Werk

Titel: Neue Erörterungen über Plus und Minus

Untertitel: Tadel einiges bisherigen und Darstellung eines genaueren Gebrauches desselben für...

Autor: Busse, Friedrich Gottlieb von

Verlag: Aue

Ort: Cöthen

Jahr: 1801

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 MATH II, 3654

Werk Id: PPN599581573

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN599581573|LOG_0006

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=599581573

Sechstes Stück.

Genaue Begründung des vorhin benutzten Hauptsatzes ♀.

(Er ist im vorigen Vten Stücke gebraucht, und kommt hier unten in §. 12 vor.

§. 1.

Erklärung. Was mit einer Grösse zusammen genommen gerade nichts giebt, soll ihre Gegengrösse heißen; und wo es undeutlich wird, jene erstere bloß Grösse zu nennen, da mag sie die **Vorgrösse** heißen.

§. 2. **Lehrsatz.** Wenn a > b ist, so ist
Gegengrösse von a < Gegengrösse von b;
und wenn a < b ist, so ist
Gegengrösse von a > Gegengrösse von b.

Beweis des ersten Satzes.

Aus der **Erklärung** folgt, daß
a + Geggr. von a = b + Geggr. von b ist.
Wenn daher a > b ist, und abgezogen wird

so muß, Geggr. von a < Gggr. von b übrig bleiben.

Zum

Zum **Beweise** des zweyten Satzes, wird von eben der Gleichung ebenfalls a von ihrer linken und b von ihrer rechten Seite abgezogen.

Da nun hier a $<$ b ist; so muß übrig bleiben: Geggr. von a $>$ Geggr. von b.

§. 3. Beyde Sätze lassen sich kurz ausdrücken, indem man schreibt:

Wenn a $> <$ b ist; so muß

Geggr. von a $< >$ Geggr. von b seyn; und das lieset;

Wenn a grösser oder kleiner als b ist, so muß die Gegengrösse von a kleiner oder grösser als die Gegengrösse von b seyn.

§. 4. Eben diese Sätze gelten nun nahmentlich auch von **Zahlen** und **Gegenzahlen**, indem ich auch unter der Gegenzahl von a eine solche verstehe, die mit a zusammengenommen gerade $=$ o giebt.

Ist die Zahl a eine bejahte, welches wir durch (+) a andeuten, so ist ihre Gegenzahl das verneinte (—) a; und der (—) a Gegentheil ist (+) a.

§. 5. Hier sehe ich die bekannte Erinnerung eintreten, daß es eigentlich keine vereinte Zahlen

len gebe: sondern z. B. in +7 und −7 die Zahl selbst einerley sey, eine siebenmahlige Wiederhohlung der Einheit; und nur die Einheit verschieden sey, in +7 die bejahte +1, und in −7 die verneinte −1.

Ich erwiedere, daß doch bey allem algebraischen Verfahren mit bejahten und verneinten Grössen, durch Zahlen die mit + und − bezeichnet sind, die Großheit und Kleinheit der Grössen und daher auch ihrer Zahlen, gegen einander muß können verglichen werden; und daß auch immerfort so geredet und so geschlossen wird, als ob das geschehe; zu solcher Vergleichung aber durchaus nothwendig ist, daß für die verglichenen Grössen einerley **Maaßstab**, also einerley **Einheit** gebraucht werde.

§. 6. Auch braucht man nur für die bekannten Lehrsätze, daß zwey gleichbezeichnete Zahlen einen bejahten, zwey ungleich bezeichnete aber einen verneinten Producten oder Quotienten geben, die gewöhnlichen Beweise, wie sie unter Andern auch von mir schon vorgetragen sind *), vor Augen zu nehmen, um einzusehen: diese Beweise gründen sich auf

§. 7.

*) Erster Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben. Erster Theil. §. 493.

§. 7. die Voraussetzung, daß alle Zahlen, die verneinten eben so wohl als die bejahten, gerade nach einer einzigen, bejahten Einheit sollen gemessen werden.

Wenn man z. B. aus der Proportion $(+)1 : (-)a = (-)b : d$ schließt, daß die vierte Proportionale $d = (+)ab$ seyn müsse, so sagt man: so wie aus $(+)1$ die $(-)a$ entsteht, eben so muß aus $(-)b$ die d entstehen. Damit wird ja schon vorausgesetzt, daß der $(-)a$ Entstehung aus $(+)1$ soll gedacht und angegeben werden können!

In der That ist auch das Ungleichartige in in den $(+)1$ und $(-)a$ gerade so beschaffen, daß es durch einen bequemen Ausdruck der Entstehungsart selbst, wiederum kann vergütet werden. Nähmlich wenn die angenommene Einheit $(+)1$, amahl vereint, das heißt, ihr amahliges Geraubtseyn, Entnommenseyn, versichert wird; so macht das die vereinte Zahl $(-)a$ aus.

§. 8. Sicherlich ist nun, daß alle Zahlen, die miteinander sollen verglichen werden, auf einerley Einheit zu beziehen sind, ein höheres Princip guter Methode, als daß die Definition von Zahl, welche man sich gemacht hatte, ehe man an entgegengesetzte Grössen dachte,

auch

auch nach Einführung derselben noch müsse beybehalten werden! Was hindert uns nach dieser Erweiterung des arithmetischen Stoffes, lieber auch den Begriff von Zahl zu erweitern, so daß die Zahl nicht bloß das Vielmahl des Hinsetzens der angenommenen Einheit, sondern auch das Vielmahl des Verneinens von eben der Einheit ausdrücken kann?

§. 9. Woraus denn sogleich auch folgt, daß bey solchem erweiterten Begriffe von Zahl, ihre Großheit und Kleinheit nicht bloß von dem Vielmahl, welches sie ausdrückt, sondern überdieß auch von der Art dieses Vielmahles abhängt; ob es nähmlich ein vielmahliges Bejahen, Hinsetzen und Vorhandenseyn, oder ein vielmahliges Verneinen, Wegnehmen und Beraubtseyn der angenommenen Einheit anzeige.

§. 10. Ja, es ist der letztere Bestimmungsgrund gerade der überwiegende; so daß eine Zahl, die das Daseyn der Einheit, nach welcher gemessen werden soll, in der zu messenden Grösse verneint, eben dadurch die Grösse für kleiner ausgiebt, als es irgend eine andere ist, in der man irgend ein Vorhandenseyn dieser Einheit andeutet: und es wächst sogar die Kleinheit der angedeuteten Grösse, je grösser das Vielmahl des Verneinens ist, welches zu ihrer Darstellung erfordert wird.

Anm. Unter dem Vielmahl verstehe ich auch gebrochene Mahle, $\frac{1}{2}$ mahl, $\frac{2}{3}$ mahl u. dergl.; denn auch für die Bruchrechuung, und nahmentlich für die dabey vorkommende Rechnung mit den so genannten gemischten Zahlen, wie $2\frac{3}{4}$, ist es meines Erachtens ein weit höheres Princip für bequeme Rechnung, daß für alle Zahlen, die man neben einander gebraucht, **einerley Einheit angenommen werde** (also für die $2\frac{3}{4}$ Elle die gemeinschaftliche Einheit eine ganze Elle sey, die für den Bruch nur $\frac{3}{4}$ mahl zu nehmen ist); als daß man einen Zahlbegriff durchsetze, den man bloß für ganze Zahlen eingerichtet hatte, (und nach welchem man behaupten müßte, daß $\frac{3}{4}$ eine grössere Zahl (3) sey, als die Zahl 2, und nur für diese letztere die Einheit 4mahl grösser sey, als die Einheit von jener.) Auch hier ist es rathsamer, lieber den Begiff von Zahl zu erweitern, daß er auch gebrochene Zahlen, ohne diesen eine neue Einheit unterzuschieben, mit umfasse, und so dem bequemen Verfahren in der practischen Rechenkunst entspreche, dessen sich am Ende **alle** bedienen! z. B. bey dem Kettensatze

— xr. ? kosten $2\frac{3}{4}$ ℔

wenn 5 ℔ kosten 6 xr.

Niemand behandelt diesen Ansatz, als ob $2\frac{3}{4}$ ℔ wie 2 **ganze** ℔ und 3 **Viertel** ℔ zu betrachten, und demnach auf die kleinste Sorte zu reduciren, also als 11 **Viertel** ℔ zu betrachten seyen! Das geschieht

ja

ja nicht; sondern man betrachtet sie als $\frac{1}{4}$ ℔, als $\frac{1}{4}$ vom ganzen ℔!

§. 11. Aus der Voraussetzung (§. 7.) daß grade $+1$ das Maaß für alle Zahlgrössen, auch der verneinten seyn soll, und nur aus dieser Voraussetzung folgen die in §. 6. schon angeführten Lehrsätze für Producte und Quotienten aus bejahten und verneinten Zahlen. Da nach diesen Lehrsätzen jede Zahl, wenn sie durch -1 multiplicirt oder dividirt wird, gerade ihre Gegenzahl zum Producten oder Quotienten giebt; so weiß man aus den beyden Sätzen in §. 3 auch folgendes.

Wenn in $a > < b$
durch $-1 = -1$ multiplicirt oder dividirt wird;
so erhält man $-a < > -b$ für die Producte, oder die Quotienten.

§. 12. Da man ferner statt dieser Producte oder Quotienten gerade ihr $n$faches oder ihre $n$ten Theile erhält,
wenn in $a > < b$
durch $-n = -n$ multiplicirt oder dividirt wird; so weiß man auch, daß $-na < > nb$ seyn muß, für die Producte;

und

und für die Quotienten, daß $\frac{a}{n} <> \frac{b}{n}$ seyn muß.

Das heißt, die Sätze einzeln dargestellt:

Wenn in $a > b$
durch $-n = -n$ multiplicirt wird, so weiß man ———————— von den Producten, daß $-an < -bn$ ist;

oder wenn durch $-n = -n$ dividirt wird, so weiß man von den Quotienten, daß $-\frac{a}{n} < -\frac{b}{n}$ ist.

Und wenn in $a < b$
durch $-n = -n$ multiplicirt oder dividirt wird; ————————
so weiß man, daß $-an > -bn$ ist, von den Producten;

und daß $-\frac{a}{n} > -\frac{b}{n}$ ist, von den Quotienten.

§. 13. Die obigen Beweise gelten, es mag a oder b eine verneinte oder bejahte Zahl, oder auch sonstige Grösse seyn. Nur haben es diese Beweise, wie alle andere, mit der Wahrheit dessen nicht zu thun, was bey ihren Schlüssen schon vor-aus gesetzt wird. Die hiesigen Voraussetzungen sind, bald daß $a > b$, bald daß $a < b$ sey; und da könnte es gar wohl seyn, daß die Möglichkeit dieser Voraussetzungen selbst, durch das Bejaht- und Verneintseyn von a und b etwas eingeschränkt würde, wie es folgende Betrachtungen wirklich zeigen.

§. 14. Aus der Voraussetzung im §. 7, daß gerade nach der bejahten Einheit alle Grössen, auch die verneinten, zu messen seyn sollen, aus dieser so wichtigen Voraussetzung folgt auch, daß über das Grösser- oder Kleinerseyn der einen Zahl a gegen die andere b, gerade vermittelst der bejahten Einheit zu entscheiden ist,

nähmlich $a > b$ zu nennen ist, wo a die bejahte Einheit
entweder mehrmahl als b enthält
oder wenigermahl als b verneint.

und $a < b$ zu nennen ist; wo a die bejahte Einheit
entweder wenigermahl als b enthält
oder mehrmahl als b verneint.

§. 15. Folglich kann man haben

1) $(+)a > (+)b$, und auch 2) $(+)a < (+)b$.

desgleichen kann man haben

3) $(-)a > (-)b$, und auch 4) $(-)a < (+)b$.

Dagegen

Dagegen ist allemahl nur

5) $(+)a > (-)b$, auch nur 6) $(-)a < (+)b$;

und $(-)a > (+)b$, auch $(+)a < (-)b$,

sind unwahre Behauptungen, welche daher als Voraussetzungen im §. 12. gar nicht vorkommen können und müssen.

§. 16. Die beyden Sätze in §. 2. sind dort erwiesen, noch ehe wir uns darauf eingeschränkt hatten, daß gerade nach der bejahten Einheit alles solle gemessen werden. Nachdem wir vermittelst dieser Einschränkung die sechs Fälle im vorigen §. erhalten haben; so können wir auf sie auch jene Lehren des §. 3. anwenden; und da geben sie folgendes.

1) Wenn $(+)a > (+)b$; so ist $(-)a < (-)b$.
2) Wenn $(+)a < (+)b$; so ist $(-)a > (-)b$.

3) Wenn $(-)a > (-)b$; so ist $(+)a < (+)b$.
4) Wenn $(-)a < (-)b$; so ist $(+)a > (+)b$.

5) Da $(+)a > (-)b$; so muß $(-)a < (+)b$ seyn.
6) Da $(-)a < (+)b$; so muß $(+)a > -b$ seyn.

3) und 4) sind die Inversen von 2) und 1), und 6) ist die Inverse von 5).

§. 17. Man sieht nun wohl, daß alles in Ordnung ist, und mit einander übereinstimmt; so daß man herzhaft nach den Schranken fragen kann, welche für Großheit und Kleinheit der zu wählenden Grössen, aus den Umständen der Aufgabe vorhanden seyen. Daß solche Fragen ihren Nutzen haben, können schon die im Vten Stücke herausgebrachten Regeln für Vermischungsrechnung zeigen. Aber in welchen Wirrwar würde man dafür gerathen seyn, wenn man z. B. gleich anfangs dort unter B) es bey dem Schlusse gelassen hätte:

damit $m - \frac{p}{q} b > c - \frac{p}{q} c$ werde,

also auch $\frac{p}{q}(c - b) > c - m$ werde

so muß $\frac{p}{q} > \frac{c-m}{c-b}$ genomen werden!

§. 18. Da ich oben auf mein Lehrbuch der Algebra verwiesen habe, so muß ich noch folgende Anmerkung hersetzen.

Wenn $(+)a > (+)b$ ist, so ist $(-)a < (-)b$. (§. 15.)

Demnach ist z. B. zu behaupten, daß $-8 < -6$ ist. Diesen Satz habe ich schon in jenem Lehrbuche Theil I. §. 109, dadurch gerechtfertigt, daß doch zu -8 noch $+2$ hinzugethan werden müßte, um − 6 zu erhalten. Genauer betrachtet, liegt das Bindende dieser Rechtfertigung doch auch darin, daß gerade die + 1 dasjenige sey, nach welchem man die Großheit und Kleinheit, auch zwischen verneinten Zahlen zu bestimmen habe; welches denn ebenfalls auf die Voraussetzung hinführt, daß gerade nach der bejahten Einheit auch die verneinten Grössen zu messen sind.

Diese Voraussetzung, die man bey Behandlung der bejahten und verneinten Grössen nie aus den Augen verlieren muß, schien mir, als ich jenes Lehrbuch vor etwa 20 Jahren abfaßte, eine zwar sehr schicklich, doch nur willkührlich ergriffene Regel zu seyn. Der Hr. Prof. Klügel, welcher jenen meinen ersten schriftstellerischen Versuch in den Annalibus Helmstadiens. sehr gütig und wohlwollend anzeigte, erinnerte dagegen, daß das nicht willkührlich sey. Ich stimme jetzt Ihm darin bey, denn es hängt jene Voraussezzung mit zwey andern Gewohnheiten oder Regeln zusammen:

1) daß alle schlechthin genannte Zahlen, die man schreibt, noch ehe etwa an ∓ gedacht wird, und die das wirkliche Vorhandenseyn der Einheit aufzählen, in sofern auch nachher, wenn bejahte und verneinte Grössen aufgeführt werden, gerade das Zeichen + erhalten; und dagegen

2) gerade

2) gerade das Zeichen — dasjenige ist, welches unter den schlechthin genannten Zahlen ein vorzunehmendes Abziehen andeutet.

Wenn man daher in folgenden vier Proportionen

$$(+)1 : (\mp)a = (\mp\,\pm)b : (?)d,$$

aus denen die bekannten, gewöhnlichen Lehren für die Zeichen der Producte folgen, statt der (+) 1 gerade die (—) 1 ergreiffen wollte, welches dann für die Producte gerade die entgegengesetzten Zeichen giebt; so müßte man, um ebenfalls auch in den Operationen der Addition und Subtraction damit übereinstimmend zu werden, in den beyden angeführten Gewohnheiten gerade + statt —, und — statt + gebrauchen. Die ganze Wahlfreyheit käme also darauf hinaus, daß man für die beyden Zeichen + — ihre Bedeutung umtauschen könne! Aber das wäre eine Alternative, die gar keiner Erwähnung werth ist.

Aus diesem Grunde halte ich es jetzt für sehr gut, daß der Hr. Pr. Klügel damahls jene Erinnerung gemacht hat; wodurch denn auch mir, bey der großen Hochachtung, die ich für seine mathematischen Einsichten hege, die Sache zu fernerer Aufmerksamkeit empfohlen wurde.