Werk

Titel: Neue Erörterungen über Plus und Minus

Untertitel: Tadel einiges bisherigen und Darstellung eines genaueren Gebrauches desselben für...

Autor: Busse, Friedrich Gottlieb von

Verlag: Aue

Ort: Cöthen

Jahr: 1801

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH II, 3654

Werk Id: PPN599581573

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599581573|LOG_0004

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=599581573

Erstes Stück.

Vergleichung zwischen meiner Methode und Klügels Darstellung der gewöhnlichen Methode im Gebrauche des Plus und Minus.

Vorerinnerung. Der öffentliche Gedankenwechsel, welcher zwischen mir und meinem Freunde, dem **Herrn Professor Klügel** in Halle, nach dem Abdrucke seines Briefes *) nothwendig wird, würde das schwerlich geworden seyn, wenn von meinen vielen Untersuchungen über die bisher gewöhnliche Methode, aus denen meine harte Anklage der-

*) Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von C. F. Hindenburg. Eilftes Heft, Stück V.

derselben *) entstanden ist, wenigstens diejenigen wären gedruckt worden, die ich unter dem Titel,

Prüfung des bisherigen, und Ausübung eines genaueren Gebrauches des Entgegengesetzten in der Geometrie, insbesondere für die Formeln der Berührung und Küssung, und dadurch zu einiger Verbesserung der Mechanik bereits angewandt,

schon vor einigen Jahren mitzutheilen wünschte und versprach; Falls sich hinreichende Subscribenten dazu fänden. Ihre Anzahl fiel so unbeträchtlich aus, daß mir die Sache in dieser Hinsicht verdrüßlich wurde, und ich ihre fernere Bearbeitung auf bessere Zeiten des deutschen Buchhandels verschob.

Durch

*) In der kleinen Schrift: Formulae linearum subtangentium ac subnormalium, tangentium ac normalium, et castigatae et diligentius, quam fieri solet, explicatae, Lipsiae 1798; und in ihrem deutschen Anhange.

Durch jenen Brief sehe ich mich indessen genöthigt, dem Publikum sogleich zu zeigen, daß ich allerdings bereit bin, meine Anklage zu erhärten; und dieses erste Stück der gegenwärtigen Schrift enthält nun, was mir aus alter Erinnerung her in die Feder floß, als ich jetzt vor allem andern Herrn Klügels Darstellung der gewöhnlichen Methode *) aufs neue durchlas, mit dem Vorsatze, gerade auf diejenigen Beyspiele, welche Er zur Erläuterung dieser Methode behandelt, auch die meinige anzuwenden, und dabey mit anzuführen, was sich bey dieser Gelegenheit zur Vergleichung beyder Methoden mir darbiethen würde. Aus diesem Gesichtspuncte hat man dieses erste Stück zu betrachten.

Auf die Aeußerungen des erwähnten Briefes das nöthige zu erwiedern, will ich, bey dem eiligen Abdrucke des gegenwärtigen Stückes, für

*) Archiv, drittes Heft, Stück III, und viertes Heft, Stück V.

ein späteres verschieben, damit nicht etwa in der ersten Wärme einiges zu lebhaft ausgedrückt, und dadurch einer Freundschaft, die mir äußerst werth ist, irgend unnöthig, sey es auch nur sehr vorüber gehend, nachtheilig werde. Ich wünsche vielmehr recht angelegentlich, und werde zu meinem Theile die nöthige Vorsicht darauf verwenden, daß unsere gegenseitige, bisher so wohlwollende Zuneigung, wie sie zwischen Mathematikern so leicht entsteht, auch während dieser mathematischen Verhandlungen keineswegs unterbrochen werde.

---

§. 1. Das erste Beyspiel, worauf der Hr. Prof. Klügel seine Methode anwendet, ist folgendes. (Archiv, drittes Heft, Seite 314.)

„Aufgabe. „Zwey Körper A, und B, „bewegen sich auf derselben geraden Linie mit „gegebnen Geschwindigkeiten: es ist gegeben, der „Abstand der Zeitpunkte, in welchen sie ihre „Bewegung anfangen, und der Abstand der „Körper in dem früheren Zeitpuncte; daraus soll „der Punct gefunden werden, wo sie zusammen „treffen.“

„Hier ist es wesentlich dieselbe Aufgabe, die „Richtungen der Bewegung mögen einerley oder „entgegengesetzt seyn, und es mag A oder B sich „zuerst zu bewegen anfangen. Einen der vier „Fälle wählt man, um die Rechnung auf den„selben anzuwenden. Für die andern drey Fälle „gilt eben die Rechnung, wenn man nur die „Vorzeichen der Größen, die entgegengesetzte „Beziehung erhalten, ändert.“

Fall I. „Es sey die Geschwindigkeit des „$A = a$, des $B = b$, nach entgegengesetzten „Richtungen; ihr Abstand in dem Zeitpuncte, „da A seine Bewegung anfängt, $= c$, die Zeit, „um welche B später anfängt, $= m$, der von „A bis zum Zusammentreffen mit B beschriebene

„Weg

„Weg = x, der von B beschriebene = y, so ist

$$x = \frac{a(c + mb)}{a + b};\ y = \frac{b(c - ma)}{a + b}.\text{“}$$

§. 2. Hr. Klügel hat nicht mitgetheilt, auf welchem Wege Er diese Formeln gefunden habe. Es kann aber für seine Methode, nach welcher die sämmtlichen Grössen bloß nach ihrer absoluten Großheit zu betrachten sind, aus der Aufgabe folgende Gleichung und folgende Proportion hergenommen werden:

$$x + y = c, \text{ und } x - ma : y = a : b.$$

Aus der letztern folgt $x = \frac{a}{b} y + ma$, und $y = \frac{b}{a} x - ma$; welches in die Gleichung gebracht, die obigen Formeln giebt, die es bloß mit der absoluten Großheit der beyden gesuchten Linien zu thun haben sollen und können.

§. 3. Ich halte dagegen für besser, wenn man diese Aufgabe der Algebra unterwerfen will, es in der That, und daher auf eine solche Weise zu thun, daß die Formeln zugleich auch das richtige ∓ der gesuchten Grössen bestimmen, und überhaupt alle Ausdrücke in der sämmtlichen

Behand-

Behandlung auch algebraisch richtig und zusammenhängend bleiben. Für diese Absicht dringt sich mir sogleich die Gleichung auf

$$x - y = c.$$

Denn wenn der Körper A zu seinem Wege x, wodurch er mit dem B zusammentrifft, auch noch die Gegengrösse *) des Weges y hinzufügte; so würde er dann überhaupt den Weg = c durchlaufen haben.

Dabey kann und muß x − y weiter nichts, als die algebraische Summe aus dem Wege des A, und dem Rückwege des B bedeuten. Ob x und y bejaht oder verneint sey, muß ich hierbey noch völlig unentschieden lassen; weil ja für diese Grössen, in so fern man sie als gesuchte Wirkungen des sämmtlichen Gegebnen behandelt, auch das Bestimmen ihrer bejahten oder verneinten Beschaffenheit dem sämmtlichen Gegebnen zusammen genommen, zu unterwerfen ist. Damit aber die gegebnen Grössen dies Bestimmen wirklich leisten können; so ist nun freylich auch nothwendig, sie sämmtlich nach ihrem algebraischen $\mp$ in den Calcul zu bringen. Daher ich statt

*) Verglichen. Stück VI §. 1. Ich bitte dieses VIte Stück vorläufig durchzulesen, da ich so eben einsehe, daß ich durch Beziehung auf dasselbe, meinen hiesigen Vortrag abkürzen kann.

statt der obigen Proportion in §. 2, vielmehr schreiben muß:

$$x - ma : y = a : -b;$$

denn $x - ma$ (dieser algebraische Ueberschuß des Weges x über den Weg ma, diese algebraische Summe aus x und der Gegengrösse des ma) und y, sind zwey Wege in einerley Zeit beschrieben, also ihren beyden (constanten) Geschwindigkeiten proportional. Von diesen Geschwindigkeiten aber ist, nach obigem Iten Falle der Aufgabe, die Geschwindigkeit b der Geschwindigkeit a entgegen gerichtet; und der Geschwindigkeit a wird offenbar genug gerade diejenige Richtung zugeschrieben, welche ich, um mit Hrn Klügels Auflösung in die meiste Uebereinstimmung zu kommen, für die bejahte annehmen muß; weil Hr. Kl. die Entfernung c so gut als bejaht aufgeführt hat, und ma davon abzieht.

Meine Proportion giebt nur

$$x = \frac{a}{-b} y + ma, \text{ auch } y = \frac{-b}{a} x + mb,$$

und beyde Ausdrücke mit meiner Gleichung $x - y = c$ verbunden, geben

$$x = a. \frac{c + mb}{a + b}, \text{ und } y = -b. \frac{c - ma}{a + b};$$

welches nun die zeichenrichtigen Formeln sind.

§. 4. Von Hrn Kl. wird sogleich hinter seiner obigen Auflösung (§. 1.) erinnert, es müsse „hier (für Fall I der Aufgabe) c grösser als ma seyn.“

Dieses Einschränken der Aufgabe hat Hr Kl. ohne Zweifel ihrer Zeichnung zu verdanken.

Ich kann dagegen eben diese Schranken aus meinen zeichenrichtigen Formeln selbst schon sehr bequem und sicher folgern. Denn wenn ma grösser als c wäre; so würde meine Formel für y einen bejahten Werth bestimmen: und diese Wirkung des sämmtlichen Gegebnen stände im Widerspruche mit demjenigen Theile des Gegebnen, nach welchem der Weg y mit einer verneint gerichteten Geschwindigkeit — b soll beschrieben werden!

§. 5. Den obigen Fall I der Aufgabe nunmehr dahin abgeändert, daß

Fall II, statt der bejahten Richtung a ihre Gegenrichtung — a gegeben sey, und alles übrige bleibe wie vorhin; so wird man dafür aus meinen Formeln, durch Umkehrung ihrer sämmtlichen a, erhalten

$$x = -a. \frac{c + mb}{b - a}, \text{ und } y = -b\, \frac{c + ma}{b - a};$$

wiederum zeichenrichtig.

§. 6.

§. 6. Hr. Pr. Klügel erhält dafür zuvörderst $-x = \frac{-a(c+mb)}{-a+b}$, und daher

$$x = a\frac{c+mb}{b-a};\ y = b\frac{c+ma}{b-a}.$$

§. 7. Schon nach diesen wenigen Vergleichungen zwischen unserm beyderseitigen Verfahren, scheint mir an Hrn Klügels Formeln und Methode folgendes tadelhaft zu seyn.

1. Er ist während seiner Formeländerung genöthigt, selbst auch vor der einen gesuchten Grösse x das Zeichen zu verändern. Sollte dieses nicht aufs wenigste den Vorwurf verdienen, daß es äußerst unbequem und sehr bedenklich sey? Denn bey verwickelten Aufgaben wird man oft genug nur mit vieler Mühe gewiß werden, ob durch diese und jene Veränderungen in den gegebenen Grössen, auch das Zeichen der gesuchten, für die Gründe der Klügelschen Methode sich ändere, nähmlich die gesuchte Grösse nun zu subtrahiren oder zu addiren sey, indeß sie in dem ersten Falle, auf welchen man den Calcul anlegte, als etwas additives oder subtractives aufzuführen war. Da man schon beym ersten Zeichnen der Aufgabe, ihre Linien einem zusammenhängenden algebraischen $\mp$ nicht unterworfen, sondern sie sämmtlich,

und

und für den **algebraischen** Calcul oft sehr gewaltsam, so gut als bejaht angesetzt hat; so dürfte es auch oft genug mehr Glück als deutliche Uebersicht des aufgedrungenen Verfahrens seyn, wenn man bey neuer Zeichnung des veränderten Falles, in Beziehung auf den ersten, allenthalben die gehörige Umkehrung trifft. Gesetzt indessen, daß man durch neue Zeichnung allemahl darüber gewiß werden könne; so würde doch selbst schon dieses wiederhohlte Zeichnen eine sehr mühseelige Arbeit ausmachen, deren gänzliche Ersparung auch schon einen von den **großen Vortheilen** abgiebt, welche die algebraische Behandlung einer geometrischen Aufgabe leisten soll, und **wirklich** auch **vortrefflich** leisten **kann**!

2. Für den Fall I brachte Hr. Kl. die nöthige Einschränkung (§. 4.) bey, mit deren Ueberschreitung die Aufgabe unschicklich, die Auflösung unmöglich wird. Dagegen hat Er es für den IIten Fall **gar nicht bemerkt**, daß für diesen eine **andere Einschränkung** eintritt! Ohne Zweifel war sie, selbst bey dieser so leicht übersehlichen Aufgaben, Ihm gerade deshalb entschlüpft, weil es in der That verdrüßlich und ermüdend ist, auch eine zweyte Zeichnung wiederum sehr genau zu betrachten, und das Verhältniß ihrer Grössen wiederum so umständlich zu variiren, als es zur Entdeckung jener Schranken nöthig

nöthig ist, wenn sie vermittelst der Zeichnung sollen entdeckt werden.

§. 8. Meine zeichenrichtigen Formeln in §. 5. legen dagegen sogleich vor Augen, daß sowohl x als y **verneint**, wie sie wegen der im Falle II gegebnen Stücke $-a$ und $-b$ nothwendig es seyn müssen, nach dem gesammten Gegebnen der Aufgabe, aus welchem die Formel entsteht, es nur werden können unter der Einschränkung, daß $b < a$ sey: daher wir sogleich wissen, daß, diese Einschränkung überschritten, die Aufgabe unschicklich wird.

(Genauer, sollte die Einschränkung heissen, daß b nicht $>$ a seyn dürfe; indem ja bey $b = a$ noch die Werthe $x = \infty$ und $y = \infty$ entstehen, und man, um für sie das Zeichen $-$ zu erhalten, nur anzunehmen braucht, daß das hiesige $b-a$ **gerade ein $+0$ sey, das heißt**, eine Gränze der **bejahten** Werthe $b-a$ sey. Da es indessen angenehmer ist, die Schranken durch logisch bejahte Sätze ausgedrückt zu haben: so will ich jene $a = b$ durchaus, auch in der Folge, beseitigt wissen; um so mehr, da Hr. Kl. bey seiner Einschränkung in §. 4, selbst auch den Werth $x = 0$ und $y = 0$, ohne Zweifel als einen solchen beseitigt hat, den man eigentlich nicht zu wissen verlangt; und ich auch hierin Ihm fernerhin folgen werde.)

§. 9. Gegen meinen 2ten Tadel dürfte eingewandt werden, daß man die Schranken der Aufgabe auch aus Hrn Klügels Formeln abnehmen könne; indem an ihnen der Widerspruch sich dadurch zeige, daß sie die gesuchte Grösse mit einem $\div$ belegen, für die sie doch nach Voraussetzung seiner Methode, bloß den absoluten Werth angeben müßten. Ich erwiedere, daß dieses bey der gegenwärtigen leichten Aufgabe allerdings so zutrifft; nach der Natur der Methode aber bey verwickelten Aufgaben ungemein leicht verfehlt werden kann, nahmentlich auch durch die Ungewißheit, ob das Verneintausfallen der gesuchten Grösse wirklich eine Ueberschreitung der nöthigen Schranken, oder ob es etwa bloß den Uebergang in einen andern Fall gerade anzeige. (Verglichen hier oben §. 7. No. 1, und in Hrn Klügels Abhandlung §. 14.)

Bedenkt man auch, daß jene Einschränkungen offenbar zur Vermeidung eines Widerspruches zwischen denjenigen beyden $\mp$ der gesuchten Grösse nöthig werden, von denen das eine schon durch einen Theil des Gegebnen, das andere aber erst aus dem sämmtlichen Gegebnen, vermittelst seiner Formularverbindung, bestimmt wird; wie kann man sich gesichert wissen, diesen Widerspruch vermittelst einer Methode zu entdecken, die weit entfernt, die Formularverbindung

auch

auch dem ∓ der gegebnen Grössen gemäß anzulegen, vielmehr diesen Grössen es geradezu aufdringt, daß sie sämmtlich so gut als bejaht sollen betrachtet werden, auch wenn sie das neben einander gestellt, wirklich nicht sind für die Algebra, der man sie doch übergiebt! Diese letzten Worte enthalten eigentlich ein Bedenken gegen die gewöhnliche Methode, wodurch sie meines Erachtens durchaus unrathsam wird. Unten etwas mehr darüber! Für jetzt nur noch

3. einen dritten Tadel, der von den vorigen ganz unabhängig ist. Wenn man nicht gleich Anfangs, bey dem Anlegen des Calculs, aufs reine bringt, worin das ∓ der behandelten Grössen unter sich und neben einander bestehen kann und soll; sondern wenn man nur erst hinterher, am Ende der Auflösung und im einzelnen, die absoluten Grössen einem etwas weitschichtigen und schwankenden Begriffe von entgegengesetzter Beziehung unterwirft, und dem gemäß in ihr Gegentheil verkehrt: so ist man in großer Gefahr, darin so gewaltig zu irren, daß der Werth der Formeln auch in seiner absoluten Grösse unrichtig ausfallen kann. Selbst Hr. Klügel hat sich meines Erachtens einer solchen unsicheren Schlußart überlassen, indem er so eben folgendes behauptet.

§. 10.

§. 10. „Fängt B in jedem dieser beyden „Fälle (I u. II) um m früher als A seine Bewe„gung an (welches Fall III u. IV heissen mag); „so wird nun das Zeichen des m, das ist mb „und ma geändert.“ (Obige Seite 314 der Klügelschen Abhandlung.)

Dadurch erhält Hr. Kl. die Formeln

für Fall III, $x = a\,\dfrac{c - mb}{a + b}$; $y = b\,\dfrac{c + ma}{a + b}$

= = IV, $x = a\,\dfrac{c - mb}{b - a}$; $y = b\,\dfrac{c - ma}{b - a}$.

§. 11. Ich erhalte freylich als zeichenrichtige Formeln

für Fall III, $x = a\,\dfrac{c - mb}{a + b}$; $y = - b\,\dfrac{c + ma}{a + b}$

= = IV, $x = - a\,\dfrac{c - mb}{b - a}$; $y = - b\,\dfrac{c - ma}{b - a}$;

daher mich auch diese Formeln schon gewiß machen, daß in Hrn Klügels Formeln die absoluten Werthe richtig angegeben werden. Es findet aber doch in der Bedeutung des m für jene Formeln und für die meinigen, eine gar beträchtliche Verschiedenheit statt. Hr. Kl. behauptet, das m für III u. IV sey dem m für I u. II entgegengesetzt zu bezeichnen, indem es in I u. II bedeutet,

daß

daß sich A um m früher als B, in III u. IV aber, daß sich B um m früher als A schon zu bewegen anfängt. Ich behaupte dagegen: wenn die neben III u. IV von mir aufgeführten Formeln gerade für die Fälle III u. IV gehören sollen, folglich ihr m bedeuten soll, daß sich B um m früher als A schon bewegt; so ist dann ihr m eben so gut ein bejahtes, dem c gleichbezeichnetes m, als ich es mit Hr. Kl. für Fall I u. II aufgeführt habe, wo es bedeutet, daß sich A um m früher als B schon bewegt!

§. 12. Ich kann mir vorstellen, daß diese meine Behauptung sehr paradox scheinen muß. Man hat sich gar zu sehr an die Meinung gewöhnt, daß es erlaubt sey, jeden früheren und späteren Zeitraum, also jede zwey Zeiträume, von denen der eine **vor** der andere nach einem gewissen Zeitpuncte verstreicht, eben deshalb für zwey Grössen zu achten, die wie + und − einander entgegengesetzt seyen. Es trifft auch diese Meinung zusammen, und findet gleichsam ihre geometrische Construction, in dem eben so verbreiteten Wahne, daß man z. B. zwey verticale Linien, deren eine oberhalb die andere unterhalb einer horizontalen liegt, gerade dieser sogenannten entgegengesetzten Lage wegen, als bejahte und verneinte Linien betrachten könne! Ich bin von der Unzuläßlichkeit dieses Verfahrens

zuerst

zuerst durch Erfahrung gewiß geworden, da ich es endlich mit Deutlichkeit übersah, daß solch ein Lagen ∓ unter den Händen der größten Analytiker, für verwickelte Fälle, zu deren Auflösung wirklich Algebra gebraucht wird, oft auch in den Resultaten noch sich selbst widersprechend bleibt; ob es gleich unzählig öfter geschieht, daß die Widersprüche schon vor Erscheinung der Resultate sich aufgehoben haben; und überdies jenes ∓ als völlig anpassend und ausreichend für alle solche Auflösungen sich bewähren kann, bey denen man, genau betrachtet, so gut als keine Buchstabenrechnung oder so gar Algebra, sondern nur gemeine Arithmetik, durch Buchstaben ausgedrückt, gebraucht.

§. 13. Davon überzeugt, suchte ich die Quellen unsers algebraischen ∓ auf, und fand dasselbe freylich auch schon durch die Buchstabenrechnung, noch weit nöthiger aber gerade durch dasjenige Verfahren veranlaßt, weshalb man in Teutschland zwischen Algebra und Buchstabenrechnung unterscheidet, und wodurch auch in der That das Instrument der Algebra an Geschmeidigkeit und Brauchbarkeit die bloße Buchstabenrechnung wenigstens eben so weit übertrifft, als von der Buchstabenrechnung die gemeine Arithmetik, für manche Absicht übertroffen wird.

Also wäre es doch traurig, wo nicht etwa sogar auch sich selbst widersprechend, wenn man der Geometrie zu gefallen, wenigstens da, wo man Buchstabenrechnung oder sogar auch Algebra auf sie anzuwenden wünscht, jenem algebraischen $\mp$ entsagen, und sich bloß auf das Addition und Subtraction befehlende $\mp$ der gemeinen Arithmetik, einschränken wollte! Sonderbar auch! dachte ich ferner, daß man zu dieser Herabstimmung jenes algebraischen $\mp$ gerade durch die Geometrie sollte genöthigt seyn; da doch jenes mehrumfassende $\mp$ gerade dadurch veranlaßt ist, daß man auch **sächliche Beziehungen**, neben und mit den **absoluten** Grössen der Sachen, gleichsam ganz freywillig sich der Rechnung und Grössenschätzung unterwerfen sah; und nun gerade die Geometrie eine Sache ist, die mit allen ihren Beziehungen deutlicher, als irgend eine andere Rechnungssache vor Augen liegt!

§. 14. Es war mir daher eine große Freude, nicht nur von vorne her, sondern auch durch den glücklichsten Erfolg bey Untersuchungen, die in dieser Hinsicht zu den schwierigsten gehören, überzeugt zu werden, daß man zu jener **Herabstimmung** des $\mp$ **nirgend** gezwungen ist; sondern daß sich nahmentlich auch die Geometrie auf das völligste der Algebra unterwerfen läßt. Dazu ist nun freylich nothwendig, den geometrischen Stoff so zu behandeln, daß er alle dem Genüge leisten kann, was die Algebra für ihren Sprachgebrauch, für ihre Gewohnheiten und für ihre Theoreme voraussetzt; und alles dieses sah ich sich trefflich in der einzigen Voraussetzung vereinigen und begründen; daß nicht nur alle die absoluten Grössen der Geometrie, welche man in dem Calcul durch Zahlen aufzuführen hat, sondern mit ihnen auch diejenigen Beziehungen zwischen ihnen, durch welche sie einander vermehren und vermindern, sämmtlich einer **einzigen** Zahlenreihe zu unterwerfen sind, welche zu diesem Behufe wirklich die Algebra, jener vermindernden Beziehungen wegen, auch auf **negative Zahlen**, **jenseits** der 0, ausgedehnt hat.

§. 15. Diese Ausdehnung fordert aber offenbar, daß vermittelst eben **derselben** (bejahten) **Einheit**, wodurch man die **vermehrenden** Grössen mißt, die **vermindernden ebenfalls** sollen gemessen werden. Denn **nur** durch **diese Forderung kann** einer Grösse B, die zu einer andern A hinzugefügt dieselbe vermindert, grade **die verneinte** Zahl — b zufallen, welche anzeigt, daß die B durch b **mahliges verneintes** Daseyn, durch b mahliges **Beraubtseyn** derjenigen (bejahten) Einheit (+) 1 entsteht, durch deren a mahliges Bejahen, a mahliges Vorhandenseyn,

 die

die A hingesetzt und dargestellt wird. Wollte man sich erlauben, die B nach der verneinten Einheit -1 zu messen, so würde auch der B ebenfalls eine bejahte Zahl b zu Theil werden; welches in der That dem Verfahren unsrer Algebra im ganzen genommen nicht gemäß wäre, auch statt einer einzigen Zahlreihe

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

deren Glieder sämmtlich durch grösser oder kleiner von einander unterscheidbar sind, und seyn müssen, offenbar zwey Zahlenreihen neben einander annähme, in denen je zwey Glieder gleich groß sind, und nur durch die ausdrückliche Hinzufügung können unterschieden werden, daß das eine gerade eine von den vermehrenden, das andere aber eine von den vermindernden Grössen abmessen solle; daher man auch, um sie dieser Verschiedenheit gemäß verschieden zu behandeln, noch während des Calculs und bey Beurtheilung seiner Resultate, immerfort jene äußere ausdrückliche Hinzufügung zu beachten hat.

§. 16. Will man strenge seyn, so muß man gar nicht einmahl von einer verneinten Einheit sprechen für die Algebra; weil ihre einzige Zahlenreihe natürlich nur nach einer einzigen Einheit geordnet seyn kann, welches die bejahte ist. (Verglichen Stück VI. §. 7.). Eigentlich könnte

könnte man auch gegen den Ausdruck, bejahte Einheit, erinnern, daß die Einheit für die ganze algebraische Zahlenreihe nur eine einzige ist, die durch ihr amahliges Bejahen die Zahl (+) a giebt, also **dadurch** auch = (+) 1 giebt, für a = 1; durch amahliges Verneinen aber, (ich verstehe allemahl das algebraische **beraubende** Verneinen) die Zahl (−) a giebt, also **dadurch** auch = (−) 1 für a = 1. Indessen kann man das Einzige der Einheit ein für allemahl bemerkt, übrigens auch den Ausdruck verneinte Einheit neben dem Ausdrucke bejahter Einheit immerhin dulden, wenn man nur einen, den Wirkungen der Algebra angemessenen Begriff damit verbindet. Dieser ist: die verneinte Einheit muß **gleich** seyn der Gegengrösse der bejahten Einheit. (Vergl. Stück VI. §. 1.)

Jede verneinte Lineareinheit muß also **gleich** seyn der Gegengrösse von derjenigen Lineareinheit, in Hinsicht auf welche, jene die verneinte ist.

Einer geraden Linie AB **Gegengrösse selbst** ist **nur** die Linie BA, unter der ausdrücklichen Bedingung: daß die AB durch eine Bewegung beschrieben gedacht werde, die in A ihren Anfang, in B ihr Ende hat; und dagegen die BA als Erfolg einer Bewegung gedacht wird, die in B ihren Anfang, in A ihr Ende hat. Denn nur unter

unter diesem Beding können die beyden Linien-beschreibungen AB + BA zusammen genommen, und eben so gut auch BA + AB zusammen genommen, sich einander mathematisch vernichten, und = 0 geben.

Kürzer: wenn AB mit der Richtung von A aus nach B hin, und dagegen BA mit der entgegengesetzten Richtung von B aus nach A hin beschrieben gedacht wird, nur unter diesem Beding kann von den beyden Linien AB und BA, die eine die Gegengrösse der andern seyn.

(Man sieht wohl ein, daß eben diese Behauptungen auch für krumme Linien AB, nahmentlich auch für Kreisbogen gelten: nur daß man bey ihnen den Vor- oder Rückgang ihrer Beschreibung nicht durch einfache Richtung und Gegenrichtung bestimmen kann, sondern durch Beschreibungs-Sinn und Gegensinn ausdrücken mag, und bey Kreisbogen besonders, auch sehr gut auf Drehungssinn bringen wird. Für hiesige Erörterungen brauche ich fernerhin nur gerade Linien anzunehmen.)

§. 17. Machen wir uns nun zur Regel, wo wir eine Linie durch ihre beyden Gränzpuncte nennen, gerade den Punct, in welchem ihre Beschreibung anfangen soll, voran zu setzen; so werden wir uns sogleich sehr anschaulich von folgenden Sätzen überzeugt finden:

$AB + BA = 0$; $BA + AB = 0$; ferner $AB = -BA$, und $BA = -AB$; daher denn wo $AB = a$ gesetzt wird, auch $BA = -a$ ist.

§. 18. Ferner seyen AB und $A\mathfrak{B}$ zwey einander gleich große, etwa verticale Linien, aber die eine AB von A aus nach dem Zenith hin, und die andere $A\mathfrak{B}$ dagegen von eben dem A aus zum Nadir hin gerichtet; und $AB = a$ gesetzt: so ist $A\mathfrak{B} = BA = -AB = -a$;
und $\mathfrak{B}A + AB = -(-a) + a = 2a$;
auch ist $BA + A\mathfrak{B} = A\mathfrak{B} + A\mathfrak{B} = -2a$;
und eben so wird man nun alle übrige Folgerungen, die sich aus diesem Begriffe von **bejahter** und **verneinter** Beschreibungsrichtung herleiten lassen, auf das trefflichste dem algebraischen $+a$ und $-a$ entsprechend finden.

§. 19. a) Dagegen denke man sich durch das A dieser beyden verticalen Linien AB und $A\mathfrak{B}$ eine horizontale gezogen, und angenommen, die AB solle **deshalb bejaht** heissen, weil sie **oberhalb** der **horizontalen** liegt, und die $A\mathfrak{B}$ **deshalb verneint** heissen, weil sie **unterhalb** der **horizontalen** liegt: so ist nun ebenfalls $AB + A\mathfrak{B} = 0$? **Nach** der **Voraussetzung** freylich! weil ja damit schon angenommen ist, daß $AB = a$ genannt, dann $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -a$ seyn soll, und nun allerdings $a - a = 0$ ist! Schade nur,

nur, daß die Geometrie sich jenes Voraussetzen nicht will aufdringen lassen; denn sie legt, wenn A𝔅 und AB aneinander gefügt werden, zum Resultate eine Linie vor Augen, die = 𝔅B, also = 2AB = 2A𝔅 ist; aber nicht = o!

Das Uebel steckt eigentlich darin, daß man sich durch jene Voraussetzung den Weg verrennt hat, irgend eine Linie zu zeichnen, die z. B. für die AB, auch nach geometrischer Anschaulichkeit, den Nahmen der Gegengrösse verdienen könnte. Denn da die AB über der horizontalen liegt, so müßte ihre Gegengrösse, das heißt, die Linie, deren Beschreibung zur Beschreibung der AB hinzugethan, dieselbe auf = o zurück brächte, nothwendig ebenfalls über der horizontalen liegen. Aber nach jener Voraussetzung sollen ja alle die Linien, welche über der horizontalen liegen, eben deshalb bejaht heissen, und zwey bejahte Linien können zu einander gethan, nicht = o geben.

§. 19. b) Wenn ich mir durch eine gezogene Horizontallinie AN (Tafel I Fig. 4) zwey Rubriken bestimmt denke, in deren einer, oberhalb der horizontalen, ich nur solche Grössen, die einander additiv sind, durch verticale Linien AB und EO hinzeichne; und in der andern Rubrik, unterhalb der horizontalen, alle diejenigen

jenigen Grössen, die von jenen zu subtrahiren sind, durch verticale Linien AD, EH und KU darstelle; so werde ich doch nun **oberhalb** der horizontalen alle die einander additiven und deshalb mit + bezeichneten Linien, und unterhalb der horizontalen alle diejenigen Linien, welche von jenen zu subtrahiren, und in dieser Hinsicht mit — zu bezeichnen sind, vor Augen haben? Das freylich wohl! Indessen wäre auch damit noch nichts, als nur ein solches rubriciren vollführt, wie man es bey der gemeinen Arithmetik vorläufig vornimmt, wenn man etwa zwischen mehrern Einnahmen und Ausgaben das Saldo wissen will, und zu dem Ende die sämmtlichen Einnahmen in eine, die sämmtlichen Ausgaben in eine andere Colonne setzt.

Das Verfertigen beyder Colonnen hat zur Absicht, sowohl die Einnahmen als die Ausgaben für sich zu summiren, und dann die kleinere Summe von der grössern abzuziehen.

Eben diese Absicht für jene beyden geometrischen Rubriken auszuführen, müßte man doch sicherlich die in der obern Rubrik neben einander gezeichneten Linien AB und EO, so aneinander längen, daß man statt ihrer eine einzige Linie AO erhielte; und eben so müßte man auch alle Linien der untern Rubrik so aneinander längen,

daß

daß man statt ihrer eine einzige AU erhielte. Jedes von diesem aneinander längen geschieht nun schon nach einer dafür gehörigen Richtung, indem sich die Linien oberhalb der horizontalen nur nach oben hin, und die Linien unterhalb der horizontalen nur nach unten hin vergrössern können. Schon hier tritt also der Gebrauch von + = und − = Richtung ein!

Nun ist noch übrig, die kleinere Liniensumme von der grössern abzuziehen. Zu dem Ende muß man die kleinere, welches hier die obere AO seyn mag, aus ihrer obern Lage AO wegnehmen, und auf die untere AU als A'O' dergestalt hinlegen, daß A' in U, und O' zwischen U und A fällt; wodurch dann unterhalb A das Resultat AO' abgeschnitten wird. Bey dieser letztern Operation fällt nun in die Augen:

1) daß man, um das Resultat zu finden, die AO als A'O' anlegen, und als Gegengrösse der O'U betrachten muß, wozu nun schlechterdings nothwendig ist, die A'O' und O'U als entgegengesetzt gerichtet zu betrachten;

2) daß man durch die Heruntertragung der AO in die Stelle A'O' hin, den Fehler bezahlt, den man gleich beym Anfange des Verfahrens dadurch begieng, daß man auch das oberhalb und unterhalb gelegen seyn, und nicht

vielmehr

vielmehr und bloß das ober- und niederwärts gerichtet seyn für dasjenige ansah, wodurch das Addition und Subtraction befehlende + und − zu construiren sey.

Bey einer so leichten Aufgabe, als ich hier geschildert habe, wird man freylich der fehlerhaften Voraussetzung hinlänglich eingedenk bleiben, um sich durch Ortsversetzung der einen Liniensumme wieder gehörig einzubringen. Für verwickelte Aufgaben aber ist die dadurch entstehende Lücke in der geometrischen Construction, und ihre gewaltsame Ausfüllung sehr bedenklich. Und während des Ausfüllens ist man ja gezwungen, der **Voraussetzung zu widersprechen**, daß die Linien welche unterhalb der horizontalen liegen, deshalb verneinte Linien seyen! Auch die versetzte A´O´ liegt ja unterhalb der horizontalen, und muß doch, indem sie den, an absoluter Grösse ihr gleichen Theil der AU vernichten soll, nothwendig als eine bejahte Linie betrachtet werden!

§. 20. Eben so nun, wie die beyden Linien AB und A𝔅 in §. 19. a), von denen die eine oberhalb, die andere unterhalb A liegt, gerade dieser Lage wegen dem algebraisch Entgegengesetzten nicht entsprechen, sondern dieser Lage ungeachtet eine jede von ihnen vielmehr bejaht oder verneint heissen kann und muß, je nachdem man

sich

sich dieselbe mit einer bejahten oder verneinten Richtung beschrieben denkt, eben so kommt es auch bey zwey Zeiträumen (§. 12.) deren einer vor, der andere nach einem gewissen Zeitpuncte verstreicht, nicht auf dieses frühere und spätere Verstreichen, sondern auf die Richtung dieses Verstreichens an, ob beyde wie + − entgegengesetzt zu betrachten sind, so daß dieses ∓ für das ganze System des algebraischen Calculs aneinander hängend vorhalte.

§. 21. Sollte mir nun hier vielleicht erwiedert werden, daß man nach Hrn Klügels Methode es mit dem gewöhnlichen ∓ der Algebra eben nicht zu thun haben wolle, sondern durch jener − Zeichen lediglich das subtrahiren einer absoluten Grösse von andern ebenfalls nur absolut betrachteten Grössen, angedeutet werden solle; und mag dabey von mir bey Seite gesetzt werden, ob es rathsam sey, unsere mehr umfassende Algebra auf solche Eingeschränktheit in der Geometrie der Alten herabzubringen, auch dies vielleicht nicht durchaus möglich sey, sondern bey vielen Aufgaben und ihren gewöhnlichen Behandlungen sich selbst widerspreche: so muß ich doch selbst auch gegen das additiv und subtractiv setzen des m in den obigen Formeln §. 10, noch folgendes zu bedenken geben,

§. 22. 1) Wenn m, des A späteren oder früheren Bewegungsanfang als B hat, bedeutend, ein subtractives oder additives m abgeben sollte; so müßte doch dieses in Hinsicht auf eine Zeitdauer geschehen, die mit den beyden (dem späteren und dem früheren) m einerley Fortgangs- oder Wachsthums-richtung hätte, also zu dem Zeitpuncte hin, da beyde Körper einander treffen, gleichsam gerichtet wäre. Zu diesem Behufe müßte man also die Aufgabe schlechterdings vermittelst solcher Gleichungen auflösen, deren beyde Seiten gerade Zeitausdruck abgäben. Sey p die Zeit, welche A gebraucht um seinen Weg x zu vollenden, und q die Zeit, welche B nöthig hat, um seinen Weg y zu beschreiben; so hat man allerdings $p - m = q$ für Fall I und II, und dagegen $p = q - m$, also auch $p + m = q$, für Fall III und IV. Da sich p und q vermittelst der gegebnen und gesuchten Grössen in §. 1 ausdrücken lassen, so können allerdings vermittelst dieser Zeitgleichungen auch x und y gefunden werden.

Schon aus Hrn Klügels oben (§. 10) angeführten Worten, und aus der ganzen Tendenz seiner Methode, ist es mir nicht wahrscheinlich, daß Er gerade diese Zeitgleichungen vor Augen gehabt, und auf sie die Umkehrung das m begründet habe. Auch hätte Er in diesem Falle es ausdrücklich erinnern müssen, daß Er seine

Formeln

Formeln vermittelst solcher Zeitgleichungen gefunden habe, und in ihnen, so lange sie noch Zeitausdrücke abgeben, das m für Fall I und II, oder das m für Fall III und IV, wie subtractiv oder additiv anzusetzen sey: denn schlechterdings nur bey diesen Zeitgleichungen, kann dieses subtractiv- oder additiv-seyn des m, mit schicklicher Deutlichkeit erkannt werden. Diese Gleichungen können aber um so leichter verfehlt werden, weil sie in der That einen sehr unnöthigen Umweg ausmachen; und mir wenigstens der Gang, wodurch ich (§. 2) Hrn Klügels Formeln abgeleitet habe, weit natürlicher scheint.

Mögen indessen die Formeln für x und y entstanden seyn wie sie wollen, so ist in diesen Formeln und ihren Gliedern, von Wegen und von deren $\mp$ die Rede; und dafür muß dann meines Erachtens, gar nicht einmahl die Frage entstehen, ob m an sich, in so fern es früher oder später bedeutet, hier additiv oder subtractiv sey!

2) Eine Hauptquelle vieler Undeutlichkeit und Unrichtigkeit in dem bisher gewöhnlichen Gebrauche des $\mp$ besteht gerade darin, daß man zwischen den verschiedenartigen $\mp$, deren oft gar viele bey einer einzigen Aufgabe vorkommen, nicht gehörig unterscheidet. Bey der obigen Aufgabe müßte

müßte doch das früher und später, auch wenn es als + − entgegengesetzt wäre, gerade ein Zeit ∓ seyn! Nun ist es ja wohl hinreichend, die bloße Vorstellung eines Zeit ∓ vorgeführt zu erhalten, um sogleich zu entscheiden, daß unsere obige Aufgabe es mit einem Zeit ∓ gerade gar nicht zu thun haben will. Es ist dort gar nicht die Rede davon, wie viel längere oder kürzere Zeit bey den verschiedenen Fällen der Aufgabe zu ihrer Vollziehung, es sey an Länge der Zeitdauer schlechthin, oder auch an Lage der Zeitdauer von einem gewissen Zeitpuncte an gerechnet, verstreiche! Sondern man frägt nach Länge der **Wege** x und y, wofür denn die gehörig algebraische Auflösung zugleich auch das ∓ **ihrer** Richtungen angeben kann und muß: und nicht nur in den Formeln, sondern selbst auch bey der ganzen Auflösung, wenn man die natürlichste dazu wählt, wird offenbar das um m Früherbewegen des A für den Calcul bloß betrachtet, in so fern dadurch der A körper sich dem gemeinschaftlichen Treffungspuncte schon **vorläufig nähert**; (vorläufig hier und fernerhin genannt, was von dem einen Körper schon geschieht, ehe auch der andere sich bewegt.)

§. 23. Folglich muß jenes m unserer obigen, für Fall I erhaltenen Formeln, wenn es in sein Gegentheil − m verändert werden soll, (welches

(welches die Algebra sich muß gefallen lassen,) solch eine vorläufige Bewegung, und zwar ebenfalls des A bedeuten, wodurch sich A vorläufig um ma von dem Treffungspuncte entfernt; und ich bin aus diesen Gründen völligst gewiß, daß meine neben III und IV in §. 11 aufgeführten Formeln, falls sie durch Verkehrung des m aus meinen Formeln für I und II entstanden seyn sollen, dann gerade nur für die ganz neuen Fälle I* und II* gehören, in denen alles bleibt wie in I und II, nur daß man in den neuen annimmt, es habe A sich vorläufig schon von dem Treffungspuncte um ma entfernt, also um $-$ ma $= \alpha\varphi$ im Falle I*, und um $-$ m. $-$ a $=$ ma $= \alpha\delta$ im Falle II* (Tafel I Fig. 1.)

§. 24. Dabey aber kann nun gar wohl die Algebra gefragt werden, ob sie etwa eben diese Formeln auch für andere solche Fälle würde anzugeben haben, in welchen m ebenfalls, wie im Falle I und II, bejaht bleibe? Dieses zu erforschen, würde ich bedenken, daß meine Formeln für Fall I und II in der Gleichung G) $x - y = c$, und in der Proportion P') $x - ma : y = a : - b$ begründet sind, (so daß für Fall II auch a in P' verneint zu setzen sey); und daß durch Verkehrung des m, lediglich die Proportion verändert werde in

folgende

folgende P*) $x+ma : y = a : -b$.

Nun bedacht, daß $-ma : +mb = a : -b$ durch sich selbst ist, also ——————————

die Proportion $x : y+mb = a : -b$, welche ich P‴ nennen will, und die obige P* aus einander folgen; so erhellet, daß P* eben die Werthe für x und y geben muß, welche P‴ dafür geben würde.

Diese P‴ aber stellt in ihren beyden ersten Gliedern gerade diejenigen beyden Wege dar, welche A und B gleichzeitig beschreiben, falls sich B vorläufig um $m.(-b)$ dem Treffungspuncte genähert hat. Das ist nun aber gerade der Fall III; und wird Fall IV, wenn man sich auch a verneint giebt.

Auf diese Weise bin ich nun freylich gewiß, daß die Formeln, welche durch das Verkehren des m, aus denen für I und II entstehen, in ihrer Gestalt völlig übereinstimmen müssen mit denen, die für III und IV gehören, aber gerade dann, wenn sie dafür gehören, keinesweges ein Verkehren des m voraussetzen.

§. 25. Dieses Zutreffen der Gestalt ist auch eigentlich darin begründet, daß in der That die Proportion, welche neben der Gleichung G) zur Bestimmung der x und y gebraucht wird, nur nöthig hat, zwey gleichzeitige Wege des A und B aufzuführen. Ob es die von A und B wirklich beschriebenen, also für Fall III die x und $y + mb = y - m.(-b)$ sind; oder ob es die dafür erdichteten $x + ma$ und y sind, die zu ihrer Beschreibung einen um m längeren Zeitraum als die wirklichen erfordern würden, also, um den wirklichen Treffungspunct nicht zu verrücken, voraussetzen müßten, daß sich A in der vorläufigen Zeit schon um ma vom Treffungspuncte wegbewegt, und dagegen B in dieser vorläufigen Zeit geruht hätte; das alles kann die Bündigkeit der Auflösung nicht stöhren, wo man Algebra dazu gebraucht, die auch solche verneinte Grössen, als es die $\alpha\,\varphi$ hier ist, mit umfassen, und mit der dahin gehörigen Verkehrung des m es zu thun haben kann.

Wer sich aber bloß mit einer, auf die Geometrie der Alten eingeschränkten, und bloß durch deren absolute Grössen constructiven Buchstabenrechnung begnügen will; für den findet die obige Erklärung dieses Zutreffens gar nicht Statt; sondern es bleibt dann ein verdecktes, unbemerktes Mitwirken der Algebra vermittelst ihres negativen Gebiethes, jenseits der o (§. 15.) welches man ihr zu entziehen vergebens versucht hatte.

Ich werde in der That nur nöthig haben, jenes Mitspiel in den algebraisch verneinten

Linien

Linien abzusondern; — — — und Hrn Klügels Art zu schließen wird sich; wenn man damit nicht auf die oben von mir erwähnten Zeitgleichungen zurück geht, sondern sie so, wie es in seinem Vortrage nur geschehen ist, unmittelbar auf die Wegeformeln anwendet; wird sich unter dieser Bedingung, sage ich, auch noch in ihren Resultaten als unzureichend darstellen.

§. 26. Zu diesem Behufe brauche ich nur zu verlangen: in obiger Aufgabe I und III, sollen nicht der A und B sämmtliche Wege x und y, sondern nur diejenigen Wege z und v zu finden seyn, welche während der Zeit, daß sich A und B beyde schon bewegen, von ihnen gemacht werden.

Nach gewöhnlicher Methode, für diese z und v bloß ihre absoluten Grössen gesucht, und den Calcul auf Fall I (§. 1) angelegt, hat man $z : v = a : b$; also $v = \frac{b}{a} z$ auch $z = \frac{a}{b} v$.

Ferner ist $ma + z + v = c$;

daher $z = a \frac{c - ma}{a + b}$ und $v = b \frac{c - ma}{a + b}$

§. 27. Um nun aus diesen Formeln diejenigen für Fall III herzuleiten, hätten wir doch mit Hrn Kl. auf folgende Weise zu schließen.

Die schon gefundenen Formeln gehören für Fall I, in welchem A **sich** um m **früher als** B, oder, welches **damit** offenbar (nähmlich bloß im Gebiethe der Geometrie der Alten geblieben, allerdings **damit offenbar**) einerley ist, B **sich** um m **später als** A zu bewegen anfängt. Daraus auf den Fall III überzugehen, der von dem vorigen bloß darin verschieden ist, daß nun B **sich** um m **früher als** A zu bewegen anfängt, brauchen wir nur m in sein Gegentheil zu verkehren. Daher für den Fall III,

die Formeln $z = a\,\dfrac{c + ma}{a + b}$ und $v = b\,\dfrac{c + ma}{a + b}$!

und **diese Formeln sind falsch**! Denn für Fall III gehören

ja $z = a\,\dfrac{c - mb}{a + b}$ und $v = b\,\dfrac{c - mb}{a + b}$.

Die durch Umkehrung des m hier erhaltenen Formeln gehören vielmehr hier eben so gut, wie die vorhin (§. 10.) durch Umkehrung des m erhaltenen, für einen **ganz andern** Fall der Aufgabe, für einen Fall, der sich bloß der algebraischen Auflösung allenfalls aufdringen läßt, und dann bedeuten muß, daß sich **gerade** A in der vorläufigen Zeit m schon von dem Treffungspuncte um ma entfernt habe; ein Fall, auf den die Geometrie der Alten bey obiger Aufgabe irgend

irgend zu kommen gar keine Veranlassung hat, und zu dessen Darstellung sie das dazu gehörige Gebieth nicht besitzt!

§. 28. Dieses wäre nun ein ganz merkwürdiges Beyspiel, wie sehr man, selbst bey einer so leichten Aufgabe, fehl gehen könne, wenn man sich einem so **heterogenen** Additiv- und Subtractivseyn, als für die hiesigen **Wegeformeln** jenes **Früher** und **Später** es ist, zu überlassen wagt. Denn es ist ja wohl gewiß genug, Hr. Prof. Kl. hat das Umwenden des m unmittelbar in den Formeln vorgenommen, und darauf gegründet, weil ihm das früher und später wie additiv und subtractiv vorschwebte. Allerdings kommt dieses Vorschweben zur Deutlichkeit, wenn man auf die oben von mir erwähnten Zeitgleichungen zurückgeht: aber das zu thun, wäre wider den Geist der ganzen Klügelschen Abhandlung. Auf jene **Zeitgleichungen** zurückgehen, und darin m bald subtrahieren bald addiren, hiesse eigentlich, für **jeden Fall besonders** die Formel aus ihren ersten Gründen herleiten; wie es genau betrachtet **Newton** thut, bey seiner Behandlung dieses Problemes in Arithm. vniuerſ. quaeſt. arithm. Probl. V. Hr. Klügel will dagegen zeigen, wie man aus den **Formeln**, die man für einen Fall erhalten habe, sogleich auf die Formeln der übrigen Fälle, bloß dadurch schließen könne,

daß

daß einige Grössen, die im ersten Falle additiv sind, in andern Fällen subtractiv werden, und umgekehrt (daher ich auch die Bedingung kurz vor §. 26. zu machen, volles Recht hatte.)

§. 29. Noch dürfte mir hier vorgelegt werden; daß zwar nicht hier, wo ich behaupte nach Hrn. Klügels Methode das m umgekehrt zu haben, aber doch oben in §. 10, wo Hr. Klügel selbst es thut, die dortige Umkehrung, auch wenn man bey den Formeln stehen bleibt, könne gerechtfertigt werden durch Hrn. Klügels Erklärung von entgegengesetzten Grössen:

„Entgegengesetzte Grössen sind solche, bey „welchen außer ihrer Quantität noch eine gewisse Beziehung betrachtet wird, zufolge der „bey ihnen (und bey ihren Producten und Quotienten) *) Addition und Subtraction mit einander zu vertauschen sind, wenn sie mit andern „Grössen verbunden werden."

und nun sey ja offenbar, daß das m in den Formeln für Fall I und II, und das m in den Formeln für Fall III und IV dieser Erklärung Genüge leisten, auch wenn man bloß die Formeln vor Augen hat!

Ich

*) Verglichen §. 9 der Klügelschen Abhandlung mit ihrem §. 2.

Ich erwiedere, daß dieses Genügeleisten allerdings sehr offenbar ist, wenn man es schon weiß, daß die aus I und II durch Umkehrung des m entstehenden Formeln wirklich für III und IV gehören!

Aber woher es im voraus einsehen, daß das m für diese, und das m für jene, der in der Erklärung angegebnen Beziehung Genüge thun werden?

Um von diesen beyden m es einzusehen, daß des einen wegen in den Formeln alles das zu
addiren
subtrahiren sey, was des andern wegen darin zu
subtrahiren
addiren ist, müßte man ja folgendes überschaut haben.

Wenn m gar nicht vorhanden, wenn $m = o$ wäre: so würde zwischen Fall I und III kein Unterschied seyn, sondern

für beyde sich $x = a\dfrac{c}{a+b}$ und $y = b\dfrac{c}{a+b}$ ergeben;

indem sich A und B in dem von beyden gleichzeitig auszufüllenden Wege c, nach Verhältniß ihrer beyden Geschwindigkeiten zu theilen hätten.

Wenn sich nun aber, Fall I, A um m früher schon als B bewegt; so wird des A nunmehriger Weg x^I aus obigem x entstehen, wenn man

addirt

addirt ma, und des $a\frac{c}{a+b} - a\frac{c-ma}{a+b}$ absolute Grösse $a\frac{ma}{a+b}$ subtrahirt, d. i. wenn man überhaupt addirt $am - a\frac{ma}{a+b}$ welches G heissen mag:

und des B nunmehriger Weg y^{I} wird aus obigem y entstehen, wenn man subtrahirt des $b\frac{c}{a+b} - b\frac{c-ma}{a+b}$ absolute Grösse $b\frac{ma}{a+b}$, welche K heissen mag.

Wenn sich dagegen, Fall III, B um m früher als A bewegt; so wird dann des A nunmehriger Weg x^{III} aus obigem x entstehen, wenn man subtrahirt des $a\frac{c}{a+b} - a\frac{c-mb}{a+b}$ absolute Grösse $a\frac{mb}{a+b}$, welche K heissen mag:

und des B nunmehriger Weg y^{III} wird aus obigem y entstehen, wenn man addirt mb, und des $b\frac{c}{a+b} - b\frac{c-mb}{a+b}$ absolute Grösse $b\frac{mb}{a+b}$ subtrahirt; d. i. überhaupt addirt $mb - b\frac{mb}{a+b}$, welches G heissen mag.

Wenn

Wenn man nun ferner noch überschaut hat, daß K=G, und G=K ist; dann erst hat man übersehen, warum einerley obigen x- und y-Werthen, wegen des m im Falle I gerade soviel addirt und subtrahirt werden muß, als man ihnen wegen des m im Falle III zu subtrahiren und zu addiren hat!

§. 30. Ich bin gewiß, Hr. Klügel hat sich durch so mühseelige Schlüsse nicht erst überzeugt, daß das m des IIIten und das m des Iten Falles wie entgegensetzte Grössen wirken: denn wenn Er das gethan hätte, so würde sich ihm eben dadurch die Bemerkung aufgedrungen haben, daß

seine **Erklärung** von **entgegengesetzten Grössen**, für die **Praxis**, selbst bey dieser leichten Aufgabe, nützlich zu werden schon aufhört bey dem Uebergehen vom Falle I zum Falle III; weil es ja hier zehnmahl leichter wäre, die Aufgabe für Fall III von neuen aufzulösen, als sich erst davon zu überzeugen, daß nach dem Probiersteine seiner Erklärung von entgegengesetzten Grössen, diese beyden m es **wirklich** sind!

§. 31. In der That ist 1) diese Erklärung so ganz a posteriori gemacht, so ganz nur nach dem **Erfolge** ausgedrückt, welchen entgegengesetzten Grösse für das Ziel der Aufgabe haben sollen; daß man keinesweges aus der Erklärung schon

schon auf dem Erfolg schließen kann, wie es praktisch nützliche Erklärungen doch gewähren müssen: sondern erst, wenn man von dem, was eine Grösse für verschiedene Fälle der Aufgabe bewirken kann, schon gewiß ist, dann erst weiß man von ihr, ob sie nach obiger Erklärung für diese Fälle eine entgegengesetzte Grösse sey, oder nicht:

2) In Vergleichung mit dem, was man bisher in der Algebra unter entgegengesetzten Grössen verstanden hat, ist Hrn. Klügels Erklärung zu weit. Denn nach ihr wären ja das m des IIIten und das m des Iten Falles, einander entgegengesetzte Grössen; und nach gewöhnlicher Algebra sind sie daß nicht! Wer hierin meiner obigen Erörterung (§. 20) noch nicht trauen will, der braucht nur beyde Fälle I und III neben einander aufzulösen; und es wird ihm einleuchten, daß die Zahl m eigentlich in beyden Fällen schlechthin als eine Zahl gebraucht wird, die man dem Bejaht- und Verneintseyn nicht unterwirft. Wenn sie aber für eins von beyden gelten soll, so wird sie in beyden Fällen wie ein bejahtes m gebraucht. Denn die Linie ma, durch welche im Falle I sich A vorläufig bewegt, trägt das Zeichen des in I bejaht gegebenen a, und die Linie —mb, durch welche im Falle III sich B vorläufig bewegt, trägt hier ebenfalls das Zeichen des hier verneint gegebenen b.

§. 32.

§. 32. Für die gewöhnliche Algebra sind zwey Grössen A und B so entgegengesetzt, daß die eine durch eine bejahte Zahl a, und die andere durch eine verneinte Zahl $-b$ ausgedrückt werden kann, nur dann, wenn $\frac{B}{b}$ gleich ist der Gegengrösse des $\frac{A}{a}$. Die verneinte Zahl $-b$ fällt dann auch der B nur unter der Voraussetzung zu, daß auch B durch die bejahte Einheit $= \frac{A}{a}$ gemessen werden soll; daher auch, wo A und B zwey Linien sind, diese beyden Linien nach der bejahten Lineareinheit zu messen sind.

Jenes **kann**, ist meiner Ueberzeugung nach zugleich auch ein **muß**, wenn man die **Algebra** auf Geometrie anwenden will, und diese Anwendung mit völliger Consequenz und Sicherheit gelingen soll. Darüber noch ein Paar Worte gegen Ende dieses Stückes!

§. 33. Meine obigen Formeln für x und y (§. 3. §. 5.) haben nun schon vor den Klügelschen den großen Vorzug, daß sie

1) allenthalben auch mit angeben, ob die gesuchten Linien x und y von ihren festgesetzten und gegebenen Anfangspuncten α und β an, bejaht

(hier

(hier ins Rechte) oder verneint (ins Linke) gerichtet sind. (Taf. I. Fig. 1.) Nur solche Formeln, welche diese Eigenschaft haben, können mit andern Formeln von derselben Eigenschaft so zusammengefügt werden, daß auch ihr Resultat dieselbe Eigenschaft behält; folglich

2) selbst noch aus diesen zusammengefügten Formeln alle, und für die zusammengefügte Aufgabe oft ganz neue und unvermuthete Schranken, welche des totalen und des partialen $\mp$ wegen nöthig sind, sogleich wiederum können abgenommen werden.

3) Ein eben so großer Vortheil meiner Methode ist es, daß man bey keiner Umänderung in den gegebenen Grössen jemahls darauf zu achten hat, ob etwa vor irgend einer von den gesuchten Grössen, in Beziehung auf den zum Grunde gelegten Fall, das Zeichen zu verändern sey: da ich vielmehr durchaus den Formeln selbst es überlasse, aus den jedesmahl gegebnen sämmtlichen Grössen auch das jedesmahl gehörige Zeichen für jede gesuchte Grösse zu bestimmen!

§. 34. Uebrigens aber sind meine obigen Formeln und ihre Entwicklung noch nicht ganz so bequem und belehrend, als sie es seyn können;

zuvör-

zuvörderst deshalb nicht; weil ich absichtlich bisher mich zurück hielt, einige hier brauchbaren neuen Ausdrücke und Zergliederungen des Zeichencalculs schon zu benutzen.

(Für diese leichte Aufgabe konnte ich auch ohne sie verständlich werden; und ich vermuthe nun, es werden mehrere Mathematiker, wenn sie bloß meine Auflösung noch einmahl hinter einander durchlesen wollen, selbige sehr einleuchtend finden, ohne eine Kenntniß neuer Zeichen nöthig zu haben. Was aber das Neue in ihrer Behandlung betrifft, so wird man doch auch über Hrn. Klügels Behandlung urtheilen, daß sie etwas an sich habe, was wir in Teutschland jetzt nicht mehr zu dem ganz gewöhnlichen rechnen können. Recht absichtlich alle Grössen der Aufgabe als bejaht zu behandeln, macht wenigstens außerhalb England selbst auch bey geometrischen Aufgaben, nicht mehr das gewöhnlichste aus. Wenn auch etwa in dem gezeichneten Falle der Aufgabe, auf den man den Calcul anlegt, eine Linie als Cosinus eines stumpfen Winkels vorkommt; pflegt man da dem trigonometrischen Formelnsysteme es aufzudringen, daß es sein $\mp$ umkehren solle, damit auch jene Linie des vorgezeichneten Falles nicht verneint aufzuführen sey? Wenn dann neben ihr noch die Tangente eines spitzen Winkels aufzuführen wäre; so würde auch das

Umkehren

Umkehren gar nicht einmahl hinreichen, sondern es müßte ein ganz ueues und sehr sonderbares trigonometrisches Formelnsystem eingerichtet werden, welches für die Forderung einpaßte, daß der Cosinus eines stumpfen und die Tangente eines spitzen Winkels beyde bejaht seyen! Ich denke, man bemüht sich vielmehr, gleich bey der Anlage des Calculs dem gewöhnlichen trigonometrischen $\mp$ gemäß zu verfahren. Auch ist es schon in der Trigonometrie, und in manchen andern leichten geometrischen Aufgaben hie und da der Fall, daß man eine ziemliche Strecke des Systems, oder auch wohl die ganze Aufgabe hindurch, dem wirklichen Richtungs $\mp$ so gut als gemäß verfährt, und vermittelst dieses (freylich sehr verdeckten) Gehülfen, auch für das Resultat, für die gesuchte Grösse, ein richtiges $\mp$ erhält: und so lange das geschieht, so pfleg man sich ja dessen sehr zu freuen! Auch pflegt man dann solche andere Aussprüche des Calculs für $\mp$, die eben nicht viel Freude machen, und sich gegen das übrige $\mp$ auflehnen, dennoch in so großen Ehren zu halten, daß man zu ihrer Beschönigung sogar ein ganz neues $\mp$ erdenkt! M. s. Kästners Beschönigung des Widerspruches in dem bisher gewöhnlichen trigonometrischen Secanten $\mp$, die ich im folgenden Stücke mit zergliedern werde.)

Ferner wollte ich gerade Hrn. Klügels Auflösung hier mit der meinigen begleiten, und mußte daher nicht nur meine Algebra auf den einzelnen Fall I anlegen; wodurch die treffliche Allgemeinheit und Allesumfassung der Algebra, für den bisherigen Anblick wenigstens, etwas verdunkelt, und zur Eingeschränktheit der Geometrie herabgedrückt wird, bey der man bloß von einem einzelnen Falle zum andern übergeht;

sondern ich mußte auch mit Hrn. Kl. unter der gesuchten Grösse x die wirklich schon gegebene ma für Fall I und II, und eben so für Fall III und IV unter der gesuchten Grösse y die wirklich schon gegebene mb mit begreifen; welches in der That eine etwas unbequeme Denomination ist. (Ich weiß es übrigens gar wohl, daß Newton für diese Aufgabe gerade eben so unrein denominiert hat, auch das nichts eigentlich unrichtiges ist.)

In dieser dreyfachen Hinsicht will ich nun die Aufgabe anders behandeln.

§. 35. Aufgabe. Zwey Körper A und B, die vor ihrer Bewegung um $\alpha\beta = c$ entfernt sind (Tafel I Fig. 1), bewegen sich, der eine A von α aus mit der durchaus constanten Geschwindigkeit a, der andere B von β aus mit der constanten Geschwindigkeit b, und A fängt seine Bewegung

wegung um m Zeiteinheiten früher als B an: man sucht, welchen Weg z, von dem Augenblick an, da auch B sich zu bewegen anfängt, der Körper A noch zu machen hat, bis er sich mit dem B treffe, dessen zu dieser Treffung nöthiger Weg v heissen, und ebenfalls für sich, unabhängig von z, aus den gegebenen Grössen gefunden werden soll: auch verlangt man für die **gegebenen** Grössen ihre **nöthigen Schranken** zu wissen, mit deren Ueberschreitung die Aufgabe **unschicklich**, die Auflösung **unmöglich** wird.

§. 36. **Auflösung.** Da z und v gleichzeitige Wege sind, so müssen sie den Geschwindigkeiten a und b, womit sie beschrieben werden, proportional seyn. Daher $a : b = z : v$; folglich 1) $v = \frac{b}{a} z$ und 2) $z = \frac{a}{b} v$.

Aber vor Beginnung des Weges z hat A schon den Weg ma gemacht: daher $ma + z$ der sämmtliche Weg des A ist, wodurch er von α aus bis zu dem Punkte kommt, wo mit ihm B zusammentrifft; indem sich dieser von β durch seinen Weg v entfernt hat. Wenn daher A zu seiner nöthigen Entfernung von α, welche $= ma + z$ ist, noch des v Gegengrösse $- v$ hinzufügen wollte; so würde dann sich A von α gerade eben

so

so weit entfernt befinden, als B vor seiner Bewegung es war. Daher

$$ma + z - v = c;$$

und in diese Gleichung die obigen 1) und 2) gebracht, geben

$$z = a\,\frac{c - ma}{a - b}, \text{ und } v = b\,\frac{c - ma}{a - b}.$$

§. 37. Durch diese Formeln wird nun die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit umfaßt. Keine einzige von den gegebenen Grössen ist bereits auf ein Bejahtseyn oder Verneintseyn eingeschränkt; und die gesuchten Grössen können und sollen noch weniger schon darauf eingeschränkt seyn; denn deren Bejahtes und Verneintes zu bestimmen, muß ja den gegebenen Grössen überlassen werden. Das $-v$ in der obigen Gleichung bedeutet die Gegengrösse des v, ohne irgend zu bestimmen, ob v selbst bejaht oder verneint sey. Eben so wird in den Formeln durch $-ma$ die Gegengrösse von ma, und durch $-mb$ die Gegengrösse von mb bedeutet, ohne dadurch etwa gerade ein Verneintseyn dieser Gegengrössen behaupten zu wollen, welches ja gerade ein Bejahtseyn der ma und der mb schon voraussetzen würde.

§. 38. Nun aber mag zuvörderst die Entfernung $c = \alpha\beta$ gerade als eine Entfernung des β von α betrachtet, und als solche bejaht genannt werden, so haben wir ausdrücklich ein $(+)\,c$, ein bejaht gegebenes c. Damit ist nun festgestellt, daß gerade die Richtung $\alpha\beta$ hier die bejahte heissen soll.

Da auch Hr. Klügel ganz natürlich nicht darauf fallen konnte, das gegebene c ebenfalls verkehrbar anzunehmen, weil für seine Methode immer nur so viel Fälle sich verschieden zeigen, als man hat, wenn eine von den gegebnen Linien nicht verkehrbar ist, und hiezu die gleichsam zuerst gegebene c am natürlichsten ergriffen wird; so wollen auch wir die eine Hälfte aller durch $\mp$ verschiedenen Fälle hier bey Seite setzen, indem wir uns auf (+) c einschränken, ein (—) c niemahls annehmen wollen, und dieses hiermit ein für allemahl erinnert, zu mehrerer Kürze nur schlechthin c schreiben.

§. 39. Unter der nun noch übrigen Hälfte aller Fälle, sey nun Fall I, wenn auch a und b bejaht gegeben sind, das heißt, beyde Geschwindigkeiten die bejahte Richtung $\alpha\,\beta$ haben. Dieses Bejahtgegebenseyn einstweilen, während der ersten Formularvergleichungen, durch (+) ausdrücklich angezeigt, haben wir

$$z = (+)\,a\,\frac{c - m.\,(+)\,a}{(+)\,a - (+)\,b},\ \text{u. } v = (+)\,b\,\frac{c - m.\,(+)\,a}{(+)\,a - (+)\,b}.$$

§. 40. Das Constantseyn der Geschwindigkeit a, mit Hrn. Kl. so allgemein verstanden, daß

sie

sie auch während der z-Beschreibung nicht nur ihre absolute Grösse, sondern auch ihre Richtung unverändert gerade so beybehält, wie beyde in der vorläufigen Zeit m es waren, und daher nicht nur das a im ma, sondern auch die übrigen a in den Formeln, für Fall I bejaht gegeben sind: so ist dann aus dem hier gegebenen (+) a allein schon nothwendig, daß auch x bejaht ausfalle; aus dem hier gegebenen (+) b aber nothwendig, daß auch y bejaht sey.

Damit nun mit dieser Partialbestimmung des + für z und v, die Totalbestimmung ihres ∓ aus dem sämmtlichen Gegebenen vermittelst der Formeln, nicht in Widerspruch gerathe; so muß, je nachdem b <> a gegeben wird, auch ma <> c gegeben werden, d. h. jenachdem b kleiner oder grösser als a gegeben wird, auch ma kleiner oder grösser als c gegeben werden, welches die verlangten Schranken für diesen Fall I sind.

§. 41. Bey diesen Schlüssen setze ich voraus, daß von einem ∓ des m gar nicht die Rede ist, sondern dieses m sogleich für das Ziel der Aufgabe nur schlechthin wie eine Zahl gebraucht, nähmlich ma als ein bloßes mfaches a betrachtet wird, dessen ∓ lediglich vom ∓ des a abhängt.

§. 42. **Fall 2** habe (+) a und (−) b; so ist

$$z = (+)a \frac{c - m.(+)a}{(+)a - (-)b} \text{ und } v = (-)b \frac{c - m.(+)a}{(+)a - (-)b}.$$

Einschränkung. Da −(−)b = (+) b giebt, also in hiesigen Formeln der Nenner durchaus bejaht ist; das Zeichen des z aber dem gegebenen (+) a, und das Zeichen des v dem gegebenen (−) b gemäß auffallen muß; so hat man $m.a < c$ zu geben.

§. 43. **Fall 3** habe (−) a und (−) b; so ist

$$z = (-)a \frac{c - m.(-)a}{(-)a - (-)b} \text{ und } v = (-)b \frac{c - m.(-)a}{(-)a - (-)b}.$$

Einschränkung. Da hier der Zähler in dem gebrochenen Theile der Formeln durchaus bejaht, der Nenner aber = (−) a + (+) b ist, z aber dem (−) a, und v dem (−) b gleichbezeichnet ausfallen muß; so hat man zu geben $a < b$.

§. 44. Die eingeklammerten (∓) wegzulassen, muß statt −(∓) geschrieben werden ±, und statt +(∓) oder (∓) geschrieben werden ∓; wobey denn auch das + nach bekannter Gewohnheit weggelassen wird, wo es zur Gliederabtheilung nicht nothwendig ist, und übrigens von selbst verstanden wird. Daher nun für

Fall I,

Fall 1, $z = a\,\frac{c - ma}{a - b}$, und $v = b\,\frac{c - ma}{a - b}$

Fall 2, $z = a\,\frac{c - ma}{a + b}$, und $v = b\,\frac{c - ma}{a + b}$

Fall 3, $z = -a\,\frac{c + ma}{-a + b}$, und $v = -b\,\frac{c + ma}{-a + b}$

§. 45. Nach den weggelassenen ($\mp$) haben nun freylich die Formeln für **Fall 1** gerade eben das Ansehen, als die **allgemeinen** Formeln nach §. 37; und so waren ja die **eingeklammerten** $\mp$ **schon dazu nützlich**, daß sie uns den **grossen Unterschied** in der Bedeutung dieser Formeln vor **Augen legten**. Der Unterschied ist sehr beträchtlich. Nur unter dem Beding, daß die neben Fall 1 im vorigen §. aufgeführten Formeln gerade für **diesen Fall** gehören, also eigentlich gerade **nur** die in §. 39 aufgeführten Formeln bedeuten sollen, **nur unter diesem Beding können sie geometrisch** construirt werden! Das können sie dagegen nicht, so lange sie noch die allgemeinen nach §. 37 bedeuten sollen, in welchen jedes ihrer Glieder für $\mp$ noch ganz unbestimmt gelassen ist. Ihre geometrische Construktion ist dann offenbar gerade deshalb unmöglich, weil sie ja in dieser ihrer Allgemeinheit alle drey Fälle mit einem Mahle umfassen sollen, welche doch die Geometrie nicht anders als verschieden vorstellen kann.

§. 46. Diese algebraische Allgemeinheit, diese Umfassung aller der Fälle, die nur durch das ∓ der angegebenen Grössen verschieden sind, geht nun offenbar durch Hrn. Klügels Methode verloren, da Er seine calculatorische Formel nur aus der Zeichnung eines einzelnen Falles ableitet, auch aus ihr, etwa durch Abstraktion, auf die allgemeine algebraische darum nicht mit Sicherheit schliessen kann, weil es ja bey Ihm nur ein bloßes Glück wäre, wenn die Linien seiner Zeichnung, denen er sämmtlich so gut als ein unter einander Bejahtseyn aufgedrungen hat, dieses auch unter einander im algebraischen Verstande wirklich seyn könnten.

§. 47 Was nun die Auffindung unsrer obigen allgemeinen Formeln (§. 36) betrifft; so ist es gewiß genug, daß man sie meistens auch für weit schwierigere Aufgaben, als es die obige ist, ebenfalls, **wie wir es oben gethan haben,** recht sehr gut aus den wörtlichen Ausdrücken der Aufgabe und deren allgemeiner Bedeutung, geradezu herleiten kann, ohne sich diese Bedeutungen und ihre Verbindungen gerade erst durch eine Zeichnung zu versinnlichen. Solch ein allgemeines Ueberschauen der ganzen Aufgabe ist natürlich

ungleich

ungleich angenehmer und mehr befriedigend, als das bloß sinnliche Zusammenfügen vermittelst der Zeichnung. Uebrigens aber finde ich bey meiner Methode mich keinesweges verhindert, gerade auch vermittelst der Zeichnung eines einzelnen Falles die algebraischen allgemeinen Formeln aufzufinden.

§. 48. Am natürlichsten ist es, dafür gerade denjenigen Fall zu zeichnen, in welchem alle gegebenen Grössen der Aufgabe, die für $\mp$ verkehrbar seyn sollen, sämmtlich auch als bejaht gerichtete Linien können betrachtet werden. Indessen kann man auch jeden andern Fall mit Sicherheit dazu gebrauchen, wenn man denn nur die verneint gerichteten Linien, als solche in den Calcul bringt. Wenn man sie auch, **während** der ersten Anpassung des Calculs, ausdrücklich mit ihrem (—) belegt; so braucht man hinterher nach erhaltenen Formeln, nur + statt **dieser** (—) zu schreiben, die **freyen** — aber **beyzubehalten**; um sogleich mit völliger Sicherheit die Gestalt der allgemeinen algebraischen Formel zu haben.

§. 49. So verfahren, hat nun sowohl die Aufgabe, in ihrer algebraischen Allgemeinheit genommen, als auch jeder einzelne Fall der Aufgabe, eine gerade ihm zugehörige Formelgestalt, auf die man nicht nur allemahl trifft, man mag den Calcul zuerst anlegen, auf welchen Fall man will; sondern

sondern das $\mp$ aller dieser Formeln hat auch eine weit reichhaltigere, und durchaus übereinstimmende Beziehung auf einander; da hingegen das $\mp$ der Klügelschen Formeln immer nur sehr ängstlich und einzeln, gerade auf den zuerst gewählten Fall bezogen wird, oder doch auf andere Nebenfälle immer nur vermittelst jenes ersten, durch einen sehr verdrüßlichen und gefahrvollen Umweg, bezogen werden kann.

§. 50. Da ferner nach dieser Methode, die algebraisch allgemeine Formel mit Sicherheit nicht zu erhalten steht; so geht damit auch das so nützliche Vermögen verloren, durch Vergleichung mit der allgemeinen Formel es jeder Fallformel sogleich ansehen zu können, welche Grössen in dem für sie gehörigen Falle gerade bejaht, und welche gerade verneint gesetzt sind; oder, wo dabey noch eine Unbestimmtheit und Wahlfreiheit statt findet, da wird man auch diese mit anzugeben wissen. Wenn z. B. in einer Fallformel die beyden Grössen a und b nur als $-ab$ vorkommen, in der allgemeinen Formel aber als $+ab$; so ist freylich für den Fall nur bestimmt, daß in ihm die beyden Grössen a und b ungleich bezeichnet sind; welche von beyden aber gerade (+) oder (−) seyn solle, das bleibt nun unsrer Wahl überlassen.

§. 51. Auch ist es eine Folge meiner Methode, daß man jede Fallformel einer sehr bequemen

men und sicheren Prüfung unterwerfen kann, die sich darauf gründet, daß in jedem Falle die Formeln, als Werthe der gesuchten Grössen betrachtet, allen denen Gleichungen, oder Proportionen oder sonstigen Verhaltungen, welche von der Aufgabe dargebothen wurden, um die allgemeinen Formeln aus ihnen abzuleiten, immer noch Genüge thun müssen.

So müssen für die obigen Aufgaben, man mag wählen welchen Fall man will, auch die dazu gehörigen Formeln, der allgemeinen Gleichung $ma + z - v = c$, und der allgemeinen Proportion $z : v = a : b$ (aus §. 36) jedesmahl in alle dem Genüge thun, was diese Abgleichungen für den gewählten Fall behaupten, in welchem, wenn es z. B. gerade Fall 3 wäre, ein $(-)a$ und $(-)b$ gegeben ist.

Eben das leisten meine zeichenrichtigen Formeln für x und y nach obiger früheren Auflösung und Behandlung der Aufgabe, wofür $x - y = c$ die allgemeine Gleichung schon ist, die allgemeine Proportion aber $x - ma : y = a : b$ seyn würde. Z. B. der Gleichung gemäß, wird man auch in jedem Falle finden, daß die algebraische Differenz zwischen denjenigen Werthen der x und y, welche die Fallformel angiebt, gerade $= c$ ausmacht. Nach Hrn. Klügels Methode wird dagegen seiner Gleichung in §. 2, welche

welche $x + y = c$ ist, also behauptet daß die **Summe** aus x und y **gleich** c sey, nur durch die Formeln des Falles I Genüge geleistet. Für Fall II muß man schon wissen, bedenken und sagen, daß hier $-x + y = c$ sey, also nunmehr die **Differenz** zwischen den beyden Werthen der Formeln gerade $= c$ gebe.

Auf diese Weise fällt ja der schöne, allgemeine, algebraische Zusammenhang unter den Fallformeln, und ihre Umfassung in der algebraischen allgemeinen Formel so gut als gänzlich fort. Das angeführte Wissen und Bedenken ist mühsam und gefährlich, und das angeführte **Sagen** – – – ist dem gewöhnlichen und sehr richtigen Sprachgebrauche der Algebra ganz und gar nicht gemäß! Allerdings aber ist es demjenigen Gesichtspuncte angemessen, aus welchem Hr. Klügel die gemeine Methode betrachtet, und auf welchen hin Er, wo man etwa darüber ausgeschweift haben sollte, sie wiederum eingeschränkt wissen will.

§. 52. Ich hoffe doch diesen Gesichtspunkt richtig bemerkt zu haben, wenn ich ihn für folgenden halte.

Da das $\mp$ der Algebra aus entgegengesetzten Grössen abgeleitet, wenn man es in die Geometrie bringen will, Verwirrung anrichtet, und dagegen die Geometrie der Alten, welche

von

von entgegengesetzten Grössen nichts wußte, sehr gut besteht: so wollen wir auch bey der Buchstabenrechnung und Algebra, wie bey jener Geometrie, alle Grössen nur nach ihrer absoluten Großheit aufführen, und daher unter dem + oder — des Calculs nichts als anbefohlne Addition oder Subtraction verstehen: daher denn, Falls eine gesuchte Grösse mit — durch ihre Formel belegt wird, dieses auf einen andern Fall deuten kann, in welchem diese Grösse zu subtrahiren ist, wenn sie im ersten Falle zu addiren war; und umgekehrt!

§. 53. In der That ist es nur allzuwahr, daß die bisher gewöhnlichen Versuche, das $\mp$ der Algebra auf die Geometrie zu übertragen, viel Verwirrung angerichtet haben, weil sie nicht mit gehöriger Bedachtsamkeit und Ueberschauung des Ganzen unternommen wurden, auch man, statt mit nöthiger Herzhaftigkeit die Geometrie der algebraischen Allgemeinheit gemäß zu behandeln, vielmehr hie und da diese Allgemeinheit selbst zu derjenigen eingeschränkten Anschaulichkeit herabzustimmen suchte, an die man durch die Geometrie der Alten, und **den** durch sie nachher versinnlichten Calcul gewöhnt war; daher man z. B. nicht das Herz hatte zu behaupten, daß es **negative Zahlen** gäbe, und diese als solche auch Factoren seyn könnten. (Man sehe nicht nur

jeden

jeden Lehrer der Mathematik, der sich über das $\mp$ absichtlich recht genau erklären will, sondern auch Hrn Klügels Abhandlung §. 5. und Colin Mac Laurin Treatise of Fluxions, Book II §. 699.)

Wo indessen das algebraische $\mp$ eine ziemliche Strecke hindurch sehr gut von Statten gieng, und mit der Geometrie übereinzustimmen schien, wie es in der bisherigen Trigonometrie geschieht, wenn man bey den Sinussen und Cosinussen anfängt; da war man nur gar zu herzhaft, und zwang der Geometrie z. B. eine Tagentenscale auf, die aus $+\infty$ unmittelbar in $-\infty$ übergehen muß und soll, wogegen doch alle geometrische Anschaulichkeit sich empört!

§. 54. Wie der Hr. Prof. Klügel das trigonometrische $\mp$ betrachtet wissen wolle, wage ich nicht zu entscheiden. Sonst aber bleibt Er, nach seiner bekannten Gründlichkeit, dem obigen einmahl gefaßten Gesichtspunkte, und seiner Forderung, alle Grössen im vorgenommenen Falle, auch die gesuchten, sollen nicht verneint seyn, dergestalt getreu, daß er sogar behauptet, auch die sämmtlichen algebraischen Gleichungen, auch die von zwey und mehrern Graden, müssen nur bejahte Wurzeln liefern für den wirklich gewählten Fall, und auch hier müsse jede verneinte Wurzel nur andeuten, daß es einen andern Fall der Aufgabe gebe, für welchen

sie

sie bejaht gesetzt, die eigentlich gehörige Wurzel sey: — — denn nur aus diesem Gesichtspunkte weiß ich für die Aeußerungen und Betrachtungen von §. 17 bis §. 25 der Klügelschen Abhandlung, eine gemeinschaftliche Tendenz aufzufinden.

§. 55. So schön, so belehrend und so unterhaltend, mehrere von diesen Betrachtungen an sich sind, so scheinen sie mir doch, jener Tendenz wegen, dem Widerspruche unterworfen zu seyn: daß die Algebra jedes Element ihres Calculs nach bejahter Einheit mißt, und gleichwohl alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung für den Fall, worauf sie angelegt ist, bejaht ausfallen sollen!

Beydes widerspricht sich meines Erachtens, weil aus vorausgesetzter allgemeiner Anlegung der bejahten Einheit, und nur aus dieser, die Regeln der Algebra folgen, und eben deshalb auch negative Zahlen zur algebraischen Zahlenreihe gehören; daher sie denn auch solche negative Zahlen mit angiebt, Falls unter ihnen einige sind, die der Aufgabe vermittelst des Instrumentes, wodurch man sie aufgelöst hat, d. h., vermittelst der Algebra, Genüge leisten.

Man sieht daraus, daß ich die Absicht aller jener Betrachtungen, und alle Behauptungen und Bemerkungen, welche für jene Absicht da-

stehn,

stehen, in so fern gerade zu für unstatthaft erklären muß. Indessen will ich einige Beyspiele verfolgen, ihrer zwey für unbenannte Zahlen, und dann noch das einzige, welches Hr Klügel in benannten Zahlen aufgeführt hat; die geometrisch benannten bey Seite gesetzt, wofür in der Klügelschen Abhandlung ebenfalls nur ein Beispiel angeführt ist, welches wir bisher schon betrachtet haben.

Erste Aufgabe in unbenannten Zahlen.

§. 56. „Wenn I) $x + y = a$ und II) „$x^3 - y^3 = b^3$, so sind x und y jede die „einzige Wurzel einer cubischen Gleichung aus „§. 18“ (nähmlich der Gleichung

$$2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x = a^3 + b^3$$

$$\text{und } 2y^3 - 3ay^2 + 3a^2y = a^3 - b^3).$$

„Die Gleichungen können nicht mehr als eine „mögliche Wurzel haben, weil man sonst sechs „Größen finden würde.“

§. 57. Um x und y für die gegebnen Bedingungen I und II zu finden, würde man doch auf folgende Weise A) oder B) richtig schließen.

A) Aus I folgt $y = a - x$, und dies in II gebracht, giebt

$$2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x = a^3 + b^3.$$

Diese

Diese Gleichung giebt **drey** Werthe für x, welche m, u und v heissen sollen. **Jedem** dieser Werthe von x gehört ein besonderer Werth des y zu. Diese drey Werthe des y zu finden, und zugleich **auch** zu **bestimmen**, mit **welchem Werthe** des x jeder Werth des y, für die Aufgabe **zusammen gehöre**, dazu ist nun eine **zweyte kubische** Gleichung nicht nöthig, und **nicht dienlich**: sondern beydes wird ganz natürlich und entschieden durch die schon vorhandene Gleichung I) gefunden. Denn diese I) giebt ja an,

daß für $x = m$ gehört $y = a - m$
für $x = u$ gehört $y = a - u$
für $x = v$ gehört $y = a - v$.

B) Allerdings kann man statt dieses Verfahrens auch das folgende einschlagen.

Aus I) folgt $x = a - y$; **dieses** in II gebracht, giebt

$$2y^3 - 3ay^2 + 3a^2y = a^3 - b^3.$$

Diese Gleichung giebt nun drey Werthe für y. Sie seyen n, s und t; so wird nun **wiederum vermittelst** der I) entschieden, was für ein Werth des x zu jedem dieser Werthe des y gehört.

Nähmlich für $y = n$ gehört $x = a - n$
für $y = s$ gehört $x = a - s$
für $y = t$ gehört $x = a - t$.

§. 58. Es ist leicht einzusehen, daß unter den zuletzt gefundenen Werthen des y keiner vorkommen kann, der nicht schon vorher unter A) auch mit aufgefunden wäre, ebenfalls für y; und eben das ist klar von denen unter B) und unter A) aufgefundenen Werthen des x.

Aber sowohl aus A) als B) erhellet, daß man für x und y zusammen genommen **allerdings sechs** Werthe findet, welche als drey Paare von Werthen zu betrachten sind, weil immer nur einer von den Werthen des y mit einem von den Werthen des x zusammen gehört; und dieses Zusammengehören ist hier aus I) aufgefunden.

Für **jede** von den **hiesigen** beyden kubischen Gleichungen erhellet freylich aus **andern** bekannten Gründen, daß sie nur **eine** mögliche Wurzel haben kann: aber die obige Behauptung sehe ich nicht ab, daß jede von ihnen nur einen einzigen möglichen Werth **deshalb** geben könne, **weil** sonst sechs Grössen für die Aufgabe entstånden!

§. 59. Das leichteste Beyspiel erhalten wir, wenn $a = 1$ und $b = 1$ gegeben, also verlangt wird, daß I) $x + y = 1$ und II) $x^3 - y^3 = 1$ sey.

Dafür muß $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ seyn; folglich

$$x = 1, \text{ oder } x = \frac{1 + \sqrt{-15}}{4} \text{ oder } x = \frac{1 - \sqrt{-15}}{4}.$$

Und nun ergiebt sich aus I) auch, daß mit diesen drey Werthen des x der Ordnung nach zusammen gehören

$$y=0;\quad y=\frac{3-\sqrt{-15}}{4};\quad y=\frac{3+\sqrt{-15}}{4}.$$

Oder will man die kubische Gleichung für y gebrauchen, also

$2y^3-3y^2+3y-0=0$; so hat man

$$y=0,\ \text{oder}\ y=\frac{3+\sqrt{-15}}{4}\ \text{oder}\ y=\frac{3-\sqrt{-15}}{4}.$$

Und nun ergiebt sich wiederum durch I) auch, daß mit ihnen der Ordnung nach zusammen gehören

$$x=1;\quad x=\frac{1-\sqrt{-15}}{4}\quad x=\frac{1+\sqrt{-15}}{4}.$$

Zweyte Aufgabe in unbenannten Zahlen.

§. 60. In §. 19 der Klügelschen Abhandlung wird folgende Aufgabe vorgenommen. Zwey Zahlen x und y zu finden, so daß

I) $x^2-y^2=xy$, und auch II) $x+y=xy$ sey.

Der Hr. Verf. bemerkt, daß der I) erste Seite sich durch der II) erste Seite theilen läßt, und dadurch erhalten wird $x-y=1$; also

$$x^2-3x+1=1\ \text{und}\ y^2-y-1=0.$$

Auch hier sucht der Hr. Verf. wie vorhin, diese beyden Gleichungen neben einander zu benutzen, und behauptet: der ersten bejahte Wurzel für x, und der zweyten bejahte Wurzel für y, gerade dis seyen die beyden Grössen, welche für das x und y der Aufgabe gehören; und die beyden verneinten Wurzeln sollen nicht zu dieser, sondern zu einer andern verwandten Aufgabe gehören.

Ich bin dagegen auch hier überzeugt, daß für die hier aufgeführte Aufgabe wiederum zwey Paare von Werthen gehören; und für die etwanige verwandte Aufgabe ebenfalls. Das leuchtet mir ein aus folgender Behandlung.

Mit I) $x^2 - y^2 = xy$ und II) $x + y = xy$, wird zugleich auch III) $x^2 - y^2 = x + y$ schon gefordert, weil diese III) nach einem bekannten Grundsatze aus I) und II) folgt. Aus eben diesem Grundsatze ist überdies auch klar, daß aus je zwey von diesen drey Gleichungen, die übrige dritte folgt; und man daher zur Auflösung der Aufgabe nur nöthig hat, sich an zwey von ihnen zu halten. Dazu wählt man natürlich die beyden bequemsten. Da nun III offenbar nichts weiteres bestimmt, als daß $x - y = 1$ seyn soll; so ist diese Forderung der IIIten, sicherlich unter allen die bequemste. Nächst ihr aber die II; daher wir ebenfalls, wie der Hr. Verf. im Grunde

es

es gethan hat, die beyden Gleichungen II) $x + y = xy$ und III) $x - y = 1$ zur Auflösung benutzen wollen. Dieses kann nun unter andern auf folgende zweyfache Weise geschehen.

A) Aus III) den Werth $y = x - 1$ geschlossen und in II gebracht, giebt $x^2 - 3x + 1 = 0$, folglich

1) sowohl $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

und dafür $y = x - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

2) als auch $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

und dafür $y = x - 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

B) Oder man kann aus III) den Werth $x = y + 1$ folgern, und diesen in II) bringen; so ergiebt sich $y^2 - y - 1 = 0$, folglich

1) sowohl $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

und dafür $x = y + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

2) als auch $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

und dafür $x = y + 1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

§. 61. Ich mag also **entweder** nach A) die quadratische Gleichung für x, **oder** nach B) die quadratische Gleichung für y benutzen; auf jedem Wege finde ich für das gesuchte Grössenpaar x und y, zwey Paare von Werthen dadurch, daß nur **eine** von den obigen quadratischen Gleichungen, es sey nun die für x oder die für y, **aber vollständig** benutzt wird, um den doppelten Werth, es sey für x oder für y, aus ihr zu bestimmen. Hat man nun entweder unter A) den Doppelwerth des x bestimmt, so zeigt dann III), welcher Werth von y mit jedem von jenen beyden des x **zusammengehört**; oder hat man unter B) den Doppelwerth des y bestimmt; so giebt dann III an, welcher Werth von x für jeden von jenen gehört. Auf jedem dieser beyden Wege, und auf jedem übrigen richtigen Wege findet man:

Es kann x und y

sowohl 1) seyn $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

und auch 2) seyn $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

§. 62. Bey den ersten Werthen ist
$x + y = 2 + \sqrt{5}$, und $xy = 2 + \sqrt{5}$
und $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$

Bey den zweyten Werthen ist $x + y = 2 - \sqrt{5}$
und $xy = 2 - \sqrt{5}$ und $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$;

woraus

woraus erhellet, daß nicht nur durch die ersten sondern auch durch die zweyten Werthe der Aufgabe Genüge geschieht, wenn anders die Aufgabe keine Bedingung enthält, wodurch die negativen Wurzeln ausgeschlossen werden. Dergleichen Bedingung nun kann ich in der obigen Aufgabe, die ich mit Hrn Klügels Worten aufgeführt habe, nicht vorfinden. Man frägt darin nach Zahlen, und sucht sie vermittelst der Algebra. Diese hat in ihrer Zahlenreihe auch negative Zahlen, und muß auch aus diesen diejenigen angeben, welche nach den Regeln des algebraischen Calculs der Aufgabe ebenfalls Genüge thun. Verlangt man unter den gesuchten Zahlen nur solche zu wissen, die in der Zahlenreihe der gemeinen Arithmetik vorkommen, und gebraucht gleichwohl Algebra zur Auflösung: so muß man es ausdrücklich mit ausbedingen, daß man nur die bejahten Werthe der gesuchten Grössen gebraucht wissen will; und dann rührt es lediglich von dieser Bedingung der Aufgabe her, daß die verneinten der Aufgabe nicht zugehören, und bey Seite gesetzt werden.

§. 63. Es entgeht mir nicht, daß meine obigen Auflösungen dieser beyden Aufgaben, für den Hrn Prof. Klügel die verdrüßliche Bemerkung erregen können, als ob ich Ihn hier erst eine Behandlung lehren wolle, die Ihm selbst schon ebenfalls bekannt war. Nicht für Ihn bin

bin ich darin so vollständig geworden, sondern ich mußte hier auch auf weniger geübte Leser Rücksicht nehmen. Ich wollte und mußte hier deutlich vor Augen legen, wie mir die gewöhnliche Behandlung schon mehr befriedigend sey, als die neue von Hrn Klügel. Uebrigens wird das mangelhafte in der Klügelschen Methode noch von einer andern Seite einleuchten, wenn man erst meine Bemerkungen über Hrn Kl. Methode bey der gleich folgenden Aufgabe in benannten Zahlen, und meine dafür, wie ich hoffe, sehr befriedigende Erklärung der gewöhnlichen Methode durchdacht hat. Bey den obigen beyden Aufgaben gab es für die verneinten Wurzeln weiter nichts zu erklären, als daß sie verneinte Zahlen sind; das heißt Zahlen, welche aus der bejahten Einheit nur durch Umwendung, Verneinung derselben, entstehen können, und bey deren Messung dieses Umwenden des Maßstabes durch das Zeichen — auszudrücken ist. (Stück VI. §. 7 am Ende).

§. 64. Wie dieses System der bejahten Einheit und ihres Umwendens, als eine Handlung des Messens selbst betrachtet, auch auf geometrische Aufgaben sehr nützlich und befriedigend könne angewandt werden, habe ich schon vorher beygebracht, so viel die obige geometrische Aufgabe dazu Veranlassung gab.

Aber

Aber auch in solchen nicht geometrischen Aufgaben, deren gesuchte Grössen anderweitig benannte Zahlen sind, und sich daher mit ihrem ∓ auf ein anderweitig sächliches ∓ beziehen, wird sich die verneinte Wurzel allemahl durch das ihr zugehörige sächliche — schicklich und richtig erklären lassen. Daß man das bisher noch nicht gehörig geleistet hat, rührt hauptsächlich von der Dunkelheit des Spieles her, welches man zwischen den so **verschiedenartigen** ∓ stecken ließ, ohne das **Ungleichartige** dieser **mehrern ∓ Paare** in der Aufgabe gehörig zu unterscheiden. Indessen that man doch auch den sächlich negativen Wurzeln weiter nichts zu Leide, als daß man sie meistens bey Seite setzte, weil sie keinen schicklichen Sinn gäben; und so blieb noch jeder dazu aufgefordert, ihren schicklichen Sinn herauszufinden. Für diese und jene leichte Aufgabe glückte das auch gut genug, und ich denke es zu übersehen, warum es bisher für andere nicht glücken konnte.

§. 65. Auch in dieser Hinsicht bin ich mit Hrn Klügels Lehre und Verfahren nicht zufrieden, wodurch ja in der That der **wirklich vorgegebnen** und **behandelten Aufgabe selbst**, ihre Auflösung durch negative Zahlen, der auflösenden Gleichung selbst aber ihre negativen Wurzeln

Wurzeln **durchaus** entrissen werden. Ich weiß, was ich sage, und will es sogleich deutlich darlegen an derjenigen Aufgabe dieser Art, welche Hr. Kl. als Beyspiel behandelt, Seite 473 §. 20.

Aufgabe in benannten Zahlen.

§. 66. „Eine Gesellschaft trank in einem „Wirthshause für 175 fl. Zwey wurden frey „gehalten, daher die Zeche der übrigen 10 fl „mehr betrug, als wenn alle bezahlt hätten; „wie stark war die Gesellschaft?

„Die Gleichung für die gesuchte **Anzahl** x ist, „$x^2 - 2x = 35$, also $x = +7$ und -5. Hier „könnte man leicht die negative Wurzel als un„brauchbar verwerfen. Sie ist aber, absolut „betrachtet, die Anzahl der **Bezahlenden**. Hätte „man diese gesucht und x genannt, so wäre „$x^2 + 2x = 35$."

§. 67. Ich behaupte, daß Hr. Klügel, eben durch diese Erklärung, die negative Wurzel -5 als unbrauchbar für die **wirkliche** Aufgabe verwirft. Denn daß sich irgend eine andere Aufgabe erdenken läßt, worin jener Wurzel Gegentheil $+5$, gerade die Anzahl der **Bezahlenden** angiebt, was geht das unsere Aufgabe an, in welcher x **nicht** die **bezahlenden**, sondern die **trinkenden** Personen bedeutet. Das + des

Geld-

Geldbezahlens ist ja ein ganz anderes + als das + des Weintrinkens. Für jeden Käufer ist das an sich nehmen der Waare, und das von sich geben des Geldes dafür, zusammengenommen, ein conventionelles mathematisches 0. In dieser Hinsicht wären also jene beyden + sogar wie + und − entgegengesetzt, und es dürfte daher, wenn man scharf gehen wollte, ein Bedenken dagegen zu machen seyn, daß man die 175 fl einmahl als conventionelles Maaß des vertrunknen, zu sich genommenen Weines, und das andere mahl als das dafür von sich weg zu gebende Geld betrachtet, beydemahle als eine absolute, also neben den übrigen $\mp$ Grössen als eine bejahte Grösse behandelt. Indessen mag es bey dieser Gewohnheit für dismahl bleiben. Ich hoffe dennoch allenthalben auch in der Kürze mich so auszudrücken, daß ich nirgend etwas unrichtiges sage.

§. 68. Da in obiger Aufgabe die gesuchte x ausgemacht die Trinker bedeutet, und ihr einer bejahter Werth $x = (+)7$ auch 7 bejahte Trinker angiebt; so muß ihr anderer verneinter Werth $x = (-)5$ nothwendig 5 verneinte Trinker bedeuten; wenn er für diese Aufgabe gerettet werden soll, welches ich nunmehr thun werde.

§. 69. Weil man in der Auflösung sagt: die Anzahl der Zahlenden sey $= x - 2$, wenn die

die Anzahl der Trinker x heißt; so behandelt man die Aufgabe so, als ob sie bestimmt hätte, die Anzahl der Zahlenden solle um 2 algebraisch kleiner seyn, als die Anzahl der Trinkenden. Statt dessen hätte man die Aufgabe auch dahin verstehen können, daß zwey von den (bejahten oder verneinten) Trinkern keine (bejahte oder verneinte) Zahler mit abgeben sollten. Dann müßte aber die 2 allemahl von den jedesmahligen Trinkern $\mp$ x abgezogen, also bey (−) x die 2 bejaht gesetzt werden; und warum sollten nicht solche Aufgaben vorfallen können, bey denen einige Grössen nur an absoluter Grösse bestimmt gegeben, ihr $\mp$ aber nach dem Sinne der Aufgabe noch so unbestimmt gelassen wäre, daß es von dem $\mp$ der gesuchten Grössen mit abhinge, und daneben auch noch solche gegebne Grössen mit vorkämen, in denen auch ihr $\mp$ bestimmt gegeben wäre? An solche Arten von Aufgabon aber scheint man bisher noch nicht gedacht zu haben. Sondern jede an absoluter Grösse gegebne Grösse, wird so behandelt, als ob sie auch in Hinsicht ihres $\mp$ gegeben wäre. Dieser Gewohnheit gemäß wird die erwähnte 2 durchaus als eine −2 in dem Calcul angesetzt und gelassen, also als eine abzuziehende bejahte 2, das ist als eine algebraisch verkleinernde 2 behandelt. Wir lassen es hier dabey, weil wir hier, die aus gewöhnlichem Ver-

fahren

fahren entstehenden negativen Werthe der gesuchten Grössen erklären wolle. Ueberdis wäre auch dis gewöhnliche Verfahren das nothwendige, wenn es in der Aufgabe geheissen hätte, die Anzahl **der Zahlenden war um 2 kleiner als die Anzahl der Trinkenden.** Denn da wir die Aufgabe der algebraischen Auflösung unterwerfen, so muß dann auch das um 2 kleiner, der algebraischen Grössenschätzung unterworfen, also ebenfalls durch die bejahte Einheit gemessen, also als eine verneinte 2 aufgeführt werden.

§. 70. Zum verneinten Werthe $x = -5$ Trinker gehören also $x - 2 = -5 - 2 = -7$ Zahler. Die zu zahlende Summe 175 fl wird ebenfalls als eine **bejahte** gegebne Grösse durchaus behandelt. Daher nun bey -5 Trinkern, jeder von den dazu gehörigen -7 Zahlern, zu zahlen hat $= \frac{175}{-7} = -25$ fl. Was soll das bedeuten? Ich erwiedere, wer -25 zahlt, also 25 fl **negativ zahlt**, der läßt 25 fl an sich zahlen, der **streicht** 25 fl zu sich ein; und für 35 fl Wein **negativ vertrinken**, heißt, für 35 fl **Wein von sich geben.**

(Die algebraische Wahrheit und Liebe zur Kürze, mögen mich für diesen Ausdruck entschuldigen. Haben doch Andere, aus Liebe zur histo-

rischen

rischen Wahrheit, noch weit unangenehmere Bilder aufgestellt, selbst auch der so genannte christliche Cicero, Sulpicius Seuerus in vita b. Martini, Cap. XVII am Ende.)

Unter den 7 negativen Zahlern, stecken auch die 5 negativen Trinker. Auch von diesen letztern zahlt (negativ) jeder $\frac{175}{-7} = (-)\ 25$ Kr also um (+) 10 Kr mehr, als die (–) 35 Kr, welche er (negativ) zahlen würde, wenn nicht die Zahl der – 7 Zahlenden um 2 **kleiner** als die Zahl der – 5 Trinkenden wäre.

So ist die negative Wurzel hinreichend erklärt, welche die algebraische Auflösung Kraft ihrer algebraischen Gewalt, zu der auch die negativen Zahlen gehören, mit umfaßt, und zwar für jedes der beyden sächlichen $\mp$, welche in der Aufgabe selbst schon als solche betrachtet werden müssen, wenn man überhaupt auf die verneinten Wurzeln achten, und sogar mit Hr. Kl. nach einer anderweitigen Aufgabe fragen will, in welcher die hier verneinte Wurzel als eine nicht verneinte vorkomme!

§. 71. Verlangt man diese von Hrn. Kl. sogenannte verwandte Aufgabe zu haben; so gehört zur bündigen Verwandtschaft, daß in dieser andern Aufgabe auch die bisher bejahte Wurzel, gerade als eine verneinte vorkomme, weil ja sonst die Verwandtschaft nicht gehörig reciprok wäre.

Es muß auch ferner die Verwandtschaft dem sächlichen $\mp$ angemessen seyn, weil ja von verwandter Aufgabe, nicht etwa bloß von einer verwandten Gleichung die Rede ist, (deren $\mp$ freylich eigentlich nur noch ein bloß algebraisch-arithmetisches $\mp$ ausmacht.)

Folglich muß man, um die verwandte Aufgabe zu erhalten, alle Ausdrücke der vorgegebenen dergestalt verändern, daß nun jedes sächliche $\mp$ in ihr, durch das ihm entgegengesetzte sächliche $\pm$ ausgedrückt wird.

§. 72. Für diese Absicht ist sehr dienlich, die obige Aufgabe wirklich in derjenigen Allgemeinheit darzustellen, welche die Algebra, vermittelst ihrer auch negativen Zahlen, ihr aufdringt; und so erscheint sie als folgende:

Bey $\left\{\begin{matrix}(+)\,x\ \text{(bejahten)}\\(-)\,x\ \text{(verneinten)}\end{matrix}\right.$ Trinkern, die für 175 ℛ Wein $\begin{matrix}\text{zu sich nehmen,}\\\text{von sich geben,}\end{matrix}$ ist die um (+) 2 kleinere Anzahl der $\left\{\begin{matrix}(+)\,x-2\ \text{(bejahten)}\\(-)\,x-2\ \text{(verneinten)}\end{matrix}\right.$ Zahler vorhanden, die das Weingeld 175 ℛ $\begin{matrix}\text{hinzahlen;}\\\text{einstreichen;}\end{matrix}$ und nun hat von den $\begin{matrix}\text{bejahten}\\\text{verneinten}\end{matrix}$ Zahlern jeder eine

Anzahl

Anzahl von Groschen zu zahlen, / einzustreichen, die um (+) 10 grösser ist, als die Groschenzahl, welche jeder bejaht / verneint zu zahlen hätte, wenn die bejahten / verneinten Trinker zugleich sämmtlich auch bejahte / verneinte Zahler wären.

§. 73. Die Antwort ist folgende.

Es sind (+) 7 (bejahte) / (—) 5 (verneinte) Trinker, die für 175 ℛ Wein zu sich nehmen, / von sich geben, und da statt ihrer die um 2 kleinere Anzahl (+) 7 — 2 = (+) 5 bejahter / (—) 5 — 2 = (—) 7 verneinter Zahler vorhanden ist, die das Weingeld 175 ℛ hinzahlen; / einstreichen; so hat von den bejahten Zahlern jeder / verneinten Zahlern jeder (+) 35 hinzuzahlen, / (—) 25 einzustreichen, welches um 10 grösser ist, als die (+) 25 / (—) 35 die jeder (bejaht) / (verneint) zu zahlen gehabt haben würde, wenn die sämmtlichen bejahten / verneinten Trinker, auch bejahte / verneinte Zahler ausgemacht hätten.

§. 74. Um nun das Verlangen in §. 71 zu erreichen, haben wir zuvörderst jedes von den beyden sächlichen ∓ umzukehren, das heißt, das bejahte / verneinte Trinken als ein verneintes / bejahtes Wein von sich geben, und jedes bejahte / verneinte Geldzahlen als ein verneintes / bejahtes Geldeinstreichen aufzuführen; wodurch sich jedes sächliche + in —, und jedes sächliche — in + verändert.

§. 75.

§. 75. Die 175 ℛ wurden als gegebene Grössen keinem noch wählbaren oder noch zu bestimmenden ∓ unterworfen, sondern als eine absolute Grösse aufgeführt, die allemahl so gut als bejaht blieb, man mochte das bejahte oder verneinte sächliche gebrauchen; daher sie auch bey der jetzt vorgenommenen Umkehrung der sächlichen ∓ ebenfalls so gut als bejaht aufgeführt werden muß. Wenigstens müßte ich erst den Wink am Ende des §. 67 genauer verfolgen, auch die in §. 71 erwähnte Unterscheidung zwischen den sächlichen und dem arithmetischen ∓ auseinander setzen, wenn ich darüber noch genauer werden wollte.

Die gegebne 2 aber erhielt in der ursprünglichen Ausgabe durchaus − vorgesetzt, weil sie als eine **verkleinernde** 2 der dortigen Trinker gegeben wurde, und die gegebene 10 erhielt in jener Aufgabe durchaus + vorgesetzt, weil sie als eine vergrössende 10 der dortigen Zahlung gegeben wurde; in der Algebra aber alle verkleinernde Zahlen durch −, alle vergrössernde Zahlen durch + auszudrücken sind, weil auch das kleiner und grösser werden, in der Algebra durch die jedesmahl bejahte Einheit zu messen ist. Da wir nunmehr die dortigen bejahten Einheiten des Trinkens und Zahlens in ihr Gegentheil umkehren; so muß auch jenes **kleiner** 2 in **grösser** 2, und jenes

jenes grösser 10 in kleiner 10 ungeändert werden, wenn zwischen den gegebenen und gesuchten Grös- in jener ersten und der nunmehr verlangten umgeänderten Aufgabe, einerley arithmetische Verhältnisse bleiben sollen, wie es nothwendig ist, um den Wurzeln beyder Aufgaben einerley absolute Großheit zu erhalten.

§. 76. Daher nun statt obiger Antwort, die folgende.

Es sind $\genfrac{}{}{0pt}{}{(-)\,7\ \text{(verneinte)}}{(+)\,5\ \text{(bejahte)}}$ Weingeber, die zusammen für 175 Rthl. Wein $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zu sich nehmen,}}{\text{von sich geben,}}$ da aber statt ihrer die um 2 grössere Anzahl $\genfrac{}{}{0pt}{}{(-)\,7+2\ \text{(verneinter)}}{(+)\,5+2\ \text{(bejahter)}}$ Geldeinstreicher da ist, die das Weingeld 175 Rthl. gleichmäßig $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{hinzahlen;}}{\text{einstreichen;}}$ so hat von den $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{verneinten}}{\text{bejahten}}$ Geldeinstreichern jeder $\genfrac{}{}{0pt}{}{(-)\,35\ \text{Gr. von sich zu geben,}}{(+)\,25\ \text{Gr. einzustreichen,}}$ welches um 10 Rthl. weniger ist, als die $\genfrac{}{}{0pt}{}{(-)\,25\ \text{Gr.}}{(+)\,35\ \text{Gr.}}$, die jeder $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{verneinter}}{\text{bejahter}}$ Geldeinstreicher $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{von sich zu geben}}{\text{an sich zu nehmen}}$ haben würde, wenn ihre Anzahl $\genfrac{}{}{0pt}{}{-7}{+5}$ wäre, wie die Anzahl der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{verneinten}}{\text{bejahten}}$ Weingeber es ist.

§. 77. Diese algebraische Antwort würde nun offenbar für folgende Aufgabe erhalten werden.

Eine

Eine Gesellschaft von x Personen, die zusammen so viel Wein, daß 175 ℋ dafür gelöset werden, hergiebt, läßt noch 2 Personen mehr, die keinen Wein hergegeben haben, dennoch Theil nehmen an dem gleichmäßigen **Einstreichen** des Weingeldes; daher jeder von den sämmtlichen Einstreichenden nun 10 ℋ **weniger** bekommt, als wenn bloß die Weingebenden auch das davon gelösete Geld nur unter sich getheilt hätten.

§. 78. Diese Aufgabe wird nähmlich (+) 5 und (−) 7 als Werthe ihres x erfordern, und hat nun in Vergleichung mit der vorigen, nicht nur mit ihr die Uebereinstimmung, daß beyder Werthe an absoluter Großheit einerley sind, und in Absicht ihres ∓ auch jeder von diesen Werthen in beyden Gleichungen einem algebraisch gleichartigen sächlichen ∓ unterworfen bleibt;

sondern die (+) 7 (**bejahten**) Weintrinker der
erſten Aufgabe sind
auch eben so gut,
als die (−) 7 **verneinten** Weingeber der
zweyten Augabe;
und die (−) 5 **verneinten** Weintrinker der
ersten Aufgabe sind
auch eben so gut
als die (+) 5 (**bejahten**) Weingeber der
zweyten Aufgabe.

§. 79. Das ist nun zwischen den beyden Gleichungen $xx - 2x - 35 = 0$ und $xx + 2x - 35 = 0$, wodurch beyde Aufgaben aufgelöst werden, eine weit reichhaltigere Verwandtschaft, als diejenige, welche Hr. Kl. aufführt, daß die zweyte Gleichung einer Aufgabe zugehöre, in welcher $x = +5$ bedeuten kann, indeß $x = -5$ in der ersten Gleichung die verneinte Wurzel neben der bejahten $x = 7$ war, die doch trinkende Personen angab.

§. 80. Meine genauere und bündigere Darstellung der Sache habe ich dem Umstande zu verdanken, daß mir sogleich in der Aufgabe zweyerley sächliches $\mp$ vor Augen lag, nicht nur $\substack{\text{verneinte}\\\text{bejahte}}$ Trinker, sondern auch $\substack{\text{verneinte}\\\text{bejahte}}$ Zahler; die man, wo vom sächlichen $\mp$ die Rede seyn soll, sorgfältig zu unterscheiden hat, obgleich in der Gleichung selbst allerdings beyde vermittelst des ihnen gemeinschaftlichen algebraisch arithmetischen $\mp$ behandelt werden. Bey noch genauerer Zergliederung des ganzen Verfahrens kann man auch deutlich machen, wo und wie man aus den sächlichen $\mp$ in das arithmetische übergeht. Ich werde späterhin dergleichen bey geometrischen Aufgaben zeigen, wo die sächlichen $\mp$ in Richtungen bestehen.

Geometrische Construction algebraischer Aufgaben.

§. 81. Hr. Kl. sagt, „bey der geometrischen „Verzeichnung der Wurzeln einer Gleichung war „es deutlicher, was die negativen Wurzeln be„deuten, und zugleich völlig offenbar, daß sie so „gut als die positiven Wurzeln zu der vollständi„gen Auflösung gehörten.“ Eine Behauptung, die ich wörtlich unterschreiben kann, aber bey dem Sinne, welchen Hr. Kl. damit verbindet, für unrichtig halte. Denn Hr. Kl. behauptet ja, um die vorige Aufgabe, wo $x = 7$ Trinker bedeutet, in ihrer Vollständigkeit vor Augen zu haben, sey nöthig auch an die Aufgabe zu denken, wo $x = 5$ Zahler bedeutet; und ich behaupte, daß der ersten Aufgabe $x = -5$ dem, für ihr $(+)\, x$ angelegten, bejahten Trinken, algebraisch gleichartig bleiben müsse. Hat nun Hr. Kl. eine Construction im Sinne, welche seine Behauptung zu rechtfertigen scheint, so wird sie so unbestimmt entweder angelegt oder doch verstanden seyn, daß man die Wurzeln nur nach einem undeutlichen und schwankenden Sinne entgegengesetzt nennt, wie es bey vielen bisher gewöhnlichen Constructionen der Fall ist. Ich werde, wo ich Zeit und Raum dazu erhalte, andere mittheilen, in denen alles algebraisch-geometrische $\mp$ wirklich allen Behauptungen des anderweitigen sächlichen $\mp$, vermittelst ihres gemeinschaftlichen Maaßes, des algebraisch-arithmetischen $\mp$, auf das deutlichste entspricht, und so allerdings auch Zeichnung zur Aufklärung oder Veranschauligung sächlicher $\mp$ und ihrer Resultate benutzt werden kann. Hier nur für obige Aufgabe so viel: daß man das eine sächliche + der bejahten Trinker x auf einer Linie angelegt, das zweyte sächliche + des bejahten Geldzahlens auf eine andere Linie tragen muß, wenn man beyde + auch in der Zeichnung will unterschieden sehen; dann aber sicherlich bey jeder richtigen Construction sehr deutlich vor Augen liegen wird, daß das Verneinte des verneinten Werthes von x, auch gerade ein verneintes Trinken ist, indem sich keinesweges auf der andern Linie, in welcher allein das $\mp$ des Zahlens vorkommt, des x verneinter Werth abschneiden wird. Wenn man aber zwischen den beyden sächlichen $\mp$ dieser Aufgabe nicht gehörig unterscheidet, so wird dann, um Hrn Klügels Erklärung viel Zutreffen zu verschaffen, der zufällige Umstand dieser Aufgabe mit helfen, daß ihre beyden sächlichen + eigentlich einander entgegengesetzt sind. Denn eben daher kommt es, daß das – in – 5, bloß als ein algebraisch-arithmetisches – betrachtet, zugleich auch das – des Geldzahlens darstellen kann.

§. 82.

§. 82. Man weiß, wie viel ich bey Gelegenheit der obigen so leichten geometrischen Aufgabe zu erinnern hatte. Noch sehr viel andere, und zum Theil wenigstens eben so wichtige Bemerkungen, würde ich vermuthlich beyzubringen haben, wenn Hr. Klügel noch mehr geometrische Aufgaben behandelt hätte. Nur noch zwey Beyspiele aus der Geometrie werden in seiner Abhandlung (§. 2), und nur sehr kurz erwähnt: das eine, von der entgegengesetzten Lage der Subtangenten. Gerade diese so bekannte und wichtige Aufgabe habe ich in meiner kleinen Schrift, Linearum subtangentium, mit behandelt, und werde an dem Seite 3 schon erwähnten Orte, noch davon zu reden haben.

Das andere, was ebenfalls als Beyspiel entgegengesetzter Grössen aufgeführt wird, ist folgendes. „Der Punct, wo das Perpendikel „auf die Grundlinie eines Dreieckes diese trifft, „kann diesseits oder jenseits des einen Winkel„punctes fallen.“

Taf. I. Fig. 2.

Für den genannten Winkelpunct wollen wir C wählen; so kann ich das diesseits oder jenseits fallen des D, allerdings für ein schickliches entgegengesetztes anerkennen, in so fern in dieser ganzen Aufgabe nichts dazu kommt, wodurch man veranlaßt seyn könnte, das diesseits oder jenseits

fallen

fallen anders zu behandeln, als ich das ∓ der Richtung im diesseits her- und jenseits hingerichteten CD behandeln würde. Die Aufgabe ist überdies sehr übersehbar: und dennoch zweifle ich, daß man Ursach habe mit dem zufrieden zu seyn, was die gewöhnliche Methode bey ihr leistet; und wie sie es leistet. Ich will in dieser Hinsicht nur ein Paar Fälle nach der gewöhnlichen Methode behandeln, und nahmentlich nach Hrn Klügels Darstellung dieser Methode.

§. 83. Der Aufgabe **Fall I**, auf den wir den Calcul anlegen wollen, sey gerade der in Fig. 2, wo D zur Linken des Winkelpunctes C fällt, welches nun ein **diesseits** fallen heissen soll. Aus gegebnen $AB = a$, $BC = b$ und $AC = c$, und die gesuchte $CD = x$ genannt, folgt $x = \frac{c}{2} + \frac{bb - aa}{2c}$.
So nähmlich wird die Algebra die Formel in die Hände liefern, wenn man zur Auflösung die Gleichung $AB^q - AD^q = (BD^q =) BC^q - DC^q$ benutzt.

Mit dieser algebraisch so richtigen Ablieferung der Formel hat gleichwohl derjenige Ursach unzufrieden zu seyn, der die Klügelsche Methode etwas genau im Auge behalten will. Denn nach dieser Methode gehört die hergesetzte Formel eigentlich für einen Fall, der von unsere Figur 2,

auf

auf die wir doch den Calcul angelegt haben, wirklich nicht dargestellt wird. Nach der Figur ist ja $a > b$, wäre also das zweyte Glied der Formel ein verneinter Quotient; und damit muß es diese Methode nicht zu thun haben wollen: sondern für den gezeichneten Fall müßte die Formel eigentlich seyn $x = \frac{c}{2} - \frac{aa - bb}{2c}$; die vorhin gefundene Formel dagegen einem andern Falle zugehören, worin $a < b$ ist.

Immer schon ein auffallendes Beyspiel, daß für manchen von denen Fällen, welche **nach der Klügelschen Methode verschieden heissen** müssen, die Algebra, welche man doch zur Auflösung gebraucht, **gerade gar nicht unterscheidet!**

§. 84. **Zur** vollständigen Aufgabe gehört auch Fall II, Fig. 3, wo D jenseits C fällt, und wie im Falle I gerade $b < a$ seyn mag. Da die hieher gehörige Formel $x = -\frac{c}{2} + \frac{aa - bb}{2c}$ ist, so erhellet aus ihrem Anblicke, daß sie aus der vorigen durch Umwendung aller gegebnen Glieder sich verfertigen läßt.

Aber nun fordere ich die sämmtliche bisherige Methode auf, mir anzugeben, nach welchen

Gründen

Gründen aus der hier vorhandnen Veränderung in den gegebnen Grössen, diese Umänderung in der Formel zu schließen sey! Verändert wird im Gegebnen, in Hinsicht auf $\mp$ nur die einzige b, für die man daher sogleich bereit seyn wird anzunehmen, daß sie der b des vorigen Falles entgegengesetzt deshalb liege, weil sie dort jenseits, hier aber diesseits des Perpendikels liegt. Damit nun kann man freylich die Umwendung des x in der Zeichnung vortrefflich übereinstimmen sehen. Aber die Formel kann ja doch von diesem entgegengesetzten Liegen des b, nach allen bisher gewöhnlichen Lehren und Verfahrungsarten, so weit ich sie irgend bey Andern vorgefunden habe, auch die geringste Wirkung nicht empfinden, da in ihr lediglich bb vorkommt! Folglich könnte ja, aus dieser Aenderung des b auf die Umkehrung des x schließen, weiter nichts heissen, als aus dem Anblicke der Zeichnung es sehen, daß das x des Falles II dem x des Falles I entgegengesetzt liege. Dieses thun, dem gemäß zuvörderst — x schreiben, und daraus auf x schließen (wie es das gewöhnliche Verfahren nach Hrn Klügels Darstellung, verglichen oben §. 6, hier mit sich bringt) heißt also bloß, der Zeichnung es ansehen, daß die beyden x hier entgegengesetzte Werthe haben müssen, heißt aber nicht:

aus der Veränderung im Gegebnen, vermittelst der Formel auf die Aenderung des Gesuchten schließen; wie es doch die algebraischen Formeln gewähren müssen, und gehörig erklärt und behandelt, es allenthalben auch gewähren können!

Ich weiß, daß ich hiemit, selbst auch für diese leichte Aufgabe, etwas sehr auffallendes verspreche. Wie es zu leisten sey, kann schon aus der Schrift, Linearum subtangentium erhellen. Ich will es hier noch nicht ausführen; sondern erst abwarten, ob irgend ein Vertheidiger der bisherigen Methode mit derselben, für diese Aufgabe und alle ihre Fälle, fernerhin zufrieden bleibt, und seine Ausführung, öffentlich oder privatim, mir mittheilen will?

§. 85. Solche und andere Misstimmungen zwischen dem, was der algebraische Calcul wird, wenn man ihn bloß nach der gewöhnlichen Weise auf geometrische Aufgaben anwendet, und zwischen dem, was der algebraische Calcul selbst schon anderweitig ist, und auch auf die Geometrie angewandt, seyn und werden kann, scheinen mir nun in dem Umstande begründet zu seyn, daß man die geometrischen Grössen, wie in der Geometrie der Alten, nach Einheiten mißt, die oft genug nach unserer Algebra einander entgegen-

gesetzt

gesetzt sind; und gleichwohl jene Messungen dem Instrumente der Algebra unterwirft, welches doch voraussetzt, daß alle Elemente des Calculs, auch diejenigen, welche zu anderen hinzugefügt dieselben vermindern würden, ebenfalls nach der bejahten Einheit gemessen, und eben deshalb durch verneinte Zahlen ausgedrückt werden.

Sollte man nicht Recht haben, dieses Verfahren eines Widerspruches mit sich selbst zu beschuldigen?

§. 86. Hr. Prof. Klügel wird mir erwiedern, daß er ja die bisher gewöhnlichen Operationen der Buchstabenrechnung und Algebra nur gebrauche, nachdem er sich überzeugt habe, es lassen diese Operationen auch unter dem Beding sich erweisen, daß man nur mit lauter absoluten Grössen, wie in der Geometrie der Alten und in der gemeinen Arithmetik, es zu thun haben wolle. Es ist mir wiederum ein schöner Beweis von der consequenten Denkart dieses berühmten Mathematikers, daß Er eine solche Ueberzeugung als seiner Methode unentbehrlich anerkennt. In der Ueberzeugung selbst aber ist meines Erachtens eine Täuschung vorgefallen; und überdies scheint mir sogar die Bedingung selbst, die ich so eben für unentbehrlich erklärte, einen ganz sonderbaren Tadel zu verdienen, daß sie nähmlich gerade wegen dessen, wodurch sie für jene Methode unentbehrlich ist, zugleich auch dafür unzureichend ist.

§. 87.

§. 87. Da Herr Klügel den Satz $a-(b-c)=a-b+c$ für den ersten hält (§. 30 seiner Abhandlung) der eines Erweises bedürfe; so will ich gerade nur an ihm mein Urtheil zu erhärten suchen, (auch dahin gestellt seyn lassen, ob durch die VIII von Ihm aufgeführten Sätze, nebst denen, die für die Division daraus folgen, wirklich schon die sämmtlichen Operationen und Schlußarten der Algebra begründet werden, wozu doch nahmentlich auch die algebraische Grössenschätzung gehört; Stück VI. §. 5).

§. 88. Soll der Satz für Hrn. Klügels Methode gebraucht werden können, so muß, wie Er es auch ausdrücklich thut, „hier vorausgesetzt „werden, daß der Subtrahendus kleiner ist, als „die Größe, von welcher der Abzug geschieht, „oder daß der Subtrahendus den Theil, nicht das „Ganze bedeutet. Wenn der Subtrahendus „grösser ist; so ist es ein andrer Fall, als derjenige, „auf welchen die Rechnung angelegt ist.“

§. 89. Der Beweis des Satzes heißt: „Denn man setze $a-(b-c)=u$, so ist $a=u+(b-c)$ $=a+b-c$, folglich $a-b+c=u$ “

Aus des Beweises erster Gleichung die zweite zu folgern, ist der Hülfsatz nothwendig, daß $-(b-c)+(b-c)=0$ gebe. Aber bedenke man hierbey, das Hr. Kl., sobald das $+(b-c)$ für

seine

seine Gleichung gewonnen ist, dann ohne weiteres Bedenken diesen Ausdruck auch als $+b-c$ aufführt; so erhellet ja wohl, daß mit jenem Hülfssatze schon der zu beweisende Satz vorausgesetzt wird, nicht bloß in seinem gemein arithmetischen und alt geometrischen Sinne, da man sich unter $b-c$ eben so wohl als unter $(b-c)$, lediglich die einzige bejahte Grösse oder Linie denkt, welche des b Ueberschuß über c angiebt, ohne auch die beyden Grössen b und c, aus welchen der Ueberschuß entstand, fernerhin noch vor Augen zu behalten: sondern daß, nach dem Sinne, den das $-(b-c)$ und $+b-c$ in dem zu erweisenden Satze haben soll, auch jener Hülfssatz schon in eben dem Sinne vorausgesetzt werden muß, nähmlich in demjenigen, der ihm in der Buchstabenrechnung zukommt, wo die Differenz $b-c$ vermittelst der beyden Grössen, aus denen sie entsteht, auch aufgeführt und betrachtet wird, so daß auch beyde Grössen einzeln fernerhin behandelt werden, also $-(b-c)$ so viel als $-1.+b+-1.-c$ ist, und eben so $+(b-c)=+1.b+1.-c$ ist. Folglich wird ja durch den Hülfssatz schon mit angenommen, daß $-1.+b+-1.-c+1.+b+1.-c=0$ ist; folglich $-1.+b$ und $+1.+b$, desgleichen $-1.-c$ und $+1.-c$, die Grössen $-b$ und $+b$, desgleichen $+c$ und $-c$, als Produkte geben; folglich wird mit dem Hülfssatze auch ein Multiplicieren zwischen bejahten und verneinten, und zwischen

schen

schen zwey verneinten Zahlen, und der algebraische Erfolg dieses Multiplicierens, schon vorausgesetzt; ohne daß sich das mit — bezeichnete c hinter einer grössern bejahten Grösse noch versteckt hält.

§. 90. Dieses Verstecken war hier durchaus erforderlich für Hrn. Klügels Methode, daher ich auch seine Bedingung in §. 79 in so fern für unentbehrlich anerkennen mußte. Gleichwohl findet nun gegen diese Bedingung die Betrachtung Statt, daß, auch wenn der obige Satz für sie bündig erwiesen wäre, dennoch gerade ihrer wegen der Satz selbst zu eingeschränkt abgefaßt wäre für die Absicht, wozu er gebraucht werden soll: nicht zu eingeschränkt freylich für das, was jeder vorhandene Aufgaben-Fall während der hier verlangten Anlage des Calculs nur nöthig macht, denn da werden alle Grössen nie als bejahte behandelt; aber zu eingeschränkt für das Calculatorische Verfahren, was dann gewöhnlich erfolgt, und bey welchem ja auch die mit — bezeichneten Elemente des Calculs im einzelnen, schon in der Buchstabenrechnung mit andern multipliciert und dividirt, in der Algebra aber überdies von einer Gleichungsseite zu andern geworfen werden; auch zu eingeschränkt für diejenige Allgemeinheit, die man dem Falle einer geometrischen Aufgabe eben dadurch aufdringt, daß man seine Grössen mit

Buch-

Buchstaben bezeichnet, die man ja in ihre Großheit so veränderlich angebbar denkt, daß das ausbedungene $a > (b-c)$ und $b > c$ um so weniger vorhält, als es beym Uebergehen aus einem Falle in den andern nach dem Gesetze der Steetigkeit sogar nothwendig wird, daß z. B. während des Uebergehens aus dem Falle $a-(b-c)$ zum Falle $-a+(b-c)$ auch die $a=0$ wird

Verhält sich das wirklich so; so ist ja in der That die Bedingung in §. 79, für die Anlegung des Calculs nach der gewöhnlichen Methode unentbehrlich, und gleichwohl für den nachherigen Sinn des Calculs nicht hinreichend; und so würde auch aus diesem Gesichtspunkte erhellen, daß diese Methode sich gar nicht erweisen lasse.

Zweytes