Geraden einen parallelen Eindruck zu erhalten, harmonirt. Diese Gewohnheit aber findet ihre physiologische Erklärung in Folgendem: Hat die optische Axe des Auges beim Betrachten eines Objects eine horizontale Lage, so hat das Flächenelement der Netzhaut (gelber Fleck), auf welches das von den brechenden Medien des Auges entworfene Bildchen fällt, eine verticale Stellung. In diesem Falle ist also jenes inverse Bildchen ein malerisch-perspectivisches, in welchem alle *in natura* verticalen Linien sich als Parallelen abbilden; in diesem — aber nur in diesem — Falle kommen uns daher jene Linien als parallel zum Bewusstsein. Die genannte Stellung des Auges ist nun bei aufrechter Haltung des Kopfes die natürliche und deshalb gewöhnliche, und daher rührt es, dass unserem Auge verticale Linien allerdings für **gewöhnlich** einen parallelen Eindruck machen. Der parallele Eindruck hört jedoch auf, sobald wir mit schiefgestellter Augenaxe — von unten hinauf oder von oben herab — beobachten. Es entstehen in solchem Falle Netzhautbildchen, ähnlich jenen unnatürlichen Photographien architektonischer Objecte, die mit geneigter *Camera obscura* aufgenommen wurden.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass bei der malerischen Perspective der Augpunkt so angenommen werden muss, dass von ihm aus das vertical aufgestellte **Bild** oder Relief mit horizontal gestellter Augenaxe bequem betrachtet werden kann. Diese Regel wird auch im Allgemeinen immer befolgt. Nur bei Abbildungen aus der Vogel- oder Froschperspective wird die Einhaltung derselben unmöglich, und es wird daher für solche die Bildebene häufig mit Vortheil geneigt angenommen. — Reliefabbildungen aus der Vogelperspective sind nun zwar äusserst selten, wohl aber treten solche aus der Froschperspective häufig auf, z. B. in den Fries-, Gibelfeld- und Deckenreliefs, und für diese dürfte sich daher aus den angeführten Gründen unter Umständen eine schiefe Annahme der Collineationsebene empfehlen. Da bei einem Relief dieses Genres noch der weitere günstige Umstand hinzukommt, dass der Standpunkt des Beschauers nicht willkürlich, sondern fast immer genau vorgezeigt ist, so glaube ich, dass, wenn bei der Construction eines solchen Reliefs jener Punkt als Augpunkt und die Collineationsebene senkrecht zur Augenaxe des Beschauers gewählt würde, man überraschende Effecte erzielen könnte.*

§ 11.
Schiefwinkliges Objectcoordinatensystem.

Unseren seitherigen Betrachtungen haben wir stets ein rechtwinkliges Objectcoordinatensystem zu Grunde gelegt. Es ist jedoch nothwendig, unsere Untersuchungen für ein schiefwinkliges System zu erweitern. Im Wesentlichen ändert sich hierbei Nichts, nur die Formeln III), VI) und VIII) erleiden einige Modificationen.

Sind u_{12}, u_{23}, u_{31} die von den drei Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, so erhalten die genannten Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{III}^0.\ 80)\quad \mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2} - 2\frac{m_i}{\varkappa}(a_k \cos u_{ik} + a_l \cos u_{li}),$$

$$\text{VI}^0.\ 81)\quad \cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2 + 2 m_i m_k \cos u_{ik}}{2\mu_i \mu_k},$$

$$\text{VIII}^0.\ 82)\quad \lambda^2(g_i^2 + g_k^2 - 2 g_i g_k \cos u_{ik}) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}.$$

Der letzten Gleichung zufolge gilt auch bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Coördinatensystems der Satz: „Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind ähnlich." Dagegen kommt der Satz, dass die Winkel dieser Dreiecke alle spitz sein müssen (vergl. S. 91), nunmehr in Wegfall.

§ 12.
Projectivische Collineation.

Die Aehnlichkeit von Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck ist das charakteristische Merkmal der perspectivischen Collineation. Ohne diese Aehnlichkeit haben wir den allgemeinen Fall der projectivischen Collineation.

Wählt man also die Grössen u_{12}, u_{23}, u_{31}; g_1, g_2, g_3 und w_{12}, w_{23}, w_{31}, f_1, f_2, f_3 vollkommen willkürlich und bezieht irgend eine Originalfigur auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln u_{ik}, construirt sodann zu diesem eine Bildfigur mit Zugrundelegung von w_{ik} als scheinbaren Axenwinkeln, f_i als Fluchtstrecken und g_i als Gegen-

* Wenn Herr Poudra in dem oben citirten Werke (S. 91) vorschlägt, bei Gibelfeldern die Horizontebene schief aufsteigend anzunehmen und dem Relief bei der Aufstellung eine leichte Neigung nach vorn zu geben, so muss ich diesem Vorschlage meine Zustimmung entschieden versagen, wiewohl ich glaube, dass ihn bei demselben ähnliche Gedanken wie die oben ausgesprochenen geleitet haben.

strecken, so ist die Bildfigur mit der Originalfigur projectivisch collinear, und zwar gleichstimmig oder ungleichstimmig collinear, je nachdem das Bildcoordinatensystem mit dem Originalcoordinatensystem gleichstimmig oder ungleichstimmig construirt wird.* Man kann sich dann umgekehrt die Bildfigur als ursprünglich denken, indem man sie auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln w_{ik} bezieht und die frühere Originalfigur aus ihr dadurch entstehen lässt, dass man u_{ik} als scheinbare Axenwinkel, g_i als Fluchtstrecken und f_i als Gegenstrecken nimmt.

Statt die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die willkürliche Annahme der Grundconstanten zu bestimmen, kann die Bestimmung auch dadurch geschehen, dass fünf beliebig gewählten Punkten des einen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern Systems, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen, als entsprechende zugewiesen werden.

Wir stellen uns dementsprechend die Aufgabe: Wenn fünf Paare entsprechender Punkte einer Collineation gegeben sind, 1. zu jedem sechsten Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern Systems zu construiren; 2. die Beziehung aufzufinden, die zwischen den zwei gegebenen Punktsystemen stattfinden muss, damit die Collineation eine concentrische sei; 3. vorausgesetzt, dass diese Beziehung stattfindet: die zwei Punktsysteme in perspectivische Lage überzuführen.

Zum Behuf der Lösung dieser Aufgaben müssen wir unsere axonometrischen Anschauungen von den seitherigen perspectivischen Fesseln befreien. Was wir bisher nur als reliefperspectivische Abbildung eines Cartesischen Coordinatensystems betrachtet haben, stellen wir nunmehr unabhängig von jenem als eine neue Art von Coordinatensystem auf. Wir führen hierfür den Namen „axonometrisches Coordinatensystem.“ ein. Die Namen: Coordinatenursprung, Coordinatenaxen, Axenwinkel, erklären sich selbst. Statt des Namens „Fluchtpunkte“ führen wir den Namen „Knotenpunkte“ ein und nennen deren Abscissen „Axenlängen“. Den Namen „Fluchtpunkte“ reserviren wir ausschliesslich für die Bilder von unendlich fernen Punkten und verwenden nur in bestimmten Fällen Fluchtpunkte als Knotenpunkte. — Soll irgend ein Punkt E auf ein axonometrisches Coordinatensystem, dessen Ursprung O und dessen Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 sind (Taf. VIII, Fig. 4), bezogen werden, so zieht man $K_3 E$, welche die Ebene $K_1 O K_2$ schneidet in e, zieht Oe, welche die Linie $K_1 K_2$ schneidet in D, zieht endlich $K_2 e$, $K_1 e$ und DE, welche die drei Axen schneiden in den Punkten E_1, E_2

* Dass der zunächst nur für die centrische Collineation (s. § 9) nachgewiesene Satz: „In zwei collinearen Gebilden sind entsprechende Dreistrahlen entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig“, auch für die projectivische Collineation gilt, beweist sich aus dem am Schlusse dieses Paragraphen erwähnten Satze.

und E_3. Wir nennen diese letzteren Punkte die „Coordinatenpunkte“ und ihre Entfernungen von O die „axonometrischen Coordinaten“ des Punktes E.

Diese Construction lässt sich auch in folgender Form aussprechen: Um irgend einen Punkt E auf das axonometrische Coordinatensystem $O, K_1 K_2 K_3$ zu beziehen, legt man durch je zwei Knotenpunkte $K_i K_k$ und den Punkt E eine Ebene, welche die dritte Axe in dem Coordinatenpunkte E_l schneidet.

Wie umgekehrt ein Punkt im Raume aus seinen axonometrischen Coordinaten construirt wird, bedarf keiner weitern Erklärung.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein specieller Fall des axonometrischen: die Knotenpunkte sind die unendlich fernen Punkte der Axen.

Zwei axonometrische Coordinatensysteme mit gemeinschaftlichen Axen, aber verschiedenen Knotenpunkten nennen wir conaxial. Zu jedem axonometrischen Coordinatensystem existirt also ein conaxiales Cartesisches.

Es seien nun (Taf. VIII, Fig. 4) $O K_1 K_2 K_3 E$ fünf Punkte des einen von zwei collinearen Systemen, $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ die ihnen entsprechenden Punkte des andern. Es soll zu irgend einem sechsten Punkte P des ersten Systems der entsprechende Punkt Π des zweiten Systems construirt werden.

Wir wählen irgend einen der fünf Punkte des ersten Systems, z. B. O, als Ursprung, drei andere, z. B. $K_1 K_2 K_3$, als Knotenpunkte eines axonometrischen Coordinatensystems, auf das wir den fünften Punkt E nach der oben besprochenen Procedur beziehen. Mit den fünf Punkten $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ verfahren wir genau ebenso. Sind alsdann $E_1 E_2 E_3$ und $E_1 E_2 E_3$ die Coordinatenpunkte der Punkte E und E, so sind durch die Punkte $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ auf je zwei entsprechenden Axen zwei projectivische Punktreihen bestimmt. Um nun zu Punkt P des ersten Systems den entsprechenden Punkt Π des zweiten Systems zu construiren, beziehen wir Punkt P auf das lateinische Coordinatensystem, suchen zu seinen Coordinatenpunkten $P_1 P_2 P_3$ die entsprechenden Punkte $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ der drei griechischen Punktreihen* und construiren aus ihnen als Coordinatenpunkten den Punkt Π.**

Bei Anwendung dieser Construction auf eine grössere Anzahl von Punkten ist es häufig von Vortheil, die zwei Coordinatensysteme conaxial

---

* Man bringt zu dem Ende die zwei Punktreihen $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ in perspectivische Lage, indem man sie so legt, dass die Punkte O und Ω zusammenfallen (vergl. § 3).

** Diese Construction ist übereinstimmend mit der schon von Möbius gegebenen; vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 329. Dagegen dürften die folgenden Constructionen neu sein.

zu ändern, in der Art, dass statt der Punkte $K_1 K_2 K_3$ und $K_1 K_2 K_3$ die Coordinatenpunkte irgend zweier anderer entsprechender Punkte als Knotenpunkte gewählt werden. Es können namentlich die den unendlich fernen Punkten der drei griechischen Punktreihen entsprechenden Punkte $G_1 G_2 G_3$ construirt und diese als Knotenpunkte des lateinischen Coordinatensystems benützt werden; alsdann bestimmen sich die Punkte des griechischen Systems durch Cartesische Coordinaten. Oder man kann umgekehrt die Punkte des lateinischen Systems durch Cartesische Coordinaten bestimmen und hat dann als Knotenpunkte im griechischen System die den unendlich fernen Punkten der lateinischen Axen entsprechenden Punkte $F_1 F_2 F_3$ zu nehmen.

Ueberhaupt empfiehlt es sich, die Punkte $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ gleich zu Anfang zu construiren,* indem sie die beste Auskunft über die Natur der collinearen Beziehung ertheilen. So ergiebt sich z. B. als Lösung der zweiten oben formulirten Aufgabe aus dem Vorangehenden unmittelbar der Satz:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die durch die zwei Punktsysteme bestimmte Collineation eine centrische sei, besteht darin, dass die zwei Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ ähnlich sind.

Trifft dieses Criterium zu, so können die zwei Systeme durch folgende praktische Construction in perspectivische Lage gebracht werden (Taf. VIII, Fig. 2):

Errichte über dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ als Basis eine mit $F_1 F_2 F_3 \Omega$ ähnliche Pyramide $G_1 G_2 G_3 A$, und über dem Dreieck $F_1 F_2 F_3$ als Basis eine mit $G_1 G_2 G_3 O$ ähnliche Pyramide $F_1 F_2 F_3 A'$. Lege die zwei hierdurch entstandenen ähnlichen Gebilde (Doppelpyramiden) $G_1 G_2 G_3 O A$ und $F_1 F_2 F_3 A' \Omega$ so, dass die homologen Kanten parallel sind und dass die zwei Punkte A und A' in einen Punkt A zusammenfallen. Alsdann liegen beide Systeme perspectivisch und haben Punkt A als Collineationscentrum.

Man kann die zwei Doppelpyramiden in zwei verschiedenen Formen construiren: bei der einen liegen die beiden Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche, bei der andern auf entgegengesetzten Seiten. Bei der einen Form sind die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich und wer-

---

* Dies wird am zweckmässigsten auf graphischem Wege geschehen. Uebrigens bestimmen sich die Fluchtstrecken und Gegenstrecken auch leicht durch Rechnung: Sind k_i und $\varkappa_i$ die Abscissen der Punkte K_i und K_i, ferner e_i und ε_i die axonometrischen Coordinaten der zwei Punkte E und E, so erhält man mittelst der Formeln I):

83) $$f_i = \frac{\varkappa_i\, \varepsilon_i\, (k_i - e_i)}{k_i\, \varepsilon_i - \varkappa_i\, e_i}, \quad g_i = \frac{k_i\, e_i\, (\varkappa_i - \varepsilon_i)}{\varkappa_i\, e_i - k_i\, \varepsilon_i}.$$

den also in direct ähnliche Lage gebracht (Fig. 2b), bei der andern Form sind sie invers ähnlich und werden in invers ähnliche Lage gebracht (Fig. 2a). Zwei centrisch collineare räumliche Systeme können demnach jederzeit auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage übergeführt werden. Da bei der Lage a) je zwei entsprechende Punkte der zwei Systeme auf der nämlichen —, bei der Lage b) auf verschiedenen Seiten vom Collineationscentrum liegen, so ist die Lage a) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden invers ähnlich sind) als directe —, die Lage b) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich sind) als inverse zu bezeichnen.*

Fig. 2a und 2b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diejenigen zwei Doppelpyramiden, bei welchen die Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche liegen, invers ähnlich sind; Fig. 3a und 3b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diese zwei Formen direct ähnlich sind. Im Falle der Fig. 2 ist die Collineation eine gleichstimmige, im Falle der Fig. 3 eine ungleichstimmige.

Der Beweis für die Richtigkeit unserer Construction für beide Lagen in beiden Fällen beruht darauf, dass von den zwei projectivischen Punktreihen auf je zwei entsprechenden Axen der Ursprung, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt der einen Reihe resp. mit dem Ursprunge, dem unendlich fernen Punkte und dem Gegenpunkte der andern Reihe durch jene Construction thatsächlich in perspectivische Lage gebracht sind; damit liegt aber auch jedes vierte Paar entsprechender Punkte der zwei Punktreihen perspectivisch, also K_i mit K_i, ferner E_i mit E_i und daher auch E mit E.

Schliesslich möge noch der Satz erwähnt werden, dass zu zwei projectivisch collinearen Systemen jederzeit, und zwar auf fünffach unendlich verschiedene Weise ein drittes construirt werden kann, das mit beiden centrisch collinear ist. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn entweder die drei Axenwinkel des gesuchten Systems als Rechte gewählt, oder wenn drei Paare entsprechender Punkte der zwei gegebenen Systeme als Bilder von drei unendlich fernen Punkten des gesuchten Systems genommen und gleichzeitig als Knotenpunkte verwerthet werden.

---

* Findet die centrische Collineation bei directer Lage ihre praktische Verwerthung in der Reliefsculptur und in der decorativen Kunst, so hat die inverse Lage eine wichtige Bedeutung in der Optik, insofern das von einem Linsensystem entworfene Bild eines Objects mit dem Object gleichstimmig centrisch collinear in inverser Lage ist. Man vergl. hierüber die Abhandlung von Möbius: „Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft", in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1855, S. 8 flgg.

§ 13.

Transformation auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem. — Collineare Abbildungen eines Ellipsoids.

Von zwei projectivisch collinearen Figuren sei die Originalfigur auf das rechtwinklige Coordinatensystem O, xyz, die Bildfigur auf das axonometrische Coordinatensystem Ω, $F_1 F_2 F_3$ bezogen. Die collineare Beziehung beider Figuren sei bestimmt durch die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i.

Sind nun $\xi\eta\zeta$ die axonometrischen Coordinaten irgend eines Punktes Π der Bildfigur, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ die auf das conaxiale Cartesische System bezogenen Cartesischen Coordinaten desselben Punktes, so bestehen zwischen $\xi\eta\zeta$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ einfache Beziehungen. Es ergeben sich nämlich aus der Bemerkung, dass z. B. ξ, f_2, f_3 die Axenabschnitte der durch $F_2 F_3$ und Π gelegten Ebene sind, dass folglich die Gleichung dieser Ebene in den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ lautet: $\frac{\mathfrak{x}}{\xi}+\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+\frac{\mathfrak{z}}{f_3}=1$, — die Relationen:

$$84)\qquad \xi=\frac{\mathfrak{x}}{1-\frac{\mathfrak{y}}{f_2}-\frac{\mathfrak{z}}{f_3}},\quad \eta=\frac{\mathfrak{y}}{1-\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-\frac{\mathfrak{x}}{f_1}},\quad \zeta=\frac{\mathfrak{z}}{1-\frac{\mathfrak{x}}{f_1}-\frac{\mathfrak{y}}{f_2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen I) ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz eines Punktes P der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ des entsprechenden Punktes Π der Bildfigur:

$$85)\qquad x=\frac{g_1\frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1},\quad y=\frac{g_2\frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1},\quad z=\frac{g_3\frac{\mathfrak{z}}{f_3}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1}.$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser wichtigen Relationen stellen wir uns folgende Aufgabe:

Gegeben sei im Originalsystem ein Ellipsoid

$$86)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Wie sind die axonometrischen Grundconstanten zu wählen, damit demselben als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche?

Die Anwendung unserer Formeln 85) auf die Gleichung 86) liefert für die Abbildung der Fläche die Gleichung:

$$87)\qquad \frac{g_1^2}{a^2}\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2}+\frac{g_2^2}{b^2}\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2}+\frac{g_3^2}{c^2}\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2}-\left(\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1\right)^2=0$$

oder entwickelt:

$$88)\quad \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)\\ &-2\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{f_1 f_2}-2\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{f_2 f_3}-2\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{f_3 f_1}+2\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+2\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+2\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1=0.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir zum Behuf der Discussion dieser Gleichung die Determinante derselben mit A (so dass also

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

ist, wo nach bekannter Bezeichnungsweise a_{11}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{14}$, ... die Coefficienten von x^2, xy, xz, x, ... bedeuten), so ergiebt sich für A folgender Werth:

$$89)\quad A=-\frac{1}{f_1^2 f_2^2 f_3^2}\,\frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Hieraus folgt* vor Allem, dass A nie positiv werden kann, dass sich also ein Ellipsoid nie als Regelfläche, sondern nur als Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder elliptisches Hyperboloid abbilden kann.**

Welcher dieser drei Fälle eintritt, hängt davon ab, ob die Gegenebene das Originalellipsoid nicht schneidet oder berührt oder schneidet. Es sind also hierfür lediglich die drei Grössen g_i massgebend, und zwar ergiebt sich folgendes Criterium:

Die Abbildung ist ein Ellipsoid, Paraboloid oder Hyperboloid, je nachdem:

$$90)\quad \frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}+\frac{c^2}{g_3^2}\lesseqgtr 1.$$

Fragen wir endlich nach den Bedingungen, die die Grundconstanten erfüllen müssen, damit sich das Ellipsoid speciell als Kugelfläche abbilde, so liefert die Vergleichung der Gleichung 88) mit der allgemeinen — auf das Cartesische System mit den Axenwinkeln $w_{12}\, w_{23}\, w_{31}$ bezogenen — Gleichung einer Kugel

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cos w_{12}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cos w_{23}+2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\cos w_{31}\\ -2p\mathfrak{x}-2q\mathfrak{y}-2r\mathfrak{z}+s=0\end{aligned}$$

folgende Bedingungen:

$$91)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)=\frac{1}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)=W,\\ &\cos w_{12}=-\frac{1}{f_1 f_2}\frac{1}{W},\quad \cos w_{23}=-\frac{1}{f_2 f_3}\frac{1}{W},\quad \cos w_{31}=-\frac{1}{f_3 f_1}\frac{1}{W}.\end{aligned}\right.$$

---

* Vergl. Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl., S. 465. (Die Determinante A ist dort mit C_0 bezeichnet.)

** Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 314.

Da hiernach vier Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können als weitere Bestimmungsgleichungen noch die Gleichungen VIII) hinzugefügt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen, dass jede Kugel als die Reliefperspective eines beliebigen Ellipsoids angesehen werden kann. — Oder es können die drei Grössen g_i willkürlich gewählt werden, womit die Aufgabe gelöst ist: Ein beliebiges Ellipsoid und eine dasselbe nicht reell schneidende Ebene so collinear abzubilden, dass das Ellipsoid sich als Kugelfläche darstellt und das Bild der Ebene ins Unendliche fällt.

§ 14.

Bestimmung der Collineation durch drei lineare Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich die Aufgabe des vorigen Paragraphen erledigte, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Axen die Abbildungen der Coordinatenaxen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem XYZ, das wir, wie das Coordinatensystem der Originalfigur, rechtwinklig und mit diesem gleichstimmig annehmen wollen, so gehen die Formeln 85) über in Gleichungen von folgender Form:

$$92)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ z &= \frac{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen repräsentiren den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme und bilden häufig den Ausgangspunkt bei der Untersuchung der collinearen Verwandtschaft.** Es ergiebt sich nun für uns die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit unserer axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. es ergiebt sich die Aufgabe:

Wenn die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die Formeln 92) gegeben ist, die neun axonometrischen Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i auszudrücken als Functionen der in jenen Gleichungen enthaltenen Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.***

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj., Tome I*, S. 396.

** Z. B. in den S. 403 citirten Arbeiten von Magnus, Richelot und Mägis

*** Da sich die Gleichungen 92) nicht ändern, wenn man sämmtliche 16 Coefficienten mit einem und demselben Factor multiplicirt, so kann einer dieser Coefficienten $=1$ gesetzt werden, so dass alsdann ihre Anzahl sich auf 15 reducirt.

Wir beginnen die Lösung dieser Aufgabe damit, dass wir das Bildsystem transformiren auf dasjenige Cartesische Coordinatensystem $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Axen die Bilder der Axen des Originalsystems sind.

Die auf das Coordinatensystem XYZ bezogenen Coordinaten des neuen Ursprungs seien $p_1 p_2 p_3$. Die Richtungswinkel der neuen Axen seien $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$; zwischen den letzteren bestehen die Beziehungen:

$$
93)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1,\\
&\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1,\\
&\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1.
\end{aligned}\right.
$$

Alsdann haben wir die Transformationsformeln:

$$
94)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= p_1 + \mathfrak{x}\cos\alpha_1 + \mathfrak{y}\cos\beta_1 + \mathfrak{z}\cos\gamma_1,\\
Y &= p_2 + \mathfrak{x}\cos\alpha_2 + \mathfrak{y}\cos\beta_2 + \mathfrak{z}\cos\gamma_2,\\
Z &= p_3 + \mathfrak{x}\cos\alpha_3 + \mathfrak{y}\cos\beta_3 + \mathfrak{z}\cos\gamma_3.
\end{aligned}\right.
$$

Wendet man nun diese Substitutionen auf die Gleichungen 92) an, so müssen die letzteren identisch werden mit den Gleichungen 85). Dies liefert folgende Bedingungsgleichungen:

$$
95)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0,\\
&b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 = 0,\\
&c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 = 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
96)\quad \left\{\begin{aligned}
&b_1\cos\alpha_1 + b_2\cos\alpha_2 + b_3\cos\alpha_3 = 0,\\
&c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\alpha_2 + c_3\cos\alpha_3 = 0,\\
&c_1\cos\beta_1 + c_2\cos\beta_2 + c_3\cos\beta_3 = 0,\\
&a_1\cos\beta_1 + a_2\cos\beta_2 + a_3\cos\beta_3 = 0,\\
&a_1\cos\gamma_1 + a_2\cos\gamma_2 + a_3\cos\gamma_3 = 0,\\
&b_1\cos\gamma_1 + b_2\cos\gamma_2 + b_3\cos\gamma_3 = 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
97)\quad \left\{\begin{aligned}
-\frac{g_1}{f_1} &= \frac{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4},\\
-\frac{g_2}{f_2} &= \frac{b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2 + b_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4},\\
-\frac{g_3}{f_3} &= \frac{c_1\cos\gamma_1 + c_2\cos\gamma_2 + c_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4};
\end{aligned}\right.
$$

$$
98)\quad \left\{\begin{aligned}
-\frac{1}{f_1} &= \frac{d_1\cos\alpha_1 + d_2\cos\alpha_2 + d_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4},\\
-\frac{1}{f_2} &= \frac{d_1\cos\beta_1 + d_2\cos\beta_2 + d_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4},\\
-\frac{1}{f_3} &= \frac{d_1\cos\gamma_1 + d_2\cos\gamma_2 + d_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}.
\end{aligned}\right.
$$

Aus den 18 Gleichungen 93), 95), 96), 97), 98) bestimmen sich nun die 18 Grössen $p_i\, \alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i\, f_i\, g_i$. Schliesslich ergeben sich dann die drei Axenwinkel w_{ik} aus den Gleichungen

$$99)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3, \\ \cos w_{23} = \cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \cos\beta_2 \cos\gamma_2 + \cos\beta_3 \cos\gamma_3, \\ \cos w_{31} = \cos\gamma_1 \cos\alpha_1 + \cos\gamma_2 \cos\alpha_2 + \cos\gamma_3 \cos\alpha_3. \end{cases}$$

Zum Behuf der Auflösung unserer Gleichungen führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir bezeichnen die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$100)\quad R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, ferner die Unterdeterminanten der Determinante

$$101)\quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{B}_1 \ldots$

Es liefern nun zunächst die Gleichungen 95) für die Ursprungscoordinaten — und die Gleichungen 96) und 93) für die Richtungswinkel folgende Werthe:

$$102)\quad p_i = \frac{D_i}{D_4};$$

$$103)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_i = \dfrac{\mathfrak{A}_i^2}{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}, \\ \cos^2\beta_i = \dfrac{\mathfrak{B}_i^2}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}, \\ \cos^2\gamma_i = \dfrac{\mathfrak{C}_i^2}{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}. \end{cases}$$

Mit diesen Werthen erhält man sodann aus den Gleichungen 97) 98) und 99) für die axonometrischen Grundconstanten folgende Ausdrücke:

$$104)\quad \begin{cases} g_1 = -\dfrac{D_4}{A_4}, \\ g_2 = -\dfrac{D_4}{B_4}, \\ g_3 = -\dfrac{D_4}{C_4}; \end{cases}$$

$$105)\quad \begin{cases} f_1 = \pm\dfrac{R}{D_4}\,\dfrac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}{A_4}, \\ f_2 = \pm\dfrac{R}{D_4}\,\dfrac{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}{B_4}, \\ f_3 = \pm\dfrac{R}{D_4}\,\dfrac{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}{C_4}; \end{cases}$$

106)
$$\begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3}{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3}{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_3}{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 106) können noch auf eine etwas andere Form gebracht werden. Bildet man nämlich nach dem Multiplicationstheorem das Quadrat von D_4 und bezeichnet die Unterdeterminanten der so entstehenden Determinante

107)
$$D_4^2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

mit Q_{ik}, so ist z. B.

$$\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 = Q_{11},$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 = Q_{12} \text{ u. s. f.}$$

Man erhält daher für f_i und $\cos w_{ik}$ folgende Ausdrücke:

108)
$$\begin{cases} f_1 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{Q_{11}}}{A_4}, \\ f_2 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{Q_{22}}}{B_4}, \\ f_3 = \pm \dfrac{R}{D_4} \dfrac{\sqrt{Q_{33}}}{C_4}; \end{cases}$$

109)
$$\begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 108) lassen die Vorzeichen von f_i unbestimmt. Dieselben bestimmen sich aus denjenigen der g_i, insofern f_i und g_i entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Bezüglich der Axenwinkel w_{ik} muss noch entschieden werden, wie aus denselben das Bildcoordinatensystem zusammenzusetzen ist, ob gleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem, oder ungleichstimmig. D. h. es ist zu entscheiden, ob die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation eine gleichstimmige oder ungleichstimmige ist.

Das Bild des Dreistrahls o, xyz sei $\omega, \xi\eta\zeta$. Wir denken uns ein mit O, XYZ paralleles Coordinatensystem mit Ursprung in ω. Sind dann $X'Y'Z'$ die auf dieses System bezogenen Coordinaten eines auf $\omega\xi$ beliebig gewählten Punktes, ebenso $X''Y''Z''$ und $X'''Y'''Z'''$ die Coordinaten zweier auf $\omega\eta$ und $\omega\zeta$ beliebig gewählter Punkte, so ist der Dreistrahl $\omega, \xi\eta\zeta$ mit O, XYZ gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem

$$110)\qquad \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} \gtrless 1$$

ist. Es handelt sich nun darum, diese Determinante, die wir mit Δ bezeichnen wollen, auszudrücken in den Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.

Zwischen den Coordinaten unserer drei Punkte bestehen vermöge ihrer Lage auf den drei Strahlen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ folgende Beziehungen:

$$111)\qquad \left\{ \begin{aligned} b_1 X' + b_2 Y' + b_3 Z' &= 0, \\ c_1 X' + c_2 Y' + c_3 Z' &= 0, \\ c_1 X'' + c_2 Y'' + c_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X'' + a_2 Y'' + a_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X''' + a_2 Y''' + a_3 Z''' &= 0, \\ b_1 X''' + b_2 Y''' + b_3 Z''' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Setzt man daher je eine Coordinate der drei Punkte $= 1$, so erhält man für Δ folgenden Werth:

$$112)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} & \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_1} \\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} & 1 & \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_2} \\ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_3} & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3}\, D_4^2.$$

Wir haben somit (weil O, XYZ mit o, xyz gleichstimmig) den Satz:

Die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation ist eine gleichstimmige oder ungleichstimmige, je nachdem

$$113)\qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_3 \gtrless 1.$$

Diesem Criterium entsprechend ist nun das Bildcoordinatensystem entweder gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem zu construiren.

Anmerkung. Substituirt man die obigen Ausdrücke in den Bedingungsgleichungen 90) und 91), so ist damit die Aufgabe gelöst: Welche Beziehungen müssen zwischen den Coefficienten einer linearen Substitution obwalten, damit einem im Originalsystem gegebenen Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im Bildsystem ein bestimmter Flächentypus (namentlich eine Kugelfläche) entspreche?

§ 15.

Collineation zwischen ebenen Systemen.

In der vorangehenden axonometrischen Theorie der collinearen Verwandtschaft von räumlichen Systemen ist die Collineation zwischen ebenen

Systemen mit einbegriffen, insofern man nur nothwendig hat, von den unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Coordinatensystemen immer nur eine Coordinatenebene, z. B. die xy-Ebene, bezw. $\xi\eta$-Ebene, zu berücksichtigen. Es mögen in dieser Beziehung folgende Andeutungen genügen:

Das axonometrische Coordinatensystem in der Ebene wird gebildet von zwei vom Ursprung O ausgehenden Axen mit den Knotenpunkten K_1 und K_2. Auf dasselbe wird ein Punkt E dadurch bezogen, dass man K_2E und K_1E zieht, welche die beiden Axen in den Coordinatenpunkten E_1 und E_2 schneiden; OE_1 und OE_2 sind die axonometrischen Coordinaten des Punktes E.

Die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Figuren kann dadurch bestimmt werden, dass man die fünf axonometrischen Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2 g_1 g_2$ willkürlich wählt, die Originalfigur auf ein Cartesisches Coordinatensystem O, xy bezieht und die nach den Formeln

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}$$

reducirten Coordinaten auf das axonometrische Coordinatensystem $\Omega, F_1 F_2$ mit w_{12} als Axenwinkeln und $f_1 f_2$ als Axenlängen bezieht.

Dass zwei collineare ebene Systeme immer, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können,* ergiebt sich folgendermassen:

Geht man von der perspectivischen Abbildung eines ebenen Systems aus, indem man die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems O, xyz als Ebene des Originalsystems wählt, die Lage der Ebene des Bildsystems durch ihre drei Axenabschnitte $m_1 m_2 m_3$ und die Lage des Auges durch seine drei Coordinaten $a_1 a_2 a_3$ bestimmt, so erhält man in den Gleichungen II) bis VI) (S. 406) die fünf Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2 g_1 g_2$ ausgedrückt als Functionen der sechs Orientirungsconstanten $m_1 m_2 m_3 a_1 a_2 a_3$. Will man alsdann umgekehrt die sechs Orientirungsconstanten als Functionen der fünf Grundconstanten ausdrücken, so bleibt eine der ersteren unbestimmt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch vier Paare entsprechender Punkte OK_1K_2E und $\Omega K_1 K_2 E$ gegeben, so ist das Verfahren analog mit dem in § 12 angegebenen. Die dort gelehrte Lösung der Aufgabe, zwei collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, reducirt sich für ebene Systeme auf folgende Construction:

Beziehe die Punkte E und E auf die zwei axonometrischen Coordinatensysteme $O, K_1 K_2$ und $\Omega, K_1 K_2$, ihre Coordinatenpunkte seien $E_1 E_2$ und $E_1 E_2$; construire für die zwei projectivischen Punktreihen

* Vergl. *Jacobi*, *„Theoria analytica generalis projectionis centralis“*, Crelle's Journal Bd. 8, S. 338.

OE_1K_1 und $\Omega E_1 K_1$ den Gegenpunkt G_1 und Fluchtpunkt F_1, desgleichen für die zwei Punktreihen OE_2K_2 und $\Omega E_2 K_2$ die Punkte G_2 und F_2; lege durch $G_1 G_2$ (Taf. VIII, Fig. 2) unter beliebigem Winkel φ gegen die Ebene des Originalsytems eine Ebene und construire in dieser ein Dreieck $G_1 G_2 A$ ähnlich $F_1 F_2 \Omega$; lege ebenso durch $F_1 F_2$ unter demselben Neigungswinkel φ gegen die Ebene des Bildsystems eine Ebene und construire in ihr ein Dreieck $F_1 F_2 A'$ ähnlich $G_1 G_2 O$; ziehe AO und $A'\Omega$ und bringe die zwei so entstandenen ähnlichen Tetraeder OG_1G_2A und $A'F_1F_2\Omega$ in ähnliche Lage, so dass Punkt A mit A' zusammenfällt.

Die zwei Tetraeder können sowohl direct ähnlich, als invers ähnlich construirt werden. Hierdurch sind zwei verschiedene Arten der perspectivischen Lage — eine (resp) inverse und eine directe — bedingt, von denen jede einzelne durch Veränderung des Winkels φ beliebig variirt werden kann. — Mit $\varphi = 0$ oder $= 180^0$ fallen die zwei Systeme in eine und dieselbe Ebene. Demnach können zwei collineare ebene Systeme in einer und derselben Ebene auf vier verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden.* Die Figuren 5 (Taf. VIII) zeigen diese vier Lagen: Fig. a) und b) die zwei directen, Fig. c) und d) die zwei inversen Lagen, a) und c) mit $\varphi = 0$, b) und d) mit $\varphi = 180^0$.

Die Ausführungen der §§ 13 und 14 lassen sich ebenfalls mit Leichtigkeit auf ebene Systeme übertragen:

Die Transformationsformeln vom axonometrischen zum conaxialen Cartesischen Bildcoordinatensystem lauten:

114) $$\xi = \frac{\mathfrak{x}}{1-\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1-\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}}.$$

Zwischen den Coordinaten xy eines Punktes der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ des entsprechenden Punktes der Bildfigur bestehen die Beziehungen:

115) $$x = \frac{g_1 \dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}+\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}-1}, \quad y = \frac{g_2 \dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}+\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}-1}.$$

Als Criterium dafür, dass die Ellipse

116) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sich im Bildsystem als Ellipse, Parabel oder Hyperbel abbilde, ergiebt sich:

---

* Vergl. die S. 403 citirte Abhandlung von Stephen Smith, S. 202.

117) $$\frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}\lesseqgtr 1.$$

Für den Kreis erhält man die Bedingungen:

118) $$\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)=-\frac{1}{f_1 f_2 \cos w_{12}}.$$

Da hiernach drei Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können z. B. die zwei Grössen g_i willkürlich gewählt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen: Eine Ellipse und eine sie nicht schneidende Gerade können stets so projicirt werden, dass die Ellipse sich als Kreis abbildet und dass das Bild der Geraden ins Unendliche fällt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch die zwei linearen Relationen

119) $$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a_1X+a_2Y+a_3}{d_1X+d_2Y+d_3},\\ y&=\frac{b_1X+b_2Y+b_3}{d_1X+d_2Y+d_3}\end{aligned}\right.$$

gegeben, und bezeichnet man die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

120) $$R=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, so drücken sich die fünf Grundconstanten folgendermassen in den Substitutionscoefficienten aus:

121) $$\left\{\begin{aligned} g_1&=-\frac{D_3}{A_3},\\ g_2&=-\frac{D_3}{B_3},\end{aligned}\right.$$ 122) $$\left\{\begin{aligned} f_1&=\pm\frac{R}{D_3}\frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{A_3},\\ f_2&=\pm\frac{R}{D_3}\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{B_3},\end{aligned}\right.$$

123) $$\cos w_{12}=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

§ 16.

Schlusswort. Chasles'sche und projectivische Coordinaten.

Die in § 12 definirten axonometrischen Coordinaten stehen in naher Beziehung zu den allgemeinen projectivischen Coordinaten. Sie können nämlich als eine Modification der Chasles'schen Coordinaten** angesehen werden, welche ihrerseits einen Specialfall der — von Möbius

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj. des fig., Tome I*, S. 53.

** Für die Ebene findet man die ausführliche Behandlung dieser Coordinaten in *Chasles, Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852*, S. 341 flgg. Für den Raum ist das von Chasles in seiner Geschichte der Geometrie (s. die deutsche Ausgabe von Sohnke, Halle 1839, S. 282) aufgestellte allgemeinere Coordinatensystem in derselben Weise zu specialisiren, wie Chasles dies in seinem *Traité de Géom. sup.*, S. 341, für die Ebene ausgeführt hat.

angedeuteten, von v. Staudt ausgesprochenen und von Fiedler nutzbar gemachten und mit den tetrametrischen Coordinaten identificirten — allgemeinen projectivischen Coordinaten* repräsentiren.

Es sei nämlich $O, K_1 K_2 K_3$ ein axonometrisches Coordinatensystem, $k_1 k_2 k_3$ seien die Axenlängen, $e_1 e_2 e_3$ und xyz die axonometrischen Coordinaten zweier Punkte E und P. Bezeichnen wir nun mit $e_1^{(c)} e_2^{(c)} e_3^{(c)}$ und $x^{(c)} y^{(c)} z^{(c)}$ die auf dasselbe System bezogenen Chasles'schen Coordinaten der Punkte E und P, ferner mit $x^{(F)} y^{(F)} z^{(F)}$ die auf dasselbe System mit E als Einheitspunkt bezogenen projectivischen (Fiedler'schen) Coordinaten von P, so definiren sich die Chasles'schen und projectivischen Coordinaten durch folgende Gleichungen:

124) $$x^{(c)} = \frac{x}{k_1 - x}, \quad y^{(c)} = \frac{y}{k_2 - y}, \quad z^{(c)} = \frac{z}{k_3 - z};$$

125) $$x^{(F)} = \frac{x^{(c)}}{e_1^{(c)}} = \frac{\frac{x}{k_1 - x}}{\frac{e_1}{k_1 - e_1}}, \quad y^{(F)} = \frac{y^{(c)}}{e_2^{(c)}} = \frac{\frac{y}{k_2 - y}}{\frac{e_2}{k_2 - e_2}}, \quad z^{(F)} = \frac{z^{(c)}}{e_3^{(c)}} = \frac{\frac{z}{k_3 - z}}{\frac{e_3}{k_3 - e_3}}.$$

Sind $\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4$ die auf das Fundamentaltetraeder $O K_1 K_2 K_3$ mit E als Einheitspunkt bezogenen tetrametrischen Coordinaten von P (so dass also $\chi_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{e}_i}$ ist, wenn $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_4$ resp. die Abstände der Punkte P und E von den Ebenen $O K_2 K_3$, $O K_3 K_1$, $O K_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$ bedeuten), so ist:

126) $$\frac{\chi_1}{\chi_4} = x^{(F)}, \quad \frac{\chi_2}{\chi_4} = y^{(F)}, \quad \frac{\chi_3}{\chi_4} = z^{(F)}.$$

Ist eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte $O K_1 K_2 K_3 E$ und $\Omega\, K_1\, K_2\, K_3\, E$ gegeben, so finden zwischen den axonometrischen, Chasles'schen und projectivischen Coordinaten zweier entsprechender Punkte P und Π folgende Beziehungen statt:

127) $$\xi = \frac{\varkappa_1 \varepsilon_1 (k_1 - e_1) x}{(k_1 \varepsilon_1 - \varkappa_1 e_1) x + k_1 e_1 (\varkappa_1 - \varepsilon_1)},\text{**} \quad \eta \text{ und } \zeta \text{ entsprechend,}$$

128) $$\xi^{(c)} = \frac{\varepsilon_1^{(c)}}{e_1^{(c)}} x^{(c)},$$

129) $$\xi^{(F)} = x^{(F)}.$$

So brauchbar sich auch die axonometrischen Coordinaten namentlich in constructiver Beziehung vermöge ihrer Handlichkeit und An-

---

* Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 320 und 329; v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, S. 266; Fiedler, Ueber die projectivischen Coordinaten, in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, Bd. 15, S. 152 flgg., oder Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 1871, S 507 flgg.

** Diese Gleichung folgt unmittelbar aus Gleichung I) in Verbindung mit 83). Die griechischen Buchstaben haben hier und im Folgenden für das griechische Punktsystem genau dieselbe Bedeutung, wie die gleichlautenden lateinischen Buchstaben für das lateinische System.

schaulichkeit erweisen, so ungeeignet zeigt sich häufig ihre Anwendung bei analytischen Untersuchungen (schon darum, weil die Ordnung einer Fläche nicht mit dem Grade ihrer Gleichung in axonometrischen Coordinaten übereinstimmt). Der Uebergang von axonometrischen Coordinaten zu Chasles'schen oder projectivischen oder tetrametrischen kann aber nun nach den obigen Formeln jeden Augenblick mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden. Am besten wird man thun, alle vier Arten von Coordinaten gleichzeitig zu berücksichtigen, indem man sich die Modificationen, die die Form eines analytischen Ausdruckes beim Uebergange von einer Art zu einer andern erleidet, jederzeit präsent erhält und sich eine möglichste Fertigkeit und Ungenirtheit im Changiren aneignet.

Die in § 12 gegebene Lösung der Aufgabe: „Wenn eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte gegeben ist, zu jedem sechsten Punkte den entsprechenden zu construiren", ist übereinstimmend mit der schon von Möbius, dem scharfsinnigen Erfinder der tetrametrischen Coordinaten, gegebenen Construction. Sie fliesst jedoch bei Möbius nicht mit der innern Nothwendigkeit aus der Natur seines Coordinatensystems, als dies bei unserer axonometrischen Methode der Fall ist. Es ist bei Möbius weniger die Theorie der barycentrischen Coordinaten, als vielmehr die Theorie der geometrischen Netze, welche speciell jener Construction das Leben gegeben hat. Mit dieser Construction hat aber nun Möbius den Grundgedanken der allgemeinen projectivischen Coordinaten ausgesprochen und damit den Keim zu der Verschmelzung der constructiven und analytischen Methode gelegt, deren wir uns heute erfreuen. v. Staudt nahm den Möbius'schen Gedanken auf und verarbeitete ihn weiter, indem er die Doppelverhältnisse als Variable einführte.* Aber erst Fiedler wurde sich der eminenten Bedeutung dieser Coordinaten vollständig bewusst. Er hat das Ziel seines Strebens: die analytische und constructive Methode so enge miteinander zu verknüpfen, dass es sich bei ihrer Anwendung nicht mehr um ein *aut — aut*, sondern vielmehr um ein *sive — sive* handle, durch die Ausbildung der projectivischen Coordinaten auf's Schönste realisirt und sich dadurch das hohe Verdienst erworben, die Kluft, die zwischen beiden Methoden bestand, für immer geschlossen zu haben.

---

* Uebrigens deutet schon Möbius S. 330 an: „— die zwei oder drei Doppelverhältnisse, wodurch jeder andere Punkt der gegebenen Figur in Bezug auf die ersten vier oder fünf Punkte vollkommen bestimmt wird, ...".