Historisch-literarische Abtheilung.

Mathematisch-historische Miscellen.

Von Dr. Siegmund Günther in München.

I. Die geometrischen Progressionen bei den Arabern.

Ueber die elementare Reihenlehre der Araber sind wir im Ganzen wenig unterrichtet. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen mochten sie aus des Archimedes Abhandlung über die Spirale kennen gelernt haben; dass sie auch die Cubensumme zu bilden und sogar die bezüglichen Aufgaben mannigfach zu variiren verstanden, wissen wir aus Wöpcke's ausführlichen Monographien[1]. Aber speciell über ihre Kenntniss der geometrischen Reihen sind wir wenig aufgeklärt. Dass ihnen dies Capitel nicht unbekannt geblieben sein kann, war ja von Anfang an zweifellos, denn sowohl in der indischen wie in der griechischen Mathematik, aus deren Vereinigung ja die arabische Wissenschaft hervorging, hatte dasselbe einen Platz gefunden. Bereits in den kinematischen Paradoxen der Eleaten* spielte die geometrische Progression eine Rolle, Archimedes hat sich im Arenarius auf dieselbe berufen und mehrere interessante Sätze[3] angegeben, bei Bhascara Acharya endlich wird dieselbe als etwas längst Bekanntes mitbehandelt[4]. Von den Arabern aber kannte man bislang anscheinend keinen directen Beleg für ihre Beschäftigung mit diesem Gegenstande, und da uns nun ganz neuerlich von philologischer Seite ein solcher geboten wird, so erschien es angezeigt, das mathematische Publikum auf diese interessante Notiz aufmerksam zu machen; ganz abgesehen davon, dass die Zeitschrift, welcher wir das Folgende grossentheils entnehmen, in unseren Fachkreisen nur sehr wenig gelesen werden dürfte, empfahl es sich auch, die für den Mathematiker wichtigen Punkte herauszuheben und in ihrer geschichtlichen Bedeutung zu charakterisiren.

---

* Wir verweisen anlässlich dieses interessanten Durchgangspunktes menschlicher Erkenntniss auf eine ziemlich unbekannte (selbst bei Poggendorff unerwähnt gebliebene) Specialschrift[2] eines verdienten deutschen Gelehrten.

Als einer der geistreichsten arabischen Mathematiker muss der dem elften Jahrhundert unserer Zeitrechnung angehörige Abu'l-Rîhân-Mohammed-ben-Ahmed Al Bîrûnî — gewöhnlich kurzweg Albiruni genannt — angesehen werden. Sein bedeutendstes Werk ist eine ausführliche Beschreibung einer ausgedehnten wissenschaftlichen Reise, welche er zur Zeit der grossen mosleminischen Invasion in Indien machte; dieses Reisewerk beschäftigt sich zwar der Stellung des Autors zufolge vorzüglich mit den astronomischen und mathematischen Kenntnissen des Nachbarvolkes, bewährt aber auch sonst allenthalben eine freisinnige Rücksichtnahme auf alle politischen und socialen Verhältnisse des merkwürdigen Landes. Fürst Boncompagni hat in einer eingehenden Analyse jenes Reiseberichtes die dem mathematischen Historiker besonders wichtigen Partien desselben verarbeitet[5], und hiermit müssen wir einstweilen zufrieden sein, da eine von den orientalistischen Choragen Frankreichs in Aussicht genommene Gesammtausgabe, welche zum grossen Theile an Franz Wöpcke übertragen war, durch den frühen Tod dieses Letzteren in's Stocken gerathen ist[6]. So sind wir leider im Unklaren darüber, ob sich Albiruni zu denjenigen Betrachtungen, über welche nunmehr Bericht erstattet werden soll, ebenfalls auf dieser Indienfahrt die Anregung geholt habe; bedenkt man aber, dass diese Betrachtungen zunächst an das gewöhnliche Schachbrett anknüpfen, und dass dies ganz unzweifelhaft eine indische Erfindung ist*, so wird man unserer Vermuthung wenigstens einige Wahrscheinlichkeit nicht absprechen können, dass wir es hier mit ursprünglich indischen, wenn auch der Form nach arabisch umgemodelten Geistesproducten zu thun haben.

Es hat vor Kurzem Sachau[7] darauf hingewiesen, dass Albiruni in seinem chronologischen Werke — *Alâthâr Albâkiya* — die Zahl zu berechnen gelehrt habe, welche in dem Erfindungsmythus des Schachspiels die Summe der auf alle 64 Felder vertheilten Weizenkörner ausdrücke. Allerdings hätten schon Gildemeister[8] und Barbier de Meynard[9] diese Zahl angemerkt, allein diese letztere Angabe sei keineswegs einwurfsfrei. Sachau liefert demnach zunächst den gereinigten Text der betreffenden Stelle, welche die gesuchte Zahl gleich

$$x = \left(((16^2)^2)^2\right)^2 - 1 = 16^{16} - 1$$

setzt**. Dass diese Zahl in der That die richtige ist, leuchtet ein, denn man hat nach der Summenformel der geometrischen Progressionen

* Des Schachs, wenn auch gerade nicht dieses Problems, thut der Bericht in der That Erwähnung.

** Höchst merkwürdig ist wohl auch der von Sachau hervorgehobene Umstand, dass Albiruni, „um Fehler im Schreiben zu vermeiden", seine Zahlen in dreifacher Weise schreibt, nämlich einmal direct im indischen Positionssystem,

$$x = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{4 \cdot 16} - 1 = (2^4)^{16} - 1,$$

wie behauptet. Wie aber wurde, da den Arabern die hier angewandte Regel nicht geläufig gewesen zu sein scheint, dieser Werth von x gefunden?

Hierzu dienen zwei Theoreme, die allgemein so zu formuliren wären:

I. Es sei y die Ordnungszahl irgend eines Feldes; dann wird behauptet, bei der bekannten Belegung kämen auf das Feld von der Ordnungszahl $(2y-1)$ gerade $y_1^{(y)2}$ Körner, wenn $y_1^{(y)}$ die Anzahl der auf das Feld y gelegten Körner darstellt.

Dem ist in der That so, denn der Regel zufolge enthält das y^{te} Feld $y_1^{(y)} = 2^{y-1}$ Körner, also das $(2y-1)^{\text{te}}$ 2^{2y-2}; es ist aber

$$2^{2y-2} = (2^{y-1})^2 = y_1^{(y)2}.$$

So kommen auf das fünfte Feld 16 Körner, auf das neunte also $16^2 = 256$.

II. Die Zahl der auf einem Felde befindlichen Kerner ist

$$y_1^{(y)} = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)} + \ldots + y_1^{(y-1)} + 1;$$

denn es ist

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{y-2} = \sum_{i=1}^{i=y-2} y_1^{(i)} = 2^{y-1} - 1 + 1 = y_1^{(y)},$$

wie aus dem ersten Satze hervorgeht.

Mit Zugrundelegung beider Lemmen kann dann die Zahl x offenbar so ermittelt werden: Nach Satz I enthält nun Feld $5 - 2^4 = 16$, Feld $17 - 2^{16} = (16^2)^2$, Feld $33 - 2^{32} = 16^8 = \left((16^2)^2\right)^2$ Körner, und da ein supponirtes 65. Feld vom 33. ebenso weit absteht, wie dieses selbst vom ersten, so wäre

$$y_1^{(65)} = (y_1^{(33)})^2 = \left(((16^2)^2)^2\right)^2.$$

Nunmehr tritt Satz II in Kraft; es ist

$$y_1^{(65)} = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + \ldots + y_1^{(64)} + 1$$

oder, da die rechte Seite den Werth $(x+1)$ hat,

$$x = \left(((16^2)^2)^2\right)^2 - 1.$$

Dies ist der oben angegebene Werth.

Gelegentlich thut dann Albiruni noch einiger weiteren Eigenschaften der geometrischen Reihen Erwähnung, welche uns die algebraische

---

dann im Sexagesimalsystem und schliesslich mit arabischen, zur Zahlbezeichnung dienenden Buchstaben. So ist unser obiges x gleich

$$18'446{,}744'073{,}709'551{,}615$$

$$= 30.30.27.9.5.3.50.40.31.0.15 \equiv 15.60^0 + 31.60^2 + 40.60^3 + 50.60^4 + 3.60^5 + 5.60^6 + 9.60^7 + 27.60^8 + 30.60^9 + 30.60^{10}$$

= اح دد وزدمزخع طهها واه.

Die mittlere Schreibart erinnert offenbar lebhaft an das babylonische Verfahren.

Zeichensprache in ein einziges Theorem zusammenzuziehen gestattet. Dasselbe lautet:

Ist in der geometrischen Progression

$$a,\ af,\ af^2, \ldots af^m$$

m eine gerade Zahl, so ist das Product aus Anfangs- und Endglied gleich dem Quadrate des Mittelgliedes, im entgegengesetzten Falle gleich dem Producte der beiden Mittelglieder.

Dem entsprechen für $m = 2n$, resp. $m = 2n - 1$ die beiden Relationen

$$a \,.\, af^{2n} = (af^n)^2, \quad a \,.\, af^{2n-1} = af^{n-1} \,.\, af^n.$$

Recapituliren wir diese Mittheilungen Sachau's, so drängt sich uns die Gewissheit auf, dass den Arabern zu Albiruni's Zeit die einfache Summenformel, wie sie in der Lilavati vorgetragen wird, noch nicht bekannt oder doch wenigstens in Fleisch und Blut übergegangen gewesen sein kann. Im Gegentheil, hier nehmen wir eine offenkundige Einwirkung griechischer Ueberlieferungen wahr, wie sie uns in gleicher Stärke bei den Arabern nur selten entgegentritt. Man vergleiche, um die Richtigkeit dieser Bemerkungen zu übersehen, mit Albiruni's Kunstgriffen das generelle Theorem, welches Nesselmann[10] aus dem Detail der archimedischen Sandrechnung gezogen und folgendermassen formulirt hat: „Wenn mehrere Zahlen von der Einheit an in geometrischer Pregression stehen, so wird jedes Product von irgend zwei Gliedern dieser Progression derselben Progression angehören, indem es so weit von dem grösseren Factor entfernt ist, als der kleinere Factor von der Einheit; und der Abstand des Productes von der Einheit wird um 1 kleiner sein, als die Summe der Abstände der beiden Factoren von der Einheit.“ Dass diesem Satze die Vorschriften des Albiruni sich ohne Weiteres als einfache Corollare einfügen, erhellt unverzüglich, und wir sehen uns so vor einer geschichtlichen Thatsache, welcher eine weit über die sachliche Vorlage hinausgehende Tragweite zukommt.

1) *Wöpcke, Passages rélatifs à des sommations de cubes extraits de manuscrits arabes inédits*, Zwei Abhandl. *Rome 1863, 1864.*
2) Gerling, Ueber Zeno des Eleaten Paradoxen über die Bewegung, Marburg 1846.
3) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, S. 122 flgg.
4) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874; S. 192.
5) *Boncompagni, Intorno all' opera d'Albiruni sull' India, Bullettino Tomo II;* S. 153 flgg.
6) *Ibid.* S. 202.
7) Sachau, Algebraisches über das Schach bei Bîrunî, Zeitschr. d. morgenländ. Gesellschaft 29. Band, S. 148 flgg.
8) *Gildemeister, Scriptorum Arabum de rebus indicis loci et opuscula, Bonnae 1838;* S. 142.

9) *Barbier de Meynard, Maçoudi, les prairies d'or, Paris 1861, Tome I,* S. 160.
10) Nesselmann, S. 124.

II. Die magischen Quadrate bei Gauss.

In einem kürzlich der Oeffentlichkeit übergebenen Werke[1] haben wir die Entwickelungsgeschichte der sogenannten Zauberquadrate zu schildern versucht. Da aber eine ganz vollständige Durcharbeitung des massenhaft vorhandenen Materials von Anfang an ein Ding der Unmöglichkeit schien, so empfahl sich für das betreffende Capitel der bescheidenere Titel: „Historische Studien über die magischen Quadrate"; wirklich hat sich uns seitdem bereits eine und die andere Lücke fühlbar gemacht. Vor Allem aber scheint ein gewisses uns entgangenes Factum wichtig genug, in gesonderter Darstellung hier eine nachträgliche Stelle zu finden*.

Unter'm 12. März 1842 sendet Schumacher an Gauss nachstehendes von seinem Assistenten Clausen ausgearbeitetes Diagramm:

$$\begin{array}{cccc} A4 & B1 & C2 & D3 \\ C1 & D4 & A3 & B2 \\ D2 & C3 & B4 & A1 \\ B3 & A2 & D1 & C4 \end{array}$$

und bemerkt[2] dazu: „Es ist eine Art magisches Quadrat. Man schreibt auf n Zettel A und bei A die natürlichen Zahlen von 1 bis n, ebenso auf n Zettel B und die natürlichen Zahlen von 1 bis n und so fort, bis man n Buchstaben hat. Aus diesen nn Zetteln soll ein Quadrat gelegt werden, mit der Bedingung, dass sowohl in jeder horizontalen, als verticalen Reihe alle Buchstaben und alle Zahlen vorkommen. Für $n=2$ ist dies unmöglich, für $n=3$ leicht, und ich glaubte früher von Ihnen verstanden zu haben, dass es auch für $n=4$ unmöglich sei, muss mich aber geirrt haben, da Clausen mir beifolgende Auflösung brachte. Darf ich fragen, wenn sonst die Untersuchung Ihnen keine Mühe macht, für welche Werthe von n (das nur eine ganze Zahl sein kann) es unmöglich ist?"**

Mit dem gewöhnlich ihn charakterisirenden Scharfblick erkennt Gauss sofort[4], dass Clausen seine Bedingungen zu enge gestellt habe. Nicht blos die Colonnen und Zeilen, sondern auch die Diagonalen müss-

* Wir verdanken die Hinweisung auf jene Thatsache einer brieflichen Mittheilung von Herrn Prof. Stern in Göttingen.

** Da von ungeradzelligen Quadraten dieser Art später in der Correspondenz nicht mehr die Rede ist, so stellen wir das Thatsächliche darüber noch kurz mit folgenden Worten fest. Sobald man von der Forderung absieht, dass auch die Diagonalen in Betracht gezogen werden, so kann man jedes gerad- oder ungeradzellige magische Quadrat mit Doppelelementen so herstellen, dass man die Buchten mit hereingezogen werden; dann sei allerdings Clausen's Figur nicht mehr richtig, allein sie liesse sich leicht verbessern. Habe man aber einmal Ein solches Diagramm, so seien aus diesem Urschema ohne Weiteres 575 andere ableitbar, und zudem liefere ein willkürliches Ersetzen der Buchstaben A, B, C, D durch 0.4, 1.4, 2.4, 3.4 ein magisches Quadrat im vulgären Sinne. So bekommt man nach Gauss für $A=0$, $B=4$, $C=8$, $D=12$ das folgende Duplicat:

A4	B1	C2	D3	4	5	10	15
C3	D2	A1	B4	11	14	1	8
D1	C4	B3	A2	13	12	7	2
B2	A3	D4	C1	6	3	16	9.

Gauss erinnert auch noch an Mollweide's Behandlung des Gegenstandes, bricht dann aber ab[5]: „Mir fehlt es an Zeit, darüber jetzt Nachforschungen zu machen.“ Man sieht aus den wenigen hier mitgetheilten Worten, wie richtig und umfassend Gauss sofort einen ihm sonst fernliegenden Gegenstand erfasst hat. Nur Eines nimmt uns etwas Wunder, dass nämlich der strenge Mathematiker seinem Freunde Schumacher ein Versehen nachsieht, was sonst durchaus seine Art nicht ist. Wenn Jener nämlich (s. o.) meint, für $n=3$ sei die Construction des Quadrates leicht, so hat er doch offenbar den beschränkten Begriff Clausen's im Auge, während in dem streng richtigen Gauss'schen Sinne ein neunzelliges Quadrat mit Doppelelementen einfach unmöglich ist. Es erscheint uns überhaupt, soweit eine nur oberflächliche Untersuchung der Frage uns zu einem Urtheil berechtigt, noch keineswegs gewiss, ob solche (Gauss'sche) Quadrate allgemeinster Natur von $(2m+1)^2$ Zellen überhaupt hergestellt werden können.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei der sachlichen Seite des Gegenstandes, so stellt sich uns klar heraus, dass Gauss zur Bildung der magischen Quadrate eines Kunstgriffes sich bedient, welcher an sich nicht gerade neu ist, vielmehr schon von De la Hire[6], Sauveur[7] und besonders von Euler angewandt war. Allein die Ersteren legten blos auf den Zweck einen Werth, das schematische Quadrat mit Doppelelementen, welches für Gauss im Vordergrunde steht, diente ihnen lediglich als Mittel, und da das von ihnen angestrebte Ziel auch erreicht werden

---

staben sowohl als die Zahlen in Form einer doppelt-orthosymmetrischen Determinante[3] von entgegengesetztem Sinne anschreibt, z. B.

A1	B2	C3	D4	E5	F6
F2	A3	B4	C5	D6	E1
E3	F4	A5	B6	C1	D2
D4	E5	F6	A1	B2	C3
C5	D6	E1	F2	A3	B4
B6	C1	D2	E3	F4	A5

A1	B2	C3	D4	E5
B5	C1	D2	E3	A4
C4	D5	E1	A2	B3
D3	E4	A5	B1	C2
E2	A3	B4	C5	D1.

konnte, wenn in den Diagonalen das nämliche Element mehrmals auftrat, so kümmerten sie sich nicht um jene verschärfte Forderung. In gewissem Sinne war auch bei Euler von dieser letzteren keine Rede, doch werden wir zu den Leistungen dieses Mannes uns erst durch weitere Verfolgung des Gauss-Schumacher'schen Briefwechsels hinführen lassen.

Zunächst antwortet Schumacher auf die ihm von Gauss ertheilte Belehrung mit folgenden Worten[8]: „Vielen Dank für Ihre Belehrungen über die Quadrate mit doppelten Elementen. Eine Frau v. Rosenkranz in Kopenhagen beschäftigte sich damit, und ich meine, dass Sie 1826 bei meiner Durchreise durch Göttingen mir Fälle genannt hätten, bei denen das Problem unmöglich sei, namentlich meinte ich dies für $n=4$, aber ich kann mich sehr gut irren. Ist $n=2$ denn der einzige unmögliche Fall?" Hierauf scheint Gauss nicht weiter eingegangen zu sein: auch später, als sein Correspondent wieder auf die Sache zurückkommt, sieht man sich vergeblich nach einer Erwiederung um.

Wir spielen hier auf einen Passus in Schumacher's Brief vom 10. August 1842 an, welcher so lautet[9]: „Clausen ist noch hier und wird erst in 14 Tagen reisen. Er hat unterdessen über die magischen Quadrate mit doppelten Charakteren gearbeitet, deren Sie sich wohl aus unserer Correspondenz vor etwa einem halben Jahre erinnern (z. B. aus 9 kleinen, mit $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, $b3$, $c1$, $c2$, $c3$ bezeichneten Quadraten ein Quadrat zusammenzusetzen, in dem jede Horizontal- oder Verticalreihe alle Buchstaben und alle Zahlen, aber keinen Charakter mehr wie einmal enthält), und kann beweisen, dass dies für 6 (6 Buchstaben und 6 Zahlen) unmöglich ist, ebenso wie für 2. Er bringt für 6 alle möglichen Fälle auf 17 Grundformen, deren Discussion die Unmöglichkeit ergiebt. Sie haben mir früher auch eine Zahl genannt, bei der es nicht möglich war; dies wird auch 6, und nicht 4, wie ich irrthümlich glaubte, gewesen sein. Ich meine, es war 1817, bei meiner Durchreise nach München. Clausen vermuthet, dass es für jede Zahl von der Form $4n+2$ unmöglich sei, kann es aber noch nicht beweisen, und glaubt auch nicht, dass ihm überhaupt der Beweis gelingen wird, da nach seiner Meinung die Auflösung dieser Aufgabe mit der Theorie der Combinationen und deren Anwendung auf die analytische Auflösung der algebraischen Gleichungen sehr nahe zusammenhängt. Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde, wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar sein."

Als Clausen sich in diesem Sinne seinem Chef gegenüber äusserte, hatte er offenbar von der oben angezogenen Abhandlung Leonhard Euler's[10] keine Kenntniss. Denn der Zweck jener Arbeit war der Formulirung des Autors zufolge dieser: „*Cette question rouloit sur une assemblée de* 36 *Officiers de six différens grades, qu'il s'agissoit de ranger* *dans un quarré, de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale il se trouve six officiers tant de différens caractères que de Régimens différens.*" Vergleicht man mit dieser Forderung diejenige Clausen's, so drängt sich uns sofort eine höchst eigenthümliche Wahrnehmung auf, diejenige nämlich, dass beide Geometer eine Bedingung stillschweigend unterdrückt haben. Wenn nicht auch verlangt wird, dass in beiden Diagonalreihen durchweg auch verschiedene Charaktere angetroffen werden sollen, dann ist ja die Aufgabe ganz unmittelbar vermittelst des Arrangements lösbar, welches wir in der Randnote angegeben haben; man sieht, wie Recht Gauss hatte, die Aufstellung Clausen's als eine zu enge zu bezeichnen. Nimmt man aber an, dass Clausen, wie vor ihm Euler, das Hereinziehen der Diagonalen für etwas Selbstverständliches hielt, dann dürfte allerdings die Bemerkung des Letzteren, das Problem scheine ihm — ohne dass er recht wisse, warum — keine Lösung zuzulassen, sehr berechtigt sein, und es wäre sehr zu wünschen, dass Clausen's anscheinend erschöpfender Beweis der Oeffentlichkeit übergeben würde. Vermuthlich hat derselbe auch darin das Richtige getroffen, dass er einen nahen Zusammenhang zwischen seiner Aufgabe und der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen zu diagnosticiren vermeint; denn die Betrachtungen, welche Euler an seinen gelegentlichen Einfall anknüpft und über welche uns in unserer Monographie[11] aus Gründen der Raumersparniss nur sehr summarisch zu referiren möglich war, scheinen mit dem Thema der sogenannten Substitutionenlehre in directer Beziehung zu stehen.

1) Günther, Vermischte Untersuchungen über die Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876; S. 188 flgg.
2) Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. F. A. Peters, 4. Band, Altona 1862; S. 61.
3) Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875; S. 93.
4) Briefwechsel, S. 63.
5) *Ibid.* S. 64.
6) Günther, Verm. Unters.; S. 241 flgg.
7) *Ibid.* S. 213 flgg.
8) Briefwechsel, S. 65.
9) *Ibid.* S. 80 flgg.
10) *Euler, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, Verhandelingen door het Genootschap de Vlissingen, Negende Deel,* S. 85 flgg.
11) Günther, Verm. Unters., S. 253 flgg.