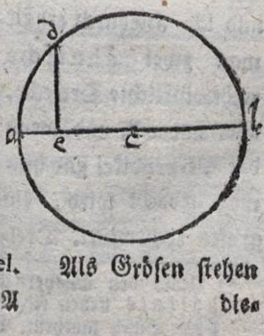
§. 1.

Auf jeden Diameter lassen sich unzälige Perpendikel errichtet denken, welche bis an den Halb-Kreis reichen, oder in denselben an einem Punct einschneiden. Ein jeder solcher Perpendikel läst sich zugleich als einen **Theiler** ansehen, der eine gerade Linie, (eben den Diameter,) in zwei Stücke sondert, zumal wenn er weiter abwärts fort-gezogen wird. Ein Ganzes zerfällt dadurch in zwei Fragmente, die zwo verschiedene Grösen vorstellen, für die Anschauung von verschiedener (d. h. hier blos protensiv-ungleicher) Länge, ae, und el.



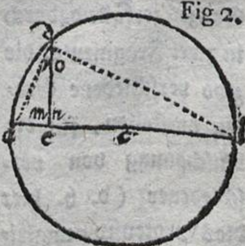
Als Grösen stehen

dieselben in einem gewissen *Verhältniß*, es mag seyn, welches es wolle, (wie allerwärts zwo gegebene Zal-Grösen, sie mögen sich so schwer vergleichen lassen, als sie wollen.) Die Erkenntnis dieses Verhältnisses vermittelt in unserem Fall hier jedesmal der aufgerichtete Perpendikel, de, indem er die Eigenschaft hat, daß er durchaus, er stehe, wo er wolle, auf dem Diameter, die mittlere Proportional-Linie zwischen den zwo (durch seine Zerfällung selbst entstandenen) ungleichen Linien ae, und el ist, und demnächst jede derselben als 4tes Glied einer zusammenhängenden geometr. Proportion darstellt: ae : de = de : el,

oder el : de = de : ae.

Der Beweis dieses wichtigen Sazes wird kurz so geführt: Man zieht zwo Hülfs-Linien nach d von beeden Enden des Diameters aus, ad und ld. Hiedurch erhält man zwei *ähnliche* rechtwinklichte Dreiecke, ade, und edl, und wenn der Perpendikel gar hinweg gedacht wird, ein groses rechtwinkl. Drei-

Fig 2.



*) Ueber den Misverstand des Ausdrucks: *Verhältnis* stehen sehr feine Bemerkungen in Hrn. Prof. Büsch mathem. Encykl. §. 21.

eck, adl, welches die zwei kleinern befaßt, und welchem sie beede ebenfalls ähnlich sind. Denn es ist leicht einzusehen, daß das △ ade drei gleiche Winkel mit dem grosen △ adl habe; Durch den Perpendikel ist 1) ja der ∟ in n ein rechter, so wie oben an der Peripherie d oder (r + o) ebenfalls ein rechter Winkel *) vorkommt; also n = d.

2) Der Winkel bei a ist beeden Dreiecken gemein, also natürlich in beeden gleich, a = a.

3) Der Winkel bei r mus also vollends auch dem bei l gleich seyn, weil nichts übrig bleibt, um das Maas von 180° = 2R vollzu machen, also gar keine verschiedene Gröse weiters denkbar ist. Wozu noch kommt, daß auch eine Seite, nehmlich ad, beeden

*) Jeder Winkel an der Peripherie hat (in dem Cirkel) die Helfte des Bogens, auf dem er steht, zu seinem Maas. Das ist in allen Anfangsgr. der Geom. erwiesen. Unser ∟ hier aber nimmt zum Bogen die Helfte des Kreises selbst ein, d. h. das sonstige Maas zweier Rechten. Die Helfte davon (von 2 R.) ist = R. Also ist der Winkel in d = R.

Dreiecken gemein, oder in beeden zugleich vorhanden ist; als wodurch vollends die Aehnlichkeit dieser 2 △△ gewiß ausser allen Zweifel gesezt wird.

Eben so ist das andere △ edl aus gleichen Gründen diesem grosen △ adl ähnlich. Denn es hat ja mit dessen drei Winkel, m, l und o eben die angeführte Beschaffenheit;

m = d, als rechter, (ad perpend.)
l = l, als beeden Dr. gemein,
o = a, als gleiche Reste zu 2 R;

und überdem ist die Seite, dl, beeden gemeinschaftlich, = dl, beederseits.

Demnach ist zuverlässig das grosse △, adl, gegen die zwei kleinere, die es befaßt, in anschaulichem Verhältnis der Aehnlichkeit. Folglich müssen diese zwei kleinere auch selbst unter sich ähnlich seyn, d. h. jedes muß einen Winkel enthalten, der sich auch im andern vorfindet, und ihre den gleichen Winkel entgegenstehende, (oder homologe) Seiten-Linien müssen einander proporzionirt seyn. Und so ist es auch! ade ∽ edl, weil

weil die Winkel n, r, a, = m, l, o, sind. Dann es sind

n = m, als rechte; (ad perpend.)
r = l, (aus dem ersten Beweis her, wo in nr. 3. sich r nothwendig l gleich zeigte;
a = o, als nothwendig gleiche Reste;

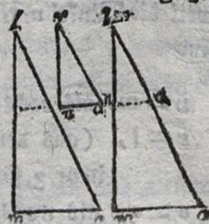
und auch hier abermals eine ganz-gleiche Seite, de, weil sie gemeinschaftlich ist, d. h. in beeden Dreiecken, de = de.

Jezt aber kann es nicht mehr fehlen, alle drei Seiten, welche sich in diesen zwei Dreiecken ade, und edl correspondiren, so fort zu erkennen. Natürlich ist die Seite

ad homolog mit dl, (als Hypotenuse,)
ae homolog mit de, (als Basis im Dreieck ade, wie de Basis im △ edl ist,)
de homolog mit el, (Kathetus gegen Kathetus,)

wo allemal den homologen Seiten evident Winkel gegen-über liegen, welche erwiesener-maassen einander gleich sind. Wenn man die zwei

Fig. 3.



Dreiecke ausgesezt neben einander stellt, wie hier, und sodann auch den kleinen ade in den grösern hinein versezt, so wird alles bisher vorgetragene noch einleuchtender; zumal wenn man die Vermischung der Buchstaben vermeidet, und hier dazu bemerkt, daß sich r auf die Spize des kleinen Dreiecks, l aber auf die des grösern, welche übrigens coincidiren, bezieht. Dann da verhält sich doch sicher Basis gegen Basis, (na : mo) welche paralel laufen, wie der kleinere Kathetus zum grösern, (rn : lm),

$$na : mo = rn : lm;$$

Die Basis im grösern $\triangle$ mo, ist aber dem Kathetus im kleinern $\triangle$ rn, ganz gleich, $mo = rn$, obiger Construction Fig. 2. gemäs, wo offenbar nur eine Linie, eben der Perpendikel, de, der beeden Dreiecken gemein ist, in Zeichnung vorkam; Also lassen sich offenbar diese Aequivalente substituiren, und sezen:

$$ns : mo = rn : lm$$
$$na : rn = rn : lm$$
$$ns : mo = mo : lm$$
$$na : de = de : lm$$

und, da der Augenschein giebt, daß na eben die Linie ist, die oben ae hies, und lm die, welche el hies, so ist die Proportion erwiesen: ae : de = de : el; das heist:

Der Perpendikel, de, ist wirklich die mittlere Proportional-Gröse zu den zwei Segmenten des Diameters ae, und el.

Sezen wir jezt algebraisch den

Diameter,	al	= M
das vordre Segment desselben,	ae	= b
den Perpendikel, aber	de	= y

so läst sich leichteractlich das 2te Segment des Diameters, el, auch als M — b ausdrücken, und also die obige Proportion nun so denken:

$$ae : de = de : el$$
$$b : y = y : M-b$$

Da aber, nach bekannten Säzen, in jeder geometrischen Proportion das Product der mittlern Gliedern dem der zwei äussern gleich ist,

so fliest hieraus die Gleichung: $y,y = b.(M-b)$
od. welches im Ausdruck eben
so viel besagt : $y^2 = Mb - bb$
wo dann die Gröse des Perpendikels, als quadrirt, erscheint, und demnächst zum Aequivalent nicht weniger, als selbst den Betrag *) eines im Ganzen gleich vielbedeutenden Quadrats haben

*) Dieses Aequivalent ist jedesmal (graphisch-betrachtet,) ein Rectangel, oder ein länglichtes Viereck, den einzigen Fall ausgenommen, wenn der Perpendikel auf dem Centrum selbst aufsteht, d. h. so gros, als der Halb-Messer selbst ist. Die Ungleichheit zweier Seiten, (da nur die zwei entgegenstehende congruent sind,) verhindert ja das Zusammen-Treffen im Flächen-Gehalt, im Ganzen betrachtet, nie. . . . . Die Auflösung der Aufgabe aber, jedes Rectangel in ein reines Quadrat zu reduciren, gründet sich, wie man bald sieht, eben auf die Einsicht der obengesezten zusammen-hängenden Proportion; Die zwei Segmente des Diameters rechtwinklicht zusammen geordnet, und dann zweimal in Contra-Opposition gezeichnet, stellen eben das für die Anschauung dar, was der rechnende Verstand als ein **Product** zweier (verschiedener) durch einander multiplicirter Zal-Grösen erkennt,

haben kann, wofür wir also Mb — b^2 gelten lassen müssen Wo aber zwo gleiche Quadrat-Grösen sind, da sind auch bekanntlich zwo gleiche Quadrat-Wurzeln; welches dann den Ausdruck veranlaßt.

$\sqrt{(y)^2} = \sqrt{(Mb-bb)}$

d. h. $y = \sqrt{(Mb-b^2)} = \sqrt{(b.M-b)}$, oder, wenn man statt M—b eine simple Signatur, etwa z, annehmen mag, $y = \sqrt{bz}$.

Nähere Entwicklungen gehören noch nicht hierher; Genug wir wissen nun, wie wir jeden Perpendikel, den wir auf einem Durchmesser wahrnehmen, anzusehen haben, und in welcher Beziehung derselbe, quantitativ erwogen, als mittl. Proportional-Gröse, und als Quadrat-Wurzel, (als latus quadrati,) rechtlich zu achten sei.

und als Gleichung zu y^2 nothwendig annehmen mus. — Die sehr practische Lehre von der Verwandlung aller gerad-linichten Figuren in Quadrate beruht fast blos auf der Anwendung dieser Säze, und deren Verfolg. Mehr hierüber zu commentiren, führte mich aber in diesen Blättern zu weit von meinem Zweck.

§. 2.

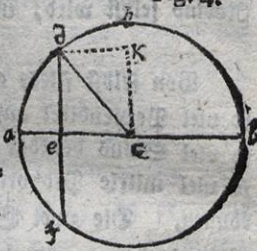
Eben dieser Perpendikel kann aber auch jedesmal als die Helfte einer Sehne, (chorda dimidiata,) betrachtet werden. Denn seine Verlängerung, gerade aus-fort gedacht, bis er den andern Halb-Kreis erreicht, läßt sich gar von dem Gedanken der Erzeugung einer Sehne nicht absondern, in so ferne sie, recht-winklicht getheilt, vorgestellt werden mag. Man versuche es, ob eine andre Construction nur möglich zu fingiren ist. Man wird allemal darauf hinaus kommen: Wenn sie der Diameter halbirt, so lassen sich ihre zwei Helften als zwei entgegenstehende Perpendikel betrachten; und, wenn diese so gegen einander stehen, (von den beeden entgegengesezten Halb-Cirkeln aus, gerade auf einander laufend,) so ist die Linie, die sie recht-winklicht schneidet, keine andre, als der Diameter selbst.

Hierdurch werden wir unmittelbar auf das, was Sinus in Trigonometrie heist, geleitet. Unser bisher so vielfältig-erwogener Perpendikel, de, ist eben ein Sinus, nur daß man

in

in der obigen Fig. 2. zwischen d und e hin, einen Rad. (dc = ac,) und also den dadurch bestimmten Bogen, ad' immer dazu gedenke. Intuitiv erhellet, daß also da 2. gleiche Schenkel seien, und von dem Ende des einen eine Linie senkrecht auf eine gewisse Stelle des andern Schenkels falle. Und so ist es jedesmal, wenn von einem Sinus nur die Rede seyn mag! Nur liegt die lezt-gedachte Stelle näher gegen a zu, wenn der Bogen ad weniger gros, d. h. wenn der Winkel in c spitziger ist; folglich ist auch da der Perpendikel, de, allemal kürzer; und er wird immer kürzer, je näher die Stelle, wo er auffällt, gegen a zu liegt; dagegen, wenn der Bogen gröser gedacht wird, ist die Stelle, wo der Perpendikel aufstehen wird, nothwendig (von e rechts hin) näher an c, und immer näher, so wie der Bogen wächst; also wird auch der Perpendikel gröser und immer gröser, d. h. die Sinus nehmen zu, bis der

Fig. 4.



der gröste gerade über c steht, wo er zu einem Radius selbst wird, und Sinus totus heist.

Von selbst fliest aus diesem allen, daß, so viel Perpendikel auf dem Diameter, eben so viel Sinus denkbar seien, welche also eben so viel mittle Proportional-Linien vorstellen können. Die zwei Segmente des getrennten Diameters, ae, und el, erhalten aber bestimmte technische Ausdrücke, welche forthin anhaltend vorkommen werden.

Das erste, ae, heist der Sinus versus, oder Quer-Sinus.

Das zweite aber el wird synthetisch gedacht, als ec + cl, und ausgedrückt: cosin + rad., oder als die Summe, die aus dem Cosinus und Radius besteht. Der Cosinus (auch Sin. complementi) nimmt allemal den Rest des Bogens ein, der über dem Scheitel-Punct von c, oder von k sich endiget, um 90 Grade zu ergänzen.

Nur der Zeichen-Ausdruck ist daher verschieden, wenn die Proportions-Formel, ae : de = de : cl uns jezt so viel heist:

Der

Der Sinus ist
die Mittel-Proportionale
zwischen dem Sinus-Versus, und der Summe des Cosinus u. Radius; $S. V: Sin = Sin : (Cos + r)$,
Also $(Sin.)^2 = S. V. (Cos. + r)$
und $Sin. = \sqrt{S. V. (Cos. + r)}$

Wenn man aber des Quer-Sinus gar nicht erwähnen will, so läst sich, da er, als $ae = ac - ec$, d. i. als $r - cos$, der vierten Figur gemäs, erscheint, für ihn auch sezen: Die Differenz des Radius und Cosinus; Demnach aber die obige Proportions-Formel auch so ausdrücken;

Der Sinus ist
die Mittel-Proportionale
zwischen der Differenz des Radius und Cosinus $(r - cos)$, und der Summe des Radius und Cosinus $(r + cos)$. Oder noch kürzer: die mittl. Proport. zwischen der Differenz und Summe des Radius und Cosinus; wo für $ae : de = de : el$ dann gesezt würde: $r - cos : Sin. = Sin. : r + cos.$

Das Product der mittlern und äusern Glieder gäbe da:

Sin

$(\mathrm{Sin})^2 = r - \cos. \; r + \cos. = r^2 - \cos^2$ *)
also $\mathrm{Sin} = \sqrt{(r^2 - \cos^2)}$;
wofür aber, da für den Radius immer 1 gesezt zu werden pflegt, auch wenn er in höhern Potenzen, r^2, r^3 u. s. f. in Rechnung vorkommt, der Ausdruck gewöhnlicher ist:

$(\mathrm{Sin})^2$ oder Sin. qu. $= 1 - \cos^2$; also
$\mathrm{Sin.} = \sqrt{(1 - \cos^2)}$

Durch eine sehr leichte Umdrehung erwächst hieraus die Formel: $\mathrm{Sin}^2 + \cos^2 = 1$, wo eben dieses 1 ein Quadrat, $= r^2$ vorstellt.

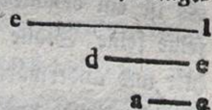
Eben so leicht fliest hieraus die Formel für das Quadrat des Cosinus: $1 - \mathrm{Sin}^2 = \cos^2$; auch $r^2 - \mathrm{Sin}^2$. Folglich für den Cosinus (unquadrirt): $\mathrm{cosin} = \sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2)}$ oder $\sqrt{(r^2 - \mathrm{Sin}^2)}$; wovon aber das nähere weiter unten vorkommen wird.

Rä-

*) Wenn die Mltcation wirklich vorgenommen wird, so erhält man in dem ganz-ausgesezten Product ein positives (r. cos) und ein negatives, welche sich natürlich dann heben, so daß die obige Gröse bleibt. Nehmlich,
$r^2 + (r. \cos) - (r. \cos) - \cos^2$ ist $= r^2 - \cos^2$.

Räsonnement
zu §. 1 und 2.

Es verdient wol einiges Nachdenken, *wie weit* etwa blos öftere Ansicht den Menschen auf die Ueberzeugung führen konnte, daß jeder Perpendikel oder Sinus die zutreffende Mittel-Proportionale zwischen den zwei Theilen eines gegebenen Kreis-Durchmessers, die wir nun hinlänglich kennen, sei? Es ist möglich, daß der erste Versuch mittl. Prop. Linien zu finden, angestellt wurde, ohne sogleich eine Kreis-Zeichnung zu Hülfe zu rufen, und ohne an einen Diameter zu denken. Die mittl. Prop. Linie ist ja schon zwischen zwo simpeln Linien, ae und el vorhanden; wenn eine dritte de dazwischen hineingedacht wird, welche über die kleine um eine *gewisse* Länge hervorragt, und gegen die grösere, el, um eine *gewisse* Länge zurücksteht.



Es kan mancher diese mittlere so lange abgekürzt, und wieder verlängert haben, bis es ihm glückte, ihr *gehöriges* Maas zu weiterem Gebrauch zu finden. Aber dieser

empy-

empyrische Weg ist wohl sehr unsicher und mühseelig zugleich. Wer Muse hat, mag Versuche desfalls anstellen! — Wir haben den Kreis, und sehen, wie leicht er die Gröse der Mittelproportionale angibt und mit welcher Schärfe er sie bestimmt. Schon lange vor Euklides Zeiten kante man die hiebei vorschlagende Vortheile. Aber auch dabei läst sich fragen: wie weit bringt wol blos wiederholte Anschauung, und etwa von andern Anlässen her geübtes Augenmaas Vermuthung — Glauben — oder gewisse Einsicht von den Bestimmungen des Perpendikels zur mittlern prop. Gröse, oder von der Eigenschaft eines jeden Sinus, diese Gröse darzustellen, hervor? .... Es ist ein demüthigender Gedanke für den auf seine feine Sinne so stolzen Menschen, daß hier und anderwärts unsre Sinnlichkeit so unzureichend ist, daß gerade ihr schärfster Theil, die Seh-Kraft, hier so leicht irre führet, und so schwankend entscheidet, ja daß sie, sich selbst überlassen, nicht einmal mit der bestimmten Schäzung von drei bis vier Linien fertig werden kann, wenn man nicht eine unter die andre geflissentlich verbirgt, also gar dem Auge entrückt,

rückt, (und so gerade gegen den eben geschäftigen Sinn selbst gleichsam einen Raub begeht;) d. h. blos durch Congruenz, und Decken oder Uebertragen, die Vergleichung befördert, und erst dadurch sichre Aussprüche über Proportionen möglich macht. Wars nicht die Einheit der Linie, de, in zwei Dreiecken, welche sonderlich oben, Fig. 2. unser Erkenntnis hervorbrachte? Wir stellten hierauf die Dreiecke heraus; aber die Bedingung blieb für uns fortan wesentlich: sie seien ähnlich, in so ferne jene Linie, de, durch Aussezung an einen andern Ort nichts von der Gröse verloren haben dürfe, die sie als Perpendikel hatte; und so, als sich selbst gleich fest-angenommen, ward sie im kleinen Dreieck Katherus, im grösern Basis.

Eben so half in dem Beweis der gleichen Winkel vorzüglich der gemeinschaftliche in a und in l wesentlich aus; (in der Vorstellung, Fig. 3. war r = l, einer und derselbe auf einer Stelle.) Da zwingt denn wieder blos die Einheit der Anschauung Zubilligung ab, und erst, wenn dieselbe vorgängig als Bedingung angenommen ist, kommt man mit Zusammenstellung und ausgeseztem Gegeneinanderhalten fort. —

Die nothwendige Anerkentnis der Uebereinkunft eines jeden rechten Winkels mit jedem andern rechten, beruht weiter ebenfalls blos auf Congruenz, und Deckung. Daher unser obiger Beweis bei den Winkeln n = m eben darauf hinaus lief. Und so stüzt sich die Sicherheit geometrischer Identität immer auf Beschränkungen des Auges auf einen und denselben eingenommenen oder gezeichneten Raum. — Es ist ein demüthigender Gedanke, ich wiederhole das Wort, aber es ist Wahrheit, die Feinheit unsrer Sinnlichkeit trägt hier keinen Ruhm davon; Trigonometrie zeugt auf jedem Blatt, mit jedem ihrer Beweise, wie wenig wir uns auf die Schärfe des bestes Auges verlassen können; sie beugt den Stolz des cultivirtesten Gefühls; dann sie macht aus, und bringt ins reine, was unmittelbare Anschauung vergebens hin und her wendet, und in dunkler Unbestimmtheit liegen läst. Wenn mir der Ausdruck nicht zu typisch oder gar zu mystisch klänge, so würde ich wol sagen können: „Das Auge ahndet blos, wo der Verstand erkennt;“ Selbst, wo schon Gewißheit vorhanden, und Zubilligung von der Gleichheit oder Aehnlichkeit

keit gewisser Figuren abgenötigt ist, da verweilt der Blick oft noch mit Zweifeln, und will sich manchmal lange nicht befriedigen. Ein Beispiel giebt manche Zeichnung der zwei kleinern Quadrate zum Qu. der Hypotenuse, wo manches Auge es schon gewagt hat, ein Splitter-Richter — an der Erfindung des grosen Pythagoras zu werden. Aber unzählige Beispiele wird sich jeder Freund der Mathematik selbst geben können; dann es werden jedem hiebei gar leicht die tausand Bedenklichkeiten und Anstände erinnerlich seyn, welche sonderlich das Studium der Geometrie erschweren, die Zögerungen aufgeforderter Beistimmung, die unangenehme Suspensionen, wenn der Lehrer (auf dem Katheder oder im Buch) bereits dreist von zuverläßig-intuitiver Ueberzeugung sprach, und gar die Möglichkeit des geringsten Widerspruchs bei dem und jenem Beweise leugnete. . . .

Wiederholte Anschauung derselben Linien macht's also nicht aus! Das Auge führt zu keinen gedeihlichen Schlüssen, wenn nichts weiter vorgenommen wird. Damit also der Perpendikel, und nachher durch Substitution der Sinus, das Prädikat erhalte, er sei mittlere Prop. Grösе, so mus als Haupt-Erforderniß geometrische Construction behülflich seyn. Denn weder der Begriff der senkrechten Linie, noch des Sinus an sich, noch der zwei Segmente, erzeugt je die Erkenntniß dieser Qualität; Da muß man demnach über den Begriff hinaus gehen, die gedachte Linie in Verbindung mit gewissen andern Zeichnungen stellen, sie als wesentlichen Theil zweier oder dreier andrer Gestalten anbringen, und so zu verschiedenen Vergleichungen erst geschickt machen, *) indem man neue Beziehungen erst erzeugt hat.

Also gelangen wir blos durch Synthesis zu der Erkenntnis der gedachten Eigenschaft, die wir an jedem Perpendikel auf einem Diameter, und an jedem Sinus, prädiciren; und woraus wir demnächst, wiederum synthetisch, zu andern Bemerkungen fortrücken.

Tri-

*) Das ist das, meines Bedünkens, was Herr Prof. Kant synthetische Construction der Begriffe nennt, welchen die Anschauungen im Raum selbst correspondiren.

Trigonometrisch = genommen, erhielten die zwei Segmente des Diameters nur andre Namen, wie auch der Perpendikel selbst. Die Einheit des Bewußtseyns also, daß es dieselben Linien noch seien, berechtigte zu dem Schluß: „Der Sinus sei die mittlere Pr. Gr. zwischen dem Sin. Vers. und der Summe des Radius und Cosinus;“ in dem ja bloser Namens = Ausdruck an einem Gegenstand des Auges selbst nichts ändern kann. Die folgende Ausdrücke, da für ae, oder für den

Sin. Vers. gesezt wird: rad—cos. (die Diff. des R. u. Cos.)

und für das grösere Segment el,

die Summe des Rad, u. Cos. rad+cos.

beziehen sich ebenfalls auf Einheit der Anschauung, und auf allerwärts vorhandene synthetische Einheit des Bewußtseyns. Eine schnelle Erinnerung, in welchen Functionen diese Linien in andern Hinsichten gebraucht werden, tritt allemal ursprünglich dabei ein, und veranlaßt die eben erwähnte Benennungen, für welche man allerdings eine gewisse Vorliebe vor den allgemeinen Signaturen, ae, el, u. s. w. in sich empfindet, weil sich mehr dabei denken läßt, und der geschäftige Wiz des Menschen gar bald neue daraus mögliche Combinationen vermuthet, auch sich wirklich weiterhin solche daraus glücklich verschaft. . . .

Was sich ferner hierüber noch sagen liese, sei auf einige Räsonnements über etliche der nächstfolgenden Theoreme verspart. — Wir wollen zu einer Vorstellung nun fortschreiten, aus der wir ersehen werden, daß der Sinus nicht blos als Mittel-Prop. im Kreis zu betrachten sei.

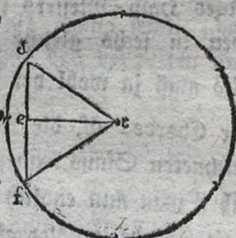
§ 3.

Es erhellet aus obigem wohl hinlänglich unter andern so viel, daß der Radius in einem Kreis, und jeder gezeichnete Sinus in demselben sonderlich in Vergleichung kommen. Wann man jeden gegebenen Sinus auf den Halb-Messer legt, so dekt er ihn zuverläsig niemals ganz, (falls er nicht vertikal über c steht, d. h. Sinus totus ist.) Stellt man sich dann auf dem Halb-Messer eine gewisse Menge gleicher Theile eingezeichnet, (markirt) vor, wie dann würklich derselbe = 10,000000, oder als in

10

10 Million-Theilchen zerfällbar, vorgestellt wird, so wird leichterachtlich jeder aufgetragene u. in Gedanken darübergelegte Sinus eine gewiße bestimmte Menge dieser Theilchen decken, und also durch Congruenz auf der Stelle, wo er liegt, sich selbst bestimmen. Deckt er also den Radius nur zur Helfte, so wird er 5,0000000 solcher Theilchen unter sich fassen. Das ist sehr simpel einzusehen. Aber, man mag ihn nun, als Perpendikel, oder als Sinus betrachten, so ist er, wie wir wissen, in jedem Fall auch die Helfte einer Sehne, welcher nothwendig ein gewisser Bogen im Kreis correspondirt... Wie groß wird dieser Bogen der ganzen Sehne, (Fig. 5 da, d f genannt,) seyn? Diese

Fig. 5



Frage ist sehr natürlich, sie sezt weiter nichts, als eine zweite hiemit eingetretene Vergleichung, voraus. Der gedachte Bogen über der Chorde, (d. h. über dem doppeltgezeichneten Sinus,) mus ja ein Stück des Kreises seyn; also kommt da abermals ein Theil gegen ein

Ganzes in Betracht. Dieses Ganze wird bekanntlich, als = 360 Grade, folglich ebenfalls synthetisch gedacht; also mus jeder einzelne Bogen dagegen, als ein gewisses Fragment, (als Zal = $\frac{360}{n}$ allgemein) vorstellbar seyn. Nun ist aus den Anfangsgründen eines jeden geometrischen Lehrvortrags notorisch, daß jeder Cirkel, durch sechs gleiche Einschnitte abgetheilt, sechs Bogen darstelle, deren Sehnen alle gerade dem Halb-Messer des Cirkels gleich sind, und umgekehrt, daß jeder Kreis durch Umtragung seines Halb-Messers innerhalb der Peripherie, eben in sechs gleiche Theile zerfällt werde; also muß ja wohl der Bogen, $\frac{360}{6} = 60°$ der Chorde. df, die wir als unsern doppeltgezeichneten Sinus kennen, correspondiren. Verfährt man nun endlich regressiv, und halbirt diese Chorde, halbirt aber auch das Maas des Bogens von 60 Gr. mit, denkt also zugleich auch den Sinus nur wieder einfach (als Perpendikel auf einer Seite blos, wie er anfangs gegeben war, = $\frac{1}{2}$ r,) gezeichnet, so kommen notwendig die Gleichungen heraus:

$\frac{1}{2}$ df = de = $\frac{60}{2}$ = 30 = dem Sin. $\frac{1}{2}$ r, oder, mit Worten ausgedrükt, heist die Folge: „Der Sinus von 30 Graden ist der Helfte des Radius jederzeit gleichzuachten, und umgekehrt: $\frac{1}{2}$ r = Sin. 30°; Weil aber r schlechthin öfters = 1 genommen wird, so findet man häufig blos gesezt: *Sin.* 30 = $\frac{1}{2}$.

Nach Voraussezung dieses bestimmten Falls wird wohl die Definition des Sinus, die die kürzeste ist, und Anfängern so oft nicht behagen will, einleuchtend genug seyn: „daß ein Sinus die halbe Sehne des doppelten Bogens durchaus sey.“

Corollar. Man kann jeden Sinus, als das 4te Glied einer geometr. Proportion betrachten, und, in einem gewissen Verstand, einen Quotienten heisen. Einer unsrer ersten Mathematiker Deutschlands, Herr Prof. Klügel zu Halle, dringt sehr darauf, diesen Ausdruck mehr in Ehren zu halten, und öfters anzuwenden, als gewöhnlich geschieht. Es ist allerdings an dem, daß dabei die Verhältnisse zweier Bögen, hier df, und ad, einer ganzen und einer halben Chorde, und die Verhältnisse des Sinus totus zu einem bestimmten Theil desselben, welchem der Bogen, ad, correspondirt, wesentlich in Erwägung kommen, und daß ihre Zusammenordnung so ausfallen mus:

$$df : da = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$df : de = 1 : \frac{de}{df}$$

$$\text{Sin. tot} : \text{Sin. } 30^\circ = r : \frac{r.\text{ Sin. } 30.}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{Chord. } 60^\circ : \frac{\text{Ch. } 60^\circ}{2} = 1 : \frac{1}{2};$$

woraus denn auch wol das Prädikat eines Bruchs, welchen man jedem Sinus beizulegen pflegt, verständlich wird, eben weil man ihn, graphisch, als ein Stück des Halb-Messers, und arithmetisch, als eine abgerissene Zal der grosen Zal-Gröse eben desselben, d. i. als Fragment von 10 Millionen, ansehen kann.

Man findet hier hinter dem Gleichungs-Zeichen zu dem ersten Verhältnis (df : da) Pünctchen gezeichnet; Der Plaz ist geflissentlich leer gelassen, weil die Bögen, df und da, als ungleichartige Grösen, gegen gerade Linien nen keine bestimmte Vergleichung, wie zu einer Proportion gehört, ertragen oder zulassen. Bögen gehen zunächst die Winkel an, deren Maas sie abgeben, die Winkel aber haben, in einem gewissen Sinn, mit Sehnen gar nichts zu thun, *) und in dieser Rücksicht auch nicht mit halbirten Sehnen, oder Sinus, und Perpendikeln. Dagegen macht das Verhältnis des Halbm. zum Sinus, als gerad-linichte Länge quantitativ erwogen, den Quotienten oder den Bruch, $\frac{dc}{df}$, aus, welcher eben jederzeit bei den vorliegenden Erörterungen in Frage vorkommt.

Rä-

*) Ich behalte den Ausdruck bei, dessen sich der scharfsinnige Recensent der Basedowischen Grundsäze d. r. Math. im 9ten Stück der Einleit. zur mathem. Bücherk. S. 245. bedient hat. Basedow gebrauchte den als unadäquat gerügten Ausdruck: „Der Sinus eines Winkels sei die halbe Sehne des doppelten Winkels.“ — In dem folgenden Räsonn. werde ich noch einiges zu wol nicht überflüssiger Beleuchtung hierüber beibringen.

Råsonnement
zu §. 3.

Der Stellen sind unzählig = viele, in welchen der Sinus (nach §. 1 und 2.) als Mittel-Proportionale sich darstellt.

Unter allen diesen sind nur zwo auf dem Diameter, (rechts und links,) in welchem er als Helfte des Radius erscheint, und, wenn man den Blick nur auf einen Radius heftet, und denselben im Act des Chorden=Durchschnitts denkt, ists nur eine einzige Stelle in jedem zugehörigen Kreis, in der der Sinus = $\frac{1}{2}$r ist.

In §. 1 und 2 hatten wir ganz andre Beziehungen uns zum Augenmerk genommen, als die sind, welche uns §. 3 beschäftigen. Hier vergasen wir ganz der Hinsicht, das der Sinus als Mittel = Proportionale geachtet werden könne; Hier ward er nun nur als 2tes und 4tes Glied einer geom. Proportion brauchbar, dort sahen wir ihn immer als 2 und 3tes in der Mitte.

Dort

Dort betrachteten wir blos den Durchmesser in der Kategorie der Allheit oder Totalität, wenn gleich oft synthetisch, als aus drei Stücken bestehend: (Sin. verſ. + cos + rad), und bezogen die Gröſe des Sinus immer auf den Durchmesser, als auf ein Totum.

Hier denken wir den Radius in der Kategorie der Allheit, und beziehen die Länge des Perpendikels auf ihn; er ist uns gleichsam regulatives Princip, von welchem wir ausgehen. Seine Anschauung, unter den Verstands-Begriff der Quantität subsumirt, und demnächst durch eine feste Zal bestimmt, giebt Maas und Ziel zur Vergleichung für den eben darauf-hin bezogenen Sinus, er mag im Kreis stehen, wo er will; Bei complicirten Ausspähungen hierüber also zunächst wol für den, der selbst nur halb so gros, als der regulirende Radius ist. Denn die Scheidung eines Gegenstands zur Helfte ist für den menschlichen Verstand überall, wo ihn Maas u. Quantität beschäftigen, der leichteste Regressus. — Aber last es uns ja nicht aus der Acht lassen, daß bei jeder Signatur, die da heist Sin. 30°, oder Sin. n°, die

Rela=

Relation auf ein zweites Haupt-Object ver-
stekt liege, welches wir, als Gröse, ebenfalls
in der Kategorie der Allheit denken, nehm-
lich auf den Kreis, dessen Totalität synthetisch
als = 360 Gr. vorgestellt wird. Er läst sich
durch aneinandergesezte Bögen progressiv con-
struiren; sind diese so gleich, daß die darunter
gespannte Sehne jedesmal den Radius des
Kreises selbst abgeben kann, oder, wenn etwa
hie und da eine in Zeichnung nicht ausgedrükt
wäre, (auch wenn sie gar alle fehlten,) daß
der Halbmesser des Kreises nur entlehnt wer-
den dürfte, um sie anzusezen, (subtensas in-
scribere,) so ist da allerdings ein festes Ver-
hältnis, auch bei jedem Sinus, d. h. bei je-
der halben Sehne, welcher ein gewisser Bo-
gen correspondirt, eben so sicher vorhanden,
und mit jedem Sinus wird ein gewisses Frag-
ment von 360 gesezt, welches bei 6 Bögen
eine Rata von 60, und bei 12 Bögen von 30
Graden befassen mus. . . . . .

Da ich im Anfang meines mathem. Studi-
ums den hiebei sich durchkreuzenden Ideen-
Associationen, ziemlich unbelehrt, öfters nach-
dachte,

dachte, so wollte es mich fast immer bedünken:

1) daß der durchgehends gebräuchliche Ausdruck, Sin. 30°, Sin. n° u. s. w. wirklich die Vergleichung zweier ungleichartigen Grösen involvire,

2) daß bei zunehmenden Sehnen, u. halben Sehnen sich allerdings auch an die Gröse der Winkel gedenken lasse, welche den Bögen der Sehnen, und halben Bögen der halben Sehnen zugehören, und daß diese Ideen-Combination eben keine so arge Kezerei seyn dürfte. Ich verglich hiemit einige Stellen in den Kästnerischen Werken, z. B. §. 22 seiner Geom. im 7ten Zus. wo die Menge von Winkeln und die Menge von zugehörigen Bogen-Graden zur Vergleichung gegen einandergestellt, und dabei geäusert wird: „Das seie ein Fall, daß das Maas einer Sache nicht mit ihr von einerlei Art sei, und nicht in ihr enthalten seyn könne; aber ihr doch proportionirt sei; Eben so pflege man Wege durch Zeit zu messen, und in andern Fällen zu verfaren."

Auch in Hrn. Hof-Pred. Schulzens Darstellung der Evidenz seiner Paralelen-Theorie

§. 43. 44. fand ich denselben Gedanken, daß der erwähnte Gebrauch des Ungleichartigen für Kundige in Mathematik nichts aufallendes mehr an sich habe.

Auch in Hr. Prof. Klügels anal. Trigonom. las ich: „Der Sinus eines Winkels sei die halbe Chorde des doppelten Winkels! und da die Geometrie die Seiten des regulären Viereks, Fünf und Sechseks liefere, so seien deren Helften die Sinus der halben Centri-Winkel. . . . . (Cap. I. §. VII.)

Dieses stimmte dann, wie es mir schien, allerdings nicht recht mit dem, was oben im Ausgang des §. 3 steht, noch mit der Basedowischen Rüge überein? —

Bei wiederholtem Nachdenken kommt man aber gar bald durch folgende Mittelbegriffe, meines Erachtens, völlig ins reine: Man vergleicht Sehne und Halb-Messer, als Länge und als Zal; man vergleicht Bogen, und Umkreis; man vergleicht Bogen und Oeffnung des Winkels, und man kann sichs nicht erwehren, da jeder Bogen nur eine gewisse Sehne, und umgewandt, jede

Sehne

Sehne nur einen gewissen Bogen hat, auch Bogen und Sehne, zu vergleichen.

Aber man geräth ganz aus dem rechten Gleis, und die Vergleichung wird völlig = unschicklich,

1) wenn man die halbe Sehne, (de = $\frac{1}{2}$df) mit der Sehne verwechselt, welche sich unter dem Bogen, da, als dessen ganze Chorde, ziehen läst, und welche natürlich immer länger ist, als de;

2) Wenn man daher, z. B. in der obigen Proportion, (s. 26) es für einerlei hält, statt Chord. 60° : $\frac{\text{Ch. } 60°}{2}$, den Ausdruck so zu sezen: Chord. 60° : Ch. 30°, welches niemals vergönnt seyn kann, weil eine halbirte Chorde von 120 Gr. immer ja kürzer seyn mus, als eine von 60 Graden, da sie, als Perpendikel, auf den Radius fällt, dagegen die Linie, welche, als ganze Sehne, unter dem Bogen von 60° hinläuft, immer zu Bildung eines spizen Winkels sich neigt, auch in Quadrirung jederzeit die Hypotenuse abgiebt, wo hingegen die andre ($\frac{1}{2}$ df) nur als Kathetus

 erscheint.

erscheint. Der Bogen an der Peripherie zu der Sehne, welche man Ch. 30° bezeichnet, ist freilich, in Graden abgezählt, und fürs Auge, so gros, als der Bogen der Peripherie, welchen man sich bei der Signatur $\frac{Ch.60^\circ}{2} = Sin 30^\circ$ in Graden, vorzustellen hat; aber es ist ja hauptsächlich und primario von der geraden protensiven Länge, und deren Messung nach dem Radius, die Rede, und von dem Auswurf in Zalgröse, der Bestimmung des leztern gemäs. Man vergleicht also (3tens) ganz und gar unschicklich, wenn man die Fundamental-Beziehung auf zwo zanz verschiedene Einheiten vergißt, oder verwechselt, von welchen die eine der Umkreis, die andre der Radius ist. Nur auf jene weisen die Grade der Bögen, als Fragmente von 360 hin, auf diese aber die Sinus als Fragmente von 10 Mill. (4tens) wenn man sich endlich mit dem Gedanken trägt: „Weil in dem Bogen von 1 bis 90 Graden (von a bis h, Fig. 4.) Der Raum welchen z. B. die vordern 4 Gr. einnehmen, so gros, als der ist, welchen 86—90 einnehmen, so werde sich's mit den Sinussen eben so verhalten, und also

wenn

wenn der Sinus, als Perpendikel vorne, von a aus, von der Menge der Räumchen (von 10 Mill.) z. B. über vier, gegen dem Centrum zu, gerückt wäre, und damit einen gewissen Bogen (von 1° . . . hin) zurückgelegt hätte, so würde dem nehmlichen Weg, horizontal hin, nahe am Centrum gedacht, noch ein eben so groser Bogen entsprechen, (correspondiren,) oben nahe an h, wie vorne an a." — Diese Vorstellung, die beinahe jeden Anfänger plagt, und verirrt, ist grund-falsch. Der leztere Bogen ist ja immer viel kleiner, als der erstere; Ein Ruck des Perpendikels über 4 Mill. Theilchen vorne bei a, beträgt weit mehr oben am Bogen, als ein gleicher Ruck über 4 Mill. Theilchen, nah am Sinus totus. Man zeichne sich nur selber einen (der deutlichen Einsicht wegen, etwas grosen) Halbkreis, ziehe auf dessen Radius Perpendikel in gleichen Abständen, (etwa nur 4 oder 8 Sinus,) und sehe dann auf die Bogen hin. . .

Nur eine geringe Aufmerksamkeit wird jeden zur Ueberzeugung bringen, daß man sich einen ganz und gar verwerflichen Trugschluß erlaubt habe; und daß es daher auch im weitern Verfolg des Gedankens, ganz irrig sei, wenn man sich z. B. die Proportion als rechtmäsig einbildet: Sin. 30° : Sin. 45° = 5 Mill. : 746666, Sonst müßte ja auch eben so gültig die Proportion seyn,

Sin. 30° : Sin. 60° = 5 Mill. : 10 Mill. welches doch offenbar nicht seyn kann, indem wir ja schon wissen, daß nur dem Sin. von 90 Gr. oder dem Sinus totus = r, diese Grösse von 10 Mill. zukomme. . . .

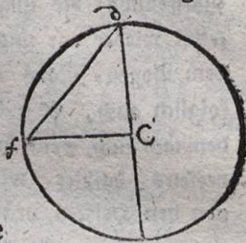
Anstatt das Räsonnement hier weiter fortzusezen, wozu noch Stoff genug wäre, last uns lieber sogleich unser Augenmerk auf den speciellen Fall richten, wie dann wirklich der so eben angeführte Sinus von 45°, richtig auscalculirt werde?

§. 4.

Durch die Seite des Sechsecks, die dem Radius immer gleich ist, hatten wir leicht, da wir sie als Sehne, und dann als halbe Sehne betrachtet hatten, den Sinus = $\frac{1}{2}$ r gefunden. Nun sei zur Sehne die Seite eines Vierecks ange-

angenommen, wo leicht=erachtlich 2 Radii recht=winklicht im Centrum zusammengestellt, und unter einen Bogen von 90 Gr. d. h. unter einen Quadranten die Chorde, df, gespannt wird. Sie

Fig. 6

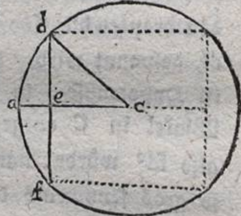


ist Hypotenuse, in so fern sie ja dem rechten Winkel in C entgegen steht; Ihr Quadrat also fd^2 würde, nach dem Pythagor. Theorem so gros seyn, als die Quadrate des Kathetus und der Basis, d. i. $fd^2 = fc^2 + dc^2$. Da aber hier der Radius die Basis, und auch den Kathetus vorstellt und ausmacht, (denn fc ist $= r$, und $dc = r$ ebenfalls,) so läst sich unstreitig als Aequival. sezen: $fd^2 = dc^2 + dc^2$, oder $= 2(dc)^2$; in Worten: Die quadrirte Sehne ist da so gros, als der quadrirte Radius doppelt genommen, oder 2 mal gedacht. Der Schluß von Quadraten, die gleich sind, auf gleiche Wurzeln ist aber notorisch=bündig; also ist sicher

$\sqrt{fd^2}$, d. h. $fd = \sqrt{2(dc)^2}, = \sqrt{2r^2}$, wodurch wir (durch einen regressiven Act der

Vorstellung) die unquadrirte Linien der Figur selbst wieder vor uns erhalten, in welcher fd dem Bogen-Maas von 90 Gr. correspondirt; folglich auch, $\sqrt{2\,dc^2}$. Ein gleiches mus sich demnach auch, wenn bee- derseits halbirt wird, von den Helften prädi- ciren lassen; es muß

Fig. 7.



$\frac{90°}{2} = 45° = \frac{fd}{2} = \frac{\sqrt{2dc}}{2}$, oder, die halbe Chorde, mus eben der Sinus von 45 Gr., und im Calkül so gros seyn, als die halbirte □ Wurzel aus zwei quadrirten Radien $= \frac{1}{2} \sqrt{2\,(dc)^2}$, in der Fig. 7 = dem Perpend. de.

Wird nun der Rad. cd = 1 genommen, so läßt sich, (da 1 nicht mult.) auch sezen: Sin. $45° = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ oder $= \frac{\sqrt{2r}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; und wenn die □ Wurz. aus der Zal 2 wirklich nach der Ordnung gezogen wird, (da bekanntlich herauskommt, $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$) hievon die Helfte,

$$\frac{1{,}4142136}{2} = 0{,}707168.\,r = \frac{\sqrt{2.\,r}}{2}.$$

Diese

Diese Decimal-Zifern, (deren erste ja $\frac{7}{10}$ ist) verwandeln sich aber in ganze Zalen, wenn man rad. = 10 Millionen nimmt, wo $(dc)^2$ = 100 Billionen, das doppelte aber oder $2\,(dc)^2$ = 200 Billionen sind; Hievon die □ W., giebt

$\sqrt{200000000000000} = 14142136\ldots.$

von welcher Gröse die Helfte: 707168, eben die Zal ist, welche sich in den natürlichen Sinustafeln findet, wenn man den Sinus von 45 Gr. aufschlägt.

Räsonnement
zu §. 4.

Wir kennen nun zwo halbe Sehnen, die sehr merkwürdig sind; die unter dem Bogen einer Hexagon-Seite, und die unter dem Quadranten, $\frac{r}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}\,.\,r}{2}$, in Rechnung. Wer sieht nun nicht ein, daß diese, als Grösen in ganz andern Verhältnissen erscheinen, als die einzelne Bögen von 30° und 45°, welche das geometr. Verhältniß, 2 : 3, gegen einander tragen? . . . Da sich die □ Wurzel weder

 aus

aus 2 noch aus 20, noch aus 20 Billionen jemals rein heraus ziehen låst, so erhellet schon für sich, daß da an kein vollkommen-richtiges Verhåltniß überhaupt gar nicht zu denken sei, und man also das Aequivalent von $\sqrt{\frac{2}{2}}$, als = 707168 ... gesezt, blos als eine Approximations-Gröse anzusehen habe. Aber auch, wenn sie für sich rein wåre, so bleibts doch dabei, wie schon oben gedacht worden, daß nimmer mehr von dem Verhåltnis zweier Bogen, (und deren verglichenem Maas in Graden,) auf das Verhåltnis zweier dazu gehöriger Sinus *) gegeneinander geometrisch geschlossen werden dürfe. — Man verbinde ferner die Ansicht des Kreises, mit einem Blick in die natürliche Sinustafel; man wird sich überzeugen, daß die Aendrungen der Sinusse immer kleiner werden, je nåher sie dem Ende des Quadranten, oder dem Centrum zurücken. Dem Sinus von 1 Grad gehört die Zal zu 174524; dem von 2 Graden die: 348995: Dagegen ist

Sin. 88° = 9993998.

Sin. 89 = 9998477.

Der

*) Sinus - d. h. auf den Ausdruck der leztern, in Theilen des Halbmessers ausgesprochen! . . .

Der grose Unterschied bei jenen ist einleuchtend, wenn man sie gegen diese hält, als welche in den drei höchsten Zifern, (999) sich noch ganz unverändert zeigen. . . .

Ich befürchte Tadel von denen, welche alles dieß schon långst wissen, und leicht gefaßt haben; jede Commentirung über diese Sůjets scheint ihnen wol überflüssig, weil so viele gute Bücher ohngefähr das nehmliche schon enthalten. Aber ich weis ganz gewis, daß man allerwårts über Dunkelheit und Kürze eben in Rücksicht auf den Vortrag dieser Säze klagt; und daß sie deshalb von vielen Tausend nicht verstanden werden, weil grose Mathematiker sich bisher gleichsam geschämt haben, hierüber ins Detail zu gehen. Ich weis, daß viele tausende gar nicht unfähige, noch auch sonst der Mathematik abholde, ja wol selbst in Geometrie bewanderte Männer mit Unwillen schon das Wort Sinus aussprechen, und aussprechen hören. Ich weiß, daß die Vorurtheile hierüber der Verbreitung des Studiums der Mathematik wesentlich schaden. . . Darum habe ich mir diese wenige Räsonnements dann erlaubt, und erlaube mir auch weiters dazu noch einen Wunsch, der in das Gebiet der Pädagogik einschlägt, (wo ja ohnedem bisher so vieles vergönnt war, zu wünschen!) daß doch unsre Jugend vermittelst schicklicher Modellen von Halbzirkeln und Quadranten frühzeitig mit mehreren der hierher gehörigen Vorstellungen möchten vertraut gemacht werden. Es könnten gar füglich mehrere Chorden und Perpendikel, z. B. auf Stäben mit Rinnen, angebracht werden, welche sich durch einen leichten Mechanismus schieben liesen, auch oben im Bogen neben den Graden von 1 — 90 eine Verzeichnung hätten für die Abstände und Längen der Sinus zugleich, welche wol dann jedes Kind von 8 bis 10 Jaren, vermittelst wiederholten Intuition, für das erkennen lernen würde, was sie sind. Es würde dadurch Begriffe ins Jünglings Alter schon hinüber tragen, von welchen man jezt beinahe erst im 25 bis 30sten Jahr etwas vernimmt. Ich bin gewiß nicht für frühzeitiges Alt-Klugmachen; aber geometrische Intuitionen, schiklich commentirt, — machen gewiß nicht zu früh alt-klug oder überweise... Die Einsicht eines grosen Gesezes

der

der Natur begleitet durchs ganze Leben, und wenn es wahr, simpel und einleuchtend zugleich ist, so erregt gar niemand Zweifel, daß es nüze und fromme, früh damit bekannt zu werden. Hier sind auch Natur-Gesezlichkeiten, simpel und gros, und überall wieder zu finden, und tausendfältig anwendbar. Warum zögerte man just bei diesen? und hielte es für bedenklich, sie nach Möglichkeit zu verbreiten? — Sie fördern zu gewissen Genüssen, so gut als irgend andere! —

Ohngefähr eben so sehe ich auch die Erkenntnisse an, welche man sich eigen macht, wenn man das Verhältniß des Halb-Messers im Kreis zu der Seite des Quadrats, des Dreiecks, des Fünfecks, des Sechsecks, des Zehnecks, u. s. f., welche in dem gegebenen Kreis beschrieben werden mögen, in welchem der Halb-Messer schon steht, erforscht. Diese Beschäftigung veranlaßt nach und nach sichre und sehr weit-führende Blicke in die grose Ordnung der Natur, und gewährt zuverlässig intellectuellen Genuß gar nicht gemeiner Art.... Wir sind bei der Auflösung der vorstehenden

Auf-

Aufgaben unvermerkt, (gleichsam nur unter-Wegs) bereits auf zwo leichte Entdeckungen, welche dahin gehören, gestosen, nehmlich auf die längst-bekannte Bestimmung des Verhältnisses, in welchem der Radius zur Seite des Sechsecks, und in welchem eben derselbe zur Seite eines Vierecks in einem gegebenen Zirkel steht. Das erstere Verhältnis war sehr simpel, $1 : 1$, oder $r : r$; Das zweite war um vieles schwerer zu übersehen, ja nicht einmal ganz genau bestimmbar: $r : \sqrt{2} . r$, wo in Zalen 10 zu 14 . . . . ., etwas genauer: 100 : 141 . . . ., noch genauer: 1000 : 1414 . . ., u. s. w., das, was zu gewünschter Vergleichung gesucht ward, wenigstens Näherungs-Weise, angeben konnte.

Nun wollen wir auf dem einmal betretenen Weg fortfahren, und die Seite eines Dreiecks in einem Zirkel mit dem Halbmesser des Cirkels in Vergleichung stellen. Die Folge dieser Erforschung wird (unter andern) seyn, daß wir dadurch einen neuen interessanten Sinus glücklich ans Licht führen.

§. 5.

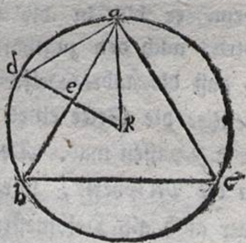
§. 5.

Das Problem heißt also:

„Das Verhältnis der Seite eines gleichseitigen „Dreiecks zum Radius des Kreises zu finden, „in welchem das Dreieck eingezeichnet steht."

Erläuterung. Der Radius ist als Zal-Gröse gegeben, und im Maas bekannt. Er steht in einem Kreis, in welchem die 3 Seiten des Dreieks drei gleiche Sehnen ausmachen müssen. Da ist nun die Frage: wie gros ist eine dieser 3 gleichen Seiten d. h. eine solche Sehne, gegen die Gröse des Radius zu achten? Weil das △, der Bedingung gemäs, gleichseitig ist, so ist es einerlei, welche Sehne man zur Vergleichung mit dem Halbmesser wählt. Laßt uns hier, der Zeichnung gemäs, die Sehne, ab, mit dem Rad. dk, in Betracht nehmen.

Fig. 8.



Auflösung. Aus den Anfangsgründen der Geom. ist bekannt, (auch giebts der klare Augenschein,) daß, so wie das Sechs-eck 6 Punkte im Kreis bezeichnet, welche sechs gleiche Bögen von 60 Gr. angeben, eben so das Dreieck 3 Puncte berühre, welche 3 gleiche Bögen von 120 Gr. angeben. Die Synthesis eines Kreises aus drei gleichen Bogen-Stüken, welchen drei gleiche Sehnen correspondiren, ist nicht anders gedenkbar, als:

$\frac{360}{3} \cdot 3 = 120 \cdot 3$. Ein solches Drittel ist demnach der Bogen, ab $= 120°$. Fällt man vom Mittelpunct aus einen Perpendikel, de, auf die Sehne, ab, so halbirt er dieselbe in e, und wenn er bis in die Peripherie fortgezogen wird, auch den zugehörigen Bogen von 120°, so daß die andre Helfte da $=$ 60° bleibt, zu welcher die Seite eines Sechseks (als Sehne $= r$) passen mus. Der Perpendikel, dc, bis an die Peripherie, wie gedacht, gezogen, ist aber auch als Halbmesser zu betrachten, d. h. dk $= r$; Und ak, vollends desgleichen. Also sind unverkennbar

dk $=$ da $=$ ak, jede Linie $= r$,

zusammengesezt zu einem notwendig-bestimmten gleichseit. Dreiek, (akd) je nachdem das bekannte im Kreis,abc, gros ist. Die grose Sehne, ab, ist

ist nun, als in e durch dk, den Radius, halbirt, auch = ae = $\frac{1}{2}$ ab zu bezeichnen. Dieser Radius, dk, aber wird dagegen reciprok von der Sehne, ab auch selbst in c halbirt, weil sie oben in a, gerade durch die Spize des gleichseit. △ hindurch (herunter ihrem Ziel in b zu) fährt, und in e als Perpendikel auf einer Basis vorstellbar ist, welche zu beeden Seiten gleiche Winkel führt *) Diese Halbirung berechtiget zu der Bemerkung folgender Gleichungen:

$$\frac{dk}{2} = \frac{r}{2} = \frac{da}{2} = ek = de,$$

in welchen kein Glied mehr, als die Helfte des Halbmessers, besagt. Eben, weil aber die Linie ae, senkrecht aufsteht, also einen (da ge-

*) Befriediget dieser Gedanke etwa noch nicht ganz, so ziehe man in Phantasie noch zwo Linien db und kb, jede = r., d. h. man verdopple das Dreieck, akd, so wird ein Rhombus daraus, in welchem ab, als Diagonale, doch gewis in der Mitte, c, (wo ihre Helfte ist,) einen Punct bezeichnen muß; welcher von d und von k ganz sicher gleich-weit abstehen wird, d. h. de = ek ist die halbirte Linie, dk.

gegenüberliegenden) rechten Winkel in e veranlaßt, so ist nothwendig da auch als Hypotenuse zu denken, welche also, quadrirt, ($da^2 = r^2$) die zwei kleinern Quadrate der zwo Linien, de, und, ae, zum Aequivalent haben muß; d. h. $da^2 = de^2 + ae^2$; woraus wir den quadrirten Perp. (oder den Sinus) ae^2, allein erhalten, als $da^2 - de^2 = ae^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2$. *)

Der

*) Der Anblick zeigt, daß de die Helfte des Radius, also $= \frac{r}{2}$ oder $\frac{1}{2} r$ sei. Eben diese Linie de aber, quadrirt gedacht, de^2, mus dann nothwendig im gegenseitigen Aequivalent heissen: $\frac{r^2}{4}$, oder $\frac{1}{4} r^2$. Das will Anfängern oft gar nicht in den Sinn. Aber einmal geschieht ja jeder Forderung, einen Bruch zu quadriren, blos in so fern ein Genüge, wenn Zäler und Nenner im Quadrat gesezt werden; wo dann aus $\frac{r}{2}$ im Qu. werden mus $\frac{r^2}{4}$. Zweitens bezeugts ja Intuition, daß ein Qu. auf einer gewissen Linie —— errichtet, , jederzeit 4mal so gros sei, als das Quadr., auf der Helfte eben

Der Bequemlichkeit wegen, heise nun fortan:

da, oder dk, $=$ r

Die grose Sehne, oder die Seite des grosen $\triangle$, (ab), die wir suchen, $=$ x

Deren Helfte, $\left(\frac{1}{2}\text{ ab, oder ae}\right)$ aber $= \frac{1}{2}x$

Wir haben allererst diese Helfte, (od. halbirte Sehne,) gleich als einen quadrirten Kathetus, angesehen; der Ausdruck $\frac{1}{2}x$ müßte also gleichfalls quadrirt gegeben werden, und da käme heraus:

$$ae^2 = \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{xq}{4} \text{ od.} = \frac{1}{4}xq.$$

Folglich stünden die Werthe nun so:

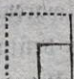
$$aeq = daq - deq$$

$$\frac{xq}{4} = rq - \frac{1}{4}rq = rr - \frac{rr}{4} = \frac{4r^2 - 1r^2}{4} = \frac{3.r^2}{4}$$

Multiplicirt man hiernächst in die schicklichste

Glei-

---

derselben Linie.  Der Nuzen dieser Vorstellung leuchtet gleich wieder bei x, und sodann noch ferner unzälige mal gewiß ein.

Gleichung, die einerlei Nenner hat, $\left(\frac{x^2}{4} = \frac{3r^2}{4}\right)$ beederseits mit 4, so bleibt $x^2 = 3.r^2$, zwei Quadrate, die auch auf die Gleichheit der □ W. schliesen lassen: $\sqrt{x^2} = \sqrt{3.r^2} = \sqrt{3}$; d. h. x allein, welches ja so viel ist, als $\sqrt{x^2}$, hat zum Aequivalent den unquadrirten Halbmesser, multiplicirt mit der □ Wurzel aus der Zal 3; oder : $x = r.\sqrt{3}$.

Die Mltct. mit dem Radius fällt in Zalen weg, wenn man $r = 1$ annimmt; Demnach bleibt blos $\sqrt{3}$ übrig, und x, die gesuchte Sehne oder Seite des Dreiecks, ab, ist erforscht, wenn man weis, was die Signatur $\sqrt{3}$ bedeutet. Die Qu. Wurzel aus 3 ist aber blos durch Näherung zu finden; und zwar ist sie bekanntlich (in Decimalen):

$$1{,}7320508 \ldots = 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} \text{ u.s.f.}$$

So hätten wir dann nun also ausgespäht, worauf wir uusgegangen waren. Das Verhältnis ist jezt entdeckt und bestimmt, so nahe hin wenigstens, als sichs bestimmen läßt. Ausgesezt heist die Proportion dann:

r:

$$r : \text{chord. } 120° = 1 : \sqrt{3}$$

$$dk : ab = 1 : \frac{ab}{dk}$$

Ganz dringend fließt daraus, daß, da dieser Werth für die ganze Sehne, ab, im Verhältniß gegen den Radius ($= 1$ genommen) gilt, für die halbe Sehne, oder für den Sinus, ac, $= \frac{1}{2}$ ab $= \frac{1}{2}$ x, auch die Helfte der Geltung statt haben müsse, d. h.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254\ldots = \frac{1}{2} x = \text{Sin. } 60°$$

Ich habe den lezten Ausdruck, ungerechtfertigt, wie es scheint, sogleich gesezt; Aber fließt er nicht evident aus der obigen deutlichen Vorausſezung, daß die Sehne, ab, od. x unter einem Bogen herlaufe, welcher 120 Grade des Kreises einnehme? Die Helfte der Sehne ist aber ja $= \frac{1}{2}$ x; also müssen derselben sicher $\frac{120}{2}$, oder 60 Gr. correspondiren, d. h. ihr, der halben Sehne des doppelten Bogens, oder dem Sinus, (der obigen Definition s. 25. gemäs,) welchem also auch schlüßlich keine andre Signatur, als: Sin. 60°, und in Zal Gröse

 kein

kein andrer Gehalt, als $\frac{\sqrt{3}}{2}$, zu kommen kann; *) welcher bemelte Sinus aber demnach auch als Quotient, und als viertes Glied einer geom. Proportion erscheinen muß, in so fern sich ja sezen läßt:

$$\text{Sin. tot.} : \text{Sin. } 60 = 1 : ae$$

$$\text{rad.} : \text{Sin. } 60 = 1 : \frac{r.\sqrt{.}3}{r.\ 2}$$

$$r : \frac{1}{2}x = 1. : \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$dk : ae = 1 : \frac{ae}{dk}$$

Räsonnement
zu §. 5.

Um in der ersten Ausforschung glücklich zum Zweck zu gelangen, oder um auszuspähen, wie gros die Seite des im Kreis beschriebenen Dreiecks

*) Nimmt man den Rad. nicht = 1, sondern 10 Millionen an, so folgt leichterachtlich daraus die halbirte Gröse der Qu. Wurzel aus 300 Billionen, mit 8660254, d. h. eben die Zal, welche in den Tafeln bei Sin. 60° sich vorfindet.

ecks gegen den Halb Messer des Kreises sei? verfährt man also zuerst regressiv, und stellt blos die Helfte dieser Seite, $\left(\frac{1}{2} ab\right)$ durch Construction eines (vorhin = nicht vorhandenen kleinern) Dreiecks, akd, in neue Beziehungen.

Dieses kleinere △ ist, so bald es dasteht, gleichsam in dem Moment seiner Genesis selbst schon, getheilt in 2 rechtwinklichte Dreiecke, △ ade, und aek; die halbirte Sehne $\left(\frac{1}{2} ab\right)$ ist in beeden Hypotenuse, der Radius in beeden Kathetus. Diese Bemerkung hälfe uns aber noch nichts, wenn wir nicht auch für die Basis, eben dieses kleinern Dreiecks einen Ausdruck ausfindig zu machen wüßten, welcher sich abermals auf den gegebenen Radius bezöge, — oder, (noch stringenter,) welcher in beeden ihre Basis, als bestimmten Theil des Halb Messers, als evidentes Fragment von r, darstellte. Im Ensemble wissen wir wol, daß sie der Radius (synthetisch) beede zusammen ausmacht. Aber, daß sie gleich, daß sie aus einer Theilung zur Halbschied entstanden seien, mußte bewiesen werden; und dieß ward bewiesen, ich meine erst ganz vollständig durch meine in der Note S. 47. angeschlossene Bemerkung. Wir wurden überzeugt, daß die Basis in jedem dieser kleinern Dreiecke $= \frac{1}{2} r$ sei. Nun geht wieder alles auf die Linie $\frac{1}{2}$ ab, los; sie wird, als halbe Sehne, und als Kathetus, quadrirt; also ist da das Verfaren ein progressiver Act, gleichsam eine Erhöhung ad interim, um zu erfaren, in welcher Gestalt ae, vervielfacht, erscheinen möchte? Sie zeigt sich als $\frac{x^2}{4} = \frac{3 \cdot r^2}{4}$, nemlich als quadrirte halbe Sehne, und als quadrirten Kathetus, eigentlich als das Aequivalent desselben, im Quadrat, gesezt; $\left(d a^2 - de^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2\right)$.. Künstliche Ehre ist aber von kurzer Dauer; man nimmt die Dignität, welche man dem Object der Prüfung $\left(\frac{1}{2} ab\right)$ nur versuchsweise hatte angedeihen lassen, schnell wieder hinweg; und so stehen in der Blöse die unerhöhte Wurzeln da: $x = r. \sqrt{3}$; d. h. die simple ganze Sehne, ab, in einem aequivalenten Werth, wel-

welchen eine von dem bekannten Halbmesser hergenommene Zal-Gröse ausdrückt. Mit andern Worten: die Sehne ist mit dem Maasstab des Radius ausgemessen, und das gesuchte Verhältnis entdeckt.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß zu dieser demonstrativen Erkenntnis, zu welcher wir somit durchgedrungen sind, Zurükführung auf Einheit der Benennung, (Reduction unter einerlei Nenner,) Verwandlung in Gleichartigkeit, wesentlich erforderlich war, wie sie es zu allen ähnlichen auch tiefer versteckt-liegende Erkenntnissen immer ist. Schüchtern beziehe ich mich hier auf Blätter meiner eigenen Production, in welchen ich umständlich hievon gehandelt habe. Jede Selbst-Citation hat beinahe etwas anstösiges; Aber, sollte ich hier wohl blos wieder abschreiben, was dem Publicum schon einmal mitgetheilt ist? . . . Ich verweise also nur auf §. 20. und §. 56. 57. meines Versuchs, der Einrichtung unsers Erkenntnis-Vermögens durch Algeber nach zu spüren. —

Uebrigens bemerkt man wol ziemlich bald, wo in der Auflösung unseres Problens die geometrische Construction, die für das Auge geführt war, gleichsam dem Blick entgeht, und dem Geschäft des Algebraikers, der weiter hin (bis ans Ende der Erforschung) auf keine Figuren=Zeichnung Rücksicht nimmt, weichen mus. Man hefte seine Aufmerksamkeit nur auf die Stelle, wo die Gleichung

$r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{x^2}{4}$ eintrit; und man wird leicht wahrnehmen, daß sich von da aus blos fort=calculiren läßt, bis die Geltung zu x herauskommt; Leichte Formeln=Wendungen führen alles zum Ziel, ohne daß schlechterdings notwendig wäre, neue Hülfs=Linien zu ziehen, und durch erweiterte Zeichnungen die Vollendung des Beweises zu verfolgen.

Aber dieß könnte doch geschehen! Man könnte, in gleichem Schritt hin, graphisch verfaren, wie man nun blos algebraisch verfährt. Seit Des Cartes Zeiten haben sich wirklich verschiedene geschikte Mathematiker bemüht, die Thunlichkeit dieses Geschäfts darzu=

tun,

tun, und allerlei Anschläge, auch mitunter manche wirklich gute Mittel angegeben, wie man algebraische Gleichungen geometrisch construiren könne. Es ist aber unter sehr grossen Männern viele Disharmonie über die Schiklichkeit und den Nuzen dieser Bemühungen entstanden, die noch nicht beigelegt ist. Sehr lesenswürdige Bemerkungen hierüber trägt der scharfsinnige Hr. Prof. Schwab von Stuttgart in einem besondern Aufsaz vor, welchen er seiner Uebersezung von Euklids Datis mit der Aufschrift: Gedanken über die Analysis, vorgesezt hat. — In der Folge etwas mehr hievon! Ich errege hier blos Aufmerksamkeit auf dieses interessante Süjet!

Sobald das Verhältnis der ganzen Sehne zum Radius gefunden ist, so ist der regressive Act des Verstandes spielend-leicht, auch das Verhältnis der halben Chorde, oder des Sinus zum Radius, (durch simple Halbirung) zu bestimmen; und so kommt:

$\text{Sin. } 60° = \frac{r.\sqrt{3}}{2}$ evident heraus. . . .