Werk

Titel: Neue Erörterungen über Plus und Minus

Untertitel: Tadel einiges bisherigen und Darstellung eines genaueren Gebrauches desselben für...

Autor: Busse, Friedrich Gottlieb von

Verlag: Aue

Ort: Cöthen

Jahr: 1801

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH II, 3654

Werk Id: PPN599581573

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599581573|LOG_0005

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=599581573

Zweytes Stück.

Erörterung und Tadel des bisherigen Systemes der Trigonometrie in Absicht seines Bejahten und Verneinten.

§. 1. Taf. I. Fig. 5.

Wenn eine grade Linie CA um ihr eines Ende C sich dreht; so werden durch ihren andern Endpunct A Kreisbogen beschrieben, und Winkel durch die gerade Linie selbst. Bogen durch Bogen desselben Kreises, und Winkel durch Winkel zu messen, erfodert wenig Theorie, würde aber auch, wie so manches, was in seiner Theorie sehr leicht begreiflich ist, für die Praxis äußerst unbequem und unzureichend seyn. Man pflegt vielmehr zu zeigen, wie Bogen und Winkel einander proportional bleiben, und in so fern auch Bogen vermittelst der Winkel, und Winkel vermittelst der Bogen zu messen sind *). Obgleich dieses

*) Wie man der ausdrücklichen Proportionen, welche besonders durch ihre bisweilen incommensurabeln Glieder, ziemliche Schwierigkeit für Anfänger machen, für diese überhoben seyn könne, denke ich in meiner ersten Geometrie für Kinder und Jünglinge, zweyter Auflage 1789, hinreichend gezeigt zu haben.

dieses immer schon eine etwas abstraktere Messung ausmacht; so ist sie doch für die Praxis bey weiten brauchbarer als die vorhin erwähnte, welche ganz und gar nicht abstrakt ist. Noch um vieles künstlicher und abstrakter ist die trigonometrische Messung.

§. 2. In der Trigonometrie werden jene Drehungsgrössen, Winkel und ihre Kreisbogen, als einander zugehörige Begleiter, auf gerade Linien bezogen; und ich werde behaupten können, daß es für diese Wissenschaft Bedürfniß ist, die Drehungsgrössen vermittelst geradeliniger Scalen zu messen. Begreiflich kann das nur durch Proportionen auf diesen Scalen erreicht werden; und man hat dazu so natürlich als einstimmig, die Proportionen zwischen den Seiten in rechtwinkligen Dreyecken gewählt. Ich brauche meine geübten Leser nur kurz zu erinnern, daß Sinus und Tangenten, und die übrigen trigonometrischen Hülfslinien, allemahl eine Anlegung von rechtwinkligen Dreyecken voraussetzen, und nur durch die Verhältnisse zwischen den Seiten derselben zur Messung benutzt werden.

§. 3. Würde nun in diesen Verhältnissen bloß die absolute Grösse ihrer Glieder betrachtet, so käme nichts in ihnen vor, wodurch sie sich unterscheiden könnten, auch nur für die beyden Arten der **hohlen** Winkel, für diese schlechthin

so

so genannten spitzen und stumpfen Winkel: und noch weniger dürfte man hoffen, durch eine solche Trigonometrie, neben diesen so eben genannten Winkeln des ersten und zweyten Quadranten, auch noch zwischen den erhaben-stumpfen und erhaben-spitzen Winkeln, die bis in den dritten und den vierten Quadranten reichen, gehörig unterscheiden zu können.

§. 4. Daraus erhellet schon, daß man nur eine sehr kümmerliche Trigonometrie erhalten würde, wenn man mit einem gewissen Eigensinne, und einer übertriebenen Vorliebe für das Antike in der Geometrie, auch bey der trigonometrischen Construction nichts als jene so genannte absolute Grösse der Linien betrachten wollte. Die Entscheidungen einer solchen Trigonometrie würden den Vorwurf der Vieldeutigkeit und der Unbestimmtheit verdienen, in Vergleichung mit einer solchen andern, die zwischen den eben genannten vier Stufen der Drehungsgrössen zu unterscheiden wüßte. Uebrigens setze ich als bekannt voraus, wie sich nach diesen vier Stufen, auch alle noch grössere, über den ganzen Kreis hinaus fortgesetzten Drehungen, ebenfalls abtheilen lassen.

§. 5. Daß ohne besondere Erinnerung, immer nur von lauter Drehungen in einerley Ebne die Rede ist, versteht sich von selbst. Aber auch unter diesen Drehungen ist nun keine, möchte sie auch auf das äußerste klein seyn, so einfach gerichtet, daß eine einzige gerade Linie eine ausreichende Meßleiter für sie abgeben könnte: sondern es ist aus der bloßen Vorstellung einer **Drehung** klar, daß man ihren Fortgang, ihren so genannten Drehungssinn, allemahl als ein **diagonalisches** Resultat **zweyer** Richtungen betrachten, und nach diesen beyden Seitenrichtungen verfolgen muß, wenn das Verfolgen auf geradelinigen Scalen geschehen soll. Soll auch jedes von diesem Verfolgen völlig rein seyn, nicht schon das eine von dem andern etwas in sich haben; so ist es nothwendig, die beyden Seitenrichtungen einander normal anzunehmen.

So wird man bey der Drehung CACoCB′, (das heißt, indem sich die **zuerst** genannte Linie CA, **aus** dieser ihrer **ersten** Lage, durch die Lage Co hindurch, **in** die **zuletzt** genannte Lage CB′ **hinein** dreht,*)) und auch nahmentlich bey dem Bogen AB′, der als Begleiter dieser Drehung beschrieben wird, es zugestehen müssen, daß sich dessen Grösse von A aus nach **oben** hin, und **zugleich** von A aus nach der **linken** hin erstreckt.

*) Ich setze hiemit fest, daß ich allemahl, wo ich einen Winkel, wie hier CACB′, durch seine beyden Schenkel nenne, gerade in dem **zuerst** genannten Schenkel den **Anfang** des Winkels will genommen wissen, so daß der **zweyte** Schenkel gerade derjenige

ist,

ist, der sich **drehr**, und dadurch den Winkel beschreibt. Die gewöhnliche Schreibart durch drey Buchstaben, mag mir für die Fälle übrig bleiben, wo ich noch nicht bestimmen will oder kann, welcher von den beyden Schenkeln der erste festliegende Anfangsschenkel sey.

Ob nun gleich durch diese Schreibart CACB′, allerdings bestimmt wird, daß gerade CB′ der Schenkel ist, durch dessen Drehung der Winkel beschrieben wurde; so bleibt es doch immer noch ungewiß, ob er sich gerade durch die Lage Co, oder ob er sich durch die Lage Cu hindurch gedreht haben soll: daher ich für jetzt auch noch Co oder Cu hineinschreibe, wo dergleichen plötzlich und einzeln zu bestimmen ist. In der Folge werde ich freylich für denselben Behuf noch ein anderes Zeichen ergreifen müssen: ich sage für denselben Behuf der plötzlichen und einzelnen Bestimmung; denn wo man sich schon im Voraus und allgemein darüber bestimmen kann, da braucht man sich mit dieser mühsamen Bezeichnung fernerhin nicht zu befassen.

§. 6. Um die eine Veränderung der Drehungsgrösse, z. B. ihren Wachsthum ins Höhere oder Tiefere hinein, zu verfolgen, dienen die Sinus und die Tangenten, auf eine ziemlich verschiedene Weise. Die Sinuslinie EB′ wächst ins **Hohe** gerade um eben so viel, als der Bogen AB′, indem sie zugleich mit des Bogens Endpunct B′, und zwar wiederum eben so viel als er selbst, auch ins **Linke** hinein

 wandert.

wandert. Die Tangentenscale nimmt dagegen an der Seitenveränderung des Bogens gar keinen Theil, und verbraucht ihre ins unendlich hohe U′ hineinlaufende Länge AU′ als Meßleiter für die Winkelgrösse CACB′, während diese bis auf CACA anwächst, und dadurch von ihrer Drehung ins Hohe das Höchste erreicht!

§. 7. Wenn wir, um durch festgestellte Bilder fernerhin anschaulich und kurz zu werden, von den beyden schon genannten Veränderungen, die erste allemahl durch **hoch** und **tief** ausdrücken; so kann die zweyte sehr bequem durch **rechts** und **links** angedeutet, auch gerade **dadurch**, zur Erleichterung der Nachweisungen, wirklich dargestellt werden. Jene mag auch überhaupt die Höhenveränderung, und diese die Seitenveränderung heissen. Von dieser letztern will ich für jetzt nur kurz erinnern, daß durch den Cosinus CE′=E′B′ und durch die Cotangente AT′, als Sinus und Tangente des Cowinkels CACrCB′, die Seitenveränderung dieses Cowinkels auf eine eben so verschiedne Weise abgemessen wird, wie durch den Sinus und die Tangente des Vorwinkels CACoCB′ dessen Höhenveränderung gemessen wird.

Cowinkel nenne ich, dessen Sinus, Tangente und Secante rc. nicht so, sondern Cosinus, Cotangente und Cosecante genannt werden, in Beziehung

auf

auf einen früher gedachten Winkel, den ich in dieser Rücksicht den **Vor**winkel nenne.

§. 8. Alle trigonometrische Hülfslinien, Sinus, Tangente und Sinusversus, Cosinus, Cotangente und Cosinusversus, Secante und Cosecante, nebst den dabey genannten Halbmessern, wurden zuvörderst für die schlechthin so genannten spitzen Winkel, für die Winkel des ersten Quadranten erdacht und angelegt, und dann ausgedehnt, zunächst auf die hohlstumpfen Winkel, welche bis in den zweyten Quadranten reichen. Dabey mußte nun, als man an + und − gewöhnt wurde, auch gar bald bemerkt werden, daß des stumpfen Winkels Cosinus, $CE'' = E''''B''$ eine, dem Cosinus des spitzen Winkel $CE' = E'B'$ **entgegengesetzte** sogenannte **Lage** erhalte, indeß die sogenannte Lage der Sinus $E'B'$ und $E''B''$ einerley bleibe.

Statt **Lage** hätte man **Richtung** sagen sollen, und dann sogleich es sich zur festen Regel machen: **wo man eine Linie vermittelst ihrer beyden Gränzpuncte** angiebt, den **Anfangspunct** ihrer Richtung **zuerst** zu **nennen**; welches wir genau beobachten werden.

Wenn man die Cosinus CE' und CE'', die der Cowinkel Sinussen $E'B'$ und $E''''B''''$ gleich sind, unter dem Bilde der letztern ins Auge nahm,

nahm, deren E'''' und E' nicht gerade immer in einen Punct zusammenfallen; so konnte es etwa deshalb auf den ersten Anblick wohl so scheinen, als ob man ihr Entgegengesetztes am allgemeinsten und besten dadurch ausdrücke, daß sie an entgegengesetzten Seiten der CA liegen. Selbst auch für den von uns gezeichneten Fall, wo die E'B' und E''''B'''' gerade einerley Anfangspunct E' und E'''' haben, mochte es vielleicht so scheinen, als ob man sich denn doch bey den Sinus E'B' und E''B'' nicht gehörig ausdrücke, wenn man bloß von ihrer gleichen Richtung nach oben hin reden wollte. Man meynte etwa genauer zu reden, wenn man anführte, daß beyde, und so überhaupt alle Sinus aller hohlen Winkel, sie mögen spitz oder stumpf seyn, auf der einen (obern) Seite des Durchmessers gelegen sind. (So pflegen ja selbst diejenigen zu sprechen, die es hie und da so schön erinnern, daß es beym $\mp$ in der Geometrie auf Richtungen ankomme: Segner, Kästner, Karsten!)

So etwa mag man gerade das, was bey den Sinus und Cosinus, als Meßleitern der Höhen- und Seitenveränderungen, für das Entgegengesetzte in jeder Veränderung das Wesentlichste wäre, ihre Richtung, aus den Augen verloren haben, indem man sich, obgleich freylich nur nach einem dunkeln Wunsche bemühte, auch ihr stetes

Hin-

Hin- und Herwandern mit auszudrücken! Oder man wurde auch hier nur geradezu durch die Gewohnheit geleitet, die ich schon im Iten Stücke §. 19, b) ꝛc. bestritten habe. Oder nahmentlich Karsten wollte nicht wagen, das Richtungs $\mp$ wirklich durchzusetzen, weil das $\mp \infty$ des bisherigen trigonometrischen Systemes in der That desto widriger wird, und desto schwieriger zu läugnen ist, je mehr man das $\mp$ überhaupt zur Deutlichkeit bringt. Diese Aeusserung wird durch §. 50 ꝛc. verständlicher werden.

§. 9. Hätte man es gehörig bedacht, daß man jeden Drehungssinn, um ihn auf geradelinigen Scalen zu messen, etwa in sein Erhöhen oder Vertiefen, und in sein Rechts- oder Linksgehen zerspalten, und für jedes dieser Richtungspaare eine gehörige Scale nach anschaulicher Schicklichkeit müsse anzulegen wissen: so würde man es gewiß auch sogleich bemerkt haben, daß die gewöhnliche Tangentenscale durch A für jeden Winkel CACoCB′ und für jeden CACuCB′′′′, allerdings eine schöne Meßleiter der Drehung ins Hohe oder Tiefe abgiebt; indem auf dieser Scale auch der Index (die Secante) allemahl ins Höhere hinauf oder ins Tiefere hinabsteigt, je nachdem die Drehung ins Höhere hinauf oder ins Tiefere herab sich ändert: und daß auch die gewöhnliche Cotangentenscale durch A allerdings für

für jeden Cowinkel CACrCB' und CAClCB''' eine eben so schickliche Meßleiter für das Rechts- oder Links- gehen wirklich abgiebt: daß aber dagegen auf der gewöhnlichen Tangentenscale durch A für die Winkel CACB'' und CACB''', und und auf der gewöhnlichen Cotangentenscale durch A für die Cowinkel CACB'''' und CACB''', eine Bewegung des Indicis vorhanden ist, die man nach einem unbefangenen Anschauen der Sache, für geometrisch **widersinnig** nothwendig erklären muß!

Meine zweyfache Tangenten- und Cotangentenscale, nebst andern Gründen eines deutlichen trigonometrischen Systemes, welches mit dem bisherigen so viel als möglich übereinstimmt.

§. 10. Die Tangentenlinie wächst von A aus durch T' ins unendliche U', indem die Drehungsgrösse CACB' bis auf die CACA anwächst, wodurch dann der rechte Winkel CACA und der Quadrant AoA beschrieben ist. Die Linie von A durch T' ins unendliche U', welche ich kurz und verständlich durch AU' andeuten will, diese Linie wird also, als Meßleiter der Drehungsveränderung ins Obere hinein, gänzlich verbraucht durch die Drehung CACoCA.

Eben

Eben so wird durch die Drehung CACuCH, die nach unten hin gerichtet ist, auch die unendliche Linie von A aus durch T'''' bis ins unendliche U'''', welche ich durch AU'''' andeuten will, ebenfalls als Meßleiter dieser Drehungsgrösse CACuCH völlig verbraucht.

Für die Drehung durch beyde Quadranten zusammengenommen, würde also die Linie U'AU'''' als Scale gehören, falls die Drehung CACrCH seyn, das heißt in A anfangen und durch r bis in H gehen sollte. Und es würde dagegen U'''' AU' die Meßleiter für die Drehung CHCrCA abgeben.

Demnach ist es gewiß, daß für die Drehung durch die beyden genannten Quadranten, die von beyden Seiten unendliche Tangentenlinie durch A schon völlig verbraucht wird.

§. 11. Eine mit ihr parallele Linie auch durch H anzulegen, darauf wird man schon durch bloßes Anschauen ganz natürlich geleitet, sobald man eine ähnliche Tangentenscale für die Erhöhung und Erniedrigung in der, auch durch die beyden übrigen Quadranten fortgesetzten Drehung, ebenfalls zu haben wünscht.

Dann werden z. B. dem hohlstumpfen Winkel CACB'' als = CACA + CACB'' die beyden Längen AU' + U''T'' auf diesen beyden Tangen-

Tangentenleitern zugehören; die erste Linie AU′ für das Hinaufsteigen im rechten Winkel CACA, und die andere Linie U″T″ für das Hinabsteigen in des hohlstumpfen Winkels noch übrigem Theile CACB″.

Wenn auch dieser eben behandelten Drehung CACoCB″ noch die fortgesetzte Drehung CB″CH hinzugefügt wird; so rückt der Index auf der Tangentenleiter ferner von T″ bis H herab, und giebt für die Drehung CACoCH, welche den Halbkreis zum Begleiter hat, auf den Tangentenleitern als Maaß an die Höhe AU′+U″H=o.

Dem erhaben-stumpfen Winkel CACoCB‴ gehört auf den Tangentenleitern zu die Liniensumme AU′+U″H+HT‴ und dem erhaben-spitzen Winkel CACoCB⁗ gehört die Liniensumme AU′+U″H+HU‴+U⁗T⁗.

§. 12. Dieses sind doch meines Erachtens, zwischen Drehung ins Hohe und Tiefe und zwischen dem Auf- und Absteigen des Indicis auf den beyden Tangentenleitern, solche Verbindungen, die gar keine Undeutlichkeit haben, und durch das bloße Anschauen der Construction allenthalben als anpassend gerechtfertigt werden. Aus dieser anschaulichen Grundlage werde ich nun von den Behauptungen und Gebräuchen der heutigen analytischen Trigonometrie bey weiten

die

die meisten selbst auch für das Richtungs $\mp$ rechtfertigen, und ihr Zusammentreffen mit demselben deutlich erörtern, zugleich aber auch für den übrigen Theil, ihre tief begründete Abweichung von demselben eben so einleuchtend darlegen können; wenn ich auch noch die gehörig angelegten Seitenscalen damit verbinde.

§. 13. Dabey will ich aber nicht auch die Frage erörtern, auf wie manche verschiedene Weise wir vielleicht, nach dem bereits von uns angelegten Höhen $\mp$ der Tangentenscale, nun auch das Seiten $\mp$ der Cotangentenscale noch anlegen könnten! Sondern gerade das, was man in der ersten Anlage dieses zwiefachen $\mp$ bisher wirklich, obgleich freylich zum Theil nur stillschweigend und ohne gehörige Anzeige, gewählt hat, gerade dieses soll und muß hier ebenfalls von mir gewählt werden; da es meine Hauptabsicht ist, in den bereits gewöhnlich gewordenen Behauptungen für das $\mp$ der trigonometrischen Formeln, alle nur mögliche Uebereinstimmung mit dem Richtungs $\mp$ zu erarbeiten.

§. 14. Demnach soll I) in der Tangentenscale durch A gerade ihr Berührungspunct A der Punct des Anfanges seyn, sowohl für die eine Richtung nach oben hin, welche wir eine +richtung nennen wollen, als auch für die ihr entgegengesetzte

gesetzte

gesetzte Richtung nach unten hin, welches dann eine der vorigen entgegengesetzte —richtung ist; so daß um o, um nichts erhöht oder vertieft diejenige Drehungsgrösse heißt, deren zweyter Schenkel auf der Tangentenscale ebenfalls A, oder auch den mit ihr gleich hohen Punct H abschneidet; indem

II) der erste Schenkel für alle Drehungsgrössen CACoCB, die wir α nennen, und in Absicht auf hoch und tief schätzen werden, allemahl der Halbmesser CA seyn und unverändert bleiben soll. (Ich schreibe CACoCB und α unbestricht, wo ich sowohl die CACoCB$' = \alpha'$ als die CACoCB$'' = \alpha''$, und die CACoCB$'''$ $= \alpha'''$ 2c. mit umfassen will.)

Was aber in Beschreibung und Veränderung dieser α, ihre Seitenbewegung, ihr Drehen nach Rechts oder Links betrifft; so soll

III) die Grösse derselben nicht unmittelbar durch das Rechts- und Linksgehen der α selbst, sondern durch das Rechts- und Linksgehen einer gewissen andern Drehungsgrösse ε bestimmt werden, deren allgemeine Erklärung ist, daß $\alpha - \varepsilon =$ CACoCA giebt, gerade nähmlich α und die Gegengrösse von ε zusammen genommen denjenigen rechten Winkel angiebt, dessen einer Schenkel CA der Anfang aller α ist,

die

die auf hoch und tief geschätzt werden, und dessen anderer Schenkel CA von C aus dem Tangenten + gemäß gerichtet ist.

IV) Gerade dieser andere Schenkel CA soll den einzigen, gemeinschaftlichen Anfang aller unserer ε ausmachen, bey deren Drehung von Seitenrichtung, von Richtung nach Rechts und Links, und deren Abmessung auf dahin gehörigen Scalen die Rede seyn soll.

Wird nähmlich die obige Construction der beyden Tangentenscalen für die α (§. 11) auch auf die Tangentenscalen der ε, das heißt, auf die Cotangentenscalen der α angewandt; so ist die erste Cotangentenscale durch A, die zweyte durch H zu legen.

V) Und für diese Cotangentenscalen soll von A und H aus diejenige Richtung die bejahte heissen, welche mit der Richtung CA übereinstimmt, also nach unserer hiesigen Zeichnung der CA, ins Rechte hinein zielt; daher nun die — richtung ins Linke hinein sich erstreckt.

§. 15. Hiemit hoffe ich gerade diejenigen Annahmen getroffen zu haben, welche meiner schon geäußerten Absicht (§. 13) entsprechen.

Am auffallendsten wird von dem gewöhnlichen Systeme das Annehmen der zweyten Tangenten- und Cotangenten-scale abweichen. Ich habe

habe aber schon gezeigt, daß von den beyden gewöhnlichen einfachen Scalen eine jede für zwey Quadranten eine geometrisch widersinnige Bewegung des Indicis verlangt. (§. 9).

§. 16. Nächstdem wird sich I und V von dem gewöhnlichen Vortrage dadurch unterscheiden, daß ich das $\mp$ der Drehungsgrössen sehr genau nach **zweyerley Richtungspaaren** ausdrücklich bestimme; indeß einige andere Mathematiker bey der ersten Erörterung des algebraischen $\mp$, zu dessen geometrischer Darstellung sich der entgegensetzten Richtungen freylich auch bedienen, nachher aber, und nahmentlich auch in der Trigonometrie, statt dessen vom entgegengesetzten **Liegen**, ober- oder unterhalb der HA, und diesseits oder jenseits der AH sprechen. Dem gemäß müßte ja z. B. des Winkels B′CA Tangente allemahl bejaht seyn, weil sie oberhalb der HA lieget, und das Zeichen — könnte ihr bloß vorgesetzt werden, in so fern sie von einer andern bejahten Tangenten abgezogen werden soll. Ich behaupte dagegen, daß dieser Winkel, (den wir lieber hier der Kürze wegen als einen Theil des Winkels ACA betrachten wollen,) da er mit der Drehung CB′CrCA beschrieben, einen bejaht gerichteten Tangententheil T′U′ verursacht, dagegen auch, sobald er durch die entgegengesetzte Drehung CACrCB′ beschrieben gedacht wird, und

und zwar eben deshalb, nun einen verneint gerichteten Tangententheil U′T′ bewirken muß, also sein Tangententheil U′T′, und die Tangente des Winkels CACuCB'''' aus einerley Grunde verneint seyn muß; auch das etwanige Abziehen dieser Tangenten von andern bejahten, eben so gut wie ihr addiren zu andern verneinten Tangenten, nur eine Folge jenes Grundes ausmacht, und nur als solche zu betrachten ist, wo man Algebra gebrauchen will.

Die Beschreibung des Tangententheiles U′T′ hat in U′ ihren Richtungsanfang; und eben so kann für andere Winkel, die Tangentenbeschreibung noch anderwärts ihren Richtungsanfang haben, z. B. in T'''' für den Winkel CB''''CuCA.

§. 17. Wenn ich dagegen in II und IV bloß die Puncte A und 𝔄 als **Anfang** der Tangenten- und Cotangentenbeschreibungen, und ihrer Richtungen nannte; so geschahe das in Hinsicht auf die α und ε, die man bey der ersten Begründung des trigonometrischen Systemes nur gebraucht. Auch von einigen andern Lehrern ist es dabey schon ausdrücklich erinnert worden, daß man für die α einen **ersten**, festen Schenkel CA hat, und dagegen für alle diejenigen Winkel, deren Sinus, Tangenten ꝛc. in Beziehung auf jene α nur Cosinus, Cotangenten ꝛc. genannt werden, also für unsere

unsere ε, ein anderer fester, erster Schenkel CA angenommen wird.

§. 18. Diese ε habe ich schon oben, ganz kurz und bequem, die Cowinkel (der Vorwinkel α) genannt. Meine Erklärung der Cowinkel aber, unter III) wird freylich auffallen. Denn bisher hat es noch niemand bemerkt, daß z. B. sogleich auch für den spitzen Winkel $\alpha' = CACB'$, sein Cowinkel $\varepsilon = C\mathfrak{A}CB'$ die **Ergänzung** zu dem rechten Winkel $CAC\mathfrak{A}$ wirklich **nicht** abgiebt, sondern diese Ergänzung vielmehr in des Cowinkels $C\mathfrak{A}CrCB' = \varepsilon$ **Gegengrösse** $CB'CrC\mathfrak{A} = - C\mathfrak{A}CrCB' = - \varepsilon$ besteht!

Auch diese Bemerkung ist eine Folge von meiner genaueren Bestimmung dessen, was $\mp$ genannt werden soll, auch für meine Absicht §. 13, genannt werden muß; und ich will hier sogleich folgen lassen die

allgemeine Rechtfertigung meiner Erklärung des Cowinkels.

§. 19. **Der Drehungssinn** $CACoC\mathfrak{A}$ ꝛc., nach welchem der **erste** Quadrant $CAC\mathfrak{A}$ auf dem kürzesten Wege beschrieben wird, wenn die Drehung in CA ihren Anfang nimmt, dieser **Drehungssinn**, welchen ich von nun an den **ersten Drehungssinn**, oder auch noch kürzer **die Vordrehung** nennen werde,

und

und der Drehungssinn CACrCA ꝛc. nach welchem der erste Quadrant CACA auf dem kürzesten Wege beschrieben wird, wenn die Drehung in CA ihren Anfang nimmt, und welchen ich den zweyten Drehungssinn, oder auch kürzer, die Codrehung nennen werde,

sind beyde einander entgegengesetzt, auch in Hinsicht auf die durch sie beschriebenen Winkel und Bogen. Taf. I, Fig. 6.

Denn man mag sich irgend einen Winkel (β = CBCM*) zuvörderst etwa mit jenem ersten Drehungssinne beschrieben denken, dann aber die Beschreibung CMCB im zweyten Drehungssinne hinzufügen; oder auch umgekehrt: so machen beyde Beschreibungen zusammen genommen gerade = 0 aus, ist also der eine Winkel des andern Gegengrösse, und daher der eine von beyden verneint zu nennen, wenn der andere bejaht gesetzt ist.

§. 20. Indessen werden, nach allgemeiner Gewohnheit der bisherigen Trigonometrie, einige Winkel bejaht oder verneint genannt, die gerade nur in Beziehung auf den ersten Drehungssinn diese

*) unter dem man sich entweder den hohlen, oder den erhabenen, nach Belieben, denken kann, doch für eins von beyden entscheiden muß bey jeder Lesung des hier behaupteten; so daß man, beyde Entscheidungen nach einander angenommen, auch zweymahl zu lesen hat.

diese Nahmen verdienen, indem sie ihm gemäß oder entgegengesetzt beschrieben, wirklich zu denken sind;

andere Winkel aber werden so bejaht und verneint genannt, daß sie nur in Beziehung auf den **zweyten** Drehungssinn dafür gelten können, indem man sie wirklich **ihm** gemäß oder entgegengesetzt beschrieben sich zu denken hat.

Ich werde diese Gewohnheit, selbst auch in der Folge für mein neues System, eben darum weil sie dem bisherigen zum Grunde liegt, ebenfalls beybehalten; nur will ich sie sogleich auch für die jetzige Betrachtung des bisherigen Systemes mit Genauigkeit, vermittelst der beyden Drehungssinne und ihres zwiefachen Richtungs $\pm$ ausdrücken.

§. 21. Taf. I, Fig. 5.

Nähmlich nach dem **ersten** Drehungssinne werden bejaht, und daher, wo sie ihm entgegengesetzt beschrieben gedacht werden, auch verneint genannt alle Vorwinkel $\alpha = CACB$, deren Sinus, Tangenten 2c. schlechthin so genannt werden. (Ich schreibe wiederum bloß B, um anzuzeigen, daß es bald ein B′, bald ein B″, B‴ oder B⁗ seyn könne.)

Nach dem **zweyten** Drehungssinne aber werden bejaht, und daher nach dem ihm entgegengesetzten

gesetzten auch verneint genannt, alle diejenigen Winkel, deren Sinus, Tangenten ꝛc. nicht als solche, sondern als Cosinus, Cotangenten ꝛc. aufgeführt werden; also unsere obigen Cowinkel $\varepsilon =$ CACB.

§. 22. Indem wir fernerhin sorgfältig dabey bleiben, von den beyden Schenkeln eines Winkels denjenigen zuerst zu nennen, in dessen Lage die Winkelbeschreibung ihren Anfang nehmen soll; so haben wir freylich dadurch schon viel für Kürze und Genauigkeit solcher Winkelbestimmung gewonnen, als bey Betrachtung ihres $\mp$ nöthig wird.

Tafel I, Fig. 6.

Da aber doch, (z. B.) bey Nennung des Winkels CBCM, immer noch ungewiß bleibt, ob wir den durch Vordrehung (hier in Fig. 6) entstehenden (erhabenen) Winkel, oder den durch Codrehung (hier) entstehenden (hohlen) Winkel darunter gedacht wissen wollen, und die oben (§. 5.) dafür ergriffene Unterscheidungsart hier nicht bequem genug anzuwenden ist: so wollen wir, wo dergleichen augenblicklich und einzeln zu bestimmen ist, die Vordrehung durch (CBCM) und die Codrehung dagegen durch ((CBCM)) andeuten, auch eben so (γ) und $((\gamma))$ schreiben, wo wir CBCM durch γ benannt hätten.

(Sollte dabey auch ausdrücklich solcher Winkel erwähnt werden, die schon über 360 Grad enthalten; so würden wir auch diese völlig andeuten können durch (CBCM) + (n. 360°) und ((CBCM)) + ((m. 360°)) indem wir für n und m die gehörige 1, 2, 3 oder 4 ꝛc. setzen. Dieses aber ein für allemahl erinnert, will ich mich mit jenem n und m hier nicht belasten.)

§. 23. Vermittelst dieses Hülfsmittels lassen sich nun die für mich nöthigen Sätze ungemein kurz und deutlich ausdrücken.

Die beyden Schenkel CB und CM mögen nähmlich liegen, wie sie wollen, so ist gewiß und aus dem obigen schon sehr einleuchtend,

daß 1) für (CBCM) = (γ)

die Gegengrösse − (γ) = ((CMCB)) ist

und 2) für ((CBCM)) = ((γ))

die Gegengrösse − ((γ)) = (CMCB) ist. (§. 20)

Und diese beyden Sätze werden mir genügen, um meine obige Erklärung des Cowinkels allgemein zu rechtfertigen.

§. 24. Taf. I, Fig. 5.

Um eines Winkels (α) = (CACB) Cosinus oder Cotangente ꝛc. zu bestimmen, pflegt man doch zuvörderst nach demjenigen Winkel zu fragen, der zu (α) hinzugethan, den ersten Quadranten

dranten (CACA) gebe! Dieser gefragte Winkel muß nun offenbar ein CBCA seyn: denn soll (CACB) + X = (CACA) seyn, so kann statt X etwas, das nicht ein CBCA wäre, nicht gesetzt werden. Nur ist noch auszumachen, in welchen Fällen es gerade ein (CBCA), und in welchen Fällen es dagegen ein ((CBCA)) seyn müsse?

Die Antwort ist leicht. Ist (α) ein (α′), so fehlt ihm an **Vordrehung** noch etwas, um den ersten Quadranten voll zu machen: daher für jedes (α′) = (CACB′) der gefragte Winkel ein (CB′CA) ist.

In jedem übrigen Falle aber, da (α)
ein (α″), (α‴) oder (α⁗) ist, wird ein ((CB″CA)); ((CB‴CA)) oder ((CB⁗CA)) für den erfragten Winkel anzugeben seyn.

Nie aber werden diese erfragten Winkel als die Cowinkel
von (α′) (α″) (α‴) und (α⁗)
betrachtet; sondern dafür werden
((CACB′)), (CACB″) (CACB‴) u. (CACB⁗) angegeben, welches nun gerade die Gegengrössen der **erfragten** Winkel sind; das heißt, die Gegengrössen von **denen** Winkeln, welche mit (α′) (α″) (α‴) oder (α⁗) zusammen genommen, den ersten Quadranten (CACA) ausmachen. W. Z. E.

§. 25.

§. 25. Anm. 1. In §. 18 wurde ausdrücklich festgesetzt, daß alle Cowinkel nach der Codrehung geschätzt werden sollen, und hier habe ich gleichwohl die Cowinkel der spitzen Winkel gerade als durch Vordrehung beschrieben aufgeführt! Wem dieses anstößig fiele, der bedächte nicht, daß ja die $\substack{\text{bejahte}\\\text{verneinte}}$ Vordrehung auch eine $\substack{\text{verneinte}\\\text{bejahte}}$ Codrehung ausmacht, also Vordrehung und Codrehung algebraisch gleichartig sind, indem der einen und der andern Großheit durch bejahte und verneinte Zahlen auszudrücken ist.

§. 26. Anm. 2. Wenn man noch den wichtigen Satz zu Hülfe nimmt, daß jeder Winkel $(CPCQ)$, die Schenkel CP und CQ mögen liegen wie sie wollen, mit dem Winkel $((CPCQ))$ einerley Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante hat; welches uns sogleich einleuchten wird, weil wir in beyden Beschreibungsarten des Winkels gerade den Schenkel CP als den ersten genannt sehen: so ist nach diesem Satze auch erlaubt, statt der obigen Cowinkel $((CACB'))$, $(CACB'')$, $(CACB''')$ und $(CACB'''')$ lieber folgende $((CACB'))$, $((CACB''))$, $((CACB'''))$ und $((CACB''''))$ zu wählen; da man denn auch lauter bejahte Codrehung für die bejahte Vordrehung (α'), (α''), (α''') und (α'''') hat. Indessen wollen wir auch hierin bey dem gewöhnlichen bleiben.

§. 27.

§. 27. Man wird nun aus meiner obigen Rechtfertigung von §. 19 bis 24, einsehen, daß die bisherige, allgemein gewöhnliche Erklärung der Winkel ε, die ich kurz und bequem bereits Cowinkel genannt habe, gerade das, was man unter ihnen wirklich versteht, nicht gehörig ausdrückt; und die Folgen dieser Unrichtigkeit mußten um so verdrüßlicher wirken, je mehr man, selbst schon in der reinen Mathematik, von bejahten und verneinten Drehungen oft genug zu sprechen suchte, und bey Anwendung der Algebra auf die Mechanik nothwendig davon sprechen muß.

§. 28. In No. V (§. 14) habe ich von den Seitenrichtungen gerade die ins Rechte hinein als die bejahte Richtung angenommen. Dieses wird mir als eine ganz willkührliche Wahl auch von allen denen zugestanden werden, die sich vielmehr dazu gewöhnt haben, in der Trigonometrie meistens, und gleichsam vorzugsweise, das Seiten+ nach der **Linken** hin anzulegen. Zur Erleichterung für Anfänger dient es wenigstens nicht, daß eben diese Lehrer dagegen bey dem Seiten+ der Abscissen meistens auch vorzugsweise gerade die Richtung ins Rechte, oder nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, das **Liegen** zur **Rechten**, ergreifen. Denn wo trigonometrische Formeln mit andern analytischen, die sich auf bejahte

und

und verneinte Abscissen und Ordinaten beziehen, zu verbinden sind, da muß doch zwischen diesem zweyfachen Coordinaten ∓ und jenem zweyfachen ∓ der ebenen Trigonometrie, die gehörige Uebereinstimmung herrschen; wenn man aus dem einen einzelnen Falle, auf welchen der Calcul angelegt wird, auch auf alles ∓ in allen übrigen Fällen schließen will: welches denn freylich bisher noch nicht mit der gehörigen Deutlichkeit und Sicherheit geschehen ist!

Hauptforderung des bisher gewöhnlichen ∓ in der Trigonometrie.

§. 29. In der That war es der bisherigen übrigen Verfahrungsart bey Anlegung des ∓ für geometrische Constructionen sehr gemäß, ohne vieles Bedenken es als ein ganz **willkührliches** Verlangen zu fordern: für die **spitzen** Winkel, **sollen** alle trigonometrischen Hülfslinien **bejaht** heissen; wobey man denn anfänglich, für die erste Grundlage der trigonometrischen Lehren, wenigstens stillschweigend noch mit annimmt, daß dabey gerade von den spitzen Winkeln in einem **gewissen ersten** Quadranten die Rede ist.

Glücklicher Weise kann nun diese Hauptforderung der bisherigen analytischen Trigonometrie allerdings Statt finden, auch wenn man das Bejahte

jahte und Verneinte mit der gehörigen Deutlichkeit vor sich zu haben verlangt.

§. 30. Es soll z. B., wie es bisher schon angenommen ist, gerade CACA der erste Quadrant seyn; so werden durch die beyden Richtungen, nach welchen die beyden Halbmesser CA und CA von C aus gerichtet sind, die beyden + der beyden ∓ des trigonometrischen Systemes bestimmt. Der Kürze und Anschaulichkeit wegen diese beyden ∓ fernerhin als Höhen ∓ und Seiten ∓ benannt, so wird nun allerdings für die spitzen Winkel $\alpha' = CACB'$ sowohl die Tangente AT', als der Sinus EB', auch der Cosinus versus EA, bejahte Höhenrichtung haben, und die Cotangente AT, der Cosinus EB' und der Sinus versus E'A, haben bejahte Seitenrichtung.

§. 31. Auch die Secante CT' und die Cosecante CT', ist von C aus ebenfalls ins Bejahte gerichtet, man mag nun sie entweder in Absicht dessen schätzen wollen, was sie von Höhenrichtung in sich hat, oder in Absicht dessen, was ihr von der Seitenrichtung zu Theil wird. Eins von beyden aber wird zur Schätzung ihres ∓ dienen müssen, wenn vom Richtungs ∓ der Secanten und der Cosecanten in der ebenen Trigonometrie

nometrie die Rede seyn soll: denn mehr als zwey, einander rechtwinklige **Richtungs**$\mp$ kann man in der Ebne nicht nach freyer Wahl anlegen, indem ja alle übrigen Linien in derselben Ebne an jenen beyden Richtungen schon eben so Theil nehmen, wie die Diagonale eines Rechteckes an den beyden Richtungen ihre beyden Seitenpaare Theil nimmt.

Nun ist es wohl der Mühe werth, auf ein Paar bequeme Zeichen zu denken, wodurch wir **allenthalben, wo es nöthig** wird, in der Kürze andeuten können, ob von dem einen oder dem andern Richtungs$\mp$ die Rede ist, besonders da man bey solchen Linien, die gleich den Secanten, diagonalisch gerichtet sind, selbst aus ihrem Anschauen nicht bestimmen kann, ob von ihrem Seiten$\mp$ oder von ihrem Höhen$\mp$ die Schätzung hergenommen werden soll.

§. 32 Zu diesem Behufe werde ich auch hier, wie es schon anderwärts *) von mir geschehen ist, das **Seiten**$\mp$ durch **einen** Punkt, und das **Höhen**$\mp$ durch **zwey** Punkte auszeichnen, und z. B. für den Winkel $\alpha'''' = CACB''''$ schreiben können, daß seine Tagente AT'''' ein $(\dot{-})$ ist, und seine Secanten CT'''' ein $(\ddot{-})$, aber dabey

*) Formulae linearum. §. 34.

dabey zugleich ein $\dot{+}$ ist.*) Ferner muß für $\alpha'' = CACB''$ die Cotangente $A\mathfrak{T}''''$ ein $(\dot{-}($ seyn, und die Cosecante $C\mathfrak{T}''''$ ebenfalls ein $(\dot{-})$ aber dabey zugleich auch ein $(\ddot{+})$ seyn.

Erste

*) Auch die Bedeutung der Klammern um $+$ und $-$ ist schon in der angeführten Schrift bestimmt, §. 4. Nähmlich das Zeichen $-$ ohne Klammern, einer Grösse vorgesetzt, verkehrt die Grösse, der es vorgesetzt ist, in ihre Gegengrösse. Wo ich aber $(-)$ schreibe, da will ich, gleichsam nur in Parenthesi, erinnert wissen, daß die folgende Grösse ein Verneintes ist. Schon der Analogie wegen muß deshalb, für ähnliches Erinnern ihrer bejahten Beziehung, auch $(+)$ geschrieben werden. Uebrigens sind diese Klammern meistens nur nöthig, so lange die Methode und die Entstehung eines Systemes noch zu erklären ist. Bey ihrer praktischen Anwendung, wird man der etwas mühsamen Klammern nur selten bedürfen. Bedenkt man auch, daß die angeführte umwendende Kraft nur dem $-$ ohne Punct zukommen kann; so erhellet, daß selbst $\dot{-}$ und $\ddot{-}$, und um so mehr auch $\dot{+}$ und $\ddot{+}$, allenthalben auch ohne Klammern geschrieben werden können.

Erste Betrachtung des bisherigen Secanten- und Cosecanten $\mp$

§. 33. Sowohl für die eben genannten Cosecanten CT'''', als für die kurz vorher genannte Secante CT'''' sind natürlich gerade die Behauptungen des **bejahtem** Zeichens, in den neuern Zeiten die herrschenden geworden, **seit** man sich **hauptsächlich** an die analytischen Formeln $\frac{1}{\text{cosin}\,\alpha} = \sec\alpha$ und $\frac{1}{\sin\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$ hielt. Ihre negativen Zeichen mußten dagegen die wünschenswertheren scheinen, so lange man die Secanten als die geometrischen Begleiterinnen der Tangenten, und die Cosecanten als die geometrischen Begleiterinnen der Cotangenten betrachten wollte. Indem ich jetzt auch diese Bemerkung aus einem schon vor etwa 3 Jahren aufgesetzten Entwurfe abschreibe: so bin ich freylich ungewiß, ob sie damals als eine historische Wahrnehmung von mir aufgesetzt wurde; kann mir aber nicht die Mühe nehmen, darüber wiederum mehrere Lehrbücher nachzusehen. Sollte man indessen nie den Wunsch geäussert haben, jede Secante auch mit dem Zeichen ihrer Tangente, und jede Cosecante auch mit dem Zeichen ihrer Cotangente belegt zu sehen; so wäre das um so mehr Beweis, wie wenig man bisher darauf geachtet hat, ob auch das aus den analytischen Formeln resultierende

rende ∓ mit demjenigen ∓, welches man für die ähnlich gerichteten oder ähnlich liegenden Elemente der Formel angelegt hatte, in der gehörigen Uebereinstimmung stehe! Man hat doch in dem bisherigen Systeme, das ∓ der Sinus und der Tangenten in dem Liegen oben oder unterhalb der HA, und das ∓ der Cosinus und der Cotangenten in ihrem Liegen disseits oder jenseits der AH gesetzt; und es ist offenbar, daß z. B. die Secante CT'''' an dem **unterhalb** Liegen der Tangente Theil nimmt, und in so fern **negativ muß heissen können!** Wenn nun gleichwohl diese Secante nach ihrer obigen Formel schlechterdings nur als bejaht sich ergiebt, und in dem bisherigen Systeme des trigonometrischen ∓ gar kein rechtliches Mittel aufzufinden ist, um vermittelst der obigen Formel ebenfalls ein —Zeichen für diese Secante zu erhalten; so ist für mich, der ich das alles zu erhalten weiß, auch daraus klar, daß man mit dem ∓, auch in dem bisherigen trigonometrischen Systeme, noch nicht gehörig aufs reine gekommen ist.

§. 34. Da das angeführte Formular ∓ der Secanten und Cosecanten von dem ∓ der Cosinus und Sinus abhängt, auch die Secanten und Cosecanten in Absicht ihres ∓, als geometrische Begleiterinnen der Tangenten und Cotangenten

genten müssen betrachtet werden können, so oft man das will; so ist wohl einzusehen, daß wir zuvörderst sowohl über das Richtungs ∓ der Tangenten und Cotangenten, als auch der Sinus und Cosinus, im Hellen seyn müssen, ehe wir das in dieser Hinsicht versteckte Spiel des gewöhnlichen Secanten- und Cosecanten ∓ an das Licht ziehen können.

§. 35. Bey beyden ∓, sowohl der Sinus und Cosinus, als der Tangenten und Cotangenten, ist von großer Wichtigkeit, daß nach allgemeiner Gewohnheit der bisherigen **analytischen Trigonometrie jeder Halbmesser** in den **Formeln** gerade zu **bejaht** gesetzt wird. Auch wenn wir dabey zuvörderst nur an die einfach (nicht diagonalisch) gerichteten Halbmesser denken, so scheint uns diese Gewohnheit etwas sehr Verschiedenes an sich zu haben, je nachdem sie auf die gewöhnliche Tangenten- und Cotangentenscale, oder auf die gewöhnlichen Sinus- und Cosinusscalen bezogen wird. Bey den ersten sind **in der That** die zugehörigen Halbmesser CA und CA, **beyde** allemahl und ausgemacht bejaht; so daß die Tangenten- und die Cotangentenscale durchaus eine bejahte Entfernung vom Drehungspuncte C haben und behalten. Die Sinus und Cosinus aber bezieht man nicht auf so eingeschränkte Scalen, sondern verstattet ihnen

ihnen, für je zwey Quadranten, auch in negativer Entfernung vom Drehungspuncte C errichtet zu werden! Freylich werden nun gerade der Sinus und Cosinus wegen meistens nur diagonalisch gerichtete Halbmesser CB eigentlich gebraucht. Gerade der Umstand, daß diese in Absicht ihres ∓ zweydeutig sind, indem solch eine Diagonale sowohl am Höhen- als am Seiten ∓ Theil nimmt, kann so manchen wirklich vorhandenen Widerspruch mit dem richtigen Systeme dieser beyden ∓ verdecken helfen! Schon aus diesem Grunde ist es rathsam zuvörderst zu betrachten

das gewöhnliche Tangenten- und Cotangenten ∓.

§. 36. Ueberhaupt hoffte ich bey der ganzen ziemlich verwickelten Untersuchung des gegenwärtigen Stückes, der Ermüdung meiner Leser noch am besten vorzubeugen, wenn ich die Hauptmomente eines neuen Systems, welches mit den einmahl angelegten beyden Richtungs ∓ durchaus übereinstimmig bleibt, sogleich mit anführte, und das bisherige damit vergliche. Auch wird dadurch das folgende Stück desto kürzer ausfallen können.

Nach meiner geometrisch richtigen Construction der Tangenten- und Cotangentenscalen, sind für das Höhen ∓ der Tangenten von α'' und α''' und

und für das Seiten ∓ der Cotangenten von α''' und α'''' zwey neue Scalen angelegt, die beyde einen verneinten Halbmesser, eine verneinte Entfernung von Drehungspunkte C haben, indem ja CH ein $\dot{-}$, und C$\mathfrak{H}$ ein $\ddot{-}$ ist.

§. 37. Da nach dem gewöhnlichen Systeme hingegen nur bejahte Entfernungen der Tangenten- und Cotangentenscalen vorkommen, und eben deshalb die Secanten für α'' und α''', und die Cosecanten für α''' und α'''' umgewandt werden müssen, um noch Tangenten und Cotangenten abschneiden zu können; *) so muß das so genannte Lagen ∓ der Tangenten von α'' und α''' und der Cotangenten von α''' und α'''' im gewöhnlichen Systeme, dem geometrischen Richtungs ∓ eben dieser Tangenten und Cotangenten

*) I. M. Mazéas in seinem beliebten Lehrbuche, Abregé des élémens d'arithm. d'algébre et de géométrie, a Paris, 1775, behauptet freylich der rechte Winkel, und noch weniger der stumpfe, habe gar keine Tangente und Secante! Was aber den Sinus betrifft, so gesteht er dem stumpfen Winkel zu, daß der Sinus seines Nebenwinkels auch ihm zugehört. Um bey solchen Grundlagen nicht sogleich ins Stocken zu gerathen, muß man alles nur mit wenigem berühren De la Caille in seinen Leçons élémentaires de Mathématiques, a Paris 1778 nimmt das gewöhnliche System an.

genten nach meinen zweyfachen Scalen, gerade entgegengesetzt ausfallen.

So wird nach meiner Construction z. B. für den Winkel $\alpha'' = CACB''$ die Tangente $= \ddot{+} AU' + (\ddot{-}) U''T'' = \ddot{+} HT''$ also ein $\ddot{+}$; nach der gewöhnlichen Construction aber wird sie durch das umgewandte CT'', durch $C''T$, als $A''T$ bestimmt, daß sie also mit AT'''' einerley, und daher ein $\ddot{-}$ ist. Was ein $\ddot{-}$ ist, kann kein $\ddot{+}$ seyn; und es kann daher diese Verschiedenheit im **geometrischen Richtungs** $\mp$ welche nach beyderley Constructionen für solche Tangenten entsteht, nicht ausgeglichen werden.

Wenn wir aber auf die analytische Trigonometrie und deren **algebraisch-arithmetisches** $\mp$ sehen, so können wir uns die Zahlen, welche für die Tangenten und Cotangenten dabey aufgeführt werden, allemahl als die Quotienten vorstellen, welche aus den Tangenten- und Cotangentenlinien entstehen, wenn sie durch ihre Halbmesser dividirt werden.

Da man nun nach dem gewöhnlichen Verfahren jeden Halbmesser als einen **bejahten** Divisor aufführt, auch in der geometrischen Construction für die Tangenten- und Cotangentenscale

scale nur die beyden bejahten Halbmesser CA und CA anlegt; so ist es allerdings gewiß, daß das $\mp$ der Tangenten- und Cotangenten-Quotienten mit dem gewöhnlich behaupteten Lagen $\mp$ der Tangenten- und Cotangenten-Linien durchaus, in allen Quadranten, übereinstimmend ausfallen muß.

§. 39. Soll ich meine geometrisch richtige Construction der Tangenten- und Cotangentenlinien, der Algebra unterwerfen; so verlange ich nach meinem Begriffe von algebraisch richtiger Messung, daß jede Linie meines Systemes, also auch jede von seinen verneint gerichteten Halbmesserlinien CH und CH, gerade nach der ihr zugehörigen, ihr algebraisch gleichartigen bejahten Lineareinheit gemessen werden muß; und eben deshalb für die CH und CH auch eine verneinte Zahl gehört, welche $(-)r$ heissen mag, für jedes künstliche System, und -1 ist für das natürliche System; künstlich und natürlich eben so, wie bey den Logarithmen, verstanden.

Seyen nun $(+)t'$ $(+)t''$ $(-)t'''$ und $(-)t''''$ die Zahlen welche den Tangentenlinien für α', α'', α''', und α'''' nach meinem Systeme zugehören; so werden nach meiner geometrischen Construction der Tangentenlinie und ihrer alge-

braischen

gebraischen Messung, die Tangentenquotienten welche q heissen mögen, folgende seyn

$$\frac{(+)t'}{(+)r}=(+)q'; \quad \frac{(+)t''}{(-)r}=(-)q'';$$

$$\frac{(-)t'''}{(-)r}=(+)q'''; \text{ und } \frac{(-)t''''}{(+)r}=(-)q'''' \text{ *)}$$

Daraus erhellet, daß die Tangentenquo-

tienten

*) Wenn man sich statt der obigen t und r noch die Linien selbst schreibt, so hat man

$$\frac{\ddot{+}\,AT'}{\dot{+}\,CA}=(+)q; \quad \frac{\ddot{+}\,HT''}{\dot{-}\,CH}=(-)q;$$

$$\frac{\ddot{-}\,HT'''}{\dot{-}\,CH}=(+)q; \quad \frac{\ddot{-}\,HT''''}{\dot{+}\,CA}=(-)p;$$

worin die dargestellten Divisionen anstößig seyn müssen, weil Divisor und Dividende in Absicht ihrer Richtungszeichen ungleichartige Grössen sind. Ungleichartig sind sie nicht etwa bloß in der zweyten und dritten Gleichung, in denen die eine bejaht, die andere verneint ist; dieses Bejaht- und Verneintseyn macht an sich keine algebraische Ungleichartigkeit aus, weil ja das Messen der bejahten und verneinten Grössen gerade durch einerley Einheit in der Algebra geschieht, und das Verschiedne in der beyderseitigen Messung, gerade durch die Verschiedenheit des + und − angedeutet, das Umwenden

rienten meines Systemes an $\mp$ Gestalt über-
einstim-

wenden der bejahten Einheit, als ein Act der Messung selbst betrachtet wird: sondern in den sämmtlichen vier Ausdrücken ist der Dividende dem Divisor ungleichartig, weil jener mit Höhenrichtung und dieser mit Seitenrichtung beschrieben wird, beyde aber einander normal sind, also in ihren Richtungen nichts additives oder subtractives mit einander gemein haben. (So wie Centripetal- und Tangentialkraft, als solche einander nicht vermehren nicht vermindern; Centripetal- und Centrifugalkraft aber gleichartig genug sind, um von einander abgezogen werden zu können. Dieses Gleichniß wird um so mehr hier schicklich seyn, da das algebraische $\mp$ durch sächliche Beziehungen veranlaßt ist; indem man diese der Grössenschätzung, der Messung durch die algebraische Zahlenreihe mit unterwarf.)

A) Dieser Anstoß wird gehoben werden, wenn wir uns das Verfahren, wodurch jene gebrochenen Linearausdrücke auf gebrochene Zahlausdrücke gebracht werden, mit der gehörigen Genauigkeit darstellen. Es sind dazu **zwey** Lineareinheiten **nothwendig**, wovon die eine $\dot{+}$ CI, die andere $\ddot{+}$ CJ seyn mag. Beyde müssen bejaht gerichtet seyn, und die eine nach Seitenrichtung, die andere nach Höhenrichtung; um durch die erstere alle nach

ihrer

einstimmen mit dem gewöhnlich behaupteten Lagen.

ihrer Seitenrichtung geschätzten Linien, und durch die zweyte, alle nach ihrer Höhenrichtung geschätzten Linien zu messen.

B) Wenden wir diese beyden Einheiten z. B. auf den obigen zweyten Ausdruck $\frac{\ddot{+}\, HT''}{\dot{-}\, CH}$ an; so haben wir die Proportionen

$$\ddot{+}\, C\mathfrak{J} : \ddot{+}\, HT'' = (+)\, 1 : (+)\, t''$$
$$\dot{-}\, CH : \dot{+}\, CI = (-)\, r : (+)\, 1$$

C) In beyden Proportionen ist nun für die beyden ersten Glieder die algebraisch-geometrische Gleichartigkeit vorhanden, weil sie beyde entweder auf Seitenrichtung oder auf Höhenrichtung sich beziehen. Die übrigen letzten Glieder sind sogar aus beyden Proportionen sämmtlich unter einander gleichartig, weil ihr eingeklammertes $\mp$ schon das $\mp$ der algebraischen Zahlenreihe ist. Dieses algebraisch-arithmetische $\mp$, wie ich es nennen will, ist natürlich so abstract, daß es für die beyden geometrischen Richtungs $\mp$ nicht mehr unterscheiden kann, sondern nur noch das den beyden geometrischen Richtungs $\mp$ Gemeinschaftliche an sich hat, daß das + ein algebraisch grösser werden, das — ein algebraisches kleiner werden anzeigt.

D) Wenn

Lagen $\mp$ der Tangenten im gewöhnlichen Systeme.

§. 40.

D) Wenn wir durch Zusammensetzung dieser beyden Proportionen, geradezu auf

$\frac{\ddot{+} HT}{\dot{-} CH} = \frac{(+)t}{(-)r}$ schließen wollten, so würde wiederum das anstößige Ungleichartige in den Richtungszeichen des Linearausdruckes eintreten. Um es gänzlich wegzuschaffen, werden wir in jeder Proportion die beyden ersten Glieder durch ihre Lineareinheit dividiren müssen. Dadurch erhalten wir die Propotionen

$$\frac{\dot{-} CH}{\dot{+} CI} ; \frac{\dot{+} CI}{\dot{+} CI} = (-)t : (-)r$$

und $$\frac{\ddot{+} C\mathfrak{J}}{\ddot{+} C\mathfrak{J}} : \frac{\ddot{+} HT''}{\ddot{+} C\mathfrak{J}} = (+)r : (+)t,$$

bey deren Zusammensetzung nun jene Bedenklichkeit völlig wegfällt, da nunmehr auch die beyden ersten Glieder in beyden Proportionen für Zahlausdrücke gelten können, deren $\mp$ ebenfalls das algebraisch-arithmethische ist.

E) Eben daraus aber erhellet nun auch, daß man sich des mühsamen Weges durch diese Proportionen, völlig überheben, und z. B. den so eben behandelten Linearausdruck $\frac{\ddot{+} HT''}{\dot{-} CH}$ auf seinen Zahlenausdruck dadurch bringen kann, daß man einzeln statt der

Linie

§. 40. Der Grund dieser Uebereinstimmung ist auch sehr einleuchtend. Das gewöhnlich behauptete Lagen $\mp$ der Tangenten stimmt mit dem gewöhnlichen Quotienten $\mp$ überein, weil man bey jenen nur bejahte Halbmesser zeichnet, und bey diesem alle Halbmesser-Zahlen geradezu bejaht ansetzt. Mit diesem gewöhnlichen Quotienten $\mp$ muß aber das meinige übereinstimmen, weil es für einen algebraischen Quotienten gleichgültig ist, ob man seinem **Divisor und Dividenden** die gehörigen Zeichen, oder gerade das Entgegengesetzte derselben beylegt, wie es im gewöhnlichen Systeme für dessen $\frac{(-)t''}{(+)r} = (-)q$ und $\frac{(+)t'''}{(+)r} = (+)q$ geschieht.

§. 41.

Linie $\ddot{\mp}HT''$ ihre Zahl $\frac{\ddot{\mp}HT''}{\ddot{+}C\mathfrak{J}}.(+)1 = (+)t''$, und statt der $\dot{-}CH$ ebenfalls einzeln ihre Zahl $\frac{\dot{-}CH}{\dot{+}C\mathfrak{J}}.(+)1 = (-)r$ anschreibt. Kein oben erwähnter Anstoß fällt dabey vor, weil ja jede Linie durch die ihr algebraisch gleichartig gerichtete bejahte Lineareinheit gemessen wird. Dieser kürzeren Methode, eine jede Linie einzeln durch ihre Zahl auszudrücken, werde ich mich in der Folge meistens bedienen.

§. 41. Aus eben solchen Gründen müssen auch die Cotangentenquotienten meines Systemes mit den Cotangentenquotienten des gewöhnlichen Systemes, im $\mp$ übereinstimmen, und daher auch mit dem gewöhnlich behaupteten Lagen $\mp$ der gewöhnlichen Cotangentenlinien übereinstimmend ausfallen.

§. 42. Da hier die negativen Halbmesser meiner zweyfachen Tangenten- und Cotangentenscalen so viele Betrachtung veranlaßten, und gleichwohl das $\mp$ für beyderley System **bis jetzt** für die analytische Praxis sehr übereinstimmend auszufallen scheint; so will ich nicht nur noch einmahl erinnern, daß doch meine Scalen eine anschauliche geometrische Richtigkeit haben, welche dem gewöhnlichen Systeme fehlt; sondern auch sogleich noch folgende

Bemerkung über meine zweyfachen Scalen

hinzufügen. Wenn in der bekannten gewöhnlichen Tangenten-Scale ein steigender Punct bis ins unendlich hohe U′ erhöht wird, so kann er doch ohne **Vertiefung** nicht unterhalb A, geschweige denn ins unendlich tiefe U‴ hinabkommen! Wird dieser wandernde Punct als Index für die drehende Bewegung der CT betrachtet, wodurch doch die Winkel α erzeugt werden; so ist

ja

ja seine Vertiefung zugleich mit Drehung durch Rechts oder Links verbunden; und so wird man ganz natürlich dahin geführt, eine zweyte Höhenscale durch H zu legen, wie ich es oben gethan habe, nachdem ich die **erste**, gerade durch A gelegt, als schon vorhanden geradezu annahm.

In so fern man aber bey der Drehungen Höhenscale gänzlich von Rechts und Links zu abstrahiren wünschen möchte; so würde man freylich diese Höhenscalen am natürlichsten gerade durch den Drehungspunct C legen; und durch eben dieses C auch die Seitenscalen. Jene Höhenscale würde durch A ins Hohe, durch H ins Tiefe, und die Seitenscale durch A ins Rechte durch H ins Linke, unendlich fortlaufen. Da indessen jede Drehungsgrösse α nach beyden Scalen sich verändert, und außer ihrer Abmessung auf der Höhenscale, zu einer gehörig bestimmten Trigonometrie, auch von ihrer Abmessung auf der Seitenscale so viel zu wissen nöthig ist, ob die Abmessung ihrer Codrehung ε ins Rechte oder Linke von A aus hineingehe: so würde man ja doch wohl wiederum als eine Erleichterung des Abmessens es ergreifen, statt der einzigen Höhenscale durch C lieber ihrer zwey, die eine etwas rechts, die andere etwas links von C anzulegen, um durch dieses Rechts und Links zwischen dem ersten und zweyten, dem vierten und dritten Quadranten,

dranten, sogleich zu unterscheiden, ohne daß man nöthig hätte, diese Unterscheidung von der Cotangente herzuhohlen; besonders da uns an der Cotangente absoluter Grösse nichts gelegen ist, wo wir schon die absolute Grösse der Tangente wissen.

Aus der nähmlichen Absicht wird man nun auch für die Codrehungen ε, statt der einzigen Seitenscale durch C, ihrer zwey anlegen, die eine oberhalb die andere unterhalb C. Denn auch hier ist uns, um die absolute Grösse der Codrehung zu bestimmen, die absolute Grösse der Cotangente allein schon hinlänglich, und man hätte also deshalb nicht nöthig, auf die Tangentenscale zu achten: sondern man will nur von derselben Hoch und Tief noch Gebrauch machen, welches durch das Verzweyfachen der Seitenscale leichter erlangt wird.

Soll nun aber einmal die Höhenscale verzweyfacht, und die Seitenscale verzweyfacht werden; so ist es am natürlichsten, jene gerade durch A und H, und diese gerade durch A und H zu legen, wegen des Begriffes von Tangenten, welche den Kreis berühren sollen. Ueberdies bekommt man dadurch auch gerade die beyden Linien vor Augen, deren Verhältnisse durch ihren Exponenten die Tangenten- und Cotangenten-Zahlen im natürlichen Systeme, wo der Halbmesser

messer gerade = 1 gesetzt wird, auf die leichteste Weise angeben.

Fortsetzung der vorigen Betrachtungen des Tangenten- und Cotangenten-∓

§. 43. In den bisher gewöhnlichen Formeln der analytischen Trigonometrie, wird jeder Halbmesser allemahl bejaht aufgeführt; welches für die Behandlung dieser Formeln allerdings eine große Bequemlichkeit gewährt, der man ungern entbehren möchte! Daß man aber dadurch der Geometrie entgegen handle, mochte man um so weniger ahnen, weil man ja algebraische Geometrie hier offenbahr zu erringen strebte, (alles ∓ der bisherigen Trigonometrie zeigt diesen Wunsch,) und weil es ja ein Haupterforderniß der Algebra ist, die **Einheit bejaht** anzunehmen; übrigens aber die absolute Grösse der Einheit nach Belieben angenommen, also auch der Halbmesser selbst dafür gewählt werden kann. Gewiß ist die Uebereilung, welche man dabey begangen hat, sehr verzeihlich. Erst wenn man sich recht genau überzeugt hat, das erwähnte Erforderniß bestehe eigentlich darin, daß alle, auch die Beraubungsgrössen, nach der einzigen (bejahten) Einheit der algebraischen Zahlenreihe gemessen werden, und eben daher die negativen Zahlen entspringen und zugestanden werden müssen;

sen: dann erst kann die Betrachtung erfolgen, daß auch die verneinten Halbmesser (wo die geometrisch anschauliche Construction entweder die einfach verneint gerichteten Halbmesser CH und C$\mathfrak{H}$ verlangt, oder auch, der gehörigen Gleichartigkeit wegen, die diagonalisch gerichteten Halbmesser CB″, CB‴ und CB⁗ gerade nach ihrer verneinten Richtung zu betrachten sind) ebenfalls als solche in dem Calcul müssen aufgeführt werden!

§. 44. Die bisherige Trigonometrie, welche das nicht thut, sondern die einfach gerichteten Halbmesser sämmtlich auch bejaht zeichnet, und wo sie analytisch wird, überdies auch die diagonalisch gerichteten, sämmtlich und allemahl durch ein bejahtes r oder 1 in den Calcul bringt, könnte man in dieser Hinsicht, die erzwungene Trigonometrie nennen.

§. 45. So gewiß es nun auch ist, daß mein Quotienten $\mp$ der Tangenten und Cotangenten (wobey diese Linien nach den geometrischen Richtungs $\mp$ meiner zweyfachen Scalen, und die Halbmesser in je zwey Quadranten auch verneint angesetzt werden,) an + und − Gestalt übereinstimmt, sowohl mit dem gewöhnlichen Quotienten $\mp$ als auch mit dem Lagen und Richtungs $\mp$ der Tangenten- und Cotangentenlinien

auf

auf den gewöhnlichen einfachen Scalen; und ich daher diese einfachen gewöhnlichen Scalen auch neben meinen zweyfachen geometrischen Richtungs-Scalen allenfals als Scalen für die Tangenten- und Cotangenten - Quotienten betrachten kann: so werden denn doch diese Quotientenscalen immerhin als ein ziemlich künstliches Machwerk erscheinen, das man sich, jener Bequemlichkeit in der gezwungenen Trigonometrie zu gefallen, allerdings wohl hätte erdenken mögen, aber doch nie als einen Beweis hätte ansehen sollen, daß eine gewisse, zwischen $+\infty$ und $-\infty$ vermeynte Gleichgültigkeit der Algebra, sogar auch durch geometrische Anschaulichkeit als wirklich vorhanden dargestellt werde!

§. 46. Man pflegt nähmlich nicht nur überhaupt das Durchgehen einer unendlichen geraden Linie durch den Parallelismus einer andern, als eine geometrische Erläuterung und Bestätigung jener Gleichgültigkeit zu betrachten; sondern ganz besonders auch vermittelst der gewöhnlichen Tangentenscale, glaubt man es gleichsam sogar geometrisch bekräftigt zu sehen, daß die Algebra aus $+\infty$ in $-\infty$ steetig übergehe; weil ja die Secante in eben der augenblicklichen Lage, wo sie für ein wachsendes α, indem es so eben $= R$ geworden ist, als für den größten unter den spitzen Winkeln, eine bejahte Tangente zu bestimmen mit

mit $+\infty$ aufhört, sogleich auch schon für eben das $\alpha = R$, als den kleinsten unter den stumpfen Winkeln, eine negative Tangente mit $-\infty$ zu bestimmen anfängt!

§. 47. In der That, wenn die gewöhnliche Tangentenscale die geometrisch richtige wäre, so würde man, um damit übereinstimmend das Wachsen und Abnehmen in der algebraischen Zahlenreihe sinnlich darzustellen, sich diese gleichsam in einen Kreisumfang geschrieben denken mögen; so daß ihr Glied $+\infty$ mit ihrem Gliede $-\infty$ zusammenfiele, und dieses Glied $\mp\infty$, um bey dem einmahl ergriffenen Bilde des Kreises zu bleiben, dem ∓ 0 am Durchmesser gegenüber (diamétralement opposé) stände!

§. 48. Aber selbst auch in der abstractesten Algebra, in der Algebra auf unbenannte Zahlen angewandt, ist jene Gleichgültigkeit zwischen $+\infty$ und $-\infty$ meines Erachtens, nie vorhanden. Sondern, was man dafür hält, ist vielmehr eine bloße Unentschiedenheit, und wird in seiner wirklich geometrischen Darstellung ein Resultat, nicht bloß aus derjenigen Unentschiedenheit, die man durch ∓ 0 auszudrücken pflegt, sondern auch aus der Unentschiedenheit einer gewissen ∓ 1, welche zur Vollständigkeit der Dimensionen in den Gleichungen

$+\infty =$

$+\infty = \frac{1}{+0} = \frac{1}{-0} = -\infty$, außer der wirklich hingeschriebenen 1 noch erforderlich ist. Freylich wird hiebey von keinen geübten Analysten ein Fehler gegen die Dimensionen begangen, indem sie vielmehr entweder statt der 1 eigentlich 1. 1, oder unter $+\infty$ und $-\infty$ eigentlich $\frac{+\infty}{1}$ und $\frac{-\infty}{1}$ gedacht wissen wollen. Aber eben dadurch, daß man sich auch die zweyte 1 allemahl als schlechthin $= 1$, als $+ 1$ denkt, eben dadurch verfällt man in eine geometrische Construction, die viel zu unvollständig und lückenhaft ist, um den mit ∓ 0 zusammenhängenden Uebergang zwischen $+\infty$ und $-\infty$ im geometrischen Raume darstellen zu können.

§. 49. Mag allenfalls die erste, gewöhnlich nur hingeschriebene 1 gerade eben diejenige seyn, nach welcher die algebraische Zahlenreihe geordnet wird; so haben wir schon durch dieses Bejahtsetzen der einen 1 in den Proportionen zwischen 0; 1; 1 und der gesuchten ∞, die Hälfte aller möglichen algebraischen Proportionen ausgeschlossen. Denn die richtig verstandene Regel der bejahten Einheit, verlangt nach meiner Ueberzeugung nur, daß jedes von jenen vier Gliedern, und zuvörderst auch von den drey gegebnen, gerade

gerade nach der bejahten Einheit gemessen werde; keineswegeas aber, daß zwey von ihnen, ob man sie gleich für gegenwärtige Absichten, der Einheit an absoluter Grösse gleich annehmen kann, auch gerade bejaht müssen angenommen werden!

Nimmt man sie beyde bejaht an, so behält man gerade nur den vierten Theil von den acht algebraischen Proportionen übrig, welche zwischen den 4 Gliedern, wenn die drey gegebnen sämmtlich für $\mp$ veränderlich gedacht werden, wirklich Statt finden, an Statt der einzigen Proportion, welche die Geometrie der Alten dafür nur kennt.

Solche Einschränkung auf den vierten Theil aller möglichen algebraischen Proportionen, kann für diesen und jenen Behuf allerdings sehr passend seyn. Aber, wo man die Gesetze des Ueberganges und der Verbindung zwischen ∓ 0 und $\mp \infty$ durch jene Proportionen erläutert, und durch ihre Zeichnung sinnlich dargestellt wissen will, da ist es nun schlechterdings zweckwidrig, von den acht verschiednen Proportionen welche neben einander algebraisch-geometrisch constructibel sind, nur ihrer zwey aufzugreifen! Und unglücklicher Weise trifft man dabey solche zwey Formen, in welchen nur zwischen den ersten Gliedern $+0$ und -0 ein steetiger Uebergang wirklich vorhanden ist,

wenn

wenn man sich in den Formen $+x : +1 = +1 : +y$ und $-x : +1 = +1 : -y$, die x bis auf 0 abnehmend denkt.

Nehmen wir indessen, wie gesagt, hier an, daß die eine von den beyden 1, gerade die für die algebraische Zahlenreihe gehörige bejahte Einheit selbst seyn soll; so behalten wir noch so viele und so aneinander liegende algebraisch geometrische Proportionen übrig, daß durch sie auch ein wirklich steetiger Uebergang zwischen dem bejahten und verneinten ∞, wie er durch ein divisorisches, vom bejahten zum verneinten übergehendes x bewirkt wird, anschaulich dargelegt werden kann. Die dahin gehörige Verzeichnung vermittelst der Tangentenscalen werde ich nachher beybringen. (§. 50. d)

Will man die Abhängigkeit zwischen $\mp$ 0 und $\mp \infty$, welche man durch die Gleichungen in §. 48 dargelegt glaubt, wirklich kennen lernen; so hat man entweder jede von den vier dafür noch vorhandenen Proportionen einzeln zu betrachten, und demnach jedesmahl der 0 und der einen 1 von den drey gegebenen Grössen 0; 1; 1, das Zeichen + oder − beyzulegen, welches für den einzelnen Fall ihr zugehört; oder man muß doch die etwa noch übrig gelassene Unentschiedenheit und Wahlfreiheit zwischen + und − sorgfältig vor Augen behalten, und ausdrücklich eines jeden Aufmerksamkeit empfehlen. Thun wir das letztere durch unser schon oben eingeführtes ($\mp$); so haben wir statt der vier Ausdrücke, die in §. 48 als einander gleich angeschrieben wurden, nunmehr schon folgende vor Augen,

∞; $\frac{1}{(+)0}\cdot(\mp)1$; $\frac{1}{(-)0}\cdot(\mp)1$, und statt des vierten haben wir entweder $(\mp)\infty$ oder $(\pm)\infty$, je nachdem $(+)0$ oder $(-)0$ wirklich angenommen wird: daher sich, was die obigen vier Gleichungen behaupten sollten, nunmehr in folgende Behauptungen zerlegt:

$$\text{entweder } \infty = \frac{1}{(+)0}\cdot(\mp)1 = (\mp)\infty$$

$$\text{oder } \infty = \frac{1}{(-)0}\cdot(\mp)1 = (\pm)\infty$$

; woraus nun schon vor Augen liegt, daß das $(\mp)\infty$ dem $(\pm)\infty$ gleichgültig nur würde, wenn man wirklich $(+)0$ und $(-)0$ für gleichgültig achten dürfte.

§. 50. a) Aber so wie überhaupt der 0 irgend eine Grössenwirkung nur zugeschrieben werden kann, in so fern man sie, als Grössengränze betrachtet, an den Grösseneigenschaften noch Theil nehmen läßt; so kann und muß ihr auch ein + nur zukommen, wo man die arithmetische 0 als unterste Gränze der bejahten Zahlen denkt, und gerade — muß ihr zufallen, wo sie die höchste Gränze der verneinten Zahlen abgeben soll. Wo man aber noch unentschieden ist oder seyn will, für welche von beyderley Zahlen sie als Gränze betrachtet werde, und übrigens doch solche Gränzenbetrachtung nöthig hat, da muß man auch schreiben $(\mp)0$; und dies gethan, wird man statt der letzten Gleichungen folgende erhalten:

$$\infty = \frac{1}{(\mp)0} \cdot (\mp)1 = (+)\infty$$

und $\infty = \frac{1}{(\mp)0} \cdot (\pm)1 = (-)\infty$; die nun ebenfalls gar nichts wundersames mehr an sich haben.

Nur muß ich doch die Erinnerung wiederholen, daß auch diese letzten Gleichungen, wegen der angenommenen Einschränkung der einen 1 auf eine (+) 1, noch nicht alle Fälle umfassen; indem ja die bejahte 1 der algebraischen Zahlenreihe, nicht nothwendig gerade eine von den beyden 1 dieser Gleichungen zu seyn braucht. Fügt man außer der hier vorausgesetzten einen (+) 1 noch hinzu, daß auch diese eine (—) 1 seyn kann; so erhält man zu den beyden obigen Gleichungen noch die beyden folgenden

$$\infty = \frac{(-)1}{(\mp)0} \cdot (\mp)1 = (-)\infty$$

und $$\infty = \frac{(-)1}{(\mp)0} \cdot (\pm)1 = (+)\infty$$

§. 50. b) **Karsten** sucht der Schwierigkeit $\frac{1}{\mp 0} = \mp \infty$ dadurch auszuweichen, daß er behauptet, der ∞ **komme weder + noch — zu!** Die Lehrbücher unsers verewigten Karsten gehören, meiner Meinung nach, in Absicht auf Deutlichkeit, systematische Ordnung und consequente Gründlichkeit zusammen genommen, zu den ersten in Deutschland. (Daß jede Nation zuvörderst ihre eigenen Lehrbücher für die besten hält, ist zu natürlich, als man dagegen angehen müßte. Vielleicht aber, daß nächstdem eine jede von ihnen gerade den deutschen, in den angeführten Hinsichten, den zweyten Rang zugestände, wenn sie ihnen bekannt genug wären, und nicht durch den oft ganz unsinnigen deutschen Fleiß im Uebersetzen ausländischer Lehrbücher, ein Vorurtheil gegen unsere eigenen im Auslande entstehen müßte!). Ueber das mathematische Unendliche hatte **Karsten**, gerade in den letztern Jahren seines Lebens .... und Er starb zu früh, um sich selbst zu überleben .... durch die bekannte

Preis-

Preisaufgabe der Berliner Akademie veranlaßt, mit vieler Sorgfalt nachgedacht; und gleichwohl wird Er, die unseelige einfache Tangentenscale vor Augen, in seinem Lehrbegriffe der Mathematik, nach der zweyten (bloß angefangenen) Auflage, Theil II, Abtheilung I, Abschnitt II §. 34, S. 111, zu folgendem verleitet!

„Der o kann man + oder − voransetzen, wie „man will, (denn) die o ist weder ein positiver „noch ein negativer Werth der veränderlichen „Grösse x (in der Gleichung $y = \frac{r}{x} r$); „dieserwegen hat auch ein Werth wie $\frac{r}{o}$ oder „$\frac{1}{o} r = \infty r$ kein bestimmtes Zeichen + oder −.“

Hier wird gleich anfangs der o ihr $\mp$ eingeräumt, dessen natürlich auch Karsten nicht gern entbehren wollte; und gleichwohl wird am Ende dieser wenigen Zeilen die ∞ von ihrem $\mp$ (welches in Verbindung mit dem so natürlichen Uebergange aus $\mp$ o in $\pm$ o, den unbegreiflichen Uebergang aus $\mp \infty$ in $\pm \infty$ zu fordern scheint,) völlig freygesprochen; vermittelst des Fehlschlusses: da die o weder ein positiver noch ein negativer Werth von x ist, so kann

kann man ihr + oder − nach Belieben voransetzen? Es müßte ja heissen: so kann man ihr weder + noch − zuschreiben! Das letztere ist auch wahr, wo sie schlechthin als 0, als Verneinung aller Grösse betrachtet wird. Aber Karsten betrachtet sie ja hier als $= \frac{1}{\infty}$; und da ist es nothwendig, sie zugleich als die Gränze zwischen den bejahten und verneinten Grössen zu betrachten; und da ist sie, wie ich schon gesagt habe, gerade eine $+0$ oder gerade eine -0, je nachdem sie als die niedrigste Gränze der bejahten, oder als die höchste Gränze der verneinten Grössen betrachtet wird.

§. 50. c) Was nun dem vortrefflichen Karsten hiebey unerträglich fiel, war ohne Zweifel der **unendliche Sprung**, welcher z. B. aus $+\infty$ in $-\infty$ nach der **einfachen** Tangentenscale vorgeht, **indeß** doch die durch ihre Tangente y zu messende Drehungsgrösse α eigentlich so groß bleibt, als sie ist, und eine anderweitige Grösse, z. B. der Cowinkel des α, durch dessen Tangente x jener unendliche Sprung, nach dem bisherigen trigonometrischen Systeme, bewirkt wird, nicht nur selbst, sondern auch in ihrem Tangentenmaaße x, wirklich auch so groß bleibt, als sie es schon ist, indem ja sowohl des α Cowinkel

selbst,

selbst, als auch dessen Tangente, nur von $+ 0$ zu $- 0$ übergeht!

Man hat nähmlich, um alles durch ein ganz bestimmtes Beyspiel vor Augen zu legen, nach dem gewöhnlichen Systeme der Trigonometrie, durch die Linien

$$\dot{+}\,\mathfrak{AT}' : \ddot{+}\,C\mathfrak{A} = \dot{+}\,CA : \ddot{+}\,AT'$$

die Zahlenproportion

$$(+)\cot\alpha' : (+)\,r = (+)\,r : (+)\tan g\,\alpha';$$

und die Zahlenprop.

$$(-)\cot\alpha'' : (+)\,r = (+)\,r : (-)\tan g\,\alpha''$$

durch die Linien

$$\dot{-}\,\mathfrak{AT}'''' : \ddot{+}\,C\mathfrak{A} = \dot{+}\,CA : \ddot{-}\,AT'''';$$

daher für $\alpha = 90^\circ$ nicht nur $\tan g\ 90^\circ = \frac{r\,.\,r}{(+)\,0} = (+)\,\infty\,.\,r$, sondern auch $\tan g\ 90^\circ = \frac{r\,.\,r}{(-)\,0} = (-)\,\infty\,.\,r$ sich ergiebt; je nachdem die 90 Grad als der größte Werth aller α', oder als der kleinste Werth aller α'' betrachtet werden.

Daß man nun nach dieser zweyfachen Betrachtungsart, nach dieser gleichsam zweyfachen Richtung, wodurch man auf die 0 gelangen kann, entweder $\cot 90^\circ = (+)\,0$ oder $\cot 90^\circ = (-)\,0$ erhält, dieses ist durchaus befriedigend; weil das Scalenmaaß in beyden Fällen an absoluter Grösse sich gleich bleibt, so wie die dadurch gemessene

Drehungs-

Drehungsgrösse es ebenfalls bleibt; daß aber, dieser beyden Gleichheiten ungeachtet, das Tangentenmaaß aus $+\infty$ in $-\infty$ überspringt, das ist dagegen um desto widriger und unbegreiflicher, und machte ohne Zweifel die Veranlassung aus, weshalb Karsten dem $\mp$ der ∞ lieber gänzlich zu entsagen suchte. Zu diesem Auswege, der meines Erachtens ungemein viele, sehr schön zusammenhängende algebraische Wege sehr gewaltsam und unleidlich unterbricht, würde Er gewiß nicht gegriffen haben, wenn es Ihn irgend geahnet hätte, daß die einfache Tangentenscale etwa nicht die richtige seyn möchte!

§. 50. d) Nach meiner zweyfachen Scale habe ich
aus den Linien

$$\dot{+}\,\mathfrak{A}\mathfrak{T}' : \ddot{+}\,C\mathfrak{A} = \dot{+}\,CA : \ddot{+}\,AT'$$

die Zahlenprop.

$$(+)\cot\alpha' : (+)r = (+)r : (+)\tan\alpha'$$

und die Zahlenprop.

$$(-)\cot\alpha'' : (+)r = (-)r : (+)\tan\alpha''$$

aus den Linien

$$\dot{-}\,\mathfrak{A}\mathfrak{T}'''' : \ddot{+}\,C\mathfrak{A} = \dot{-}\,CH : \ddot{+}\,HT''$$

; indem man sich zur nöthigen Gleichartigkeit die Proportionen gar leicht alterniert denken kann.

Daher für $\alpha = 90^\circ$ nun $\tan 90^\circ = \frac{(+)r \,.\, (+)r}{(+)o} = (+)\infty \,.\, r$, so oft ich die 90°

etwa

etwa als den letzten aller α' Werthe zu betrachten habe; aber auch tang $90^\circ = \frac{(+) r . (-) r}{(-) o}$ ebenfalls $= (+) \infty . r$, wo ich die 90° etwa als den ersten aller α'' Werthe gelten lasse.

Hier bleibt nun also auch das Tangentenmaaß für $\alpha = 90$ Grad einerley; nähmlich $(+) \infty . r$, man mag sich die 90 Grad als ein α' oder als ein α'' denken!

Eben so wird nach der zweyfachen Scale, allemahl tang $270^\circ = (-) \infty$ r gefunden, man mag sich die 270° als ein α''' oder als ein α'''' vorstellen.

Bedenkt man, daß auch statt des $\mp$ CA, die $\mp$ CH gewählt werden kann, so erhält man, durch noch vier Porportionen, auch die Fälle in dem noch übrigen geometrischen Raume; und darin einen eben so schönen Zusammenhang zwischen $\mp$ o und $\mp \infty$.

So wird auf eine äußerst befriedigende Weise, vermittelst der zweyfachen Scalen, der so widrige und unnatürliche Uebersprung der Tangente von $\mp \infty$ auf $\pm \infty$ fortgeschaft, wo man die Cotangenten aus $\mp$ o in $\pm$ o übergehend sich denken will, oder auch wohl muß. Allemahl aber muß man das wollen können.

§. 51.

§. 51. Selbst bey solcher Algebra, wo man es mit ganz abstracten, unbenannten Zahlen zu thun hat, wird man, nachdem man bey ihren allgemeinen Untersuchungen absichtlich über das ∓ der o unentschieden geblieben ist, dennoch bey jeder bestimmten Anwendung auf einen einzelnen Fall, allemahl gewiß werden können und müssen, ob man gerade ein (+)o oder (−)o vor sich habe; wenn man nur auf die Richtung der Zahlenreihe merkt, durch deren Verfolgung man auf die o, es sey als Gränzwerth oder augenblicklichen Uebergangswerth, gelangt. Da nun die beyden(∓)1 ebenfalls zu den gegebenen Grössen gehören, wenn man aus o auf ∞ schließen will: so kann man, selbst in der abstractesten Zahlen-Algebra, auch über das ∓ des ∞ für jeden einzelen Fall entscheiden.

§. 52. Eine **geometrische Construction** aber, die über das ∓ **unentschieden** bliebe, wäre ein Unding, weil ja die Geometrie jedesmahl nur einen einzelnen durchaus bestimmten Fall vorstellt, und man bey jedem ihrer einzelnen Fälle auch jedesmahl die Richtungen, nach welchen man zu den Gränzen o gelangt, vor Augen hat; also jedesmahl auch über das ∓ der o entschieden seyn muß, wenn man überhaupt das ∓ der Construction behandeln will. Es kann hier

wiederum

wiederum als ein Vorzug aufgeführt werden, welchen die abstractere Algebra von der concreteren Geometrie hat, daß jene die Verschiedenheit der letztern mit einem Mahle umfassen kann, vermittelst ihrer abstrahierten Unentschiedenheit; indeß die Geometrie, durch Abstrahierung nicht, sondern nur durch Induction, allgemein zu werden vermag.

§. 53. Da die gewöhnliche einfache Tangenten- und Cotangentenscale überdies noch den Fehler hat, daß sie die oben erwähnte Gleichgültigkeit zwischen (+) ∞ und (−) ∞ predigt, die doch eigentlich selbst in der abstractesten Algebra nicht vorhanden ist; so erhellet wohl, daß ich diesen Scalen alle nur verdiente Aufmerksamkeit erweise, wenn ich sie für Quotientenscalen auch in meinem Systeme eines wahren Richtungs ∓ gelten lasse.

§. 54. a) Es wird nähmlich das bisher behauptete ∓ der Tangentenlinien auf der gewöhnlichen einfachen Tangentenscale, und eben so das ∓ der Cotangentenlinien auf ihrer einfachen Scale, nach meiner obigen Darstellung als übereinstimmend in seiner Hauptgestalt mit demjenigen ∓ gerechtfertigt, welches bloß den Quotienten, den Verhältniß-Exponenten zwischen den Tangenten- und Cotangentenlinien und ihren jedesmahligen

bald

bald bejahten bald verneinten Halbmessern, nach den zweyfachen Scalen zufällt. Daß aber dieses ∓ wirklich ein geometrisches Lagen- oder Richtungs ∓ der Tangenten- und Cotangenten-Linien sey, dieser bisherige Glaube wird durch unsere obige Betrachtung der wirklich geometrischen zweyfachen Scalen, hoffentlich umgestoßen seyn.

§. 54. b) Sondern für das algebraisch-arithmetische ∓ eines Quotienten ist es gleichgültig, ob man dem Dividenden und Divisor das wahre, oder ob man beyden das entgegengesetzte Zeichen beylegt. Dadurch entsteht es, daß man durch des **wahren Indicis** CT'' **völlige Umkehrung** $C''T = CT''''$ eine Tangente $A''T = AT''''$ abschneidet, deren **geometrisch falsches** Richtungs- oder Lagen-Zeichen, welches man doch nach dem gewöhnlichen Systeme den Tangentenlinien der eben gedachten hohlstumpfen Winkel zuschreibt, im Bejaht- und Verneintseyn überhaupt, in seiner Hauptgestalt + oder −, allerdings übereinstimmt, mit dem algebraisch-arithmetischen − Zeichen der Tangentenquotienten; es mögen nun diese Quotienten nach der erzwungenen einfachen, oder nach meiner zweyfachen Scale abgenommen werden.

Das nähmliche gilt bey den Cotangenten der α'''', wegen des wahren Indicis völliger Umkehrung

kehrung in C″T = CT‴, wodurch nicht nur die wahre Cotangentenlinie HT″ in die umgekehrte A″T = AT‴, sondern auch der wahre Halbmesser CH in den umgekehrten CA verändert wird.

Und für die α''' gilt es sowohl bey den Tangenten, als den Cotangenten.

§. 55. Durch diese deutliche Kenntniß des bisher gewöhnlichen Tangenten $\mp$ wird uns nun sogleich der Vortheil gewährt, daß wir mit einer ihr gemäßen Zutreffung, von einer

bejahten und verneinten Protangenten-Drehung

durch den ganzen Kreis, und noch weiter ohn Ende, herzhaft werden sprechen können, und das, in zwey Quadranten dabey mit vorkommende, Entgegenlaufen des geometrischen Richtungs $\mp$ in den erzwungenen Tangentenlinien, gehörig zu erklären wissen.

Ich will nähmlich unter dem sehr abgekürzten Ausdrucke, bejahte Protangenten-Drehung, einen solchen Drehungssinn des beweglichen Schenkels CB, also einen solchen Wachsthumssinn der α verstanden wissen, bey welchem auch die Protangenten der α immerfort algebraisch grösser werden, also, wo sie bejaht sind, im Bejahten

jahten immerfort wachsen, und wo sie verneint sind, im Verneinten immerfort abnehmen. Unter Protangenten aber verstehe ich erstens, die bisher gewöhnlichen Tangentenlinien, auf ihrer einfachen Scale abgemessen, und für ihr ∓ nach dem Richtungs∓ dieser Scale geschätzt. **Zweytens** begreife ich darunter auch die Tangenten-Quotienten, deren arithmethisch-algebraisches ∓, mit dem so eben erwähnten Richtungs∓, wie wir schon wissen, an Hauptgestalt übereinstimmend ist, man mag nun die Quotienten nach der erzwungenen einfachen, oder nach der natürlichen doppelten Scale abnehmen.

§. 56. Auch der bejahten und verneinten Drehung hat man bisher ohne gehörige Genauigkeit erwähnt; so daß dasjenige, was man damit behaupten oder erläutern wollte, manche Schwierigkeit verursachen kann, wenn man von dem einen Quadranten, auf welchen man den Calcul angelegt hatte, zu den übrigen übergeht.

§. 57. Schon oben haben wir gezeigt, daß man in der Trigonometrie bald die von uns sogenannte Vordrehung, bald aber die ihr entgegengesetzte, von uns sogenannte Codrehung, für bejaht zu achten hat, in sofern durch jene die Vorwinkel α und ihre Bogen, durch diese aber die Cowinkel ε und ihre Bogen wachsen.

Jetzt

Jetzt aber wird die Sache etwas verwickelter, da wir nun anfangen, diese Drehungen auch auf ihr Höhen- und Seiten $\mp$ zu beziehen.

§. 58. Die Vordrehung der CB, welche aus der Lage CA ihren Anfang nimmt, um dem Kreis $A \circ A$ zu beschreiben, und dadurch die Vorwinkel α', α'', α''' und α'''' zu erzeugen, ist in Beziehung auf unser angelegtes Höhen $\mp$ bejaht von A bis $\mathfrak{A}$, und verneint von $\mathfrak{A}$ bis H, auch ferner verneint von H bis $\mathfrak{H}$, und dagegen wiederum bejaht von $\mathfrak{H}$ bis A, und eben diese Vordrehung ist in Absicht auf unser angelegtes Seiten $\mp$ verneint von A bis $\mathfrak{A}$, auch ferner verneint von $\mathfrak{A}$ bis H; und dagegen bejaht von H bis $\mathfrak{H}$, und ferner bejaht von $\mathfrak{H}$ bis A.

Daher diese ganze Drehung, diese Drehung durch den ganzen Kreis, weder für das Höhen $\mp$ noch für das Seiten $\mp$ durchaus bejaht oder verneint heissen kann.

§. 59. Soll daher diese Vordrehung $A \circ A$ nach beyderley $\mp$ beachtet werden, wie es doch, bis man von dem einen ausdrücklich abstrahiert hat, wohl geschehen muß; so ist diese Vordrehung nur durch den

Iten Quadranten A$\mathfrak{A}$ ein $\ddot{+}$ und dabey ein $\dot{-}$
IIten . . . $\mathfrak{A}$H ein $\ddot{-}$ und dabey ein $\dot{-}$
IIIten . . . H$\mathfrak{H}$ ein $\ddot{-}$ und dabey ein $\dot{+}$
IVten . . . $\mathfrak{H}$A ein $\ddot{+}$ und dabey ein $\dot{+}$

§. 60.

§. 60. Da nun aber das $\mp$ der gewöhnlichen Tangentenlinien nach der einfachen Scale, im IIten und IIIten Quadranten $\mathfrak{A}H$ und $H\mathfrak{H}$, gerade ein Zeichen erhält, welches dem dortigen Höhen $\mp$ der Vordrehung entgegengesetzt ist; so erhellet, daß in Hinsicht auf dieses Tangenten $\mp$ die Vordrehung eine durchaus bejahende Drehung, und daher die der Vordrehung entgegengesinnte Codrehung, in derselben Hinsicht, eine durchaus verneinende Drehung ist.

§. 61. Zugleich erhellet dabey, daß auch jeder Theil der Vordrehung, in Hinsicht auf das gewöhnliche Tangenten $\mp$ ebenfalls bejahend ist, nähmlich die für eine schon zurückgelegte Vordrehung bereits vorhandene $\substack{\text{bejahte}\\ \text{verneinte}}$ gewöhnliche Tangentenlinie, durch die fortgesetzte bejahte Drehung, im $\substack{\text{bejahten}\\ \text{verneinten}}$ $\substack{\text{wächst,}\\ \text{abnimmt,}}$ also während jenes fortgesetzten Drehungstheiles algebraisch grösser wird; und eben so jeder Theil von der verneinten Vordrehung, also der bejahten Codrehung, in eben der Hinsicht verneinend ist, nähmlich die bereits vorhandene Tangente während jenes Drehungstheiles algebraisch kleiner wird.

§. 62. Freylich aber müssen wir, indem wir das gewöhnliche $\mp$ der Tangentenlinien auf der

gewöhn-

gewöhnlichen einfachen Tangentenscale (doch nahmentlich für §. 61, nicht nach ihrem Lagen= sondern nach ihrem Richtungs ∓) abzunehmen haben, auch den gewaltsamen Uebergang der Scale aus + ∞ in − ∞ bey der bejahten Vordrehung, und aus − ∞ in + ∞ bey der verneinten Vordrehung zugestehen: und nur dann, wenn wir das gewöhnliche ∓ der Tangenten gerade als das ∓ der Tangentenquotienten nach der zweyfachen Scale betrachten, wird das Anstössige dieses gewaltigen Sprunges, vermittelst der verneinten Halbmesser völlig gehoben seyn.

§. 63. Alles was nun in den drey letztern §en für das Pro=Tangenten ∓ und die in dieser Hinsicht durchaus bejahende Vordrehung, und verneinende Codrehung, behauptet ist, gilt auch für das Pro=Cotangenten ∓, wenn man nur allenthalben rechts und links statt des dortigen hoch und tief, auch Codrehung statt Vordrehung, und umgekehrt, schreibt; und noch dabey bedenkt, daß für die bejahte Codrehung A r A ꝛc. gerade A H den zweyten, und H H den dritten Quadranten ausmacht, nach folgender

Regel der verschiedenen Quadrantenzählung für Vordrehung und Codrehung.

§. 64. Es ist natürlich, daß man eben den Quadranten zwischen A und A, welcher für die

Vordrehung den ersten ausmacht, auch für die Codrehung als den ersten aufzählt; weil ja auch diejenige Codrehung, welche man für die Cowinkel ε bey Begründung des trigonometrischen Systemes annimmt, ebenfalls diesen Quadranten zuerst beschreibt. Der Codrehungs-Sinn aber, womit dieser Quadrant nun beschrieben ist, bringt es dann schon mit sich, gerade Aℌ als den zweyten, ℌH als den dritten, und H𝔄 als den vierten aufzuzählen. Diese gehörig begründete Aufzählungsart wird uns sogleich durch die gefällige Folge belohnt, daß es bey beyden Drehungen gerade der zweyte und dritte Quadrant sind, für welche nach den gewöhnlichen erzwungenen einfachen Scalen, der Inder, er sey Tangenten- oder Cotangenten-Inder, umgewandt wird. Die Bequemlichkeit unserer Aufzählung wird noch erhöht werden, wenn wir

für die Vordrehung

die Quadranten A𝔄, 𝔄H, Hℌ und ℌA

als den Iten, IIten, IIIten und IVten,

für die Codrehung aber

die Quadranten 𝔄A, Aℌ, ℌH und H𝔄

als den 1ten, 2ten, 3ten und 4ten,

jene nähmlich, welche durch ihren drehenden Halbmesser von CA aus beschrieben werden, durch die römischen Ziffern, diese aber, welche von C𝔄 aus beschrieben werden, durch die sogenannten arabischen aufzählen.

§. 65.

§. 65. Daß man unter schlechthin genannter Vordrehung allemahl die bejahte Vordrehung zu verstehen hat, durch welche wachsende Vorwinkel und Vorbogen erzeugt werden, und unter der schlechthin genannten Codrehung ebenfalls die bejahte Codrehung zu verstehen hat, durch welche wachsende Cowinkel und Cobogen erzeugt werden; das versteht sich von selbst: und es wird daher zur Bequemlichkeit gehören, statt verneinter Vordrehung lieber Codrehung, und statt verneinter Codrehung lieber Vordrehung zu sagen: ob gleich übrigens auch z. B. die Versicherungen statt finden können, und aus dem obigen einleuchten werden; daß die verneinte Vordrehung eine verneinende Pro-Tangenten- und eine bejahende Pro-Cotangentendrehung ist; und dagegen die verneinte Codrehung eine bejahende Pro-Tangenten- und eine verneinende Pro-Cotangentendrehung ausmacht.

Anwendung der obigen Pro-Tangenten-Drehung ꝛc. zur sichern Behandlung der bekannten Differentialformel zwischen Bogen und Tangente oder Cotangente.

§. 66. Wenn man gleich, bey etwas genauer Beachtung des gewöhnlichen trigonometrischen Systemes, es bald genug bemerken mag, daß man für das Wachsen und Abnehmen der

Vorwinkel und ihrer Bogen gerade die Vordrehung für bejaht, und die ihr entgegengesinnte Codrehung für verneint zu achten hat, und für das Wachsen und Abnehmen der Cowinkel, umgekehrt: so kann es doch immer noch viele Schwierigkeit veranlassen, daß eben dieses Bejahte und Verneinte, sobald es auch auf die dem Vor- und Cowinkel zugehörigen trigonometrischen Linien ausgedehnt werden soll, gerade in dem einen Quadranten, auf den man den Calcul anlegte, sich ganz anders verhält, als in manchen von den übrigen, auf die man gleichwohl jene Anlage ebenfalls überträgt. Nahmentlich haben mir auch in dieser Hinsicht die Formeln der höheren Trigonometrie viele Noth gemacht, sobald man sie für angewandte Mathematik und deren so bestimmte Richtungen der physischen Kräfte gebraucht.

§. 67. Es ist in dieser Hinsicht etwas werth, auf das deutlichste aus dem obigen, und nahmentlich aus §. 61, gewiß zu seyn; daß jeder Drehung unendlich kleine Veränderung die dem Vordrehungs-/Codrehungs-Sinne gemäß ist, ein bejahtes/verneintes Differential, ein unendlich kleines algebraisches grösser/kleiner werden, nicht nur im Vorwinkel und dessen Bogen, sondern auch in seinem Protangenten mit sich bringt;

und dagegen jeder Drehung unendlich kleine Veränderung, die dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Codrehungs-}}{\text{Vordrehungs-}}$ Sinne gemäß ist, ein $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{bejahtes}}{\text{verneintes}}$ Differential, nicht nur für den Cowinkel und dessen Bogen, sondern auch für seine Procotangente verursacht.

Denn man wird sich dadurch bey der so wichtigen Formel $d\,\mathrm{Arc}\,\pi = \frac{d\,\mathrm{tang}\,\pi}{1+\mathrm{tang}\,\pi^2}$ wegen des übereinstimmigen $\mp$ ihrer beyden Seiten **durchaus und völlig gesichert** finden, **so lange man dabey bleiben will und kann**, den Bogen π und daher auch dessen Differential, **bloß** in Hinsicht des **Vordrehungssinnes** bejaht oder verneint zu nennen, und dabey das $\mp$ des Tangentendifferentials entweder nach dem $\mp$ der Tangenten-Quotienten, es sey nach der einfachen oder zweyfachen Scale, oder auch nach dem Höhen $\mp$ der Tangentenlinien auf der einfachen Scale zu schätzen.

Es versteht sich aber, daß man auch auf der einfachen Scale das Höhen $\mp$ als ein Richtungs $\mp$ betrachten *), und dabey den Uebergang zwischen $+\infty$

*) Das bloße Lagen $\mp$, hier das **oberhalb** und **unterhalb** der HA **liegen**, kann auch hier

nicht

$+\infty$ und $-\infty$, gleichsam als etwas unendlich kleines verschlucken müsse!

Wem dieses Verschlucken peinlich fällt, und gleichwohl darum zu thun ist, daß für das $\mp$ des Bogens d Arc π gerade das $\mp$ seines Vordrehungssinnes angenommen, und das $\mp$ des d tang π allenthalben damit übereinstimmig bleibe, der kann das $\mp$ des letztern, auch indem er es nach dem Richtungs $\mp$ der einfachen Tangentenscale abzunehmen fortfährt, als das oben geschilderte Quotienten $\mp$, und die einfache Tangentenscale als eine erkünstelte geometrische Zeichnung dieser Quotientenscale betrachten; da denn durch Beziehung auf die zweyfache Tangentenscale und deren

nicht vorhalten. Wenn die Vordehung α'''' $=(CACB'''')$ welcher die verneinte Tangente AT'''' zugehört, um ein d α'''' wächst, so nimmt die Tangentenlinie im Verneinten ab; und jeder algebraisch geübte Mathematiker wird behaupten, daß diese Veränderung der Tangentenlinie ein **bejahtes** Differential ist, **obgleich** es einen Theil der unterhalb HA gelegenen Tangentenlinie ausmacht, also eben so gut als die ganze Tangentenlinie, **verneint** heissen müßte, **wenn wirklich** die ganze Tangente ihres **untern Liegens wegen** verneint wäre!

deren negativen Halbmesser CH aller Anstoß gehoben ist.

So ist man mit dem $\mp$ der angeführten Formel in Richtigkeit, so lange man dabey bleiben will und kann, den Bogen π und dessen Differential $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{bejaht}}{\text{verneint}}$ zu nennen, je nachdem er mit dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{bejahten}}{\text{verneinten}}$ Vordrehungssinne, diesem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{verneinten}}{\text{bejahten}}$ Codrehungssinne beschrieben wird.

§. 68. Findet man dagegen für rathsam oder auch wohl nothwendig, den Bogen π und daher auch dessen Differential bejaht oder verneint zu nennen, je nachdem deren Beschreibungssinn in die Höhe oder Tiefe gerichtet ist; so wissen wir nun schon, daß das d tang π nach seiner Höhen- und Tiefenrichtung auf der einfachen Scale abgenommen, für Winkel π die im IIten oder IIIten Quadranten sich enden, damit im Widerspruche steht, und nunmehr Uebereinstimmung zwischen dem $\mp$ der beyden Seiten in der Formel nur bleiben könne, wenn man auch das d tang π nach demjenigen Höhen $\mp$ schätzt, welches nach der zweyfachen Tangentenscale ihm zufällt.

Da man, auch beym Gebrauche der zweyfachen Scale, das vorige $\mp$ des d tang π (§. 67) als ein ∓ der Tangentenquotienten betrachten kann, so muß es eine Operation geben, aus jenem Quotienten ∓ auf das richtige Höhen ∓ der wahren Tangentenlinie zu schließen. Ich brauche diese Operationen nicht besonders zu zeigen, weil sie aus den Gründen des vollständig richtigen Systemes eben so folgen, wie andere ähnliche, die in den folgenden Stücken mit vorkommen werden.

§. 69. Sey nun auch φ der Winkel, dessen Gegengrösse $-\varphi$ den Winkel π zu dem gehörigen ersten Quadranten ergänzt, oder kürzer gesprochen, sey φ der Cowinkel von π; so wird man auch über die ∓ der Formel

$$d \operatorname{Arc} \varphi = \frac{d \tang \varphi}{1 + \tang \varphi^2}, \text{auch als} = - \frac{d \operatorname{cotang} \pi}{1 + \operatorname{cotang} \pi^2}$$

betrachtet, eben so aufs reine kommen.

Anmerkung über die bisherigen Untersuchungen.

§. 70. Der Umstand, daß ich in Beziehung auf das Protangenten- und Procotangenten ∓ auch die Drehungssinne, als Bogen- und Winkel-Wachsthum und Abnahme verursachend, auf eine brauchbare und zuverlässige Weise, bejaht und verneint zu nennen wußte, und der andere Umstand, daß mir unter allen Differentialformeln

formeln zwischen Bogen und irgend einer trigonometrischen Linie, die eben angeführten für das Tangenten- und Cotangenten-Differential, gerade für die Praxis am nöthigsten wurden; dieses sind zwey Gründe, weshalb ich bey meinen Untersuchungen, die ich **nur durch praktisches Bedürfniß gezwungen** vornahm, zuvörderst das Tangenten- und Cotangenten ∓ zu betrachten anfing.

§. 71. Allerdings ist nun durch das Bisherige, eine große praktische Brauchbarkeit des ∓ der gewöhnlichen Tangenten- und Cotangentenlinien dargethan; auch sogar dessen übereinstimmende Hauptgestalt mit dem algebraisch-arithmetischen Quotienten ∓ aus den richtigen Tangentenlinien und ihren Halbmessern zugestanden worden. Indessen ist doch dabey schon so manches für das dazu erforderliche mehrfache ∓ auseinandergesetzt, an dessen Zergliederung man bisher noch nie gedacht hatte.

Was man bisher mit ziemlicher Undeutlichkeit ein ∓ auf der gewöhnlichen Tangenten- und Cotangentenscale genannt hatte, war zuvörderst von dem so genannten Lagen ∓ zu reinigen, dem ja auch die bisherigen Lehrer selbst gar nicht getreu blieben, noch getreu bleiben konnten (§. 67.

(§. 67. *)). Als ein geometrisches Richtungs ∓ betrachtet, wurde sein Zusammentreffen an Hauptgestalt mit dem richtigen Quotienten ∓ gesichert, welches selbst aber als ein algebraisch-arithmetisches Resultats ∓ aus einem zweyfachen angenommenen geometrischen Richtungs ∓, dem Höhen ∓ und dem Seiten ∓, dargestellt ist. Eben deshalb ist es zur befriedigenden theoretischen Einsicht, und somit auch zur sicheren Praxis, ein nicht unwichtiger Umstand, daß ich die gewöhnliche Tangentenscale, welche z. B. für die ganze Drehung A o A, aus

AU′U′′′′AU′U′′′′A besteht, (!!) keinesweges für eine nothwendige, einfache, natürliche geometrische Scale der Tangentenlinien anerkenne, sondern nur für eine künstliche, arithmetische Quotientenscale gelten lasse, welche überdies dem **gewöhnlichen** Systeme **nur** vermittelst einer conventionellen, und für die gewaltsame Foderung eines allemahl bejahten Halbmessers gehörige Verkehrung des Indicis im IIten und IIIten Quadranten, angepaßt wird.

Jetzt

*) Im folgenden Stücke wird noch ein neues auffallendes Beyspiel vorkommen, daß das gewöhnliche Lagen ∓ nicht vorhält, nicht einmahl für die allgemein angenommene Definition des Sinusversus und Cosinusversus!

Jetzt zum

∓ der Sinus und Cosinus, und dessen Verbindung mit dem vorigen.

§. 72. Index für Tangente und Cotangente ist, was man Secante und Cosecante nennt.

Für die bewegliche Sinusscale, welche zugleich auch nach Links und Rechts hin und her wandert, und so ihr bejahtes Maximum CA, und ihr verneintes Maximum, ihr algebraisches Minimum, CH erreicht; für diese Sinusscale giebt den Index der bewegliche Halbmesser CB ab, den ich daher Sinusindex nennen werde, in so fern er den Sinus bestimmt; und Cosinusindex, in so fern von dem jedesmahligen Cosinus die Rede ist, der doch ebenfalls auch durch ihn, vermittelst des Sinus, bestimmt wird.

§. 71. Nun ist es allgemeine Gewohnheit, für die Sinusscale den Index nirgend umzukehren, auch im IIten und IIIten Quadranten nicht, wo doch der Tangentenindex umgewandt wird. Das Gesetz der Steetigkeit scheint sich aufzulehnen gegen den etwanigen Wunsch, auch den Sinusindex umwenden zu wollen; weil man dann sogleich für den ersten stumpfen Winkel ein negatives Sinusmaaß von der bestimmten Länge des Halbmessers hätte, da man doch für den letzten spitzen Winkel eine eben so groß bestimmte

Länge,

Länge, als bejahtes Sinusmaaß hatte! Ich behaupte nun freylich, daß durch das Verkehren des Tangentenindicis die geometrische Steetigkeit noch weit gewaltiger verletzt wird; weil man ja dabey aus einem unendlich erhöhten Puncte U′ in einen unendlich vertieften Punct U'''' in eben dem Augenblicke überspringen muß, da die Drehungsgrösse bloß aus spitz in stumpf mit völliger Steetigkeit übergeht! Indessen ist es wahr, daß durch dieses Umkehren jene Tangentenscale auf einer einzigen Linie durch A erarbeitet wird, welche als eine Quotientenscale betrachtet, das ihrige leistet, wie es vorhin gezeigt ist. Auch ist etwas wahres darin, daß solch eine Quotientenscale, auf einer einzigen geraden Linie, für die ganze Drehung, nur bey denen ins Unendliche wachsenden Tangenten und Cotangenten, vermittelst des Satzes $\mp\infty = \frac{1}{\mp 0}$ veranlaßt werden konnte; weil nur dem ∞ die o divisorisch zugehört, und nur o einen Uebergangspunct zwischen + und − ausmacht.

§. 72. Da man nun beym Anlegen der Sinus, der geometrischen Steetigkeit getreu bleibt, und daher den jedesmahligen Sinus auch allemahl in die Höhe oder in die Tiefe gerichtet vorfindet, je nachdem die jedesmahlige Grösse der Drehung in Absicht auf hoch und tief es mit sich bringt;

bringt; das gewöhnliche Tangenten $\mp$ aber dem geometrischen $\dot{+}$ und $\dot{-}$ einiger Tangenten gerade entgegengesetzt ausfällt: so muß doch nun wohl die Besorgniß entstehen, ob sich auch jenes durchaus geometrisch richtige, gewöhnliche Sinus $\dot{+}$ und $\dot{-}$, wo es mit dem gewöhnlichen Tangenten $\mp$ verbunden wird, allenthalben zu schicklichen Resultaten vereinigen lasse!

Eben das läßt sich fragen über das gewöhnliche Cosinus $\mp$, welches ein richtiges geometrisches $\dot{+}$ und $\dot{-}$ in allen Quadranten bleibt, also im 2ten und 3ten Quadranten, dem hier gewöhnlichen Cotangenten $\mp$ an Hauptgestalt entgegen gesetzt ist.

Ueberdies wird auch aus dem Sinus- und Cosinus $\mp$ zusammengenommen, bald auf Tangenten, bald auf Cotangenten $\mp$ geschlossen, wobey man ebenfalls fragen kann, ob und warum das Resultat, ungeachtet jenes Zwiespaltes in der Anlage, allemahl richtig, oder doch schicklich zutreffend bleibe!

§. 73. Um nun das Spiel, welches zwischen den so verschiedenartigen $\mp$ hiebey vorgeht, genau genug verfolgen zu können; so bemerke ich zuvörderst, daß aus Sinus oder

Cosinus

Cosinus allein genommen, für eine andere trigonometrische Linie niemahls gefolgert wird; sondern es werden entweder 1) Sinus und Cosinus, oder 2) Cosinus und Cosinus-Index, oder endlich 3) Sinus und Sinus-Index zusammengenommen, um aus beyder **Verhältniß** auf irgend eine andere trigonometrische Linie zu schließen.

§. 74. Wird das sogenannte arithmetische Verhältniß dazu mit benutzt; so geschieht es vermittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes; also durch Wurzelziehung. Da man nun in der ganzen bisherigen analytischen Geometrie, für das Zeichen der Wurzelziehung nie etwas mehreres zu behaupten wagte und wußte, als daß die Wurzel (geometrisch, die mittlere Proportionale) in Absicht auf $\mp$ für **jedesmahlige Schicklichkeit** a posteriori zu **wählen** sey *): so konnte auf diesem

*) Hierauf wird ja, so viel ich irgend mich besinnen kann, alles hinaus kommen, was man über das $\mp\surd$ bisher gelehrt hat; außer, daß von mir selbst, in Linearum subtangentium &c. §. 34, bereits vorläufig angezeigt ist, wie man es anzufangen habe, um über die jedesmahl erforderliche Wahl zwischen jenem + und − **aus Gründen von vorne her** gewiß zu werden, und **alle** algebraisch-geometrisch verschiedene **Fälle** der Wahl zu umfassen.

diesem Wege jener Zwiespalt nirgends seine Folgen durchsetzen. Nahmentlich auch für das ∓ der Wurzeln ist man bisher viel zu genügsam gewesen, als daß nicht sogar auch jener Zwiespalt im trigonometrischen Systeme hier hätte unbemerkt bleiben müssen. Daher ich über die Benutzung dieses arithmetischen Verhältnisses nach meiner gegenwärtigen Absicht (§. 13) weiter nicht zu reden brauche; und eben deshalb auch für die Quersinus und Quercosinus hier nichts zu entwickeln nöthig habe, in so fern auf diese hin, und von diesen her, gerade durch Hülfe des arithmetischen Verhältnisses geschlossen wird.

§. 75. Wird das sogenannte geometrische Verhältniß benutzt, um aus Sinus oder Cosinus weiter zu schließen; so ist dieses entweder 1) das Verhältniß sin : cosin, oder 2) cosin : cosin index oder 3) sin : sin index. Mit einem von diesen Verhältnissen wird dann das Verhältniß zweyer andern trigonometrischen Linien verglichen, unter denen die gesuchte vorkommt. Soll diese gesuchte allemahl als viertes Proportionalglied zu stehen kommen, so muß man das von den drey obigen Verhältnissen gebrauchte, bisweilen umgekehrt ansetzen.

§. 76. Nun braucht man nur zu bedenken, daß der sinus index zugleich auch cosinus index

ist,

ist, um sogleich einzusehen, daß in dem 1ten Verhältniß, sinus : cosinus, durch Umwendung des Indicis alle beyde Glieder umgekehrt würden, und daher das Zeichen des ganzen Verhältnisses, das Zeichen seines Exponenten, nach jeder Umkehrung, die man in Hinsicht auf die gewöhnliche Tangenten- und Cotangenten-Umkehrung für nöthig halten möchte, nach solcher Umkehrung, sage ich, gerade eben so ausfallen würde, als es bey unterlassener Umkehrung sich ergiebt.

Die beyden andern Verhältnisse 2) und 3) aber werden nur für Auffindung von Secanten und Cosecanten gebraucht; wovon ich nachher reden werde.

§. 77. Hiemit sind wir nun versichert, daß zwischen dem Sinus- und Cosinus $\mp$ und dem Protangenten- und Procotangenten $\mp$ kein Zwiespalt entstehen wird, obgleich das erstere, das Sinus- und Cosinus $\mp$, in allen Quadranten, von dem letztern aber das Protangenten $\mp$ nur in dem Iten und IVten, das Procotangenten $\mp$ nur in dem 1ten und 4ten Quadranten, mit dem wahren geometrischen Richtungs $\mp$ übereinstimmt.

Je deutlicher wir aber nun von diesem Zusammentreffen, und darunter nahmentlich auch

noch

noch davon überzeugt sind, daß selbst diejenigen theils Tangenten $A'''T$ und $A'T$ theils Cotangenten $\mathfrak{A}'''\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}''\mathfrak{T}$, welche theils für den IIIten und IIten, theils für den 3ten und 2ten Quadranten, (statt ihrer wirklich geometrisch wahr gerichteten AT''' und AT'', $\mathfrak{A}\mathfrak{T}'''$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{T}''$,) auf der gewöhnlichen einfachen Tangenten- und Cotangentenscale abgemessen werden, doch auf dieser auch ihre geometrische Richtung wirklich bejaht oder verneint haben, je nachdem sie gewöhnlich bejaht oder verneint genannt werden: um so mehr muß es uns unerträglich fallen, daß nahmentlich auch diese letzte Uebereinstimmung, für die

Secanten und Cosecanten,

nach der gewöhnlichen Behandlung und Lehre schlechterdings nicht zu erreichen ist.

§. 78. Denn die bekannte Formel

$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$, giebt ja $\frac{1}{(-) \cos \alpha} = (-) \sec \alpha$ für den IIten und IIIten Quadranten, und giebt $\frac{1}{(+) \cos \alpha} = (+) \sec \alpha$ für den Iten und IVten Quadranten.

Nun tritt schon für den IIten und IVten Quadranten die unangenehme Bemerkung ein, daß mit dem eben hergesetzten Formularzeichen der Secante, die geometrische Richtung derselben im IIten Quadranten nur übereinstimmt, wenn man die hier gewöhnliche Linie C''T = CT''' nach ihrer Höhenrichtung schätzt; und dagegen im IVten Quadranten die Richtung der CT''' gerade nach ihrer Seitenrichtung geschätzt werden muß, wenn ihr Richtungszeichen mit ihrem Formularzeichen hier übereinstimmen soll.

Für den IIIten Quadranten aber ist dergleichen Uebereinstimmung gar nicht zu erreichen; da die dafür gewöhnliche Secante C'''T = CT' sowohl an Höhen- als an Seitenrichtung bejaht ist, und doch nach der obigen Formel eine (−) sec sich ergiebt!

Die nähmlichen Bemerkungen werden nun sogleich auch für die Formel $\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$ gelten; wenn man nur Höhen- und Seitenrichtung in ihnen vertauscht, und statt des I- II- III- und IVten Quadranten nun den 1- 2- 3- und 4ten setzt.

§. 79. Wer irgend das Bedürfniß vorher sieht, für wirkliche Anwendung auf mechanische Drehungen, auch zwischen Höhen- und Seiten + allenthalben deutlich nnterscheiden zu können,

nen, dem wird unsere Bemerkung über die dahin gehörige einzelne Misstimmung zwischen dem IIten und IVten, auch 2ten und 4ten Quadranten, schon eben so bedenklich und unerträglich scheinen, als die allgemeine Misstimmung im dritten (IIIten und 3ten) Quadranten: ob es gleich sehr natürlich ist, daß bisher, ohne eine gehörige Unterscheidung zwischen dem Höhen- und Seiten∓, gerade nur bey dem dritten Quadranten, der hier ganz offenbahre **Widerspruch** zwischen dem Formular(−) und den beyderseitigen Richtungs+, oder auch so genannten Lagen+ der Secante oder Cosecante, sich der Bemerkung aufdrang.

§. 80. Indessen ist **Michelsen** der einzige, der wenigstens über dieses letzte Uebel laut geklagt hat; aber nur aus dem Gesichtspunkte, daß es sonderbar sey, einerley Linie CT′ das eine Mahl (wenn sie als Secante eines hohlspitzen Winkels betrachtet wird) bejaht, und das andere Mahl (als Secante eines erhabenstumpfen Winkels) verneint nennen zu müssen.

Auf solche Abfassung der Klage gehörte nun allerdings wohl die vorläufige Erinnerung, welche der verewigte **Kästner** in seiner Beantwortung dieser Rüge ertheilt: daß nähmlich einerley Linie gar wohl bald verneint bald bejaht heissen könne, je nachdem der eine oder der andere von ihren Gränzpuncten als der Anfangspunct ihrer Richtung betrachtet werde. (Man sehe Kästners geometrische Abhandlungen, Erste Sammlung No. 59. S. 459 – 474. Göttingen 1790.)

§. 81. Doch tritt auf diesen Bescheid sogleich die Frage ein, wodurch man denn veranlaßt sey, dergleichen Verwechselung in den Anfangspuncten der Richtung für die CT hier vorzunehmen? Und da wird nun selbst von dem scharfsinnigen Kästner der Knoten nur zerhauen, nicht gelöst!

Er sagt, daß jede CT′ und CT′′′′, als Secante für CACB′ und CACB′′′′ bejaht heisse, weil sie vom Mittelpuncte C aus nach den Endpuncten der Bogen, B′ und B′′′′ hin wirklich gerichtet ist; als Secante für CACB′′′ und CACB′′ aber verneint zu heissen verdiene, weil sie von den Endpuncten der Bogen, B′′′ und B′′ weg gerichtet ist.

§. 82. Dieses ganz neue, und gewiß sehr unverhoffte Secanten $\mp$, erscheint mir nun schlechterdings als eine bloße Nothhülfe, die man nur ergriff um die böse Erscheinung des Formular $\mp$ in der Formel $\frac{1}{\cosin \alpha} = \sec \alpha$, auch

geome-

geometrisch zu beschönigen. Denn bey der Anlage und Entstehung der trigonometrischen Linien, ist ja doch von solch einem ∓ schlechterdings nie die Rede gewesen! Ein Höhen ∓ und ein Seiten ∓ wird wirklich angelegt; weiter nichts, für ebne Trigonometrie. Das ∓ des Drehungssinnes, dessen man gelegentlich auch noch zu erwähnen pflegt, konnte an sich nur auf Wachsen und Abnehmen der Winkel und ihrer Bogen bezogen werden, bis man sich überzeugt hatte, wie man eine ganze Drehung auch in Beziehung entweder auf die gewöhnliche Tangenten- oder auf die gewöhnliche Cotangentenscale, bejaht oder verneint nennen könne. Dieses gewöhnliche Tangenten- und Cotangenten ∓ ließ sich dann oben von uns doch deutlich als ein Resultat aus jenen beyden angelegten geometrischen Höhen- und Seiten ∓ und den geforderten durchaus bejahten Halbmessern zusammengenommen, wirklich darstellen. Wie aber dergleichen für das obige neue Secanten ∓ zu erreichen wäre, das vermag ich keinesweges abzusehen! Und als ein solches Resultat aus dem schon angelegten Höhen- und Seiten ∓, und dem aufgedrungenen durchaus bejahten Halbmesser, müßte es ja doch seine Rechtfertigung erhalten; da es ja lediglich durch die analytischen Formeln $\frac{1}{\text{cosin}\,\alpha} = \sec\alpha$

und

und $\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$ auf die Bahn gebracht ist. Ohne diese Formeln würde sicherlich niemand darauf verfallen seyn, den Secanten ein solches $\mp$ zuschreiben zu wollen, welches in der Richtung zum Endpuncte des Bogens **hin**, und in der Richtung von demselben **weg** bestände! Was sollte auch wohl herauskommen, wenn man dergleichen $\mp$ wirklich von Anfang an zum Grunde legen wollte! Da müßten ja z. B. alle Sinus bejaht heissen, weil sie sämmtlich nach dem Endpuncte des Bogens hin sich richten, und alle Cosinus ebenfalls da man sie doch als Sinus des Cobogens zu bestimmen hat!!

§. 83. Dieser so neu ergriffene Erklärungsgrund des resultierenden Secanten $\mp$, ist nun abermahls ein Beyspiel von solcher Nothhülfe und Nothtaufe, von solcher neuen und bis dahin unerhörten *) $\mp$ Hypothese, deren ich, in meiner schon oft erwähnten kleinen Schrift, die bisherige analytische Geometrie beschuldigt habe. Ich nannte dergleichen auch dort schon eine **letzte** Hypothese, in so fern dergleichen erst zuletzt, am Ende des Calculs ergriffen wird, um dem $\mp$ des Resultates einen schicklich scheinenden Sinn zu verschaffen, nicht aber von Anfang an für die erste

*) hypothesis *nouae*.

erste Grundlage des Calculs schon gelten soll. Daß solche, erst zuletzt ergriffene ∓ Taufe mit denen, die man früher schon zum Grunde gelegt hatte, sich nicht verträgt, versteht sich von selbst; weil man ja so am Ende des Calculs noch zu einer neuen Taufe nicht greifen würde, wenn man das ∓ des Resultates denen schon angenommenen ∓ gemäß fände!

Ein ähnliches, erst am Ende des Calculs ergriffenes ∓ bey den einfachsten Formeln der höhern Geometrie für die Berührungslinien, und nahmentlich für die Subtangenten, habe ich in der eben erwähnten kleinen Schrift schon geschildert, auch darin gezeigt, daß selbst Kästners dafür ergriffenes ∓ sogar mit sich selbst nicht einmahl besteht, sondern in der Hälfte aller möglichen Fälle, die es umfassen soll, sich selbst widerspricht! Und der, durch wichtige Erweiterung der Mathematik so verdienstvolle Hr. Prof. **Hindenburg** zu Leipzig, hat es bey einzeler Behandlung zweyer Curven völlig bestätigt gefunden, daß sich die bisher gewöhnliche Subtangentenformel sowohl in dem von Kästner, als in dem vor Ihm für sie erdachten ∓ gerade in denjenigen Fällen widerspricht, für welche ich diesen Widerspruch ganz allgemein aus den **Gründen meines Systemes** gefolgert hatte. (Archiv, fünftes

fünftes Heft, S. 343 ꝛc.) Dergleichen Widerspruch mit sich selbst kann ich nun freylich dem hier aufgegriffenen Secanten- und Cosecanten $\mp$ nicht vorwerfen. Da hier die verschiedenen Fälle sich auf ihrer vier, nach den vier Quadranten, sowohl bey den Secanten als auch Cosecanten, sogleich zurückbringen; so war es freylich leicht zu übersehen, daß die Hin- und die Wegrichtung, nach dem Endpunkte des Bogens beurtheilt, allerdings eine solche Entgegengesetzung sey, die mit dem obigen Formular $\mp$ allenthalben zusammentrift.

Aber nicht einmahl in andern Wissenschaften ist man ja mit einer solchen Hypothese zufrieden, die bloß für das, was sie erklären soll, ausreicht, und dagegen mit andern dahin gehörigen Verbindungen sich widerspricht. Wie sollte man, um das, durch eine mathematische Formel behauptete $\mp$ zu erklären, sich mit jener Deutung begnügen können, die in einigen Quadranten mit dem früher schon angenommen und wirklich zum Grunde gelegten Seiten- oder Höhen $\mp$ und in einem, in dem dritten Quadranten, mit beyden sich widerspricht; nur in dem ersten Quadranten mit beyden übereinstimmt!

§. 84. Ich werde nunmehr zeigen, daß diese Widersprüche zwischen dem Formular $\mp$ der Secantencanten- und Cosecanten, und zwischen dem, in dem gewöhnlichen Systeme angelegten Seiten- und Höhen ∓, ausgemacht eine üble Folge der beyden Gewohnheiten sind, daß man nur für die Tangenten und Cotangenten zwey einfache Scalen anlegt, deren Halbmesser, oder deren Entfernungen vom Mittelpunkte der Drehung, beyde allemahl bejaht sind; und daß man gleichwohl jeden Halbmesser durchaus in allen analytisch-trigonometrischen Ausdrücken für bejaht ansetzt, auch in denen Quadranten, wo er doch bey den angenommenen wirklich geometrischen Sinus- und Cosinusscalen, theils (in den zweyten und vierten Quadranten) vielleicht nicht nach seiner gerade zu betrachtenden Richtung, theils aber (in dem dritten Quadranten) nach keiner von seinen beyden Richtungen, wirklich bejaht ist.

Wenn nähmlich von den drey im §. 73 schon angeführten Verhältnissen, eines der beyden letztern, Cosinus : Cosinus-Index, oder Sinus : Sinus-Index, gebraucht wird! so entsteht in einigen Quadranten das Uebel, daß in Beziehung auf die gewöhnliche einfache Tangenten- und Cotangentenscale eigentlich beyde Glieder sollten umgekehrt werden, und nun gleichwohl nicht etwa ebenfalls bey beyden Gliedern die Umkehrung unterlassen, sondern bey dem einen, dem Sinus- oder Cosinus-Index, die Umkehrung

rung wirklich vorgenommen wird; indem man dieses Glied allemahl als bejahten Halbmesser (+) r anzusetzen pflegt, also im natürlichen Systeme, = (+) 1.

Es geschieht übrigens mit ausgemachtem Rechte, daß ich das, aus dem Gebrauche dieser Verhältnisse erwartliche $\mp$, gerade auf das gewöhnliche Tangenten- und Cotangenten $\mp$ beziehe. Denn indem man in der Proportion,

$$\text{cosin}\ \alpha : (+)\ 1 = (+)\ 1 : \text{sec.}\ \alpha$$

für die eine von diesen beyden (+) 1 gerade die CA, und in der Proportion,

$$\text{sin}\ \alpha : (+)\ 1 = (+)\ 1 : \text{cosec}\ \alpha$$

für die eine ihrer beyden (+) 1 gerade die CA offenbar allemahl annimmt und vor sich hat; so ist ja eben daraus klar, daß die gewöhnliche einfache Tangenten- und Cotangentenscale dabey befolgt wird, und das $\mp$ der Secanten und Cosecanten auch ihnen eigentlich entsprechen sollte.

§. 85. Damit nun beym Gebrauche der Verhältnisse 2) und 3), das Sinus- und Cosinus $\mp$ mit dem Secanten- und Cosecanten $\mp$ in eben solche Uebereinstimmung komme, als nach dem obigen, beym Gebrauche des Verhältnisses 1), zwischen dem $\mp$ der Sinus- und

und Cosinus und dem gewöhnlichen $\mp$ der Tangenten und Cotangenten erhalten wird; so müßte man auch hier dafür sorgen, daß in den beyden Verhältnissen 2) und 3) entweder, Falls man sich an die geometrische Richtung der beyden Glieder in diesen Verhältnissen halten wollte, in beyden Gliedern die Umkehrung unterlassen würde, oder Falls man diese Glieder auch als Quotienten aus den wirklichen Sinus- und Cosinuslinien durch einen allemahl bejahten Halbmesser dividirt, betrachten wollte, dann in beyden Gliedern die Umkehrung vorgenommen würde, wo der verneinte Halbmesser in Hinsicht auf die einfache Tangenten- oder Cotangentenscale ebenfalls umzukehren wäre.

§. 86. Ergreifen wir das erste, die unterlassene Umkehrung, wobey denn die Sinus und Cosinus nach ihrer bisherigen geometrischen Richtigkeit fernerhin auch zu zeichnen sind; so erhalten wir beym Gebrauche des Verhältnisses 2)

im Iten Quadranten

$$\dot{+}\cos\text{in}\,\alpha' : \dot{+}1 = \ddot{+}1 : \ddot{+}\sec\alpha'$$

als $\dot{+}CE' : \dot{+}CA = \ddot{+}CB' : \ddot{+}CT'$

oder auch $= \dot{+}1 : \dot{+}\sec\alpha'$

als $= \dot{+}CB' : \dot{+}CT'$

; nach gewöhnl. Formel, $\dfrac{1\,.\,1}{(+)\cos\alpha'} = (+)\sec\alpha'$

im

im IIten Quadranten

$\dot{-}\cos\text{in}\,\alpha'' : \dot{+}1 = \ddot{+}1 : \ddot{-}\sec\alpha''$

als $\dot{-}CE'' : \dot{+}CA = \ddot{+}CB'' : \ddot{-}C''T$

oder auch $= \dot{-}1 : \dot{+}\sec\alpha''$

als $= \dot{-}CB'' : \dot{+}C''T$

; nach gewöhnl. Formel $\dfrac{1 \cdot 1}{(-)\cos\alpha''} = (-)\sec\alpha''$.

im IIIten Quadranten

$\dot{-}\cos\text{in}\,\alpha''' : \dot{+}1 = \ddot{-}1 : \ddot{+}\sec\alpha'''$

als $\dot{-}CE''' : \dot{+}CA = \ddot{-}CB''' : \ddot{+}C'''T$

oder auch $= \dot{-}1 : \dot{+}\sec\alpha'''$

als $= \dot{-}CB''' : \dot{+}C'''T$

; nach gewöhnl. Formel $\dfrac{1 \cdot 1}{(-)\cos\alpha'''} = (-)\sec\alpha'''$

im IVten Quadranten

$\dot{+}\cos\text{in}\,\alpha'''' : \dot{+}1 = \ddot{-}1 : \ddot{-}\sec\alpha''''$

als $\dot{+}CE'''' : \dot{+}CA = \ddot{-}CB'''' : \ddot{-}CT''''$

oder auch $= \dot{+}1 : \dot{+}\sec\alpha''''$,

als $= \dot{+}CB'''' : \dot{+}CT''''$

; nach gewöhnl. Formel $\dfrac{1 \cdot 1}{(+)\cos\alpha''''} = (+)\sec\alpha''''$.

Anm.

Anm. Absichtlich habe ich diejenigen Proportionen, in welchen zwey Glieder auf das **eine**, und die beyden andern auf das **andere** Richtungs $\mp$ bezogen werden, vorangesetzt, weil sie für verworfene Lagen der beyden ähnlichen Dreiecke, aus denen sie gefolgert werden, ungleich rathsamer sind, als die übrigen Proportionen, wo alle Glieder nur nach **einerley** Richtungs $\mp$ geschätzt werden. Der Grund davon ist, weil doch algebraische Proportionen zu ihrer deutlichen geometrischen Construction eines Raumes von wenigstens zwey Dimensionen bedürfen, und man das $\mp$ von **beyden** Dimensionen wirklich beachten muß, wenn die Folgerungen allemahl zuverlässig ausfallen sollen, auch da, wo das Unbeachtete nicht etwa durch eine so völlig homologe Lage der ähnlichen Dreiecke, wie für obiges Schema allerdings vorhanden ist, ersetzt werden kann. Eben diese Anmerkung gilt auch für das folgende Schema.

§. 87. Auf eben die Weise wird man beym Gebrauche des Verhältnisses 3) erhalten

im 1ten Quadranten

$$\ddot{+}\sin\alpha' : \ddot{+}1 = \dot{+}1 : \dot{+}\operatorname{cosec}\alpha'$$

als $\ddot{+}C\mathfrak{E}' : \ddot{+}C\mathfrak{A} = \dot{+}C\mathfrak{B}' : \dot{+}C\mathfrak{T}'$

oder auch $= \ddot{+}1 : \ddot{+}\operatorname{cosec}\alpha'$

als $= \ddot{+}C\mathfrak{B}' : \ddot{+}C\mathfrak{T}'$

; nach gewöhnl. Formel, $\frac{1\,.\,1}{(+)\sin\alpha'} = (+)\operatorname{cosec}\alpha'$

im 4ten Quadranten

$$\ddot{+}\sin\alpha'' : \ddot{+}1 = \dot{-}1 : \dot{-}\operatorname{cosec}\alpha''$$

als $\ddot{+}C\mathfrak{E}'''' : \ddot{+}C\mathfrak{A} = \dot{-}C\mathfrak{B}'''' : \dot{-}C\mathfrak{T}''''$

und auch $= \ddot{+}1 : \ddot{+}\operatorname{cosec}\alpha''$

als $= \ddot{+}C\mathfrak{B}'''' : \ddot{+}C\mathfrak{T}''''$

; nach gewöhnl. Formel, $\frac{1 \,.\, 1}{(+)\sin\alpha''} = (+)\operatorname{cosec}\alpha''$

im 3ten Quadranten

$$\ddot{-}\sin\alpha''' : \ddot{+}1 = \dot{-}1 : \dot{+}\operatorname{cosec}\alpha'''$$

als $\ddot{-}C\mathfrak{E}''' : \ddot{+}C\mathfrak{A} = \dot{-}C\mathfrak{B}''' : \dot{+}C\,'''\mathfrak{T}$

und auch $= \ddot{-}1 : \ddot{+}\operatorname{cosec}\alpha'''$

als $= \ddot{-}C\mathfrak{B}''' : \ddot{+}C\,'''\mathfrak{T}$

; nach gewöhnl. Formel, $\frac{1 \,.\, 1}{(-)\sin\alpha'''} = (-)\operatorname{cosec}\alpha'''$

im 2ten Quadranten

$$\ddot{-}\sin\alpha'' : \ddot{+}1 = \dot{+}1 : \dot{-}\operatorname{cosec}\alpha''$$

als $\ddot{-}C\mathfrak{E}'' : \ddot{+}C\mathfrak{A} = \dot{+}C\mathfrak{B}'' : \dot{-}C\,''\mathfrak{T}$

und auch $= \ddot{+}1 : \ddot{+}\operatorname{cosec}\alpha''$

als $= \ddot{+}C\mathfrak{B}'' : \ddot{+}C\,''\mathfrak{T}$

; nach gewöhnl. Formel, $\frac{1 \,.\, 1}{(-)\sin\alpha''''} = (-)\operatorname{cosec}\alpha''''$

§. 88.

§. 88. Aus diesen Darstellungen ist nun einleuchtend, wie man es anfangen müßte, um auch aus den Formeln, $\frac{1.1}{\cos.\alpha} = \sec.\ \alpha$ und $\frac{1.1}{\sin\ \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$, für jede Secante oder Cosecante gerade dasjenige Zeichen zu erhalten, welches ihr als Begleiterinn der gewöhnlichen Tangenten oder Cotangenten zukommen würde.

Die Proportionen in §. 86 zeigen nähmlich, daß man dieses Wunsches gewährt wird, wenn man die eine 1 in der Formel $\frac{1.1}{\operatorname{cosin} \alpha} = \sec \alpha$, nähmlich die $1 = CB$, im III- und IVten Quadranten verneint setzet; weil doch hier die CB''' und CB'''' wirklich ein $\dot{-}$ ist, und übrigens diese CB ganz offenbar grade nach ihrer Höhenrichtung geschätzt werden muß, wenn die Secanten nach ihrer Höhenrichtung geschätzt werden sollen. Denn wenn gerade diese Schätzung bey der Secante gewählt werden soll, so muß es auch bey der CB geschehen: weil man sonst gegen die nothwendige Gleichartigkeit der Richtungen in jeden zwey Gliedern des Verhältnisses *) verstoßen würde;

*) Indem ich überhaupt zwischen den beyden Linien eines Verhältnisses die nöthige Gleichartigkeit schon

besorgt

würde; indem die beyden noch übrigen Glieder der Proportion beyde nur Seitenrichtung haben.

§. 89.

besorgt glaube, wenn man nur bey beyden auf einerley von den beyden Richtungs $\mp$ achtet; so kann ich darin sogar allzu genügsam scheinen, weil doch z. B. die eben betrachteten diagonalisch gerichteten CB und CT weder nach der Höhen- noch Seitenrichtung ganz vollständig nicht gerichtet sind, sondern bald von der einen bald von der andern nur etwas sehr weniges, und in ihren Gränzlagen sogar uur noch das $\mp$ 0 von der einen Richtung an sich haben! Indessen wird das Mehr oder Weniger gerade durch die absolute Grösse der sämmtlichen Linien in der Proportion so mit bestimmt, daß ich mich wenigstens nicht gezwungen fand, den Zeichencalcul in dieser Hinsicht noch genauer zu machen. Wenn man aber auf das Gleichartige der Richtungen in den zwey Gliedern eines Verhältnisses gar nicht achten wollre; so wäre gar keine Regel vorhanden, nach welcher man zwischen der zweydeutigen Richtung diagonalischer Linien zu wählen hätte: und wenn dann zwey solche Linien, es sey mittelbar oder unmittelbar, zu einander hinzuzufügen wären; so könnte man, selbst für einen einzelen gezeichneten Fall, geschweige denn im allgemeinen, es nicht bestimmen, ob die Zusammenfügung einer algebraischen Summe oder Differenz entsprechen solle.

§. 89. Ich setze hiebey als sehr natürlich und einleuchtend voraus, daß die Secante, wenn sie als Begleiterin der Tangente betrachtet werden soll, auch gerade nach dem Höhen $\mp$, wie hier die Tangente zu schätzen ist. Will man indessen auf diese Schicklichkeit Verzicht thun, und damit zufrieden seyn, daß das Formularzeichen der Secante wenigstens mit irgend einem ihrer beyden Richtungs $\mp$ übereinstimme: so kann man dieses ohne Verneintsetzung eines r = 1 erhalten, in dem IIten und IVten Quadranten; weil ja in dem IVten allerdings durch dessen $\dot{+}$ CB''' auch die Secante CT''' ein $\dot{+}$ wird, also mit dem Formular + am Hauptgestalt übereinstimmt; für den IIten Quadranten aber durch dessen $\ddot{+}$ CB'' die Secante ein $\ddot{-}$ wird, und dadurch mit dem Formular (—) an Hauptgestalt übereintrift. Wegen des I. Quadranten brauche ich es kaum erst zu erinnern, daß darin in der That jede r = 1 allemahl bejaht zu setzen ist. Aber nun ist der IIIte Quadrant noch übrig; und darin ist es ohne Verneintsetzung der einen 1 in der Formel schlechterdings unmöglich, eine Uebereinstimmung zwischen dem Formularzeichen und irgend einem von den Richtungszeichen der Secante zu erhalten.

§. 90. Eben solche Betrachtungen werden sich aus den Proportionen in §. 87 auch über den theilweisen Zwiespalt zwischen dem gewöhnlichen Formular ∓ der Cosecanten und nicht nur dem Seiten ∓, nach welchem man doch die Cosecanten als Begleiterinnen der Cotangenten am liebsten schätzen möchte, sondern auch dem Höhen ∓ derselben ergeben: und endlich bleibt auch hier der dritte Quadrant übrig, in welchem ohne Verneintsetzung der einen $1 = CB$ in der Formel

$$\frac{1 \cdot 1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

schlechterdings kein Formular ∓ zu erhalten ist, das mit irgend einem von den beyden Richtungs ∓ der Cosecanten, an Hauptgestalt übereinstimmend wäre.

§. 91. Diese Mißhelligkeiten zwischen dem Formular ∓ der Secanten und Cosecanten und ihrem Richtungs ∓, sind nun allerdings von der Art, daß dadurch das bisherige ∓ System der Trigonometrie (auch nachdem man das unzureichende Lagen ∓ beseitigt hat) immer noch in Widerspruch mit sich selbst geräth, in so fern man doch Recht hat zu sagen, daß das zuvörderst in ihm angelegte ∓ der Sinus- und Cosinus-Linien, und das damit übereinstimmende ∓ der Tangenten und Cotangenten ihm zugehört. Der andere Widerspruch zwischen seinen geometrisch anschau-

anschaulichen Sinus- und Cosinus-Scalen; und seinen in dieser Hinsicht unnatürlichen Tangenten- und Cotangenten-Scalen, kann allerdings durch das von diesem Systeme mit geforderte unnatürliche $\mp 0 = \frac{1}{\mp \infty}$ als aufgehoben betrachtet werden.

§. 92. Bey gewisser Orgelstimmung wird der so genannte Wolf fast gänzlich in das Gis getrieben. Daß sein Heulen nicht ganz vermieden werden kann und soll, erhellet schon daraus, weil man sich nie entschließen wird, die Gis-Tasten wegzulassen. Allerdings aber sucht man wenigstens das ärgste Quintengeheul zu vermeiden, wenn man weiß, wo es steckt. Jener Wolf des trigonometrischen Systems ist in die Secanten und Cosecanten gejagt. Wer es weiß, daß er darin sitzt, wird mit dem übrigen, selbst auch für das Richtungs $\mp$ ein ziemlich gutes Spiel haben können; etwa so, wie mit der oben angeführten Formel $d\, arc\, \pi = \frac{d\, tang\, \pi}{1 \mp tang\, \pi^2}$ unter der Einschränkung, daß das $\mp$ des Bogens π lediglich nach dem $\mp$ seines Drehungs-Sinnes geschätzt werde. Auch muß man nicht etwa das Bedürfniß haben, den Divisor r. $1 + tang\, \pi^2$

in seine beyden Factoren, sec π. sec π zu zerlegen, wodurch man sogleich auf den Wolf trift. Gleichwohl wird dieses Bedürfniß oft genug entstehen; sobald überhaupt vom genauen Richtungs $\mp$ die Rede seyn soll.

§. 93. Man denke sich auch, daß man, um analytische Formeln auf geometrische Untersuchungen anzulegen, sich einen Fall der Frage gezeichnet hat; nach Anleitung der Figur die gesuchte Linie aus den gegebenen durch Proportionirung und sonstiges Zusammenfügen und Abziehen sich erzeugt vorstellt, und nun unter diesen Linien irgend eine als Secantenlinie vorkommt, indeß die anderen, nahmentlich wenn sie mechanische Kräfte oder Wirkungen vorstellen, durchaus nach deren so bestimmten Richtungen betrachtet werden müssen: so ist wohl einleuchtend genug, daß sich bey dem Uebertragen der einen Fallformel, wofür die Secante etwa ihrer geometrischen Richtung gemäß gezeichnet war, auf andere Fälle hin, wo das nicht geschieht, eine ungemeine Unrichtigkeit einschleichen kann.

§. 94. Aber selbst auch bey solchen Untersuchungen, wo man durchaus nur mit dem einmahl angelegten trigonometischen Formelnsystem es zu thun hat, also den sämmtlichen Linien gerade nur das ∓ dieses Systemes, auch wo es der Geometrie entgegen läuft, geradezu beyzulegen braucht, und auf diese Weise dem Formular ∓ durchaus getreu bleiben kann; ja sogar auch dann, wenn es nur lauter Sinus und Cosinus zu behandeln giebt, bey deren Anlage man doch dem geometrisch anschaulichen ∓ schon getreu geblieben ist, dürfte es dennoch sehr schwer halten, zu einer wirklich befriedigenden Ueberschauung des Spieles zwischen ∓, welches dabey vorgeht, zu gelangen, wenn man nicht zwischen dem zweyfachen Richtungs ∓, und dem daraus resultierenden arithmetischen gehörig unterscheidet. Ich bitte in dieser Hinsicht das IVte Stück durchzulesen.

Das dritte, vierte und fünfte Stück muß ich, man sehe die Vorrede, auf die zweyte Abtheilung verschieben.