Recensionen.

Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon, par P. Mansion, docteur spécial en sciences mathématiques, professeur à l'université de Gand. Mons, Hector Manceaux. Bruxelles, Henri Manceaux. Gand, A. Hoste. 1875. 44 Seiten.

Id., Introduction à la theorie des déterminants, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. Gand, A. Hoste. Mons, Hector Manceaux. 1876. 24 Seiten.

Die erste Schrift des verdienten Gelehrten, über welche wir hier zu referiren haben, ist speciell für Studirende bestimmt und ihr Entwickelungsgang natürlich der gewöhnliche. Die allgemeine Permutationslehre und der Determinantenbegriff bilden das erste Capitel, im zweiten wird die Zerlegung in Unterdeterminanten und die daran sich anreihende Auswerthung solcher Formen behandelt. Dann folgt die Addition und Multiplication der Determinanten, an die sich hübsche geometrische Anwendungen anreihen; besonders möchten wir auf den instructiven Beweis des wichtigen Satzes (S. 31) aufmerksam machen, dass die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

drei reelle Wurzeln besitze. Das dritte Capitel endlich widmet sich der Elimination im weiteren Sinne des Wortes.

Abgesehen von den durchweg klaren Begriffsbestimmungen und Deductionen der einzelnen Hauptsätze müssen wir auch den „*Exercices*" unser besonderes Lob zu Theil werden lassen, welche jedem Theorem angehängt erscheinen und einen vortrefflichen Uebungsstoff darbieten; solche Aufgaben vermisst man in unseren deutschen Determinantenwerken noch zu sehr. Wissenschaftliche Neuigkeiten sollen principiell nicht gerade gegeben werden; jedoch sind sie nicht ausgeschlossen, wie denn z. B. Nr. 8, „*Théorème de Bézout*" überschrieben, einen passenden Uebergang zu den Determinanten vom dritten und überhaupt höhern Range gewährt. — Von deutschen

Studenten wird Mansion's Werkchen als treffliches Lehrmittel zur ersten Einführung in die Determinantenlehre gebraucht werden können.

In der zweiten Schrift sollen speciell die Bedürfnisse der Mittelschulen berücksichtigt werden, und zwar fasst der Verfasser, wie er uns brieflich mittheilte, seine Aufgabe in ähnlichem Sinne, wie die kürzlich von Lindemann edirten Clebsch'schen Vorlesungen auf, d. h. er beschränkt sich exclusiv auf zwei- und dreireihige Determinanten. Ob eine solche Limitation vom pädagogischen Standpunkte aus völlig gerechtfertigt sei, darüber wird sich streiten lassen; gesteht man aber die Prämisse zu, so wird man Herrn Mansion's Ausführung ungetheilte Anerkennung nicht versagen können. Vor Allem freut es uns, dass er der gefährlichen Klippe, an welcher Dölp und zum Theil auch Diekmann scheiterten, aus dem Wege zu gehen verstand: er hält sich nicht damit auf, durch lange vorbereitende Rechnungen die Formulirung des Determinantenbegriffes in einer schliesslich doch ermüdenden Weise vorzubereiten, er stellt denselben vielmehr gleich als eine Nothwendigkeit hin und zwingt seine Schüler, sich ihm zu accomodiren. Einmal muss dieser schwere Schritt zur Symbolik doch gethan werden, da helfen alle Palliativmittel nichts, und je früher man ihn thut, desto besser.

Das Material dieser zweiten Schrift ist von dem der ersten nicht wesentlich verschieden, nur dass eben blos der zweite und dritte Grad behandelt wird; alle Vorzüge des grössern Werkes übertragen sich auch auf dieses. Nur Einen Punkt hätten wir zu bemerken, denselben, den wir auch in unserer Besprechung des nicht minder originell angelegten Werkes von Schüler (Hoffmann'sche Zeitschr. 6. Jahrg., 4. Heft) hervorzuheben für nöthig fanden. Wenn man aus didaktischen Rücksichten die bewusste Beschränkung für nöthig hält, so sollte man doch am Schlusse des Ganzen — wenn auch nur in einer Anmerkung — darauf hindeuten, dass eine Erweiterung der vorgetragenen Lehren auf n^2 Elemente nothwendig, aber auch leicht sei. Eine solche Verweisung des Lernenden auf später möchten wir in keinem elementaren Abrisse irgendwelcher Disciplin missen.

Am Schlusse dieses Referates dürfen wir es wohl aussprechen, dass uns eine Verpflanzung der Mansion'schen Leitfäden auf deutschen Boden durchaus angezeigt schiene; selbst neben Reidt's und Diekmann's in ihrer Art trefflichen Einleitungen würden dieselben schon ihren Leserkreis finden.

München. Dr. S. Günther.

Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauch an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. JOSEF DIEKMANN, Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Essen. Essen, Druck und Verlag von G. D. Bädecker. 1876. VIII, 88 S.

In einer Reihe von Artikeln* hat der Verfasser dieser Schrift seine Behandlungsweise der Determinantenlehre schon früher den Lehrern der Mathematik vorgelegt. Es lag daher auf den ersten Blick nahe, in dem hier zu besprechenden Werkchen blos einen Separatabzug jener drei Abhandlungen, versehen mit den für ein selbstständiges Buch nothwendigen redactionellen Aenderungen, zu erblicken. Wir fanden uns jedoch angenehm enttäuscht, als wir beim Durchlesen der Schrift auf eine von jener ersten mehrfach abweichende originelle Neubearbeitung trafen,** welche, der grossen Reichhaltigkeit unserer Determinantenliteratur ungeachtet, der allgemeinen Beachtung mit vollem Rechte empfohlen werden muss.

Wir verbreiten uns zunächst über einige Punkte, mit deren Erledigung wir nicht einverstanden sind, um dann später ungestört den mannigfachen Vorzügen des Büchleins gerecht werden zu können. Wir verstehen nicht recht, warum der Verfasser von der Bezeichnung durch doppelte Indices, der wichtigen und in keiner Darstellung genügend gewürdigten Neuerung Jacobi's und Hesse's, anscheinend grundsätzlich Abstand nimmt. Im Verlaufe der Darstellung, wo fast ausschliesslich Determinanten von keinem höhern als dem vierten Grade zur Anwendung kommen, macht sich allerdings jene Unterlassung weit weniger bemerklich, allein schon vom formalen Standpunkte aus erscheint es wichtig, die Schüler gleich von Anfang an in diese später unentbehrliche Bezeichnungsweise einzuführen. Zum Zweiten nehmen wir an der Behandlung Anstoss, welche (S. 7 flgg.) die Unterdeterminanten erfahren. Es wird nämlich

$$\varDelta \equiv \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$
$$= a_{1,1} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1,1}} - a_{1,2} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1,2}} + a_{1,3} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1,3}} - \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1,n}}$$

gesetzt. Durch diese Formulirung setzt sich der Verfasser in Widerspruch mit der sonst allgemeinen Auffassung dieses Gegenstandes; es ist

* 1., 2., 3. Heft des 6. Jahrgangs der „Zeitschr. f. math. u. naturwissensch. Unterricht".

** Die elementare Vorbereitung des Determinantencalculs ist hier weggelassen. Wir erkennen den hohen Fleiss an, mit welchem jene Einleitung bearbeitet war, allein die Aufgabe, auf diese Weise die charakteristischen Schwierigkeiten — die doch grossentheils nur in der Tradition bestehen — wegzuschaffen, scheint uns überhaupt nicht lösbar. Lediglich diesen Umstand hatten wir im Auge, wenn wir oben sagten, dass auch Diekmann's Bemühungen theilweise gescheitert seien.

freilich die ganze Determinantentheorie in letzter Instanz auf conventionelle Bestimmungen zurückzuführen, allein man ist nun einmal dahin übereingekommen, das Vorzeichen als der Unterdeterminante anhaftend zu betrachten und somit das obige Aggregat formell nicht als algebraische, sondern als reine Summe zu behandeln. Bei der Lehre von den höheren Minoren, welche Diekmann seinem Zwecke gemäss nur ganz summarisch behandelt, drängt sich die Nothwendigkeit, gerade so zu schreiben, ganz gebieterisch auf. Schliesslich können wir unsere Verwunderung darüber nicht ganz bergen, dass der Verfasser dem streng elementar gehaltenen theoretischen Theile so schwierige Anwendungen folgen lässt; allein wir glauben hier unser eigenes Urtheil dem gewiegteren des Schulmanns nachstellen zu müssen. Sagt er doch selbst im Vorwort: „Das Werkchen ist ganz und gar auf dem Boden der Schule gewachsen und, wie aus den gelegentlich gegebenen Anmerkungen und Beispielen zu ersehen, ist fast kein Satz darin, der nicht im praktischen Unterricht gereift und geprüft worden ist.“ Wenn dem freilich so ist, können wir dem Autor zu seinen Schülern nur von Herzen gratuliren; für sehr viele Anstalten, zumal Süddeutschlands, werden wohl die Verhältnisse ungleich weniger günstig liegen. Für diese würde uns noch immer eine deutsche Version des vorstehend beschriebenen Mansion'schen Leitfadens das Liebste sein; den Lehrern aber rathen wir um so mehr zu Diekmann, weil sie hier Vorzüge eigener Art finden. Gehen wir nunmehr zu diesen über.

Die ersten beiden Capitel enthalten in einfacher und klarer Darlegung die eigentlichen Elemente der Determinantentheorie, und zwar wird mit Recht ein Hauptgewicht auf die Zerlegung in Partialdeterminanten gelegt. Das dritte Capitel handelt von der Auflösung eines linearen Systems.* Allenthalben fügt der Verfasser eine reiche Auswahl von Beispielen bei, welche zum Theil auch einem höheren Zwecke zu dienen bestimmt sind, insofern sie für schwierigere Partien, deren ausführliche Behandlung der Tendenz des Buches zuwiderlaufen würde, wenigstens eine Exemplification darbieten. So ist S. 11 die Jacobi'sche Zerlegung von $\Sigma \pm a_{1,1}+x,\ a_{2,2}+x,\ \ldots\ a_{n,n}+x$, S. 12 der Fundamentalsatz von den symmetralen Determinanten, S. 20 die sogenannte französische Methode zur Eliminirung angedeutet; auch eine sehr übersichtliche Theorie der Kettenbruchdeterminanten findet sich vor. Sehr hübsch ist der als Anhang des dritten Capitels zu betrachtende sechste Paragraph, welcher — und zwar ohne Anwendung des eigentlichen Eliminationsverfahrens — aus zwei Gleichungen $\varphi(x, y) = \psi(x, y) = 0$ die Unbekannten

* Eine nicht zu billigende typographische Eigenthümlichkeit des Buches ist die Darstellungsweise der Brüche, indem nämlich die Determinantenstriche des Zählers und Nenners je eine ununterbrochene Gerade bilden. Für den Drucker ist es allerdings sehr bequem, aber die Deutlichkeit leidet darunter.

berechnen lehrt. „Das Verfahren besteht darin, die Unbekannten zunächst linear zu berechnen, dadurch erhält man gewisse Zwischenformen, welche man dann direct durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken kann.“ Capitel 4 betrachtet im Sinne Gordan's die Multiplication der Determinanten als Unterfall des Laplace'schen Satzes, lehrt dieselbe dann ausführen, wobei auch die adjungirten Determinanten mit hereingezogen werden, und behandelt dann auch die linearen Substitutionen als Specialität des Multiplicationstheorems. Das folgende Capitel, „Anwendung der Determinanten auf die Theorie der Gleichungen“ überschrieben, ist als die Quintessenz des Ganzen anzusehen; es zerfällt in sechs Paragraphen. § 10 lehrt die dialytische Methode und die Discriminantenbildung, in § 11 wird die schöne, dem Verfasser eigenthümliche Auflösung der quadratischen Gleichungen* mit geometrischen Anwendungen vorgetragen. War es hierbei gleich von Anfang an erforderlich, den Leser mit dem Wesen einer Invariante — der Discriminante $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ — vertraut zu machen, so macht sich beim Aufsteigen zu den cubischen Gleichungen auch die Nothwendigkeit der Einführung des Covariantenbegriffes geltend. Die Lehre von diesen Gebilden wird sehr ausführlich behandelt, und es gelingt zuletzt (S. 60), den schönen und für eine elementare Behandlung bisher wohl allgemein unzugänglich erachteten Satz zu beweisen: „Führt man in eine cubische Gleichung die Wurzeln ihrer quadratischen Covariante $\Delta = 0$ ein, so zerfällt die cubische Gleichung in die Differenz zweier Cuben.“ Einen höchst interessanten, für Schüler aber unserer festen Ueberzeugung nach transscendenten Excurs bietet § 13, wo die von Clebsch sogenannte „cyklische Projectivität“ im engsten Anschluss an jene Specialform symmetrischer Determinanten besprochen wird, welche wir früher als „doppelt-orthosymmetrisch“ bezeichnet haben. Die beiden Schlussparagraphen dieses Capitels endlich variiren auf das Allseitigste die Gleichungen vierten Grades, so zwar, dass, wie schon aus dem Vorhergehenden zu erwarten, die ganze Materie als Ausfluss der allgemeinen Lehre von den linearen Transformationen sich darstellt. Das sechste Capitel bietet diverse sehr nett behandelte „Anwendungen aus der analytischen Geometrie“, wobei denn auch auf die Bezeichnung $a_{i,k}$ recurrirt wird, und als Anhang folgt eine ebenfalls auf analytische Raumgeometrie sich stützende Bestimmung des Pyramideninhalts, bezüglich deren auch auf die sehr ähnliche Ent-

* Dieselbe ist den Lesern der Hoffmann'schen Zeitschrift bereits aus einem frühern Aufsatze des Herrn Diekmann bekannt. Freilich wird mancher, wie es u. A. auch dem Referenten erging, sich im Stillen gewundert haben, jene Abhandlung gerade hier und nicht etwa in den „Mathem. Annalen“ anzutreffen. An didaktischer Durchbildung hat indess diese zweite Bearbeitung ganz entschieden gewonnen, so wenig sie auch von jener ersten abzuweichen scheint.

wickelung Studnička's (Ber. d. böhm. Gesellsch., 15. Nov. 1872), verwiesen werden möge.

Das Buch ist, wie aus dieser Schilderung zu entnehmen, kein umfassender Lehrbegriff, aber es ist ein trefflich klarer Handweiser für die Elemente und gewisse wichtige Anwendungen des Determinantencalculs, wie sie sich dem auf dem Gebiete der neueren algebraisch-geometrischen Forschung bereits vortheilhaft bekannt gewordenen Verfasser von selbst darboten. Für eine zu wünschende zweite Ausgabe dürfte sich allerdings eine ausgiebigere Berücksichtigung der mehr formellen Seiten der Theorie — Differenzenproduct, unvollständige Determinanten u. s. w. — empfehlen.

Druck und Ausstattung sind vorzüglich. Von störenden Druckfehlern wären vielleicht folgende zu erwähnen: S. 23 Z. 12 v. u. $+0$ statt -1; *ibid.* Z. 2 v. u. das fehlende a_{n-1}; S. 45 Z. 1 v. u. Involation. Der Name Heis ist durchgängig unrichtig geschrieben.

München. Dr. S. Günther.

I primi elementi della teoria dei determinanti e loro applicazioni all' algebra ed alla geometria, proposti agli alcuni degli istituti tecnici dal Professore Domenico Dr. Fontebasso. Treviso, Tipografia di Luigi Zoppelli. 1873. VII, 134 S.

I determinanti con nomerose applicazioni, per Giovanni Garbieri. Parte prima utile agli studiosi di matematica nei primi corsi universitari. Bologna, Tipografia di G. Cenerelli.* 1874. XIV, 267 S.

Zwei italienische Determinantenwerke sind es, auf die wir nachstehend die Aufmerksamkeit deutscher Mathematiker lenken möchten, da dergleichen Arbeiten, sofern sie nicht einen wirklichen Fortschritt der Wissenschaft repräsentiren, im Auslande nur allzuleicht unbekannt zu bleiben pflegen. Beide Bücher ergänzen sich, wie man aus den Titelworten sieht, so ziemlich, denn Fontebasso hat die Bedürfnisse der technischen Institute — unseren fortgeschritteneren Gewerbe- und sechsclassigen Realschulen entsprechend — im Auge, Garbieri schreibt für angehende Mathematiker. Der Stoff freilich wird sich in den Anfangsabschnitten nicht wesentlich unterscheiden können, wohl aber wird man von der ersten Schrift grössere Ausführlichkeit, von der zweiten eine concisere Schreib- und Darstellungsweise erwarten dürfen, wie es denn auch in der That der Fall ist.

Fontebasso beginnt mit den Elementen der Combinationslehre, betrachtet dann die Inversionen und kommt so auf dem gewöhnlichen

---

* Eine Fortsetzung jenes Werkes war, wie man uns auf Befragen mittheilte, wenigstens bis December vorigen Jahres noch nicht erschienen.

Wege zum Begriff der Determinante selbst. Zur Bestimmung des Vorzeichens für jedes einzelne Glied der ausgerechneten Determinante bedient er sich eines Verfahrens, welches seiner Angabe nach von Bellavitis herrührt und principiell mit demjenigen identisch ist, welches vom Referenten im 6. Jahrgange der „Zeitschrift f. math. u. naturwissensch. Unterricht" vorgeschlagen wurde: „*quando si scrive ciascun elemento si esamini se la sua riga orizzontale sia superiore ad uno o più degli elementi già scritti (senza badare di quante righe sia superiore) ed in tal caso gli si pongano al di sopra altrettanti punti: scritti gli* n *elementi, al loro prodotto si attribuisca il segno* $+ 0 -$, *secondo che il numero totale di quei punti è pari, o dispari*". Bei der Determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 z_3$ hat man z. B. das Schema $x_1 y_2 z_3$: 0 Punkte, positiv; $x_1 y_3 \dot{z}_2$: 1 Punkt, negativ; $x_2 \dot{y}_1 z_3$: 1 Punkt, negativ; $x_2 y_3 \ddot{z}_1$: 2 Punkte, positiv; $x_3 \dot{y}_1 \dot{z}_2$: 2 Punkte, positiv; $x_3 \dot{y}_2 \ddot{z}_1$: 3 Punkte, negativ. Für willkürliche Determinanten mag diese Fassung der Grundregel ihr Gutes haben, bei durchgehender Anwendung der doppelten Indices aber kann man sich einfacher helfen.

Die folgenden „Articoli" des Buches behandeln successive: Die Vertauschung der Reihen, den Laplace'schen Zerlegungssatz, der hier wohl ein wenig zu früh kommt, die Addition und Multiplication der Determinanten mit einer Zahl, das Differenzenproduct, die Bildung von Determinantenproducten, reciproke (d. i. adjungirte) symmetrische Determinanten. Damit ist das erste Capitel erschöpft; im zweiten folgt die Auflösung simultaner Gleichungen, Elimination und eine sehr reiche Fülle von Anwendungen der vorgetragenen Lehren auf elementare und höhere Geometrie.

Fügen wir hinzu, dass die Darstellung durchweg eine klare und leichtverständliche ist und dass die äussere Ausstattung sich entschieden über das bei vielen anderen italienischen Werken gewohnte Niveau erhebt, so darf unser Bericht als abgeschlossen gelten. Hervorragende Eigenthümlichkeiten finden sich nicht vor.

Garbieri geht im Ganzen ähnlich zu Werke; seine Entwickelungsweise ist allgemeiner, origineller, allein, wie uns bedünken will, bei weitem nicht so übersichtlich wie die seines Vorgängers. Die geometrischen Anwendungen treten auch bei ihm sehr in den Vordergrund; dabei wird aber auch der rein algebraische Theil nicht vernachlässigt und — etwa mit Ausnahme der Kettenbruchdeterminanten — wird man keine irgend wünschenswerthe Lehre ausgelassen finden.

Ein charakteristischer Vorzug des Garbieri'schen Werkes auch deutschen Büchern gegenüber ist die Ausführlichkeit, mit welcher die Eigenschaften der sogenannten Matrix discutirt werden. Nur sehen wir nicht recht ein, weshalb der Verfasser diesen Namen zuerst ausdrücklich (S. 105) dem Schema von $n(n+1)$ Elementen

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n+1} \\ . & . & . \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n+1} \end{matrix}\right\|$$

vindicirt und erst weit später die allgemeinere Form

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s} \\ . & . & . \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,s} \end{matrix}\right\| \quad (s > n)$$

einführt. Diese letztere ist doch gewiss nicht schwerer verständlich.

Liegt erst die Determinantentheorie Herrn Garbieri's abgeschlossen vor, so besitzt die mathematische Literatur unseres Nachbarlandes ein Werk, welches an Vollständigkeit und — von der schönen historischen Einkleidung abgesehen — auch an Eleganz fast mit der Baltzerschen Encyklopädie concurriren kann.

Eine nachahmungswerthe Sitte ist es, dass die italienischen Buchhändler auf der Rückseite ihrer Verlagswerke die Preise namhaft machen. Die beiden hier besprochenen Lehrbücher kosten bezüglich 3 und 8 Lire italienisch.

München. Dr. S. Günther.

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge von Dr. Alfred Enneper, Professor an der Universität zu Göttingen. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert. 1876.

Schon der Titel des vorliegenden Werkes lässt die Absicht des Verfassers erkennen, durch welche die Eigenthümlichkeit der Behandlung des Gegenstandes bedingt ist. Am Faden der geschichtlichen Entwickelung soll die Theorie der elliptischen Functionen dargelegt werden. Der Gedanke einer solchen historisch-theoretischen Darstellung gerade bei einer Theorie wie der der elliptischen Functionen, die in einem verhältnissmässig kurzen Zeitraume unter der Hand einer nicht sehr grossen Zahl hervorragender Männer zu einem gewissen Abschlusse gekommen ist, kann sicher als ein glücklicher bezeichnet werden. Es wird Jedem, der sich mit elliptischen Functionen beschäftigt, willkommen sein, in einem handlichen Bande nicht nur die auf diese Theorie bezüglichen Arbeiten in möglichster Vollständigkeit citirt, sondern auch die wichtigsten derselben dem Inhalte nach analysirt zu finden.

Die nachfolgende Inhaltsangabe wird zeigen, inwieweit der Verfasser diesen Zweck erreicht hat. Zunächst aber ist hervorzuheben, dass die Art der Darstellung durch den erwähnten historischen Zweck wesentlich bedingt ist. Es ist damit nicht vereinbar, dass ein streng methodischer, didaktischer Gang durchweg innegehalten wird, der von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus die Theorie zu einem Ganzen zusammenfasst; ein wiederholtes Aufnehmen desselben Gegenstandes von verschiedenen Seiten her ist dabei unvermeidlich, entsprechend dem geschichtlichen Fortgange. Trotzdem hat die Einführung in eine Theorie auf dem Wege der Geschichte auch für den Lernenden ihre grossen Vorzüge, weil die Wege, die der Entdecker geht, die naturgemässesten zu sein pflegen, wenn sie auch nicht immer die einfachsten und kürzesten sind.

Indem wir nun den Inhalt des vorliegenden Werkes ins Auge fassen, so finden wir im ersten Abschnitte nach einem kurzen historischen Ueberblick und einigen einleitenden Betrachtungen über die Integrale, welche auf die trigonometrischen Functionen führen, zunächst die Reduction des elliptischen Integrals auf die Normalform nach Legendre. Es schliessen sich hieran einige literarische Nachweisungen über die späteren Arbeiten, betreffend die Transformation auf die Normalform, ohne ein näheres Eingehen auf deren Inhalt.

Hierauf werden im zweiten Abschnitte die elliptischen Functionen nach der ersten Jacobi'schen Weise definirt und ihre fundamentalen Eigenschaften, einschliesslich der doppelten Periodicität, hergeleitet. Auf Grund dieser Eigenschaften werden im folgenden Abschnitte die Entwickelungen der elliptischen Functionen in unendliche Producte aufgestellt, mit Benutzung der Werthe, für welche diese Functionen Null und unendlich werden. Es wird dann das Ungenügende dieses Verfahrens, bei welchem mehrere unbewiesene Voraussetzungen gemacht sind, hervorgehoben und der Weg angebahnt, auf dem die Resultate verificirt werden sollen, indem die gefundenen unendlichen Producte zunächst als neue Definition der elliptischen Functionen aufgestellt werden, wobei nur der Bequemlichkeit halber die alten Zeichen beibehalten sind.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich nun mit dieser Verification, indem zunächst die Quotienten der unendlichen Producte verwandelt werden in unendliche Reihen von Partialbrüchen, und dann durch ein zuerst von Heine angewandtes Verfahren von diesen letzteren Ausdrücken nachgewiesen wird, dass sie der elliptischen Differentialgleichung genügen. Es bleibt hier freilich das Bedenken übrig, dass die Identität der unendlichen Producte mit den Partialbruchentwickelungen nicht hinlänglich erwiesen zu sein scheint.

Hierauf werden die Thetafunctionen als Zähler und Nenner der Ausdrücke für die elliptischen Functionen definirt und nach der zweiten von Jacobi in den Fundamenten angewandten Methode in trigonometrische Reihen entwickelt.

Im fünften und sechsten Abschnitte werden die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Thetafunctionen untersucht und auf Grund dieser eine von den früheren unabhängige Begründung der Theorie der elliptischen Functionen gegeben nach der schönen, von Jacobi in seinen Vorlesungen angewandten Methode, mittels der Rosenhain in die Theorie der vierfach periodischen Functionen eingedrungen ist und welche, wie keine andere, geeignet ist, die principiellen Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden. Die sehr gelungene Darstellung dieser Methode führt der Verfasser in der Vorrede auf eine Vorlesung von C. W. Borchardt zurück.

Das Additionstheorem der elliptischen Functionen hat sich auf diesem Wege als eine unmittelbare Folge aus den Formeln für die Thetafunctionen ergeben. Dieses Additionstheorem wird nun im siebenten Abschnitte von Neuem, und zwar vorzugsweise vom geschichtlichen Standpunkte betrachtet. Es ist zunächst die erste Entdeckung desselben durch Euler, hierauf die Methode von Lagrange dargelegt und endlich werden einige spätere darauf bezügliche Arbeiten erwähnt.

Der achte Abschnitt behandelt zunächst die Legendre'sche Reduction der elliptischen Integrale auf drei Gattungen und ihre Normalformen, und geht dann über zu Jacobi's Darstellung der zweiten und dritten Gattung. Es werden hierauf die 16 Hauptformen der Integrale dritter Gattung entwickelt, auf welche Jacobi durch das Problem der Rotation eines starren Körpers geführt wurde, und der Abschnitt schliesst mit einer kurzen Hinweisung auf die von Rosenhain ausgeführte Umkehrung von zwei Summen zweier Integrale dritter Gattung und die daraus entspringenden dreifach periodischen Functionen.

Es folgt dann im neunten Abschnitte eine eingehende Behandlung der Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Die Darstellung beginnt mit den algebraischen Principien der Transformation von Jacobi und geht dann kurz auf die bezüglichen Untersuchungen von Abel ein.

Hieran schliesst sich eine recht gute und klare Darlegung der Methoden, welche von der Transformation der Thetafunctionen aus die Transformationstheorie der elliptischen Functionen in Angriff nehmen, deren Ursprung ebenfalls auf Jacobi zurückzuführen ist, deren weiterem Ausbau in neuerer Zeit eine grössere Zahl hervorragender Mathematiker ihre Kräfte gewidmet haben und die den Ausgangspunkt bilden für eine Reihe tiefer theils algebraischer, theils zahlentheoretischer Forschungen, welche freilich von dem Verfasser nur beiläufig, ohne ein näheres Eingehen erwähnt werden.

Der folgende Paragraph behandelt einen Gegenstand, der sonst in Lehrbüchern nicht berührt zu werden pflegt und der bis jetzt wenigstens für die Entwickelung der Theorie wohl nicht die Bedeutung gehabt hat, welche anfangs davon erwartet wurde, nämlich die Jacobi'schen Differentialgleichungen, welchen Zähler und Nenner der Transformationsformeln genügen.

Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Darstellung der Untersuchungen von Sohncke und Schröter über die Modulargleichungen, worin diese Gleichungen bis zur Transformation der 13. Ordnung aufgestellt sind.

In den angefügten zwölf Noten sind noch einige Gegenstände behandelt, welche im Zusammenhang des Ganzen keine passende Stelle fanden, und welche theils den Zweck haben, einige der angewandten Sätze näher zu begründen, theils einige specielle Untersuchungen von mehr historischem Interesse weiter auszuführen.

Unter den ersteren erwähnen wir die Ableitung der Fourier'schen Reihe nach einer Methode, welche, um ganz befriedigend zu sein, mindestens noch einiger Ergänzungen und Erörterungen bedürfte. Diese Betrachtung wäre überhaupt vielleicht besser ganz weggefallen, da man bekanntlich für den Umfang, in dem diese Reihen in der Theorie der elliptischen Functionen angewandt werden, mit weit einfacheren Hilfsmitteln ausreicht. Von grösserem Interesse sind die Noten historischen Inhalts, in denen man die ersten geometrischen Untersuchungen über Ellipsen- und Hyperbelbogen, denen die Theorie der elliptischen Functionen ihren Ursprung und ihren Namen verdankt, die Untersuchungen von Fagnano, Landen, Mac Laurin, Euler, d'Alembert und Anderen dargelegt findet.

Diese Inhaltsangabe wird genügen, um einen Ueberblick über den Umfang des behandelten Stoffes zu geben; man ersieht aus derselben zugleich die Grenzen, welche sich der Verfasser gesteckt hat. Die ganze Darstellung ruht wesentlich auf Jacobi'schem Boden; mit ziemlicher Ausführlichkeit sind noch die älteren und gleichzeitigen Arbeiten von Legendre und Abel behandelt, mit Ausschluss des Problems der Theilung. Dagegen sind nicht berührt die in neuerer Zeit ausgebildeten und vielfach angewandten Methoden, die mit der Theorie der Functionen complexen Arguments im Zusammenhang stehen und die unzweifelhaft dazu beigetragen haben, den Einblick in das Wesen der neuen Transcendenten zu vertiefen. Es ist in dieser Beziehung auffallend, dass z. B. das Werk von Briot und Bouquet in dem ganzen Buche nirgends erwähnt ist. Ferner sind nur beiläufig erwähnt ohne ein näheres Eingehen die Betrachtungen von Weierstrass, welche gleichfalls von einer neuen Seite die Grundlagen und den Zusammenhang der Theorie beleuchten.

Wir wollen mit dem Verfasser nicht darüber rechten, inwieweit eine Erweiterung der Grenzen seines Unternehmens nach der einen oder der andern Seite hin zweckmässig oder wünschenswerth gewesen wäre, und räumen gern ein, dass eine Beschränkung bei der Auswahl aus dem reich vorliegenden Stoffe nothwendig war, auch dass das Gewählte geeignet ist, ein wohlabgerundetes Bild von dem geschichtlichen Werden einer Theorie zu geben, welche zu den wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung unseres Jahrhunderts gehört.

Was die Ausführung im Einzelnen betrifft, so sind dem Referenten, abgesehen von der ziemlich beträchtlichen Zahl von Druckfehlern, welche bei Weitem nicht alle in dem Verzeichnisse aufgeführt sind, eine Reihe kleinerer Ungenauigkeiten aufgestossen, von denen die folgenden hervorgehoben sein mögen.

So findet sich gleich zu Anfang auf S. 9 der Ausspruch: „Nach dem Theorem von Taylor ist, wenn v die positive oder negative Einheit nicht überschreitet, $\varphi(u+v)=\varphi(u)+v\,\varphi'(u)+\frac{v^2}{1.2}\varphi''(u)+\ldots$“, ein um so auffallenderes Versehen, als gerade in dem vorliegenden Falle die Giltigkeit der Taylor'schen Reihe unbegrenzt ist. Wenn ferner der Verfasser auf S. 370 die Ansicht ausspricht, dass die von Hermite und Betti gebrauchte Unterscheidung der Thetafunctionen durch zwei Indices die wenigst geeignete sei, so dürfte diese Meinung wohl bei Solchen auf Widerspruch stossen, welche die Zweckmässigkeit einer derartigen Bezeichnung bei den Thetafunctionen mit mehreren Veränderlichen kennen gelernt haben. Auf S. 282 wird als Bedingung der Convergenz der Thetareihe die angegeben, dass der reelle Theil von q kleiner als 1 sei, während es doch heissen sollte „der absolute Werth“ oder „der analytische Modul“.

Endlich findet sich auf S. 449 der Satz: „Jede Function, welche der Bedingung $f(x+i\log q)=-q^{-1}e^{2xi}f(x)$ genügt, ist von der Form $A\,\vartheta(x)+B\,\vartheta_1(x)$, wo A und B von x unabhängig sind“, während hierzu ausser der Endlichkeit und Stetigkeit noch die Periodicität erforderlich ist.

Wenn auch diese und ähnliche Ungenauigkeiten eine etwas grössere Sorgfalt in der Redaction wünschenswerth erscheinen lassen, so verdient die Ausführlichkeit und Genauigkeit in den Citaten, welche überdies in einem alphabetischen Register zusammengestellt sind, um so mehr Anerkennung. Das Werk wird hierdurch sowohl, als durch seinen stofflichen Inhalt zu einem für Lehrer, wie für Lernende gleich nützlichen und empfehlenswerthen Handbuche.

Königsberg, im Mai 1876. H. Weber.

Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, von Carl Neumann. Leipzig, Teubner. 1875. 240 S. 8⁰. Preis 7 Mk. 20 Pf.

Während lange Zeit hindurch die deutsche Literatur auffällig arm an Werken war, welche dazu geeignet schienen, in systematischer Weise in die eigenthümlichen Betrachtungsweisen der mechanischen Wärmetheorie einzuführen und mit ihren Resultaten bekannt zu machen, hat sich dieser Zustand in neuerer Zeit in erfreulichster Weise geändert.

Zu den bedeutendsten Erscheinungen auf diesem Gebiete gehört neben der systematischen Umarbeitung der klassischen Abhandlungen von

Clausius über die mechanische Wärmetheorie ohne Zweifel das vorliegende Werk C. Neumann's. Dasselbe ist, wie der Verfasser in der Vorrede selbst mittheilt, aus Vorträgen entstanden, die vom Verfasser zu wiederholten Malen in Tübingen und in Leipzig gehalten worden sind. Jedermann wird eine derartige Arbeit Neumann's mit einer gewissen Erwartung in die Hand nehmen; auch bei mir war dies der Fall und ich bekenne gern, dass diese Erwartungen nicht nur erfüllt, sondern bei Weitem übertroffen worden sind.

Die Reichhaltigkeit und strenge Systematik des Inhalts, die seltene Klarheit und Schärfe des Ausdruckes weisen dieser Arbeit eine ganz hervorragende Stellung unter den verwandten Erscheinungen an.

Zunächst wird im Vorwort eine eigenthümliche neue Schreibweise eingeführt; das Differential einer Function σ bezeichnet nämlich der Verfasser, wie gewöhnlich, mit $d\sigma$, dagegen wird mit $\eth\sigma$ eine unendlich kleine Grösse überhaupt dargestellt, gleichviel, ob dieselbe mathematisch oder empirisch gegeben ist. Auf diese Weise wird von vornherein manchen Verwechselungen zwischen vollständigen und unvollständigen Differentialen vorgebeugt, durch welche sonst Anfängern nicht selten Schwierigkeiten bereitet werden.

Das erste Capitel behandelt unter dem Titel „Ueber das allgemeine Princip oder Axiom der Energie" die wichtigsten Definitionen und die Hauptsätze der Mechanik, welche in der mechanischen Wärmetheorie fortwährend Anwendung finden, und erläutert hierauf die Aequivalenz zwischen Wärme und Arbeit und das Princip der Energie für ein empirisch gegebenes materielles System. Ganz ausdrücklich wird betont, dass hier die Giltigkeit dieses Princips nur eine Hypothese ist, während dasselbe für ein Newton'sches System bekanntlich nothwendig richtig ist.

Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie für vollkommene Gase. Ziemlich früh wird hier die graphische Darstellungsweise benutzt und vollständig gleichzeitig werden die Begriffe der Curven constanten Druckes, constanten Volumens, constanter Temperatur und die adiabatischen Curven eingeführt. Hierdurch gewinnt die Darstellungsweise ausserordentlich an Eleganz und Durchsichtigkeit. Die Benutzung des Begriffes des Parameters bei der Discussion und Anwendung dieser Curven gestattet eine grosse Schärfe des mathematischen Ausdruckes, welche als ein grosser Fortschritt auf diesem Gebiete bezeichnet werden muss. Das dritte Capitel befasst sich zunächst mit den Eigenschaften der thermischen Curven und hierauf mit den Kreisprocessen der Gase. Hier ist (S. 66) von Neumann eine neue graphische Darstellungsweise der Resultate eines Kreisprocesses eingeführt worden, welche als ein glücklicher Griff angesehen werden kann.

Das vierte Capitel behandelt die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf beliebige Substanzen, deren Zustand durch zwei Argumente p und v, oder v und t etc. vollständig bestimmt ist. Für die Ableitung des zweiten Hauptsatzes beweist N. den Carnot'schen Satz, einmal ausgehend von dem Clausius'schen Axiom, das andere Mal leitet er ihn aus dem Thomson'schen Principe her. Hierauf bestimmt er mit Hilfe eines vollkommenen Gases die universelle Temperaturfunction und zeigt (S. 94), dass die Wärmemenge $\bar{d}Q$, welche einer Substanz zugeführt werden muss, damit sie aus dem Zustande (t, U) in den Zustand $(t + dt, U + dU)$ übergeht, gleich

$$\bar{d}Q = T \, . \, dU$$

ist, wenn T die absolute Temperatur und U den Parameter der adiabatischen Curve bezeichnet. Erst dann wird die Clausius'sche Form des zweiten Hauptsatzes abgeleitet. Alsdann werden die allgemeinen Clausius'schen Formeln und die Kirchhoff'schen Formeln wiedergegeben.

Die Strenge der Betrachtungsweise wird auch hier wieder dadurch documentirt, dass nochmals in einem besondern Paragraphen auf die beiden Voraussetzungen aufmerksam gemacht wird, auf denen die Entwickelung der vorhergehenden Formeln beruht, nämlich darauf, dass man von der Einwirkung der Schwerkraft auf das System absehen kann, und dass die Processe so geleitet werden, dass der Gleichgewichtszustand des Systems nie merklich geändert wird. Ein besonderer Paragraph behandelt einige Anwendungen des Princips der Energie auf tumultuarische Vorgänge.

Der methodische Gewinn, den die hohe Ausbildung der graphischen Darstellungsweise und die Einführung der Parameter der thermischen Curven darbietet, zeigt sich so recht bei Betrachtung der Verdampfungserscheinungen. Die Entwickelungen über die gegenseitige Lage der Grenzcurven des Verdampfungsgebietes einer Substanz einerseits und der übrigen thermischen Curven andererseits gestalten sich überraschend einfach und gewinnen durch die Berücksichtigung der kritischen Temperatur und der bekannten Bemerkung Kirchhoff's über den Knick der Spannungscurve gesättigter Dämpfe beim Gefrierpunkte ungemein an Anschaulichkeit und Schärfe.* Nach der Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Drucke folgt im nächsten Capitel (§ 50) eine graphische Darstellung der sämmtlichen Aggregatzustände des Wassers; dieselbe ist neu und wird jedem Physiker höchst interessant sein, selbst wenn er damit nicht einverstanden sein sollte, dass die labilen Gleichgewichtszustände

---

* Ganz beiläufig wollen wir bemerken, dass in der Tabelle für die specifischen Wärmen gesättigter Dämpfe S. 143 (61), welche dem Verdet'schen Buche entlehnt ist, für Chloroform falsche Zahlen aufgenommen worden sind. Der Rechenfehler Verdet's beruht auf einer Verwechselung der Regnault'schen Interpolationsformeln. Auch im Texte wird (dieselbe Seite Z 4 v. u.) eine geringfügige Aenderung dadurch nothwendig. Die richtigen Zahlen findet man in meinem Handbuche der mechan. Wärmetheorie (Braunschweig, Vieweg), Bd. I, S. 626.

flüssigen Wassers unter 0^0 nicht mit berücksichtigt worden sind. Auf jeden Fall haben wir es in § 50 mit einem methodischen Fortschritte zu thun, der nicht blos dem Verfasser dieser Zeilen Anregung zu neuen Untersuchungen über die Beschaffenheit der Grenzcurven sein wird.

Auch die Behandlung der Gasgemische im siebenten Capitel und die Untersuchungen über die Dampfspannungen und Wärmeentwickelungen bei Herstellung wässeriger Schwefelsäurelösungen, die Ableitungen der hierher gehörigen Kirchhoff'schen Formeln bieten zum Theil neue, für die Beurtheilung der Vorgänge wichtige Gesichtspunkte. Das achte Capitel beschäftigt sich mit den Kirchhoff'schen Gleichungen für die Wärmeentwickelungen bei Gasabsorptionen und zeichnet sich, ebenso wie das vorhergehende, durch scharfe Sonderung der einzelnen möglichen Fälle aus; uns will es jedoch scheinen, als sei diesem Gebiete, in welchem bekanntlich Theorie und Erfahrung noch nicht übereinstimmen, im Vergleich zu dem Uebrigen ein allzugrosser Raum gewidmet. Ein kurzer Anhang berichtet über die Krönig-Clausius'sche Theorie der molecularen Stösse und einige Einwendungen, welche gegen dieselbe erhoben worden sind.

Die Darstellung ist, wie schon mehrfach erwähnt worden, meisterhaft präcis und die Entwickelungen sind, wie man dies bei Neumann'schen Arbeiten gewöhnt ist, so ausführlich mitgetheilt, dass es dem Anfänger ungemein leicht werden muss, sich an der Hand dieses trefflichen Lehrbuches eine sehr respectable Summe von Kenntnissen in der mechanischen Wärmetheorie zu erwerben. Die zahlreichen Anmerkungen über die beschränkenden Voraussetzungen, unter denen die Formeln gelten, sind sehr geeignet, die Leser an Präcision zu gewöhnen und dieselben auf die Grenzen der Anwendbarkeit der Theorie aufmerksam zu machen.

Sehr, fast zu dürftig, sind die festen und tropfbar flüssigen Substanzen und die dahin gehörigen interessanten experimentellen Bestätigungen der Thomson'schen Formel weggekommen. Ueberhaupt behandelt der Verfasser die mechanische Wärmetheorie mehr wie eine mathematische, als wie eine physikalische Disciplin; wir wollen ihm hiermit keinen Vorwurf machen, obgleich das einschlagende experimentelle Gebiet dadurch fast zu sehr in den Hintergrund gedrängt worden ist.

Dass der Verfasser in diesem einführenden Lehrbuche die Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie in den übrigen Theilen der Physik und in der Technik unberücksichtigt gelassen hat, finden wir ganz in der Ordnung. Sollen wir zum Schlusse, weil dies nun einmal bei derartigen Besprechungen üblich ist, einige Bedenken geltend machen, so würde das Wesentlichste derselben wohl sein müssen, dass der Verfasser eine grosse Anzahl neuer Bezeichnungen eingeführt hat: calorische Curven für adiabatische, Temperaturcurven für Isothermen, Dampfcurven für Curven constanter Dampfmenge, die Buchstaben ε, E, H, η für die einmal allgemein acceptirte Bezeichnung der innern Energie durch U, 𝔄 für das mechanische Aequivalent der Wärme u. s. f. Hierdurch wird dem Anfänger, der sich durch das Neumann'sche Buch in die Disciplin einführen lässt, das Studium der einschlagenden Abhandlungen und umfänglicheren Handbücher sehr erschwert, ohne dass er dadurch einen entsprechenden Gewinn hätte, dass die neuen Namen deckender als die allgemein üblichen wären.

Ferner halten wir die Besprechung der Roche'schen Formel (S. 129) für die Spannungscurve gesättigter Dämpfe und die Erörterungen über die approximativen Gesetze (S. 144) in einem derartigen Buche für vollkommen entbehrlich. Dagegen glauben wir es als einen Mangel ansehen zu sollen, dass die überhitzten Dämpfe nur unter der Voraussetzung untersucht sind, dass dieselben dem Ausdehnungsgesetze vollkommener Gase folgen; die Arbeiten Hirn's und Zeuner's über diese Frage wären einer Beachtung wohl werth gewesen. Jedenfalls sind aber die hier angeführten wenigen Punkte, in denen wir anderer Ansicht als der Verfasser sind, sehr untergeordnet gegen die eminenten Vorzüge des Buches. Auch der Physiker, der diesem Theile seiner Wissenschaft sehr nahe steht, wird das Neumann'sche Buch mit grossem Interesse lesen und durch dasselbe manche dankenswerthe Anregung empfangen; den Studirenden der Mathematik aber muss dasselbe auf das Allerwärmste empfohlen werden. Die deutsche physikalische Literatur ist durch die Neumann'schen Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme um ein sehr werthvolles Werk bereichert worden.

Chemnitz, April 1876. Richard Rühlmann.

Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid, von Prof. L. Majer. Programm des königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1874—1875. 32 S. 4°.

Schulprogramme mit wissenschaftlichen Beilagen zu versehen ist eine mühevolle, nicht selten eine undankbare Arbeit. Sie muss meistens vollzogen werden, während der Verfasser mit eigentlichen Schulgeschäften in erhöhtem Grade zu thun hat. Ein vorgeschriebener, meistens recht kleiner Raum darf nicht überschritten werden; schliesslich geht manche schöne Untersuchung durch die fast geheime Art der Veröffentlichung für die Wissenschaft spurlos zu Grunde. Manchmal freilich tragen die Verfasser selbst einen Theil der Schuld, wenn es ihren Abhandlungen an Verbreitung und Anerkennung fehlt. Wir möchten meinen, die Uebersendung eines Exemplars an die Redaction einer Fachzeitschrift lohne immer den Versuch, selbst wenn aus diesem oder jenem Grunde eine eingehendere Besprechung einmal nicht erfolgen sollte. Die Verfasser mathematischer Schulprogramme scheinen unserer Zeitschrift gegenüber diese Ansicht im Allgemeinen nicht zu theilen, und so sind wir z. B. nur durch einen Zufall mit der in der Ueberschrift genannten Untersuchung bekannt geworden, welche wir nicht anstehen, als einen dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik zu bezeichnen. Seit Friedlein's Ausgabe der Erläuterungen des Proklos zu den euklidischen Elementen können dieselben von Jedem, dem die alte Geometrie ein Interesse einflösst, gelesen werden; zwischen dem Können und dem Thun liegt aber nicht selten ein ziemlicher Zwischenraum. *Graeca sunt, non leguntur* ist vielen Mathematikern aus der Seele gesprochen, und so ist es schon eine verdienstliche Arbeit, durch lesbare deutsche Uebersetzungen Denen zu Hilfe zu kommen, welche vor dem griechischen Urtexte sich scheuen. Herr Majer hat einer solchen Aufgabe sich unterzogen, und wenn wir auch begreifen, dass der ihm zur Verfügung stehende Raum ihn nöthigte, sich auf ein verhältnissmässig kleines Stück des Proklos (S. 178—198 und 362—373 der Friedlein'schen Ausgabe) zu beschränken, so möge er ein Lob seiner Uebersetzung in unserem Bedauern über diese Beschränkung erkennen. Herr Majer hat übrigens sich nicht auf eine blosse Uebersetzung beschränkt und auch nicht überall die Reihenfolge des Originals beibehalten. Seine Abhandlung nimmt vielmehr folgenden Verlauf. Nach einer sechs Seiten füllenden Einleitung über die Persönlichkeit des Proklos, über seine Schriften, über philosophische und mathematische Vorbegriffe folgt die Uebersetzung des Abschnittes über die Forderungen (S. 178—193). Die fünfte und letzte Forderung bildet die Grundlage der Parallelentheorie und bot dem Uebersetzer Gelegenheit, hier einzuschalten, was Proklos (S. 362—373) gelegentlich des XXVIII. und XXIX. Satzes der Elemente zur Kritik dieser Lehre mittheilt, welche seit Ptolemaios, wenn nicht schon früher, einen Zankapfel der Geometer gebildet hat. Nun erst kehrt Herr Majer zu dem unterbrochenen Texte zurück, übersetzt den Abschnitt über die Grundsätze (S. 193—198) und schliesst mit einem $4\frac{1}{2}$ Seiten langen, „Resultate“ überschriebenen Paragraphen. Ueberall hat er auf die philosophische und historische Tragweite der Erörterungen des Proklos hingewiesen, welcher bei aller Ehrfurcht vor Aristoteles und Euklid doch eine gewisse Unabhängigkeit sich bewahrte und ebensowohl zu verbessern, als einfach zu erläutern suchte. Herr Majer selbst hat durch zahlreiche Anmerkungen für das bessere Verständniss seiner Uebersetzung gesorgt. Leider haben sich dabei verschiedene sinnentstellende Druckfehler eingeschlichen. So in Anmerkung 1 zu S. 13, deren zweiter Satz vermuthlich durch Wegfallen eines Wortes geradezu unverständlich geworden ist; so in Anmerkung 3 zu S. 1, wo Heron von Alexandrien an den Anfang des 3. Jahrhunderts v. Chr. versetzt ist, in Anm. 1 zu S. 18, wo von den Asymptoten der Parabel, Hyperbel u. s f. die Rede ist; so in Anm. 1 zu S. 11, wo Ofterdinger a. a. O. erwähnt ist, während wir jenen angeführten Ort selbst (offenbar sind die Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik von Prof. Dr. L. F. Ofterdinger, Ulm 1860, gemeint) weder vorher, noch nachher genannt finden. Die Uebersetzung selbst haben wir bereits oben als eine durchaus lesbare bezeichnet. Wer andere Uebersetzungen griechischer Mathematiker zu vergleichen Gelegenheit hatte, welche oftmals ein Zurückgehen auf den Urtext erfordern, wenn der deutsche Wortlaut verstanden werden soll, wird das Lob zu würdigen wissen, welches in dieser Bezeichnung enthalten ist. Nur Eines möchten wir nicht billigen. Herr Majer hat die griechischen Buchstaben an den Figuren gleichfalls übersetzen zu sollen geglaubt; er hat dabei die Reihenfolge des griechischen Alphabets einerseits, des lateinischen andererseits in Parallele gebracht, also A, B, Γ u. s. w. durch A, B, C u. s. w. wiedergegeben. Dadurch wird nicht nur die Vergleichung einzelner Stellen der Uebersetzung mit dem Original unnöthig erschwert, es entgeht dem Leser auch eine Eigenthümlichkeit der griechischen Geometer. In Fig. 1, 4, 6, 8 und 9 der Majer'schen Uebersetzung kommt I vor, ein Buchstabe, dessen kein griechischer Geometer in einer Figur sich bedient. Hultsch hat diesen Umstand, soviel wir wissen, zuerst betont. In seinem bekannten Aufsatze über den heronischen Lehrsatz sagt er (Zeitschr. Math. Phys. IX, S. 247, letzte Zeile): „Aber dasselbe Iota fehlt auch allenthalben bei Euklid. Nach dem Grunde davon haben wir hier nicht weiter zu fragen; es ist einfach als Thatsache anzuerkennen.“ Nach einer uns mündlich gemachten Bemerkung von Professor Studemund dürfte der Grund ein ganz ähnlicher gewesen sein wie dafür, dass man in modernen Abhandlungen, welche ihren Gegenstand dem Exponentialcalcul entnehmen, den Buchstaben e, in solchen, welche der Differentialrechnung angehören, den Buchstaben d als constanten Coefficienten zu vermeiden sucht. Man will eben Verwechselungen und Missverständnisse meiden, und solche waren bei Benutzung des I allerdings zu gewärtigen, weil dieser Buchstabe sich in keiner Weise von einem einfachen verticalen Striche unterschied. Uns persönlich leuchtet diese Ansicht ausserordentlich ein.

Cantor.

Hermanni Useneri ad historiam astronomiae symbola. Bonner Programm zur Geburtstagsfeier Kaiser Wilhelm I. am 22. März 1876. 35 S. 4°.

Das 11. Jahrhundert ging zu Ende. Michael Psellus, mit dem Ehrennamen des „Ersten der Philosophen“ belegt, zeugt für die niedere Stufe, auf welche damals zu Byzanz die Nachfolger altgriechischer Astronomie herabgesunken waren, zeugt für die Unmöglichkeit, aus solcher

Entwürdigung durch eigene Kraft wieder zu Ehren zu gelangen. In der That dauert der Zustand der Versumpfung byzantinischer Astronomie wohl 230 Jahre, von 1092, als dem Datum einer letzten Schrift des Psellus, bis 1322. In diesem letztgenannten Jahre wurde von unbekanntem Uebersetzer eine griechische Bearbeitung eines persischen astronomischen Werkes angefertigt, als dessen Verfasser Σαμψ μπουχαρης genannt ist. Prof. Gildemeister hat in Samps den Namen Shamsaldîn wiedererkannt; allerdings wird ein Shamsaldîn von Bukhara nirgends erwähnt, dagegen schrieb Shamsaldîn von Samarkand vermuthlich im Jahre 1276 ein Büchlein über die Fixsterne in persischer Sprache, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass ein und derselbe Astronom, der bald in Bukhara, bald in Samarkand lebte, mit beiden Bezeichnungen gemeint sein mag. Nun folgten sich ziemlich rasch weitere byzantinische Bearbeitungen persischer Schriften, mittelbare Abflüsse der im griechischen Texte nahezu vergessenen Syntaxis des Ptolomaeus, welche selbst eine der Quellen persischer Gelehrsamkeit bildet. Chioniades von Constantinopel, welcher jedenfalls vor 1346 lebte, Georg Chrysococces im Jahre 1346 selbst, Theodorus Meliteniota (nach Leo Allatius, dem gelehrten Kenner byzantinischer Geschichte im 14. Jahrhundert, unter der Regierung des Johannes Paläologus 1361 lebend), der Mönch Isaak Argyrus vor 1368, das sind die Hauptvertreter persisch-griechischer Astronomie. Und nun erfolgt in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts ein neuer Umschlag. Mit Nicolaus Cabasilas beginnt ein neues Geschlecht von Gelehrten, welche auf Ptolemaios selbst zurückgreifen und so die Wiedergeburt klassischer Wissenschaft in Europa vorbereiten. Was wir hier in wenige Zeilen zusammengedrängt haben, bildet den Inhalt des hochinteressanten Programms, dessen philologischer Verfasser sich auch in unserer Wissenschaft wohlbewandert erweist. Herr Usener hat aus Handschriften verschiedener Bibliotheken umfassende Bruchstücke der obengenannten Byzantiner des 14. Jahrhunderts gesammelt, welche er hier zum ersten Male veröffentlicht, Belegstücke für seine Auffassung, deren innere Wahrheit überdies sich selbst als Stütze dient.

Cantor.

Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearb. von Karl Hattendorff. Hannover, Carl Rümpler. 1876.

Das von der Verlagshandlung vorzüglich ausgestattete Werk enthält auf 358 Seiten gr. 8° den in der Ueberschrift genannten Stoff in folgender Anordnung. Der erste Theil bis S. 176 enthält die Lehre von der Schwere als allgemeine Lehrsätze über die Potentialfunction und das

Potential, der zweite Theil die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus.

Wie in der Vorrede erwähnt, ist das Buch aus den Vorlesungen hervorgegangen, die Riemann über Schwere, Elektricität und Magnetismus im Sommersemester 1861 in Göttingen gehalten hat. Der Stoff also ist der Hauptsache nach Riemann's Eigenthum, während die Form und Darstellung das Werk des Herausgebers ist.

Mit Freuden erkennt Referent an, dass sich wenigstens bei ihm die in der Vorrede ausgesprochene Hoffnung, „dass das vorliegende Buch den Freunden Riemann's nicht unwillkommen sein werde", vollständig erfüllt hat. Das vorliegende Werk stellt sich dem entsprechenden über partielle Differentialgleichungen würdig an die Seite und Referent erblickt namentlich auch darin einen historischen Werth, dass es genau den Standpunkt erkennen lässt, auf dem im Jahre 1861 die mathematische Physik über Schwere, Elektricität und Magnetismus sich befand. Insbesondere verdient auch noch die Klarheit hervorgehoben zu werden, mit der die einzelnen Abschnitte behandelt sind, so dass auch die Studirenden der Mathematik das Buch mit Vortheil benützen können.

Der Umfang, in welchem der gebotene Stoff behandelt ist, ist schon genügend durch die Zeit und Gelegenheit bezeichnet, der das Buch seine Entstehung verdankt, und durch den Raum, welchen die beiden Haupttheile einnehmen; Referent glaubt daher von einer nähern Inhaltsangabe absehen zu können. Von dem, was die spätere Zeit zu dem behandelten Stoffe hinzugeliefert hat, ist nur verhältnissmässig wenig erwähnt. Hier hätte Referent gern gesehen, wenn der Herausgeber nicht nur, wie er gethan hat, die Begriffe von Potentialfunction und Potential nach der Anregung von Clausius genauer geschieden, sondern wenn er auch die strengeren Begriffe von Ergal, Energie und Entropie aufgenommen hätte.

In der Literaturangabe möchten wir fragen, ob Clausius: Die Potentialfunction und das Potential, und Beer: Einleitung etc., mit Absicht weggelassen worden sei?

Th. Kötteritzsch.