Werk

Titel: Zeitschrift für Mathematik und Physik

Verlag: Teubner

Jahr: 1876

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH I, 755:21

Werk Id: PPN599415665_0021

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599415665_0021|LOG_0045

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Bedeutet $f(x)$ eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe und $D_x^{\mu}.\{f(x)\}$ eine Reihe, die sich aus der ersten dadurch ergiebt, dass jedes Glied von der Form $A_h x^h$ mit dem Factor

$$\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1-\mu)}\, x^{-\mu}$$

multiplicirt wird, so hat man bekanntlich folgende Transformation:

$$D_x^{\mu}.\{f(x)\} = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \cdot \int_0^1 f(xt)(1-t)^{-\mu-1}\, dt,$$

die ohne Schwierigkeit durch Benutzung der Formel

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

hergeleitet werden kann. Für $f(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}$ und $\mu = -\beta-1$ folgt hieraus

$$\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1-xt)^{\gamma}\, dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\alpha+\beta+1}}\, D_x^{-\beta-1}.\{x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\}.$$

Um daraus die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung K und E zu bilden, hat man einmal

$$\alpha = -\tfrac{1}{2},\quad \beta = -\tfrac{1}{2},\quad \gamma = -\tfrac{1}{2},\quad x = k^2,$$

das andere Mal

$$\alpha = -\tfrac{1}{2},\quad \beta = -\tfrac{1}{2},\quad \gamma = +\tfrac{1}{2},\quad x = k^2$$

zu setzen. Alsdann ergeben sich die interessanten Formeln

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, D_{k^2}^{-1/2}.\left\{\frac{1}{kk'}\right\},$$

$$E = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, D_{k^2}^{-1/2}.\left\{\frac{k'}{k}\right\}.$$

Entwickelt man die Ausdrücke $\frac{1}{kk'}$, resp. $\frac{k'}{k}$ nach steigenden Potenzen von k^2, also

$$\frac{1}{kk'} = (k^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(k^2)^{+\frac{1}{2}} + \frac{1.3}{2.4}(k^2)^{+\frac{3}{2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}(k^2)^{+\frac{5}{2}} + \ldots,$$

$$\frac{k'}{k} = (k^2)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(k^2)^{+\frac{1}{2}} - \frac{1.3}{2.4}\frac{(k^2)^{+\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(k^2)^{+\frac{5}{2}}}{5} - \ldots,$$

führt dann die durch das Zeichen D angedeutete Rechnungsoperation aus und multiplicirt mit $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so findet man die bekannten Reihenentwickelungen für K und E.

Bromberg. A. Radicke.

XXIII. Eine analytische Auflösung der Aufgabe des Apollonius.

I. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2), (a_3, b_3, r_3), (u, v, h) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so verlangt die Aufgabe die Auflösung der drei nothwendigen und hinreichenden Gleichungen

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} (r_1+h)^2-(u-a_1)^2-(v-b_1)^2=0, \\ (r_2+h)^2-(u-a_2)^2-(v-b_2)^2=0, \\ (r_3+h)^2-(u-a_3)^2-(v-b_3)^2=0 \end{array}\right.$$

nach den Unbekannten u, v, h.

Durch Entwickelung der Quadrate und Einführung der vierten Unbekannten $t=h^2-u^2-v^2$ verwandelt sich dieses Gleichungssystem in das gleichgeltende, aber einfachere

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} t+2a_1u+2b_1v+2r_1h+r_1^2-a_1^2-b_1^2=0, \\ t+2a_2u+2b_2v+2r_2h+r_2^2-a_2^2-b_2^2=0, \\ t+2a_3u+2b_3v+2r_3h+r_3^2-a_3^2-b_3^2=0, \\ t=u^2+v^2-h^2=0. \end{array}\right.$$

Um dasselbe aufzulösen, sind mit Hilfe der drei ersten Gleichungen t, u, v durch h auszudrücken, was immer möglich ist, wofern nur der Ausdruck

$$a_2b_3-a_3b_2+a_3b_1-a_1b_3+a_1b_2-a_2b_1$$

von Null verschieden ist, d. h. wofern nur die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise nicht in einer Geraden liegen, und die gefundenen Werthe in die vierte Gleichung einzusetzen, welche alsdann die Unbekannte h bestimmt.

Am Einfachsten ist folgendes Verfahren:

Man bestimme aus den auflösbaren linearen Gleichungen

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1A+b_1B+C+r_1=0, \\ a_2A+b_2B+C+r_2=0, \\ a_3A+b_3B+C+r_3=0 \end{array}\right.$$

die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend, in 2), um h zu beseitigen,

$$4)\qquad u=\xi+Ah,\quad v=\eta+Bh,\quad t=\zeta+2Ch.$$

Das Resultat wird den Gleichungen 3) zufolge

$$5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \zeta+2a_1\xi+2b_1\eta+r_1^2-a_1^2-b_1^2=0,\\ \zeta+2a_2\xi+2b_2\eta+r_2^2-a_2^2-b_2^2=0,\\ \zeta+2a_3\xi+2b_3\eta+r_3^2-a_3^2-b_3^2=0,\\ h^2(1-A^2-B^2)-2(A\xi+B\eta+C)h-\zeta-\xi^2-\eta^2=0. \end{array}\right.$$

Die drei ersten dieser Gleichungen, welche in Bezug auf ξ, η, ζ linear sind, geben unmittelbar die Werthe dieser Unbekannten und führen, in der Form

$$\begin{aligned} (\xi-a_1)^2+(\eta-b_1)^2-r_1^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta,\\ (\xi-a_2)^2+(\eta-b_2)^2-r_2^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta,\\ (\xi-a_3)^2-(\eta-b_3)^2-r_3^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta \end{aligned}$$

geschrieben, zu dem Schlusse, dass, wenn mit a, b, r die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und der Halbmesser des Kreises bezeichnet werden, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet,

$$6)\qquad \xi=a+Ah,\quad \eta=b+Bh,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta=r^2$$

zu setzen ist. Nach 4), 6), 2) wird dann

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{c} u=a+Ah,\\ v=b+Bh,\\ u^2+v^2-h^2=a^2+b^2-r^2-2Ch \end{array}\right.$$

und, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2-r^2&=\mathfrak{K},\\ Ax\ +\ By\ +C&=\mathfrak{A} \end{aligned}$$

gesetzt wird, identisch

$$(x-u)^2+(y-v)^2-h^2=\mathfrak{K}-2h\mathfrak{A}.$$

Zur Bestimmung von h dient die vierte Gleichung in 5), nämlich

$$(1-A^2-B^2)h^2-2(Aa+Bb+C)h-r^2=0,$$

deren Wurzeln h', h'' seien.

Es entsprechen demnach den Bedingungen der Aufgabe zwei Kreise, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}-2h'\mathfrak{A}&=0,\\ \mathfrak{K}-2h''\mathfrak{A}&=0 \end{aligned}$$

sind und besagen, dass die gesuchten Kreise beide zu derjenigen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K}=0$$

und die Gerade

$$\mathfrak{A}=0$$

bestimmt ist. Diese Gerade ist, da den Gleichungen 3) zufolge die von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise auf dieselbe gefällten Lothe den Halbmessern r_1, r_2, r_3 proportional sind, diejenige, auf welcher die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ liegen. Dies folgt auch einfach daraus, dass der Ausdruck $\mathfrak{A}$ verschwindet, wenn man die Coordinaten

$$\frac{r_2 a_3 - r_3 a_2}{r_2 - r_3}, \quad \frac{r_2 b_3 - r_3 b_2}{r_2 - r_3} \text{ u. s. w.}$$

der äusseren Aehnlichkeitspunkte einsetzt und die Gleichungen 3) berücksichtigt.

Um also die gesuchten Kreise zu finden, reicht es hin, zwei Kreise zu zeichnen, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehören und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berühren. Zu diesem Ende hat man die Polare des Durchschnittspunktes der Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ mit der gemeinschaftlichen Sehne von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welcher der Punkt gleicher Potenzen der Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ und der gesuchten Kreise ist, in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen und die Punkte, in welchen diese Polare den Kreis $\mathfrak{K}_1$ schneidet, mit dem Mittelpunkte desselben durch gerade Linien zu verbinden. Diese Geraden treffen das vom Punkte gleicher Potenzen (a, b) auf $\mathfrak{A}$ gefällte Loth in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Gergonne'sche Construction ergiebt sich unmittelbar, wenn man erwägt, dass die erwähnte Polare den Pol von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}_1$ und den Punkt gleicher Potenzen (a, b) der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ enthalten muss.

Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass jeder zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehörende Kreis die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Nimmt man statt der äussern Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ der Reihe nach die drei inneren, welche die inneren Aehnlichkeitspunkte je zweier Kreispaare und den äussern des dritten Paares enthalten, was der Behaftung eines der Halbmesser r_1, r_2, r_3 in den Gleichungen 1), 2), 3) mit dem negativen Vorzeichen entspricht, so erhält man durch die nämliche Construction die sechs Kreise, welche $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ ungleichartig berühren.

II. Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$ ist, sind drei Kreise gegeben; es soll ein Kreis gefunden werden, welcher diese Kreise gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (u, v, w, h) die rechtwinkligen, auf den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt bezogenen Coordinaten der Mittelpunkte und die sphärischen Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 u + b_1 v + c_1 w = \cos(h + r_1), \\ a_2 u + b_2 v + c_2 w = \cos(h + r_2), \\ a_3 u + b_3 v + c_3 w = \cos(h + r_3), \end{array} \right.$$

welche mit Hilfe der Gleichung

9
$$u^2+v^2+w^2=1$$
die Unbekannten u, v, w, h bestimmen.

Man suche aus den Gleichungen

$$10)\quad \begin{cases} a_1 A+b_1 B+c_1 C+\sin r_1=0, \\ a_2 A+b_2 B+c_2 C+\sin r_2=0, \\ a_3 A+b_3 B+c_3 C+\sin r_3=0, \end{cases}$$

welche immer und nur auf eine Art auflösbar sind, wofern die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht auf einem grössten Kreise liegen, die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend,

$$11)\quad u=\xi+A\sin h,\quad v=\eta+B\sin h,\quad w=\zeta+C\sin h.$$

Es verwandeln sich alsdann die Gleichungen 8) in

$$12)\quad \begin{cases} a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta=\cos r_1\cos h, \\ a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta=\cos r_2\cos h, \\ a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta=\cos r_3\cos h. \end{cases}$$

Bezeichnen ferner (a, b, c, r) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und den sphärischen Halbmesser des Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet, so hat man

$$13)\quad \begin{cases} a_1 a+b_1 b+c_1 c=\cos r_1\cos r, \\ a_2 a+b_2 b+c_2 c=\cos r_2\cos r, \\ a_3 a+b_3 b+c_3 c=\cos r_3\cos r. \end{cases}$$

Aus 12) und 13) folgt

$$a_1(\xi\cos r-a\cos h)+b_1(\eta\cos r-b\cos h)+c_1(\zeta\cos r-c\cos h)=0,$$
$$a_2(\xi\cos r-a\cos h)+b_2(\eta\cos r-b\cos h)+c_2(\zeta\cos r-c\cos h)=0,$$
$$a_3(\xi\cos r-a\cos h)+b_3(\eta\cos r-b\cos h)+c_3(\zeta\cos r-c\cos h)=0$$

und hieraus

$$\xi\cos r-a\cos h=\eta\cos r-b\cos h=\zeta\cos r-c\cos h=0,$$
$$\xi=\frac{\cos h}{\cos r}a,\quad \eta=\frac{\cos h}{\cos r}b,\quad \zeta=\frac{\cos h}{\cos r}c.$$

Die Unbekannten u, v, w haben demnach nach 11) folgende Werthe:

$$u=\frac{\cos h}{\cos r}a+A\sin h,$$
$$v=\frac{\cos h}{\cos r}b+B\sin h,$$
$$w=\frac{\cos h}{\cos r}c+C\sin h$$

und es ist identisch

$$14)\quad ux+vy+wz-\cos h=\frac{\cos h}{\cos r}(ax+by+cz-\cos r)$$
$$+\sin h\,(Ax+By+Cz).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von h ergiebt sich durch Einsetzung der Werthe von u, v, w in 9) und lautet

$$(1-A^2-B^2-C^2)\sin^2 h - 2\left(\frac{Aa+Bb+Cc}{\cos r}\right)\sin h \cos h - tg^2 r \cos^2 h = 0.$$

Die Identität 14) zeigt, dass die zwei den Bedingungen der Aufgabe genügenden Kreise zu derjenigen sphärischen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K} = ax + by + cz - \cos r = 0$$

und den grössten Kreis

$$\mathfrak{A} = Ax + By + Cz = 0$$

bestimmt wird. Dieser letztere ist derjenige, auf welchem den Gleichungen 10) zufolge die Punkte, deren Coordinaten den Ausdrücken

$$\begin{array}{lll} a_2 \sin r_3 - a_3 \sin r_2, & b_2 \sin r_3 - b_3 \sin r_2, & c_2 \sin r_3 - c_3 \sin r_2, \\ a_3 \sin r_1 - a_1 \sin r_3, & b_3 \sin r_1 - b_1 \sin r_3, & c_2 \sin r_1 - c_1 \sin r_3, \\ a_1 \sin r_2 - a_2 \sin r_1, & b_1 \sin r_2 - b_2 \sin r_1, & c_1 \sin r_2 - c_2 \sin r_1 \end{array}$$

proportional sind, d. h. die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der gegebenen Kreise liegen.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, einen Kreis zu construiren, welcher zur Schaar ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}$) gehört und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Zu diesem Ende hat man durch die Durchschnittspunkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ einen grössten Kreis zu legen und von dem Durchschnittspunkte desselben mit dem Kreise $\mathfrak{A}$ die sphärischen Tangenten an $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen. Verbindet man hierauf die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ durch Bogen grösster Kreise, so treffen diese letzteren das vom Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ auf den Kreis $\mathfrak{A}$ gefällte sphärische Loth in den sphärischen Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Kreise, welche die drei gegebenen ungleichartig berühren, erhält man ähnlich wie unter 1.

III. Die Aufgabe, eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln, deren Mittelpunkte nicht in einer Ebene liegen, gleichartig berührt, kann in ähnlicher Weise gelöst werden.

Es sei

$$K = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 - h^2 = 0$$

die Gleichung der gesuchten,

$$\mathfrak{K} = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung derjenigen Kugel, welche alle vier gegebenen Kugeln unter rechten Winkeln schneidet. Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (a_4, b_4, c_4, r_4) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der gegebenen Kugeln, so bestehen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Aufgabe darin, dass der Ausdruck K für

$$x = a_1, \quad y = b_1, \quad z = c_1,$$
$$x = a_2, \quad y = b_2, \quad z = c_2,$$

$$x=a_3,\quad y=b_3,\quad z=c_3,$$
$$x=a_4,\quad y=b_4,\quad z=c_4$$

bezüglich die Werthe $2hr_1+r_1^2$, $2hr_2+r_2^2$, $2hr_3+r_3^2$, $2hr_4+r_4^2$ annehmen muss. Da nun $\mathfrak{K}$ für die nämlichen Werthe von x, y, z die Werthe r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2 annimmt, so muss der lineare Ausdruck $K-\mathfrak{K}$ für die genannten Werthe bezüglich $=2hr_1$, $2hr_2$, $2hr_3$, $2hr_4$ werden. Hierdurch ist derselbe aber vollkommen bestimmt. Denn setzt man

$$K-\mathfrak{K}=2h(Ax+By+Cz+D),$$

so muss

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=r_1,$$
$$Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=r_2,$$
$$Aa_3+Bb_3+Cc_3+D=r_3,$$
$$Aa_4+Bb_4+Cc_4+D=r_4$$

sein. Diese Gleichungen sind immer und nur auf eine Weise auflösbar und zeigen, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{A}=Ax+By+Cz+D$$

für

$$x=\frac{r_1a_2-r_2a_1}{r_1-r_2},\quad y=\frac{r_1b_2-r_2b_1}{r_1-r_2},\quad z=\frac{r_1c_2-r_2c_1}{r_1-r_2},$$
$$x=\frac{r_1a_3-r_3a_1}{r_1-r_3},\quad y=\frac{r_1b_3-r_3b_1}{r_1-r_3},\quad z=\frac{r_1c_3-r_3c_1}{r_1-r_3}$$

u. s. w. verschwindet, d. h. dass die Ebene

$$\mathfrak{A}=0$$

alle sechs äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der vier gegebenen Kugeln enthalten muss.

Da also

$$K=\mathfrak{K}+2h\mathfrak{A}$$

gefunden worden ist, so schliesst man, dass die gesuchte Kugel zu der Kugelschaar gehören muss, welche durch die Kugel $\mathfrak{K}=0$ und die Ebene $\mathfrak{A}=0$ bestimmt wird und dass die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt ist: Eine Kugel zu construiren, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehört und eine der gegebenen Kugeln, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Hierzu wird man durch die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{A}$ legen und in dieser Ebene diejenigen zwei Kreise suchen, welche mit dem Durchschnittskreise von $\mathfrak{K}$ und der Spur von $\mathfrak{A}$ zu derselben Kreisschaar gehören und den Durchschnittskreis von $\mathfrak{K}_1$ berühren. Diese zwei Kreise bilden je einen grössten Kreis zweier Kugeln, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Krakau. Dr. MERTENS.

XXIV. Zur Geometrie der Geraden.

Im Mittelpunkte o der Strecke, welche zu zwei Geraden G, G' normal steht, schneiden sich bekanntlich rechtwinklig zwei Gerade $o\alpha$, $o\beta$, welche in einer Ebene parallel zu G, G' und beziehungsweise in zwei Ebenen e, e' liegen, die den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbiren. Die $\begin{Bmatrix} o\,\alpha \\ o\,\beta \end{Bmatrix}$ halbirt normal die zwischen G und G' liegenden Strecken einer Regelschaar $\begin{Bmatrix} R \\ R' \end{Bmatrix}$, rücksichtlich welcher die Geraden G, G' und die unendlich ferne der $\begin{Bmatrix} e' \\ e \end{Bmatrix}$ Leitstrahlen sind.

Durch die Regelschaaren R, R' sind sämmtliche Richtungen der Geraden gegeben, welche gegen G und G' gleich geneigt sind.

Je zwei Ebenen, die, einen Strahl S der Schaar R enthaltend, durch $o\alpha$ und normal zu $o\alpha$ gelegt werden, halbiren den Flächenwinkel (SG, SG') und seinen Nebenwinkel; sie werden daher von Geraden parallel zu S erfüllt, welche gegen G, G' gleich geneigt und von G, G' gleich entfernt sind.

Da Gleiches bezüglich eines Strahles S' der Schaar R' und der Geraden $o\beta$ der Fall ist, so folgt:

Durch jeden Punkt des Raumes können (im Allgemeinen) vier Strahlen gezogen werden, welche mit den gegebenen Geraden G, G' gleiche Winkel bilden und von G, G' gleichen Abstand haben; legt man nämlich durch diesen Punkt zwei den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbirende Ebenen und sucht man ihre Schnittpunkte mit G und G', so liegen in jeder dieser Ebenen zwei dieser Geraden; die erste verbindet den Mittelpunkt der Strecke zwischen den genannten Schnittpunkten mit dem gegebenen Punkte, die zweite ist parallel zur Verbindungslinie dieser Schnittpunkte.

Graz. Prof. Carl Moshammer.

XXV. Ueber die unvollständige Gammafunction.

Zur Berechnung der sogenannten unvollständigen Gammafunction, d. h. des Integrales

$$\Gamma(\mu, \xi) = \int_0^{\xi} x^{\mu-1} e^{-x}\, dx,$$

hat man bis jetzt zwei Formeln; bei kleinem ξ dient die Entwickelung von Legendre:

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^\mu\left\{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1}\,\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{1}{1.2}\,\frac{\xi^2}{\mu+2}-\ldots\right\},$$

bei grossen ξ dagegen ist nach Schlömilch

$$\Gamma(\mu,\xi)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx-\int_\xi^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx$$

$$=\Gamma(\mu)-\xi^{\mu-1}e^{-\xi}\left\{1-\frac{a_1}{\xi+1}+\frac{a_2}{(\xi+1)(\xi+2)}-\ldots\right\},$$

worin die Coefficienten a_1, a_2 etc. ganze rationale Functionen von μ sind*. Eine dritte Formel ergiebt sich mittelst der Substitution

$$x=\xi(1-u);$$

es wird dann

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^\mu e^{-\xi}\int_0^1(1-u)^{\mu-1}e^{\xi u}\,du,$$

ferner durch Entwickelung von $e^{\xi u}$ und durch Integration der einzelnen Theile

$$\Gamma(\mu,\xi)=\frac{\xi^\mu e^{-\xi}}{\mu}\left\{1+\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{\xi^2}{(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots\right\}.$$

Diese Formel gewährt in dem Falle einen Vortheil, wo μ eine grosse und ξ eine kleine Zahl ist.

Wien. Hočevar,
Assist. am k. k. Polytechn.

XXVI. Zwei Sätze vom Schwerpunkte.

1. Welche Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Entfernungen von n festen Punkten ein Minimum ist?

Die Ebene sei durch drei ihrer Punkte, x_1, x_2, x_3 bestimmt, die n Punkte seien $p_1, p_2, \ldots p_n$. Dann sind die Höhen der Pyramiden, welche das Dreieck $x_1x_2x_3$ als gemeinsame Grundfläche und die Punkte $p_1, \ldots p_n$ als Spitzen haben, diejenigen Strecken, deren Summe ein Minimum sein soll. Man hat also, wenn $h_1 \ldots h_n$ diese Höhen sind:

$$h_1+h_2+\ldots+h_n=Min;$$

daher, wenn man mit der doppelten Grundfläche (die gleich dem äussern Producte der Punkte x_1, x_2, x_3 ist) multiplicirt:

$$h_1(x_1x_2x_3)+h_2(x_1x_2x_3)+\ldots+h_n(x_1x_2x_3)=Min.$$

---

* Vergl. Schlömilch, Compendium der höhern Analysis, Bd. 2, die Gammafunctionen V.

Links stehen die sechsfachen Volumina der n Pyramiden. Da nun das Volumen jeder dreiseitigen Pyramide gleich dem sechsten Theile des äussern Productes ihrer Eckpunkte ist, so kann man schreiben

$$(p_1 x_1 x_2 x_3) + (p_2 x_1 x_2 x_3) + \ldots + (p_n x_1 x_2 x_3) = Min$$

oder

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Ist nun p der Schwerpunkt der n Punkte $p_1 \ldots p_n$, so ist

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n.p,$$

also

$$n(p x_1 x_2 x_3) = Min,$$

oder

$$(p x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Da der Ausdruck links den Minimalwerth 0 annimmt, wenn p in der Ebene der Punkte $x_1 x_2 x_3$ liegt, so hat man den Satz:

Jede durch den Schwerpunkt von n festen Punkten gelegte Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen der n Punkte von der Ebene gleich Null ist.

2. Der Abstand des Schwerpunktes der Eckpunkte eines Polygons von einer beliebigen Geraden ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen seiner Eckpunkte.

Beweis. Seien $p_1 \,.\, . p_n$ die Ecken des Polygons, p ihr Schwerpunkt, so ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}.$$

Sei ferner a ein beliebiger Linientheil auf der Geraden, so ist

$$ap = \frac{ap_1 + ap_2 + \ldots + ap_n}{n}.$$

Aber $a.p_r$ ist die doppelte Fläche des Dreiecks, welches a als Grundlinie und p_r als Spitze hat, also, wenn h_r seine Höhe und a_1 der numerische Werth seiner Grundlinie ist:

$$ap_r = a_1 h_r,$$

ferner

$$a_1 h = \frac{a_1 h_1 + a_1 h_2 + \ldots + a_1 h_n}{n}$$

oder

$$h = \frac{h_1 + h_2 + \,..+ h_n}{n},$$

w. z. b. w. — Man sieht, wie sich dieser Satz ähnlich für das Gebiet des Raumes aussprechen lässt und wie dann der erste Satz als specieller Fall aus ihm hervorgeht. Die Ableitungen beider Sätze zeigen, wie einfach sich manche Untersuchungen durch Anwendung der Methoden der Ausdehnungslehre gestalten.

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

XXVI. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Die Eingangsworte zur Abhandlung Riemann's über diesen Gegenstand (Abhandl d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 8. Bd. 1860) zeigen, dass demselben die früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand gänzlich unbekannt waren. Da auch im betreffenden Referate der Fortschritte der Physik dieser früheren Untersuchungen nicht gedacht wurde und jene Eingangsworte unverändert in die so verdienstvolle Sammlung der Riemann'schen Werke von Herrn Weber übergegangen sind, so scheint es, dass die Vorarbeiten für die Riemann'sche Abhandlung überhaupt nicht so bekannt sind, als sie es verdienen, und ich glaube nur im Geiste des verstorbenen grossen Analysten zu handeln, wenn ich hiermit die Aufmerksamkeit darauf lenke, dass nicht nur der Fall ebener longitudinaler Luftwellen schon vielfach vor Riemann untersucht worden ist, sondern auch die Gesetze der Veränderung der Wellencurve derselben in ihren Grundzügen (beständige Verlängerung der Wellenthäler und Stauung der Wellenberge), sowie die Nothwendigkeit der Bildung von Verdichtungsstössen und die wesentlichsten Gesetze der Fortpflanzung derselben schon lange vor dem Erscheinen der Riemann'schen Abhandlung bekannt waren. Vergl.

Poisson, *Journal de l'école polytechnique vol. VII, cah.* 14, S. 319;
Stokes, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 33, S. 349, November 1848;
Airy, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 34, S. 401, Juni 1849;
Earnshaw, *Phil tranact.* 1860, S. 133;
Saint-Venant et Wantzel, *Journ. de l'école polytechnique cah.* 27.

Wien. Ludwig Boltzmann.