Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0044

XVIII.

Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

MILINOWSKI,

Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass.

I. Allgemeine Eigenschaften.

Um auf rein synthetischem Wege die Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung zu erforschen, geht man wohl am besten von einer Curve dritter Ordnung aus, welche als Ort der gemeinschaftlichen Tripel der in einem Kegelschnittnetze vorkommenden Büschel auftritt und die daher nach Steiner (vergl. Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter) Tripelcurve heissen soll. Namentlich ist in den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes auch ein Mittel gegeben, die Polareigenschaften der Curven dritter Ordnung abzuleiten, was ich in einem Programm des Tilsiter Gymnasiums vom Jahre 1872 in einer Abhandlung: „Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten", ausgesprochen habe. Gleichzeitig hat Herr Dr. Slawyk in seiner Inauguraldissertation „Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung" (Breslau, Jungfer's Buchdruckerei) die Polareigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes abgeleitet. Um diese Ableitung allgemein giltig zu machen, bleibt noch zu zeigen, dass eine Tripelcurve eine ganz allgemeine Curve dritter Ordnung ist, also z. B. auch erzeugt werden kann durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel Letzteres habe ich im Programm des Gymnasiums von Weissenburg vom Jahre 1875 in der Abhandlung „Die Haupterzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung" bewiesen. Später bin ich jedoch auf einen weit einfachern Beweis gestossen, den ich im Folgenden mittheile. Daran knüpfe ich die Theorie der Polaren einer Curve dritter Ordnung, indem ich von der Chasles'schen Erzeugungsart ausgehe. Die angewendete Methode ist einfach und lässt sich modificirt auch bei Curven höherer Ordnung zur Anwendung bringen.

1. Haben zwei projectivische Kegelschnittbüschel $(ABCD)\,(\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\varkappa_4^2\ldots)$ und $(ABC'D')\,(\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2\ldots)$ zwei Grundpunkte AB gemein und entspricht das Geraden-

paar (AB, CD) dem Paare $(AB, C'D')$, so erzeugen beide durch die Durchschnitte homologer Elemente eine Curve C^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes dieser Büschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann, dessen Scheitel M auf C^3 liegt.

Jeder Kegelschnitt des einen Büschels $(ABCD)$ wird von allen Kegelschnitten des andern $(ABC'D')$ in den Punktpaaren einer Involution geschnitten, deren Centrum auf $C'D'$ liegt; nennen wir diese Involutionscentra $K_1 K_2 K_3 \ldots$ und lassen jedem Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ das ihm zukommende Centrum entsprechen, so ist

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \barwedge (\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots).$$

Ebenso wird jeder Kegelschnitt des zweiten Büschels von allen des ersten in einer Involution geschnitten. Sämmtliche Involutionscentra $L_1 L_2 L_3 \ldots$ liegen auf CD und es ist wieder

$$(L_1 L_2 L_3 \ldots) \barwedge (\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \ldots),$$

also auch

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \barwedge (L_1 L_2 L_3 \ldots).$$

Der Schnittpunkt $(CD, C'D')$ entspricht bei dieser projectivischen Beziehung sich selbst, also liegen die Punktreihen perspectivisch und es schneiden sich die Geraden $K_1 L_1$, $K_2 L_2$, ... in einem Punkte M. Diese Geraden sind aber die Durchschnitte der homologen Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \lambda_1^2$, $\varkappa_2^2 \lambda_2^2$, ... Lassen wir jede Gerade jedem der Kegelschnitte, deren Durchschnitt sie ist, entsprechen, so ist zwischen den Kegelschnitten und den Geraden eine projectivische Beziehung hergestellt und daher liegen die Schnittpunkte $(\varkappa_1^2 \lambda_1^2)$, ... auf einer Curve C^3 dritter Ordnung.

Anmerkung. Haben die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(ABC'D')$ die Geradenpaare (AB, CD) und $(AB, C'D')$ nicht als homologe, so umhüllen die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Elemente verbinden, einen Kegelschnitt, welcher CD und $C'D'$ berührt.

2. Ist eine Curve C^3 dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel $(ABCD)\{\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots\}$ und ein projectivisches Strahlenbüschel $M(s_1 s_2 s_3 \ldots)$ entstanden, so kann sie auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel (M) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grundpunkte auf C^3 liegen.

Die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ mögen s_1 in $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... schneiden; ferner seien $G_2 H_2$, $G_3 H_3$, ... die Schnittpunkte von $\varkappa_2^2$, $\varkappa_3^2$, ... mit s_2, s_3, ... Legt man durch A und die Punkte $E_2 F_2 G_2 H_2$ einen Kegelschnitt λ_2^2 und durch $A E_3 F_3 G_3 H_3$ einen andern λ_3^2, so bestimmen beide ein Büschel mit den Grundpunkten $AB'C'D'$, von dem ein Kegelschnitt λ_1^2 durch $E_1 F_1$ gehen muss, weil $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... in Involution sind.

Lassen wir den Strahlen $s_1 s_2 s_3$ die Kegelschnitte $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ entsprechen, so ist dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt; wir nennen $\lambda_4^2 \lambda_5^2 \ldots$ die den Strahlen $s_4 s_5 \ldots$ entsprechenden Kegelschnitte. Die beiden Büschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ und $(AB'C'D')\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots\}$ erzeugen eine Curve C_1^3 dritter Ordnung, welche mit C^3 zusammenfallen muss. Dazu ist nachzuweisen, dass $\varkappa_4^2$ und λ_4^2 sich auf s_4, $\varkappa_5^2$ und λ_5^2 sich auf $s_5, \ldots$ schneiden. — Jeder Strahl des Büschels $(s_1 s_2 \ldots)$ wird von beiden Kegelschnittbüscheln $(\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots)$ in einer quadratischen Involution geschnitten; auf jedem Strahle fällt ein Punktpaar der einen mit einem Punktpaare der andern Involution zusammen. Ordnen wir die beiden Kegelschnitte, welche durch das gemeinsame Punktpaar gehen, einander zu, so ist zwischen den Kegelschnittbüscheln dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt. Wenn auf dem Strahle s sich die beiden Kegelschnitte $\varkappa^2$ und λ^2 der Büschel schneiden, so lässt sich zeigen, dass der Kegelschnitt $\varkappa^2$ von keinem andern Kegelschnitte des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ in zwei Punkten eines Strahles von $(s_1 \ldots)$ geschnitten wird. Der Kegelschnitt $\varkappa^2$ wird von allen Kegelschnitten von $(\lambda_1^2 \ldots)$ ausser in A Gruppen von je drei Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ einhüllen. Zu den Tangenten dieses Kegelschnittes gehört auch s_1, weil die Kegelschnitte $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ die Gerade s_1 in derselben Involution schneiden. Daher kann man von M nur noch eine Tangente s an $\mathfrak{K}$ ziehen, welche also der einzige Strahl durch M ist, auf dem sich $\varkappa^2$ und ein Kegelschnitt λ des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ schneiden. Dadurch ist zwischen den Kegelschnitten von $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ und den Strahlen von $(s_1 \ldots)$ eine projectivische Beziehung hergestellt. Da in dieser aber $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2$, $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ und $s_1 s_2 s_3$ entsprechende Elemente sind, so müssen auch $\varkappa_4^2 \lambda_4^2 s_4$, $\varkappa_5^2 \lambda_5^2 s_5, \ldots$ homologe Elemente der drei Büschel sein. Die Curven C^3 und C_1^3 haben also unendlich viele Punkte gemein und fallen daher zusammen.

Folgerung. Die Curve C^3, welche durch die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und (M) erzeugt ist, wird von jedem Kegelschnitte K^2 in sechs Punkten geschnitten.

Es seien EFG drei beliebige Punkte von K^2, die nicht auf C^3 liegen, und XY zwei beliebige Punkte von C^3. Die fünf Punkte $EFGXY$ bestimmen einen Kegelschnitt Y^2 und wenn Y die Curve C^3 durchläuft, durchläuft Y^2 das Büschel $(EFGX)$. Wenn darauf X die ganze Curve C^3 durchläuft, so erhält man alle Büschel, die im Netze $((EFG))$ vorkommen können und daher auch den Kegelschnitt K^2. Dieser schneidet daher C^3 in zwei Punkten $X_0 Y_0$. Auf dieselbe Art denken wir uns jetzt alle Kegelschnitte des Netzes $((EX_0 Y_0))$ entstanden und folgern, dass K^2 die Curve C^3 noch in zwei weiteren Punkten $Z_0 Z'_0$ schneiden muss. Ein Strahl s_1 durch M schneidet C^3 in $E_1 F_1$ und der durch $E_1 F_1 X_0 Y_0 Z_0$ bestimmte Kegelschnitt trifft die Curve C^3 noch in U, so kann nach dem

Vorigen C^3 erzeugt werden durch die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$. Die Elemente dieser beiden Büschel schneiden K^2 in einer Involution und einer dazu projectivischen Punktreihe und die drei Doppelpunkte beider Reihen sind weitere drei Schnittpunkte von K^2 und C^3.

Ginge K^2 zufällig durch M, so würden die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$ diesen Kegelschnitt in zwei projectivischen Punktreihen treffen, deren Doppelpunkte Schnittpunkte von K^2 und C^3 sind.

3. Eine Tripelcurve wird von jedem Kegelschnitte in sechs Punkten geschnitten.

Sind ABC drei Schnittpunkte der Tripelcurve C^3 und des Kegelschnittes K^2 und $[A]$, $[B]$, $[C]$ die Geradenpaare durch A, B, C, welche zu den Kegelschnitten des Netzes gehören, dessen Tripelcurve C^3 ist, so bilden die Polaren der Punkte von K^2 bezüglich $[A]$, $[B]$, $[C]$ drei projectivische Strahlenbüschel (A), (B), (C), von denen die beiden ersten und beiden letzten je einen Kegelschnitt $[AB]$, $[BC]$ erzeugen. Beide schneiden sich ausser in B noch in drei Punkten, deren conjugirte in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Netzes die Punkte von K^2 sind, welche dieser Kegelschnitt ausser ABC noch mit C^3 gemein hat.

6. Liegen sechs Punkte der Tripelcurve C^3 auf einem Kegelschnitte, so liegen zwei von ihnen mit den conjugirten der vier übrigen auch auf einem Kegelschnitte.

Sind $ABCDEF$ sechs Punkte, in denen C^3 von einem Kegelschnitte getroffen wird, $C'D'E'F'$ die conjugirten der vier letzten, so ist

1) $$A(CDEF) \overline{\wedge} B(CDEF),$$

2) $$\begin{cases} A(CDEF) \overline{\wedge} A(C'D'E'F'), \\ B(BCDE) \overline{\wedge} B(C'D'E'F'), \end{cases}$$

da $A(CC'DD'EE'FF')$ und $B(CC'DD'EE'FF')$ involutorische Büschel sind, also:

3) $$A(C'D'E'F') \overline{\wedge} B(C'D'E'F').$$

7. Jede Tripelcurve kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden.

I. Beweis. In Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter, II. Aufl., S. 507, ist der Satz bewiesen: „Wenn man durch drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve und einen beliebigen Punkt Q derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelcurve im Allgemeinen noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt P der Tripelcurve läuft, welcher der dem Punkte Q conjugirte ist.“ Die Verbindung dieses Satzes mit 2 liefert den Beweis.

Anmerkung. Hieraus folgt auch sofort der Satz in 3.

II. Beweis. Wir nehmen wieder vier beliebige Punkte $ABCD$ der Tripelcurve C^3 und legen durch sie die Kegelschnitte $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots$, welche C^3 noch in EF, E_1F_1, $E_2F_2, \ldots$ schneiden. Es treffe EF die C^3 in M und es sei M' der conjugirte Punkt zu M, dann bilden $M'EF$ ein Tripel. Durch dieses Tripel und AB lege man einen Kegelschnitt λ^2, welcher C^3 noch in einem Punkte T trifft, der mit AB zu einem Tripel gehört. Legt man dann durch $ABTM'$ die Kegelschnitte $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots$, so müssen diese C^3 in solchen Punkten treffen, deren Verbindungslinien durch M gehen (vergl. Steiner); deshalb müssen nach 2) auch EF, E_1F_1, $E_2F_2, \ldots$ durch M gehen.

8. Alle Kegelschnitte, welche dieselben drei Paare von conjugirten Punkten haben, bilden ein Netz.

AA', BB', CC' seien drei Punktpaare; auf ihren Verbindungslinien a, b, c sind durch die Punktpaare drei Involutionen bestimmt, deren Punktpaare $\alpha\alpha'$, $\alpha_1\alpha'_1, \ldots$, $\beta\beta'$, $\beta_1\beta'_1, \ldots$, $\gamma\gamma'$, $\gamma_1\gamma'_1, \ldots$ heissen mögen. Sind DE zwei ganz beliebige Punkte, so ist durch diese ein Kegelschnitt bestimmt, der A und A', B und B', C und C' als conjugirte Punkte hat. Denn von allen Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha\alpha')$ geht nur ein einziger durch ein Punktpaar auf b; dasselbe gilt von den Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha_1\alpha'_1)$. Diese beiden Kegelschnitte seien $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$; sie bestimmen ein Büschel mit den Grundpunkten $DEFG$, dessen Kegelschnitte a und b in den Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha', \ldots$ und $\beta\beta', \ldots$ schneiden. In dem durch $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$ bestimmten Büschel giebt es nur einen Kegelschnitt, welcher c in einem Punktpaare der Involution $\gamma\gamma', \ldots$ schneidet, und dieser ist der einzige Kegelschnitt, welcher durch je ein Punktpaar der Involutionen auf a, b, c und durch D und E geht.

Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt D gehen und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte haben, bilden ein Büschel.

Durch D und E, D und E_1 sind zwei Kegelschnitte λ^2, λ_1^2 bestimmt, welche ein Büschel bestimmen; die Kegelschnitte desselben haben sämmtlich AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte. Ist X ein beliebiger Punkt, so ist der Kegelschnitt, welcher durch D und X geht und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte hat, ein Kegelschnitt des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$, weil er a, b, c in Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha', \ldots$, $\beta\beta', \ldots$ $\gamma\gamma', \ldots$ schneidet und dies dieselben sind, in denen a, b, c von den Kegelschnitten des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$ geschnitten werden.

Durch zwei Punkte D und F sind also zwei Büschel bestimmt; sie haben einen Kegelschnitt gemein.

Und zwar ist dies derjenige Kegelschnitt, welcher durch D und F geht und AA', BB', CC' zu Paaren conjugirter Punkte hat. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte bildet ein Netz. Durch drei von ihnen sind die übrigen bestimmt, und dies ist die Steiner'sche Definition des Kegelschnittnetzes.

9. **Ist eine Curve dritter Ordnung durch die Schnittpunkte homologer Elemente eines Kegelschnittbüschels und eines projectivischen Strahlenbüschels entstanden, so ist sie eine Tripelcurve.**

Es sei $(ABCD)(\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots) \overline{\wedge} M(ss_1s_2\ldots)$. Die von beiden erzeugte Curve sei C^3. Die Tangente in M an C^3 schneide die Curve noch in T, so lässt sich erkennen, dass sich durch T an C^3 noch andere Tangenten ziehen lassen. Bestimmt man nämlich auf allen Strahlen durch T zu ihren beiden Schnittpunkten mit C^3 und T den vierten harmonischen, dem T zugeordneten Punkt, so muss der geometrische Ort dieser Punkte die C^3 in M und noch in anderen Punkten treffen. Einer von ihnen sei M'. Man kann nun nach 2) die C^3 durch dasselbe Strahlenbüschel M und ein anderes Kegelschnittbüschel erzeugen, dessen Grundpunkte man dadurch festlegt, dass man durch ABM' und die Punktpaare EF und E_1F_1, in denen s und $\varkappa^2$, s_1 und $\varkappa_1^2$ sich treffen, zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{K}_1^2$ legt, die sich noch in G schneiden mögen, so dass also $ABGM'$ die vier Grundpunkte sind. Sind E_2F_2, E_3F_3, E_4F_4 die Punkte, in denen s_2, s_3, s_4 von $\varkappa_3^2$, $\varkappa_4^2$, $\varkappa_5^2$ geschnitten werden, so wählen wir drei von ihnen, etwa E_2, E_3, E_4, und legen durch sie eine Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ so, dass sie ABG als ein Tripel, M und M' als conjugirte Punkte hat. — Alle Kegelschnitte $\mu^2\mu_1^2\ldots$, welche ABG als Tripel und MM' als conjugirte Punkte haben, bilden ein Büschel. In Bezug auf dasselbe seien E'_2, E'_3, E'_4 die conjugirten Punkte von E_2, E_3, E_4. Sämmtliche Kegelschnitte $\nu^2\nu_1^2\ldots$, welche $E_2E'_2$, $E_3E'_3$, $E_4E'_4$ als conjugirte Punkte haben, bilden ein Netz, zu dem also auch das Büschel $\mu^2\mu_1^2$ gehört und die Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ desselben geht durch $ABGMM'E_2E'_2E_3E'_3E_4E'_4$ und kann (vergl. Steiner a. a. O.) durch ein Kegelschnittbüschel $(ABGM')$ und ein Strahlenbüschel (M) erzeugt werden. Den Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2\mathfrak{K}_1^2\mathfrak{K}_2^2\mathfrak{K}_3^2\mathfrak{K}_4^2$ dieses Büschels, welche durch $EE_1E_2E_3E_4$ gehen, entsprechen die Strahlen $M(EE_1E_2E_3E_4)$ und diesen wieder die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\varkappa_4^2$ des Büschels $(ABCD)$. Aus 2) folgt, dass der Punkt G auf C^3 liegt und dass C^3 und $\mathfrak{C}^3$ zusammenfallen.

10. **Wenn die homologen Elemente zweier projectivischen Kegelschnittbüschel sich auf einer Geraden schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auf einer Tripelcurve.**

Die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$ und $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$ der projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(A_1B_1C_1D_1)$ schneiden sich resp. in den Punktpaaren EF, E_1F_1, E_2F_2, ... einer Geraden l und ausserdem in GH, G_1H_1, G_2H_2, ... Wir bezeichnen die Geraden GH, G_1H_1, G_2H_2, ... mit g, g_1, g_2, ..., so ergiebt sich zunächst, dass keine zwei derselben sich auf l

schneiden können. Denn würden etwa g_m und g_n sich in O auf l schneiden, so müssten die Polaren von O in Bezug auf $\varkappa^2{}_m$ und $\lambda^2{}_m$ in eine Gerade o_m zusammenfallen und auf dieser lägen die conjugirten Punkte von O bezüglich beider Büschel. Ebenso müssten die Polaren von O nach $\varkappa^2{}_n$ und $\lambda^2{}_n$ mit o_m zusammenfallen, so dass also O ein gemeinschaftlicher Eckpunkt der zu den Büscheln $(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\ldots)$ und $(\lambda^2\lambda_1{}^2\ldots)$ gehörigen Tripel sein müsste, was nicht vorausgesetzt ist. Die Geraden $gg_1\ldots$ mögen l in $JJ_1\ldots$ schneiden, so lässt sich zeigen, dass $(JJ_1\ldots)$ $\overline{\wedge}\,(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\lambda^2\lambda_1{}^2\ldots)$ ist. Denn erstlich entspricht jedem Paare homologer Kegelschnitte $(\varkappa^2\lambda^2)$ ein Punkt J und zweitens diesem Punkte wieder jenes Kegelschnittpaar, weil es nur einen einzigen Strahl durch J geben kann, auf dem sich zwei homologe Kegelschnitte schneiden.

Schnitten sich drei der Strahlen $gg_1g_2\ldots$, etwa gg_1g_2, in einem Punkte M und wäre

$$M(gg_1g_2g'_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\varkappa^2\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2\varkappa_3{}^2\ldots),$$

so müsste auch, wenn $J'_3\ldots$ die Schnittpunkte von $g'_3\ldots$ mit l wären,

$$(JJ_1J_2J_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,(JJ_1J_2J'_3\ldots)$$

sein, d. h. J'_3 mit J_3 zusammenfallen. In drei von den Punkten $J\ldots$, es seien $J_qJ_rJ_s$, schneiden sich die homologen Elemente $\varkappa_q{}^2\lambda_q{}^2g_q$, $\varkappa_r{}^2\lambda_r{}^2g_r$, $\varkappa_s{}^2\lambda_s{}^2g_s$, so dass also J_q mit E_q und G_q, J_r mit E_r und G_r, J_s mit E_s und G_s und daher auch g'_q mit g_q, g'_r mit g_r, g'_s mit g_s zusammenfällt. Daher schneiden sich in M die sechs Strahlen $gg_1g_2g_qg_rg_s$. Hieraus schliessen wir, dass es keinen zweiten Punkt M' geben kann, in welchem sich drei der Strahlen $g\ldots$ schneiden, weil sonst die drei Strahlen $g_qg_rg_s$ sich auch in ihm treffen müssten. Entweder gehen also durch M alle Strahlen $g\ldots$, oder es wird jeder beliebige derselben, ausgenommen $gg_1g_2g_qg_rg_s$, von allen anderen so geschnitten, dass keine zwei Schnittpunkte zusammenfallen, so dass also die übrigen Strahlen $g\ldots$ Tangenten eines Kegelschnittes sind, der sich aber auf einen Punkt reduciren muss, da sich von allen Punkten der Geraden l nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt. Da aber in keinem andern Punkte als M sich drei Gerade $g\ldots$ treffen können, so muss M jener Punkt sein. Wenn also drei der Geraden g sich in einem Punkte treffen, so thun es alle.

Gingen keine drei der Geraden $g\ldots$ durch einen Punkt, müssten sie einen Kegelschnitt einhüllen, der sich aber wieder auf einen Punkt M reducirt, weil von den Punkten von l aus sich nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt.

Es treffen sich also alle Strahlen $g\ldots$ in einem Punkte M und daher ist der Ort der Schnittpunkte $(\varkappa^2\lambda^2),\ldots$ eine Curve dritter Ordnung und nach 9) eine Tripelcurve.

Der Satz, dass eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden kann, ist eigentlich auf einem Umwege bewiesen, indem zuerst gezeigt ist, dass jede Tripelcurve durch zwei solche Büschel auf unzählige Arten hervorgebracht werden kann und jede Curve dritter Ordnung, die durch ein Kegelschnittbüschel und projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, als eine Tripelcurve betrachtet werden kann. Doch kann man jenen Satz auch direct beweisen, indem man die Aufgabe der Curvenerzeugung gewissermassen umkehrt und die Frage stellt: Wenn auf jeder von drei durch einen Punkt A gehenden Geraden $g g_1 g_2$ noch zwei Punkte BC, B_1C_1, B_2C_2 und ausserdem beliebig zwei Punkte DE angenommen werden, welches ist der geometrische Ort der Punkte XY von der Eigenschaft, dass die Punkte BC, B_1C_1, B_2C_2 mit den vier Punkten $DEXY$ je auf einem Kegelschnitte liegen?

Durch $BCDE$ lege man einen beliebigen Kegelschnitt $\varkappa^2$, so wird er von den Kegelschnitten der beiden Büschel (DEB_1C_1) und (DEB_2C_2) in zwei quadratischen Involutionen geschnitten, welche ein Punktpaar XY gemein haben. Die durch dasselbe gehenden Kegelschnitte seien $\varkappa_1^2\varkappa_2^2$ und die Gerade, welche es verbindet, sei k. Dann sind XY Punkte des gesuchten Ortes. Sind $\lambda^2\mu^2\ldots$ andere Kegelschnitte durch $BCDE$, so erhält man auf jedem zwei Punkte X_1Y_1, X_2Y_2, ... des gesuchten Ortes; die Kegelschnitte der Büschel (BCD_1E_1), (BCD_2E_2), welche durch sie hindurchgehen, seien $\lambda_1^2\lambda_2^2$, $\mu_1^2\mu_2^2$, ... und die Geraden, welche sie verbinden, l, m, ... Ordnen wir je drei Kegelschnitte der Büschel $(BCDE)$, (BCD_1E_1), (BCD_2E_2) einander zu, die sich in XY, X_1Y_1, X_2Y_2, ... schneiden, so sind dieselben projectivisch aufeinander bezogen und erzeugen eine Curve.

Die Involutionscentra der quadratischen Involutionen, in denen $\varkappa^2\lambda^2\mu^2\ldots$, also die Kegelschnitte des Büschels $(BCDE)$, von den Kegelschnitten der Büschel (BCD_1E_1) und (BCD_2E_2) geschnitten werden und die wir mit K_1K_2, L_1L_2, M_1M_2, ... bezeichnen wollen, liegen auf den Geraden B_1C_1 und B_2C_2 und bilden auf ihnen zwei projectivische Punktreihen. Diese liegen perspectivisch; denn wählen wir aus dem ersten Büschel das Geradenpaar (DE, BC), so ist das Involutionscentrum auf B_1C_1 wie auf B_2C_2 der Punkt A. Daher laufen die Geraden klm .. durch einen Punkt S und die Punkte XYX_1Y_1 .. liegen auf einer Curve K^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes der Kegelschnittbüschel $(BCDE)$, (B_1C_1DE), (B_2C_2DE) und das projectivische Büschel (S) erzeugt werden kann, wenn jedem der Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2$ der Strahl k, $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2$ der Strahl l, ... zugewiesen wird.

Wenn wir den Kegelschnitten $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2$ des Büschels $(XYDE)$ die Geraden gg_1g_2 der Reihe nach zuordnen, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Strahlen von (A) eine projectivische Beziehung hergestellt. Die homologen Elemente erzeugen also eine Curve C^3 dritter Ordnung. Wir erhalten eine andere Curve C_1^3 dritter Ordnung, wenn wir das Büschel $(X_1 Y_1 D E)$ wählen und den Kegelschnitten $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ die Geraden $g g_1 g_2$ zuordnen. Weiter können wir die Kegelschnitte der Büschel $(X Y D E)$ und $(X_1 Y_1 D E)$ projectivisch dadurch aufeinander beziehen, wenn wir der Reihe nach den Kegelschnitten $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ des ersten Büschels die Kegelschnitte $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ des zweiten zuordnen. Bei dieser Zuordnung entspricht dem Geradenpaare (DE, XY) das Geradenpaar $(DE, X_1 Y_1)$. (Vgl. 1, Anm.) Daraus folgt wieder, wie vorher und wie in 1 gezeigt ist, dass die beiden Büschel $(DEXY)$ und $(DEX_1 Y_1)$ eine Curve dritter Ordnung erzeugen, welche auch durch jedes dieser Büschel und das projectivische Strahlenbüschel (A) erzeugt werden kann. Es müssen also die Curven C^3 und C_1^3 zusammenfallen. Wählen wir andere Kegelschnittbüschel $(DEX_2 Y_2)$, ..., so folgt, dass wir die Curve C^3 durch diese und das projectivische Büschel (A) erzeugen können, wodurch zunächst wieder der Satz 2 bewiesen ist, dass eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt ist, auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel und andere Kegelschnittbüschel hervorgebracht werden kann.

Da also alle Punkte $X Y X_1 Y_1 \ldots$ sowohl auf C^3, wie auf K^3 liegen, so fallen beide Curven zusammen und C^3 kann durch ein Strahlenbüschel (S) und jedes der projectivischen Kegelschnittbüschel $(DEBC)$, $(DEB_1 C_1)$, $(DEB_2 C_2)$, also auf unzählige Art durch das Büschel (S) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Es bleibt noch nachzuweisen, dass S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. — Wir halten D fest und lassen E auf C^3 sich ändern in $E'E'' \ldots$; es entstand S durch den Durchschnitt von XY mit C^3, XY aber waren die Schnittpunkte von $\varkappa^2$ mit C^3. Wenn wir nun Kegelschnitte durch $BCDE'X$, $BCDE''X$, ... legen, so schneiden sie C^3 in immer neuen Punkten $Y'Y'' \ldots$ und die Geraden XY', XY'', ... treffen C^3 in $S'S'' \ldots$. Lässt man E die Curve C^3 durchlaufen, so durchlaufen auch Y und S dieselbe, so dass also S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. Damit aber ist ganz allgemein bewiesen:

> Ist eine Curve C^3 durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt, so kann sie auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden.

Aus diesem Satze und dem Satze 9 lassen sich viele der wichtigsten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung, namentlich auch ihre Polareigenschaften rein synthetisch ableiten.

II. Polareigenschaften.

11. Zieht man durch einen Punkt A einer Tripelcurve C^3 Gerade $g g_1 \ldots$, welche C^3 noch in BC, $B_1 C_1, \ldots$ treffen, so liegen alle Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \ldots$, welche A von jenen Punkten harmonisch trennen, auf einem Kegelschnitte A^2, der C^3 in A berührt und die erste Polare von A nach C^3 heisst.

Man denke sich C^3 durch ein Strahlenbüschel (A) und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt, so werden die Polaren von A nach den Kegelschnitten des Büschels ein zu (A) projectivisches Strahlenbüschel (A') bilden und beide Büschel erzeugen den Kegelschnitt A^2.

12. Sind A und B zwei Punkte von C^3, A^2 und B^2 ihre ersten Polaren, so fällt die Polare von A nach B^2 mit der von B nach A^2 zusammen.

Die Gerade AB treffe C^3 noch in C; die Polaren A^2 und B^2 treffen AB in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Durch einen Punkt C_1 von C^3 ziehen wir die Geraden AC_1 und BC_1, welche C^3 noch in B_1 und A_1 treffen; die ersten Polaren $A_1{}^2$ und $B_1{}^2$ von A_1 und C_1 treffen die Geraden BA_1 und AB_1 in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, dann sind $A\mathfrak{A}BC$, $A\mathfrak{A}_1 B_1 C_1$, $B\mathfrak{B}AC$, $B\mathfrak{B}_1 A_1 C_1$ je vier harmonische Punkte, also treffen sich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, BB_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, AA_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{B}'$, so dass also $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in einer Geraden liegen. Wenn A_1 mit A und B_1 mit B, also $A_1{}^2$ mit A^2, $B_1{}^2$ mit B^2 zusammenfällt, so geht die Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in die gemeinsame Polare von A nach B^2 und B nach A^2 über.

13. Die drei ersten Polaren $A^2 B^2 C^2$ von drei auf einer Geraden g liegenden Punkten ABC der Curve C^3 schneiden sich in denselben vier Punkten. Ordnet man den Kegelschnitten $A^2 B^2 C^2$ die Punkte ABC zu, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Punkten von g eine projectivische Beziehung hergestellt der Art, dass, wenn P und Q zwei Punkte von g, P^2 und Q^2 ihre ersten Polaren sind, die Polare von P nach Q^2 mit der von Q nach P^2 zusammenfällt.

Ist D ein Schnittpunkt von A^2 und B^2, so verbinde man ihn mit ABC. Die Verbindungslinien treffen C^3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes, in Bezug auf welchen D und g Pol und Polare sind, also muss C^2 auch durch D und somit durch jeden Schnittpunkt von A^2 und B^2 gehen. — Die Polaren von A nach $A^2 B^2 C^2 P^2$ seien $abcp$, die von $ABCP$ nach A^2 seien $ab'c'p'$, so ist $(abcp) \barwedge (ab'c'p')$ und da wegen 12 b und b', c und c' zusammenfallen, müssen auch p und p', d. h. die Polaren von A nach P^2 und von P nach A^2 zusammenfallen. — Es seien weiter die

Polaren von P nach $A^2 B^2 C^2 P^2 Q^2$ mit $a_1 b_1 c_1 p_1 q_1$ und die von $ABCPQ$ nach P^2 mit $a'_1 b'_1 c'_1 p_1 q'_1$ bezeichnet, so ist

$$(a_1 b_1 c_1 p_1 q_1) \,\overline{\wedge}\, (a'_1 b'_1 c'_1 p_1 q'_1)$$

und da a_1 mit a'_1, b_1 mit b'_1, c_1 mit c'_1 zusammenfällt, so muss auch die Polare q_1 von P nach Q^2 mit der Polare q'_1 von Q nach P^2 zusammenfallen.

14. Zieht man durch einen Punkt P beliebige Geraden $g g_1 \ldots$, welche C^3 in ABC, $A_1 B_1 C_1$, ... treffen, so bestimmen ihre ersten Polaren $A^2 B^2 C^2$, $A_1^2 B_1^2 C_1^2$, ... Büschel. In jedem von ihnen entspricht dem Punkte P derselbe Kegelschnitt P^2, vorausgesetzt, dass die projectivische Beziehung dadurch hergestellt wird, dass den Punkten ABC, $A_1 B_1 C_1$, ... ihre ersten Polaren zugeordnet werden. P^2 heisst die erste oder conische Polare von P.

Ist X ein beliebiger Punkt von C^3, X^2 seine erste Polare, sind $P^2 P_1^2 \ldots$ die dem Punkte entsprechenden Curven, sind $abcp$ die Polaren von X nach $A^2 B^2 C^2 P^2$, $abcp'$ die von $ABCP$ nach X^2, so ist $(abcp) \,\overline{\wedge}\, (abcp')$, also fällt p mit p' zusammen. Ebenso folgt, dass, wenn p_1 die Polare von X nach P_1^2 ist, diese mit p' zusammenfallen muss. Da also die Polaren P^2 und P_1^2 die Eigenschaft haben, dass die Polaren aller Punkte X von C^3 nach ihnen in eine Gerade zusammenfallen, so fallen P^2 und P_1^2 selbst zusammen.

Jeder Geraden g ist ein Kegelschnittbüschel zugeordnet, dessen Grundpunkte die vier Pole von g heissen. Dann können wir dem eben bewiesenen Satze den Ausdruck geben:

15. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt P, so durchlaufen ihre Pole die erste Polare P^2 von P.

Die Gerade g heisst die zweite oder gerade Polare jedes ihrer vier Pole.

16. Folgerungen:

a) Liegt ein Punkt auf der ersten Polare eines andern, so liegt der zweite auf der geraden Polare des ersten und umgekehrt.

b) Berührt eine Gerade die Tripelcurve C^3, so fallen zwei ihrer Pole mit dem Berührungspunkte zusammen.

c) Die gerade Polare eines Punktes von C^3 berührt C^3 in diesem Punkte.

d) Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel.

e) Die ersten Polaren aller Punkte bilden ein Netz.

17. Die Polaren aller Punkte P ... einer Geraden g nach ihren ersten Polaren P^2 ... werden von einem

Kegelschnitte G^2 umhüllt, welcher die zweite Polare von g nach C^3 genannt wird und mit dem geometrischen Orte der Pole von g bezüglich aller P^2 oder mit dem Orte der den Punkten $P\ldots$ von g bezüglich des Büschels $(P^2\ldots)$ conjugirten Punkte zusammenfällt. Der Pol von g nach P^2 fällt dabei mit dem zu P conjugirten Punkte zusammen.

Ist Q ein ganz beliebiger Punkt, so bilden seine Polaren bezüglich aller $P^2\ldots$ ein zur Punktreihe $P\ldots$ projectivisches Strahlenbüschel, von dessen Strahlen zwei durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen. Diese seien P_1 und P_2, ihre ersten Polaren P_1^2 und P_2^2, so treffen sich die Polaren von P_1 nach P_1^2 und von P_2 nach P_2^2 in Q und es giebt auf g keinen andern Punkt, dessen Polare nach seiner ersten Polare durch Q geht. Daher werden alle diese Polaren von einem Kegelschnitte G^2 eingehüllt. — Es seien $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\ldots$ die Pole von g nach $P^2 P_1^2\ldots$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1\ldots$ die conjugirten Punkte zu $PP_1\ldots$. Die Polare p_1 von P nach P_1^2 muss durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_1 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_1$ gehen; die Polare von P_2 nach P_2^2 muss durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_2 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_2$ gehen u. s. f. Da also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sowohl auf p_1, als auf p_2, p_3, ... liegen, so müssen sie in einen Punkt zusammenfallen. — Die Polaren von $\mathfrak{P}$ bezüglich aller $P^2\ldots$ schneiden sich in dem zu $\mathfrak{P}$ conjugirten Punkte P und die Polare von P nach P^2 ist die einzige eines Punktes von g nach seiner ersten Polare, welche durch $\mathfrak{P}$ geht, also liegt $\mathfrak{P}$ auf G^2.

18. Liegt ein Punkt P_1 auf der Polare eines andern P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2, so liegt der letzte auf der conischen Polare P_1^2 des ersten.

Wenn P_1 auf der Polare von P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2 liegt, so muss P_2 auf der Polare von P_1 nach P_2^2 oder auf der Polare von P_2 nach P_1^2, welches nach 13 dieselbe Gerade ist, liegen, d. h. es muss der Berührungspunkt dieser Geraden mit P_1^2 sein oder auf P_1^2 liegen.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

18*a*. Die gerade Polare eines Punktes P nach C^3 fällt mit seiner Polare nach seiner conischen Polare P^2 zusammen,

den man auch auf folgende Art beweisen kann:

Alle conischen Polaren, welche durch einen Punkt P gehen, bilden ein Büschel. In ihm kommen drei Geradenpaare vor (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, deren Pole Q, Q', Q'' sein mögen. Die geraden Polaren aller Punkte von l und l_1 müssen sich in Q, von l' und l'_1 in Q', von l'' und l''_1 in Q'' schneiden, also ist die gerade Polare von P die Gerade $QQ'Q''$, denn sie muss durch jeden dieser drei Punkte gehen. Wenn l durch P geht und C^3 in ABC schneidet, so fallen die geraden Polaren von ABC mit den Tangenten in diesen Punkten an C^3 oder mit den Polaren von ABC bezüglich der conischen Polaren $A^2B^2C^2$ dieser Punkte zusammen. Es umhüllen die Polaren der Punkte von l bezüglich der conischen Polaren dieser Punkte einen Kegelschnitt, der sich auf den Punkt Q reduciren muss, weil die Polaren von ABC bezüglich $A^2B^2C^2$ durch Q gehen, also muss die Polare von P bezüglich der conischen Polare P^2 von P durch Q gehen. Auf ganz dieselbe Weise zeigt man, dass diese Polare auch durch Q' und Q'' gehen muss und also mit $QQ'Q''$ zusammenfällt.

Ueber die Lage der Scheitel der drei Geradenpaare eines Büschels conischer Polaren und ihrer Pole, sowie über die gegenseitige Bedeutung dieser sechs Punkte geben uns die Sätze 14, 17 und 18 Aufschluss. Die Scheitel der drei Geradenpaare (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, welche in einem Büschel conischer Polaren vorkommen, seien $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$; ihre Pole Q, Q', Q''. Es muss die Polare von Q bezüglich $(l'l'_1)$ mit der von Q' bezüglich (ll_1) zusammenfallen und da erstere durch $\mathfrak{Q}'$, letztere durch $\mathfrak{Q}$ gehen muss, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ die gemischte gerade Polare von Q und Q'. Daher muss $\mathfrak{Q}'Q$ von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}$ durch $l'l'_1$ und $\mathfrak{Q}Q'$ von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ durch ll_1 harmonisch getrennt sein, folglich ist Q der Schnittpunkt von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, und Q' der von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}''$ mit der Geraden g, auf welcher $QQ'Q''$ liegen. Ebenso zeigt man, dass Q'' auf $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ liegt, und so folgt:

19. Die Pole derjenigen conischen Polaren eines Büschels, welche Geradenpaare sind, bilden mit den Scheiteln der letzteren die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ sei $\mathfrak{Q}^2$. Da die gerade Polare von Q auch die Polare von Q bezüglich Q^2 oder (ll_1) ist, so muss sie durch $\mathfrak{Q}$ gehen und daher muss Q sowohl auf der geraden, wie auf der conischen Polare von $\mathfrak{Q}$ liegen. — Ferner ist die Polare von $\mathfrak{Q}$ bezüglich aller conischen Polaren P^2.. der Punkte P... der Geraden g oder $QQ'Q''$ die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ und daher müssen die Polaren aller Punkte P... von g bezüglich $\mathfrak{Q}^2$ auch in die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ fallen, welche durch Q geht. Dies aber ist nicht anders möglich, als wenn $\mathfrak{Q}^2$ in zwei Gerade zerfällt, deren Scheitel in Q liegt, so dass dadurch der Satz gewonnen ist:

20. Ist die conische Polare eines Punktes Q ein Geradenpaar mit dem Scheitel $\mathfrak{Q}$, so ist die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ auch ein Geradenpaar mit dem Scheitel Q.

Auf jeder Geraden g giebt es drei Punkte, deren conische Polaren Geradenpaare sind, also liegen sie sämmtlich auf einer Curve dritter Ordnung und wir folgern mit Hilfe des letzten Satzes:

21. **Die Pole derjenigen conischen Polaren, welche Geradenpaare sind, sowie die Scheitel der letzteren liegen auf einer Curve dritter Ordnung K^3, welche die Hesse'sche Curve von C^3 genannt wird.**

Sind $ABCDEFGHJ$ die neun Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven $C^3 C_1^3 \ldots$, so können wir jede erzeugt denken durch das Kegelschnittbüschel $(ABCD)$ und Strahlenbüschel (S), (S_1), ..., deren Scheitel auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen, welcher durch die fünf Punkte $EFGHJ$ geht. Da die Büschel (S), (S_1), ... in projectivischer Beziehung stehen, so schneiden sie $\mathfrak{K}$ in projectivischen Punktreihen, die aber sämmtlich zusammenfallen müssen, weil die fünf homologen Punkte $EFGHJ$ zusammenfallen. Diese Punktreihe auf $\mathfrak{K}$ sei $TT'T'' \ldots$. Durch A ziehen wir eine Gerade g, welche die Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ in einer zu diesem und daher auch zu $TT'T'' \ldots$ projectivischen Punktreihe $MM'M'' \ldots$ schneidet. Die Büschel (S), (S_1), ... schneiden g in den zu den vorigen projectivischen Punktreihen $NN'N'' \ldots$, $N_1 N'_1 N''_1 \ldots$, ... Jede von diesen hat zwei Punkte, die mit ihren homologen in der Reihe $MM'M'' \ldots$ zusammenfallen, und diese Punkte sind die Schnittpunkte von g mit $C^3 C_1^3 \ldots$. Um sie zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt Q, dann ist das Büschel $Q(MM'M'' \ldots) \overline{\wedge} (S) \overline{\wedge} (S_1) \overline{\wedge} \ldots$ Das Büschel Q erzeugt mit jedem der anderen einen Kegelschnitt $[QS]$, $[QS_1]$, ... Alle diese Kegelschnitte gehen durch Q. Die Strahlen des Büschels $Q(MM'M'' \ldots)$ schneiden $\mathfrak{K}$ in einer zur Reihe $TT'T'' \ldots$ projectivischen Involution, von deren Punkten drei mit den homologen der Reihe $(TT'T'' \ldots)$ zusammenfallen. Nennen wir diese drei Punkte $Q'Q''Q''' \ldots$, so bilden alle Kegelschnitte $[QS]$, $[QS_1]$, ... ein Büschel mit den vier Grundpunkten $QQ'Q''Q'''$ und schneiden also g in einer Involution. Da aber die Schnittpunkte von g und $[QS]$ mit denen von g und C^3 zusammenfallen, so folgt:

22. **Jede Gerade durch einen der Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven wird von diesen Curven in einer quadratischen Involution geschnitten.**

Die Transversale g schneide die Curven $C^3 C_1^3 \ldots$ in den Punktpaaren $B'C'$, $B'_1 C'_1$, ... Man lege durch diese Punkte die Kegelschnitte $K^2 K_1^2 \ldots$ eines Büschels und durch A eine beliebige Gerade l, so sind (K^2, l), (K_1^2, l), ... Curven dritter Ordnung. Ist P ein beliebiger Punkt von l, so lässt sich zeigen, dass die conischen Polaren desselben bezüglich (K^2, l), ... ein Kegelschnittbüschel bilden. Da (K^2, l) eine Tripelcurve ist, so gelten von ihr die oben abgeleiteten Sätze über Polaren der Tripelcurven. Unter den Kegelschnitten des Büschels $(K^2 K_1^2 \ldots)$ giebt es drei Geradenpaare (xx_1), (yy_1), (zz_1), deren Scheitel XYZ sein mögen. Sind $\xi^2 \xi_1^2 \ldots$, $\eta^2 \eta_1^2 \ldots$, $\zeta^2 \zeta_1^2 \ldots$ die conischen Polaren von XYZ bezüglich (K^2, l), (K_1^2, l), ..., so schneiden alle $\xi^2 \ldots$ die Geraden

xx_1, alle $\eta^2 \dots$ die Geraden yy_1, alle $\zeta^2 \dots$ die Geraden zz_1 in denselben vier Punkten und bilden daher drei Büschel. Die conischen Polaren von P bezüglich (K^2, l), ... seien $\pi^2 \dots$. Es treffen sich die Polaren von P bezüglich $\xi^2 \dots$, $\eta^2 \dots$, $\zeta^2 \dots$ in drei Punkten X', Y', Z', welche dem Punkte P bezüglich jener Kegelschnittbüschel conjugirt sind, und weil die Polare von P bezüglich ξ^2 mit der von X bezüglich π^2 zusammenfällt, so sind XX', YY', ZZ' conjugirte Punktpaare bezüglich aller $\pi^2 \dots$. Zwei von den Kegelschnitten $K^2 \dots$ berühren l in MM', dann sind die conischen Polaren $\mu^2 \dots$ von M Geradenpaare mit dem gemeinsamen Scheitel M'. Weil nun die Polaren von P bezüglich aller $\mu^2 \dots$ sich in M' schneiden, so müssen auch die Polaren von M bezüglich aller $\pi^2 \dots$ sich in M' schneiden, d. h. M und M' sind auch conjugirte Punkte in Bezug auf alle $\pi^2 \dots$. Letztere haben also vier Paare conjugirter Punkte und bilden daher ein Kegelschnittbüschel. Sind $P^2 P_1^2 \dots$ die conischen Polaren von P in Bezug auf $C^3 C_1^3 \dots$, so müssen P^2 und π^2, P_1^2 und π_1^2, ... sich in denselben Punkten auf l schneiden, also schneiden alle $P^2 \dots$ die Gerade l in den Punktpaaren einer Involution. Zieht man von P aus durch die übrigen acht Grundpunkte $BCDEFGHJ$ Gerade, so folgt ebenso, dass jede dieser acht Geraden von den Kegelschnitten $P^2 \dots$ in einer Involution geschnitten wird. Also treffen sich alle $P^2 \dots$ in denselben vier Punkten. Es folgt:

23. Die conischen Polaren $P^2 P_1^2 \dots$ eines Punktes P in Bezug auf die Tripelcurven eines Büschels bilden selbst ein Büschel.

Hiermit wären einige Hauptsätze über die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetischem Wege abgeleitet.