Werk

Titel: Räsonnements über wichtige Anwendungen der Algeber in Geometrie und Trigonometrie...

Autor: Schübler, Christian Ludwig

Ort: Leipzig

Jahr: 1788

Kollektion: vd18 digital; mathematica

Gattung: Geometrie

§. 6

Wenn man das Verhältnis einiger Polygon-Seiten zum Radius glücklich erforscht hat, (wie uns dieses in den vorigen Blättern, ich meine, leicht genug geglückt ist,) so stellt sich ziemlich natürlich ein Verlangen ein, (worauf schon oben hingedeutet worden,) diese Ausspähungen fortzusezen, und der Gedanke, nach der Reihe, wo möglich die Verhältnisse der Seiten des Fünfecks des Siebenecks, des Acht-Ecks, des Neun — des Zehnecks u. s. f. zum Halbmesser ebenfalls bestimmt zu kennen, hat, meines Bedünkens, schon für sich einen gewissen Reiz, der wohl werth ist, daß man für seine Befriedigung sorge. Aber diese Befriedigung kostet doch um etwas mehr Mühe, als man anfangs ahndet. Man versinkt dabei in tiefe Rechnungen, welche die sonstige Freude an der Analysis oft sehr auf die Probe stellen. Dennoch gelingts dem fleisigen Späher. Die Bekanntschaft blos mit ein paar algebraischen Hauptsäzen, deren wir bisher noch nicht erwähnt haben, erleichtert sonderlich seine Arbeit, auf allen Seiten; und diese Bekanntkanntschaft hilft ihm wirklich allzuoft durch, als wirs umgehen könnten, uns dabei geflissentlich einige Blätter hindurch zu verweilen. —

Es läst sich wol bald begreifen, daß, wenn irgend ein Raffinement eine allgemeine Formel ausfindig gemacht hätte, „nach welcher man in jedem Fall, so oft nur das Verhältnis der Seite eines Vielecks (zum Radius) gegeben wäre, unverzüglich das Verhältnis der Seite des verdoppelten *) Vielecks erkennen würde," hiedurch ein ausserordentlich-oft anwendbarer Vortheil geschaft, oder eo ipso vorhanden seyn müßte, mit Gleichförmigkeit unzählig-viele Polygon-Seiten schnell gegen den Halb-Messer zu bestimmen. Eine solche allgemeine Formel ist nun wirklich bereits gefunden, und ihre Richtigkeit unumstößlich erwiesen; Ich stelle den Proceß im Detail so vor:

Die doppelte Menge von n Seiten einer Figur, ist: n + n, oder: 2 n Seiten eines

*) Verdoppelten V. — z. B. wenn die Seite eines Dreiecks bestimmt-gegeben wäre, daraus die, des Sechsecks, und aus dieser, die des Zwölfecks zu kennen, u. s. f.

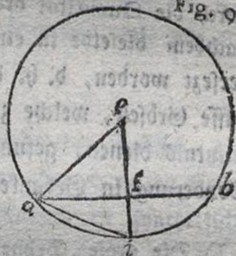
nes Polygons, (das natürlich also auch noch so viel Winkel hat.) Die Seite eines Vielecks von n Seiten sei nun gegeben, nicht nur als anschauliches Object, sondern auch als Zal-Gröse, gegen den Radius = 1 im Verhältnis bestimmt, und C benannt; Da heist nun die Frage: wie findet man hieraus die Seite eines Vielecks, das noch so viel Seiten, als das gegebene, hätte, ebenfalls in einer Zal-Gröse, dem durchaus bleibenden und fest-bestehenden Verhältnis des Radius (gegen die bekannte Seite) gemäs? Man sehe die Figur an! Die Sehne, ab, sei die gegebene Gröse eines Vielecks von n Seiten, und heise als Zal-Gröse: C. (z. B. wenn das Vieleck ein Quadrat wäre, so wäre C = r. $\sqrt{\ }$ 2; und n Seiten wären = 4 Seiten.) Hieraus dann, die Gröse der Seite, (ai), eines Vielecks von 2 n Seiten, *) als homogene Zal, zu finden, wäre die Aufgabe. Als ausgedehnte Länge für Intuition ist die Sehne, ai, (als zur Helfte des Bogens gehörig, welchen die gegebene Sehne

ganz

*) Dem erst angenommenen Beispiel gemäs, wären da 2 n = 2. 4. d. h. 8 Seiten.

ganz einnimmt,) gar leicht in Zeichnung darzustellen. Aber in dem Moment, in welchem sie gezeichnet da steht, ist sie doch sicher, als Zal-Gröse bestimmbar, wie die gegebene grose Sehne, als C, schon bestimmt ist. Diese ihre Zal-Gröse nun genau zu eruiren, ist das vorseiende Geschäft des Analysten .... Sie heise allgemein, (dann einen Namen mus sie doch als Zal-Gröse haben) = Z, wie sie uns in Zeichnung ai heißt. Was wird dieses versteckte Z seyn?

Fig. 9.



ab = C
ai = Z

Auflösung.

Man fällt einen Perpendikel vom Mittelpunct des Kreises, e, aus, auf die gegebene Seite oder Sehne, ab; und zieht ihn fort bis an die Peripherie. Nothwendig entstehen dadurch r e c h t e Winkel zu beeden Seiten, um f; Die ganze Linie, ei, selbst aber ist ein Radius,

da

da sie bis an den Umkreis reicht. Man ziehe noch einen, ae, bis au den Grenz-Punct der gegebenen Sehne; so ist ae = ei = beede = r.

Nun wird die gesuchte Gröse von ai, oder: Z, durch die Quantität dreier verschiedenen Linien, nachdem dieselbe in einen schicklichen Ausdruck versezt worden, d. h. durch Beziehung auf gewisse Grösen, welche zur Vermittlung der Erkenntnis dienen, gefunden. Hiezu ist folgende Sonderung in Gedanken erforderlich:

1) Die grose Sehne, ab, = C, wird als Helfte gedacht: $\frac{1}{2}$ ab = $\frac{1}{2}$ C, und diese Helfte wird quadrirt gesezt; wo sie dann (obiger Vorstellung §.48. gemäs,) = $\frac{1}{4}$ C^2 heisen, und auch, als Zal-Gröse, verständlich seyn mus, weil die Linie, ab, selbst als Gröse gegeben ist, und C eine bekannte Zal vorstellt.

Offenbar ist diese halbirte Sehne Kathetus in dem rechtwinklichten Dreieck, in welchem ai, oder Z selbst, Hypotenuse ist, wenn alles quadrirt

drirt wird, d. h. $ai^2 = \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 + fi^2$

$$Z^2 = \frac{1}{4}C^2 + fi^2.$$

Da wäre dann wol der Werth von Z selbst schon gar deutlich bestimmt, wenn wir nur fi ebenfalls als Zal-Gröse kennten, wie wir C, als solche, kennen

II) Dieses fi ist ein Stück des Radius, ei, das fließt evident aus der oben bemelten Construction, und dieser Radius ist synthetisch $= ef + fi$; folglich, fi selbst auch, als Differenz vorstellbar $r - ef$, also wol
$fi^2 = (r - ef)^2$. Allein was ist ef, als Zal-Gröse? . . . heißt die weitere Frage. Auf die Antwort hierauf kommt alles an:

III) ef ist Basis in dem obern rechtwinklichten Dreieck, a ef, dessen Hypotenuse der Radius, ae, selbst ist, und in welchem als Kathetus, unser bekanntes C ebenfalls vorkommt. Demnach wenn quadrirt worden,

wird

wird $ef_2 = ae_2 - \frac{1}{4} C^2$

d. h. $ef^2 = r^2 - \frac{1}{4} C^2$

Also unquadrirt: $ef = \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$

Es ist demnach blose Substitution, wenn für fi, oder für $r - ef$, geschrieben wird:

$$r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} = fi$$

Da aber nicht fi, sondern das Quadrat davon in dem gebildeten Gleichungs Saz vorkam, so tritt bei beiden Aequivalenten zu fi^2 das Geschäft ein, eine zweitheilige Wurzel jezt förmlich zu quadriren — *)

Dieß geht so zu: $r - ef$ ist im $\square$ zu denken, und $r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ ebenf. im $\square$

Da wird: $(r - ef)^2 = rr - 2\,r.\,ef + ef^2$,

Zum Aeq. für $\left(r - \sqrt{r - \frac{1}{4} C^2}\right)^2$ kommt aber

$= r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} + r^2 - \frac{1}{4} C_2$

Die-

*) Man mus hiebei immer an die bekannte Formel denken: $(a - b)^2$ ausgesezt als: $= a2 - 2ab + b2$.

Dieses lezte so entwickelte Quadrat, als Aequivalent für fi^2, enthält nun lauter bekannte Grösen, welche sämmtlich gleichsam mit dem Maasstab des Radius gemessen sind. Denn auch von C und C^2 läst sich dieses behaupten, da ja gleich anfangs genommen worden, das Verh. von ab, oder C, zum Halb-Messer sei als bekannt voraus-gesezt. Nehmen wir nunmehr wieder die obige ganze Gleichung

$Z^2 = \frac{1}{4} C^2 + fi^2$, od. $\frac{C^2}{4} + fi^2$, vor die Hand,

und rücken den eben jezt gefundenen Werth für fi^2 nur ein; so erhalten wir ganz sicher Z^2 so viel als:

$$= \frac{C^2}{4} + r^2 - 2\,r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{C^2}{4}\right)} + r^2 - \frac{C^2}{4}$$

freilich eine Reihe gehäufter Signaturen, über welchen das Auge ermüdet, oder nahezu irre wird. Der Wunsch, die Formel abzukürzen, ist daher natürlich; und er kann einigermasen befriediget werden, weil $\frac{1}{4} C^2$ (vornen) positiv, und am Schlus negativ vorkommt, also ganz entbehrlich wird: Daher mus dann auch eben so gültig seyn:

$$Z^2 = r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} + r^2$$

$$\text{oder: } 2r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)},$$

$$\text{auch} = 2r^2 - 2r. ef.$$

Weil aber endlich die Aufgabe selbst nicht so wol Z^2, als Z allein verlangt, so ist die Qu. Wurzel beederseits abzuziehen, oder bei allgemeinen Zeichen, blos mit $\sqrt{}$ anzudeuten:

$$\sqrt{Z^2} = Z \text{ ist} = \sqrt{\left(2r^2 - 2r. \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} C^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(2r^2 - 2r. ef)}.$$

Alles kam also durchhin darauf an, ef, als $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} C^2)}$, sich immer deutlich vorzustellen, zu welcher Reduction eine leichte Anwendung des Pythagorischen Lehrsazes verhelfen muste.

Die Gültigkeit der gefundenen Formel bestätiget sich nun in jedem Zalen-Exempel, das man aufgeben mag. Da oben schon des Achtecks erwähnt worden, in so fern man dessen Seite aus der Gröse der Viereck-Seite, (als Zal) soll finden können, so wollen wir nun

se-

sehen, wie unsre eruirte Formel hiezu behülflich ist.

In der Kästnerischen Analys. endlicher Grösen (§. 160) heist es ganz kurz:

„Die Seite des Vierecks ist r. $\sqrt{2} = C$, also: $Z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2} r^2\right)}$
$= 2r^2. \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$." *)

Der Langsdorfische (sonst gewis sehr verdienstliche) Commentar schweigt auch ganz bei dieser Stelle. Um so weniger überflüssig wird folgende Auseinandersezung seyn:

Wir wissen (aus obigen Erörterungen,) daß die Seite des Vierecks im Kreis, im Verhältnis gegen den Radius, als Zal-Gröse $C = r\sqrt{2}$ sei. Nun heist der Fall: Diese Seite sei für

*) Ich seze C, wo durchgehends, f, in den Kästnerischen §§. vorkömmt; weil mich dünkt, man verwickle sich in Ausdrücken, wenn man den einzelnen Durchschnitt-Punct in der Sehne, ab, wie die Fig. zeigt, f, nennt, also auch die halbe Sehne af u. s. f. und doch auch die ganze Sehne unter f verstehen soll.

das bekannt und gegeben; daraus werde aber erwartet, Z, oder die Seite des Achtecks, zu eruiren. Dem obigen Ideengang gemäs, mus man sich die Gleichung, $Z^2 = \frac{1}{4} C^2 + fi$, wieder vorstellen, in Ausdrücken vom Halb-Messer hergenommen, $= 2 r^2 - 2 r . \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ und da wird man bald bemerken, daß gegenwärtig aus unserer Grösse $r . \sqrt{2}$ werden mus, was aus C (allgemein) wurde. Die Helfte von C aber, quadrirt gesezt, war $\frac{1}{4} C^2$, und die Helfte von $(r . \sqrt{2})^2$ wird seyn =

$$\frac{r . \sqrt{2}}{2} \text{ im } \square = \frac{r^2 . 2}{4} = \frac{1}{2} r^2$$

so daß in unsrem Fall, die Formel

$$2 r^2 - 2 r . \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} \text{ gälte}$$

$$= 2 r^2 - 2 r . \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2} r^2\right)}$$

Da aber der Radius = 1 angenommen wird, hier also $r^2 = 1^2$ ist, 1 aber auch in jeder höhern Potenz, doch nur = 1, (ohne Exponenten) vorstellt und beträgt; so wird dadurch die angezogene Formel gar sehr einfach:

nehm-

nehmlich: $2r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2} r^2\right)}$

$= 2 - 2. \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$; auch

weil $1 - \frac{1}{2}$, so viel, als $\frac{1}{2}$ od. $\frac{2}{4}$ schlechthin ist,

$= 2 - 2. \sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)}$ auch *) $= 2 - 2. \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\right)$

u. hierdurch erhalten wir sicher zur Gleichung:

$= 2 - \frac{2. \sqrt{2}}{2}$ d. i. $2 - \sqrt{2}$ indem ja $\frac{2}{2}$ im Bruch entbehrlich wird **). Darauf ist dann blos zu subtrahiren:

$2 - \sqrt{2} = (2 - 1{,}4142135659..)$

E 3 d. h.

---

*) Weil das $\sqrt{}$ Zeichen: Zäler und Nenner afficirt.. Mit dem Nenner $\sqrt{4}$ wird man demnächst leicht fertig. Er ist $= 2$.

**) Dieses kommt dann nun mit dem Kästnerischen Ausdruck $2r^2. (1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ überein. Dann dafür läst sich ja schreiben: $2r^2 - 2r^2 \sqrt{\frac{1}{2}}$ d. h. wenn r^2, als $= 1$, weggelassen wird:

$= 2 - 2. \sqrt{\frac{1}{2}}$, welches wir so eben entwickelt sahen, als: $= 2 - \sqrt{\frac{2}{1}}$ $= 2 - \sqrt{2}$.

d. h. = 0,5857864341 ... ist = Z^2; Folglich hiemit die Seite des Achtecks, wenn sie quadrirt würde, als Verhältnis-Zal (gegen den Radius) gefunden; Wird aber demnächst die Seite, simpel od. unquadrirt, d. h. Z allein, verlangt, so ist aus der vorhandenen Decimal-Gröse nur noch die Qu. Wurzel auszuziehen. Diese ergiebt sich, als
= 0,76536. = $\sqrt{}$ 0,5857864341, und so ist alles aufgelöst und im Reinen. *)

Bei-

---

*) Wer nachrechnet, wird in den lezten Zalen dieser Decimal-Grösen kleine Verschiedenheiten bemerken, welche von der Erstreckung des Geschäfts beim Wurzel-Ausziehen herrühren, wie weit man nehmlich, über 7 oder 8 Decimal-Stellen fort calculirt. — Ich habe geflissentlich die □ W. aus 2 bis auf 10 Decim. ausgezogen; sonst hätte ich den Beisaz wegen des Sinus sehr schlecht erweislich machen können. Ich würde nehmlich, wenn ich die S. 39 angeführte $\sqrt{2}$ blos mit 8 Decimalen beibehalten hätte, nicht 5857864341 (aus 2 — $\sqrt{2}$), sondern eine nur in den vordern Ziffern hiermit übereinkommende geringere Zal erhalten haben; Aus der geringern Zal hätte dann auch

Beisaz. Die Sehne, welche hiemit berechnet worden ist, steht im Kreis notwendig unter einem Bogen von 45°, weil ja $\frac{360}{8} = 45$, und 8 gleiche Sehnen im Acht-Eck vorhanden sind. Die halbirte Sehne dieses Bogens ist ein Sinus und zwar: Sin. 22 Gr. 30 Min... Und siehe da! wenn unsre Zal: 0,76536.... halbirt wird, so bleibt noch eben die Zal-Gröse, welche man in den Tafeln bei: Sin. 22° 30′ antreffen wird: 0,38268... (nur, daß die Nulle vor den Zehntheilchen aus oben berührten Gründen wegfällt, in sofern r = 10 Mill. angenommen wird.)

auch die Wurzel nicht 76535 heisen können; Folglich würde sich auch der Sinus nicht ergeben haben, wie er doch in den Tafeln steht, als 38268...

Auch bei der □ Wurzel aus 3, die man im 2ten Beispiel ausgezogen antrift, ist diese Bemerkung zu wiederholen. Man versuche es nur, und lege selbst Hand ans Werk; so wird man gar schnell finden, daß man mit $\sqrt{3}$, wie sie oben §. 50 angegeben ist, hier durchaus nicht zur Genüge ausreicht.

Noch ein Beispiel, vom Sechs-Eck hergenommen, läst sich jezt kürzer durchführen: Die gegebene Seite, C, ist darinn der Gröse des Radius gleich, $C = r = 1$. Die Seite des Zwölf-Ecks soll daraus gesucht werden, so ist da $ef = \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ so viel, als: $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$; welches abermals als: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$ od. $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ zu betrachten ist. Nun seze man die ganze Formel gehörig durch Substitut. aus: $2r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} = Z^2$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Die $\square$ Wurzel aus 3 ist also von 2 abzuziehen:
$2 - 1{,}7320508099\ldots$
$= 0{,}2679491901\ldots = Z^2$

Da wäre also die Seite des Zwölf-Ecks, quadrirt, gefunden Demnach unquadrirt:
$\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ d. h.
$\sqrt{(0{,}2679491901)} = 0{,}51763\ldots = Z,$
Die simple Sehne, Z, oder die Seite des Zwölf-Ecks ist folglich, im Verhältnis gegen den Radius, ebenfalls eruirt.

Beisaz. Zwölf gleiche Sehnen theilen den Kreis in $\frac{360}{12}$, od. in 30 gleiche Bogen Stücke ab; oder, die Seite des Zwölf-Ecks läuft unter einem Bogen von 30° her. Halbirt man diese Chorde, so hat man:

$$\text{Sin. } 15° = \frac{051762. \ldots}{2}$$

In den Tafeln hat dieser Sinus die Zal: 25881. . . . . . wodurch sich die Richtigkeit des Calkuls bewährt. — (Von den alleräussersten Näherungen ist anderwärts die Rede.)

Räsonnement
zu §. 6.

Es bleibt immer ein widriges Schicksal für Algeber, daß ihre gehäufte Signaturen so abschreckend sind, daß der blose Anblick ihres Kleids oder das Aussehen ihrer Tracht das Vorurtheil gegen sie erregt, sie sei auch im Innern abgeschmackt, und widersinnig. Alle Unkundige sprechen so, und auch, wer Lust an ihr hat, mus eingestehen, daß eine lange Reihe von blos zusammengeketteten Buchstaben und Brüchen beschwerlich durch zu laufen sei.

Aber es ist dem Uebel doch kaum abzuhelfen; jedes andre vorgeschlagene Mittel verleitet zu Weitläuftigkeiten, welchen der Rechner ein für allemal feind bleibt. So bald mehr, als ein Buchstabe für eine Gröse, die oft im Calkul vorkommt, gewählt wird, so werden die Glieder in den Gleichungen zu gedehnt, und wollen nicht mehr für eine Zeile zureichen; darüber geräth man in noch undeutlichern Ausdruck, als man vorher vermeiden wollte. — Indessen scheint es mir doch immer, (ich habe auch darüber mit mehrern verständigen Männern gesprochen,) daß im Räsonnement selbst Haupt-Grösen nicht nur mit Buchstaben, sondern mit ganzen Namen, und zwar, wo möglich, mit bizarren oder auffallenden Namen belegt werden sollen. z. B. über die gegebene Sehne, C, würde unter dem Namen; Comus u. über die gesuchte Z, unter dem Namen: Zeno, in der laufenden Rede, weit eindrüklicher gesprochen werden können, als wenn man wie gewöhnlich, nur, c, und z, sezt. Aber, „was hat dann Comus mit Zeno zu thun?" (läßt sich wohl dagegen vorbringen,) man darf ja doch keine Neben-Begriffe damit verbinbinden?" .... Ich weis wohl, daß sich darüber spotten, auch gleich, als pro aris & focis, für die alte kurze Buchstaben Signatur, fechten läst; Allein, wenns dann doch einmal so ist, daß einer, dem ich gesagt habe: „Diese Linie soll Comus, oder Chabrias, oder Nimrod und diese andre da, Zeno, od. Zaddok od. Saba heisen," so oft ich weiterhin wieder auf die nehmliche Linien zu reden kommen, und sie abermals mit den bemelten ganzen Namen ausspreche, daß (sage ich,) mein Schüler oder Unterredner mich besser versteht, und der rechten Vorstellung sich jedesmal schneller erinnert, als wenn ich immer blos von c und z spreche, warum sollte ich dann die Namen nicht vorziehen? — Vielleicht, weil ein alter, (sonst ehrwürdiger) Mathematiker oder ein strenger Recensent mich seltsam schelten möchte? oder, weil mir das Beispiel sehr groser Männer entgegenstünde, welche seit hundert Jaren nicht für gut fanden, sich so weit herabzulassen? ... Dergleichen Befürchtungen sollten mich nicht abhalten, mein für besser erkanntes Mittel zur Verständlichkeit wirklich bei jedem Anlaß in Ausübung zu bringen,

gen, — wenn nur mehrere Mathematiker desfalls auch einverstanden würden, auf ähnliche Weise sich auszudrücken. Dann einer allein isolirt, kann da nicht viel fördern, wenn er nicht schon allgemein, als Matador in einer gewissen Scienz anerkannt ist.... Indessen werde ich es doch hie und da wagen, meiner einzelnen Ueberzeugung zu folgen.......

Was unsern §. 61-65 geführten Haupt-Beweiß selbst anlangt, so wird nun wohl deutlich seyn, daß allein die Vorstellung des Radius an zwo Stellen, ae, und ei, und der Gebrauch in der ersten, als Hypotenuse, in der zweiten als Synthesis von 2 Grundlinien zu 2 rechtw. Dreiecken, die Erkenntnis vermittle, und das gesuchte Verhältnis an den Tag bringe. In der That geht wiederum auch hier, (wie oben §.) eine Reduction unter einerlei Benennung, oder Zurückführung auf Gleichartigkeit vor. *) Der progressive Act, den man hiernächst

*) Die Linien, cf, und fi, müssen bestimmte Fragmente von der schon bestimmten Gröse des Radius werden, welches regressiv zugeht.

nächst durch Quadrirung vornimmt, ist gleichsam nur die lezte Bereitung (adaptatio) zur unmittelbar-folgenden Auflösung, weil sich ewig von gleichen Quadraten auf gleiche Wurzeln schliesen läst. — Daß die grose Sehne, ab, selbst, (Comus) als gleichartig mit der Radius in Gröse, anzunehmen, und nach ihm ausgemessen sei, (als 1 : $\sqrt{2}$), ist längst dargetan.

Uebrigens ist nicht zu leugnen, daß es für den menschlichen Verstand mit einiger Beschwerlichkeit verknüpft ist, für den simpeln Ausdruck einer Gröse den complicirten Ausdruck einer Differenz-Gröse (wie fi = r — ef,) sogar oft annehmen, und damit gleichsam manövriren zu müssen. Allein, daß man durch Unterschiebung von dergleichen Aequivalenten zu den wichtigsten Entdeckungen hindurch dringe, ist doch einmal unwidersprechlich gewiß; und daß unsäglich oft gar kein andrer Ausweg, zu einem vorgesezten Ziel zu gelangen, übrig-vorhanden sei, ist ebenfalls ohnzweifelhaft. — Ein paar Zeilen des grosen Algebraikers, de Crousaz enthalten sehr viel, was hierher gehört, in gedrängter Kürze:

Un des grands Soins d'un Algebriſte est: de s'accoutumer, à *Subſtituer un Signe à un autre*, (doppelter Zweck) (1) ou, afin de rendre les Calculs moins chargés de lettres, (2) ou, pour faire en ſorte, que les divers Membres, qu'il compare, paroiſſent exprimés ſous de mémes lettres. (S. ſein Traité del'Alg. ſ. 189).

Von beeden Hinſichten, und Erfolgen zeugt auch unſer Fall: Durch die gedachte Subſtitutionen kam nach und nach alles unter die Benennung des Halbmeſſers; Und, wenn gleich durch Annahme der Signatur $r^2 - \frac{1}{4} C^2$, für ef, eine Gleichung zu Z^2, ſ. 65 anfangs zum Vorſchein kam, welche wirklich chargée de lettres heiſen kann, ſo erhielten wir doch eben ſelbſt durch Einrückung dieſer Differenz-Formel $r^2 - \frac{1}{4} C^2$ Anlaß, die ganze Gleichungs-Gröſe ſofort gar ſehr abzukürzen, einmal, wegen der Selbſt-Deſtruction von $\frac{1}{4} C^2$, fürs andre, wegen jezt erſt tunlicher Zuſammenſchmelzung des $r^2 + r^2$ in $2\, r^2$; wodurch allerdings ein calcul moins chargé de l, glücklich

er-

erzielt wurde. In dem Beispiel zum Acht-Eck läst sich desfalls auch die Geichungs-Grö-se: $2 r^2. (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ treffend hier anfüh-ren. Es muste eine andere vorher umständlich ausgesezt werden, nehmlich

$2 r^2 - 2 r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{2} r^1)}$, welche man so-dann nach und nach als $= 2 - 2 \sqrt{\frac{2}{4}}$ ken-nen lernte, und endlich gar auf: $2 - \sqrt{2}$, degagiren konnte. Das sahe man wohl gewiß anfangs der complicirten Gröse nicht an, . . . daß man auf eine so simple Signatur hinaus kommen würde, und dennoch gelang es, eben durch geschikten Gebrauch des Stücks der For-mel: $r^2 - \frac{1}{4} C^2$. . . . . .

§. 7.

Da man die Formel gefunden hatte, wenn C, als Seiten Gröse zu einem Vieleck von n Seiten gegeben war, daraus die Seiten-Grö-se eines Vielecks von 2 n Seiten, (Z) zu fin-den, so wagte man nun bald auch regres-sive Versuche, welche nicht weniger gelangen.

Man

Man suchte aus Z, als gegeben gedacht, *) die Gröse, C, zu finden; (z. B. aus der Seite des Sechsecks die des Dreiecks, aus der des Zehnecks die des Fünfecks;) und eruirte zu künftigem Gebrauch in allen Fällen die allgemeine Formel hiezu so: Zuerst wurde für Z, oder auch, für Z^2, die gegebene quadrirte Seiten-Gröse, (Zeno) hier wieder substituirt, und der Form nach als bekannt (I) gesezt:

$Z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}C^2;\right)}$ aber wohl zu merken, dem Gehalt noch, war die zusammengesezte Gleichungs-Gröse nur bis $\frac{1}{4}C^2$, bekannt; eben C sollte ja erst eruirt werden, also wol auch $\frac{1}{4}C^2$; darauf ist ja die ganze Aufgabe gerichtet. Blos formal steht demnach C unter bekannten Grösen drinnen

*) Da gieng man also vom kleinen Zeno aus, und suchte bis zum grosen Comus zu kommen; d. h. von der Seiten-Gröse einer Figur von 2 n Seiten schritte man zu der S. Gr. einer F. von n Seiten. Vorher wars umgekehrt! ...

nen, der numerische Werth desselben ist aber erst zu bestimmen. Da mußte dann der Algebraiker allem seinem Scharfsinn aufbieten, um C zu isoliren, d. h. es ganz **allein** zum Glied einer verständlichen Gleichung zu machen, und alle andre Gröse auf die Gegenseite hinüber zu bringen. Er benahm sich deshalb so: Durch eine gar leichte Umwendung bildete er (IItens) aus dem Aequivalenten,

$Z^2 = 2\,r^2 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} C^2,)}$ nächstf. Gleichung

$2r^2 - Z^2 = 2\,r^2 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} C^2,)}$ *)

Der

---

*) Wenn $a = b - c$, [oder $24 = 32 - 8$] ist, so gewiß immer $b - a = c$. [oder $32 - 24 = 8$]. Das kann sich wol jeder selbst beweisen; Er darf nur, wie in der Schule, sprechen: Ist $a = b - c$, so ist auch $a + c - b$; Ist $a + c = b$, so ist auch: $c = b - a$. In unserm Fall ist, a, da oben Z^2, und b, da oben $2\,r^2$. u. s. f.. — Die Anwendung von alle dem kommt wiederum gleich (sub IV) vor. Augenscheinlich ist, $a + c = b$, der vermittelnde Begriff, durch welchen die Erkenntnis möglich wird, daß: $b - a = c$ sei, welche der Verstand aus der allerersten Gleichung; ($a = b - c$) nicht **unmittelbar** folgern kann.

Der (III)te Act, welchen er dann vornahm, war eine Quadrirung beederseits.

$4r^4 - 4r^2Z^2 + Z^4 = 4r^2 . r^2 - \frac{1}{4} C^2,$

oder $= 4r^4 - \frac{4}{4} r^2 C^2,$

$= 4r^4 - r^2 C^2.$

Das erste Glied, $2r^2 - Z^2$ mußte ja förmlich als eine binomische Wurzelgröse behandelt werden; In dem andern Gleichungs-Glied aber ward, der Form nach, blos $2r$ zu quadriren: $2r . 2r = 4r^2$; von dem 2ten Factor aber das Wurzel-Zeichen schlechthin zu beseitigen; so war die Potenz-Erhöhung ganz berichtiget. Durch den lezten Ausdruck kam dann der Analyst dem gesuchten C schon näher. Aber zuvörderst war noch $r^2 C^2$ zu isoliren. (IV)ter Act: $4r^4$ wird aus dem hintern Glied in das vordre geworfen; da entsteht:

$+ 4r^4 - 4r^4 + 4r^2 Z^2 - Z^4 = r^2 C^2,$

d. h. $0 \quad + 4r^2 Z^2 - Z^4 = r^2 C^2,$

welches das nehmliche Verfahren, wie oben (II) voraussezt.

Vter Act. Div. durch r^2 beederseits; so ergiebt sich: $\frac{4r^2Z^2 - Z^4}{r^2} = \frac{r^2 C^2}{r^2} = C^2;$

oder

oder in einem gleich-bedeutenden Ausdruck:

$Z^2. \left(\frac{4 r^2 - Z^2}{r^2}\right)$ ist das $\square$ von C, od. $= C^2$.

Demselben ist dann blos das Wurz-Zeichen vorzusezzen, so hat man: $\sqrt{\left(\frac{ZZ. 4 r - Z^2}{rr}\right)}$

oder $\frac{Z \sqrt{4 r - Z^2}}{r} = C$

Man hat ein specielles Beispiel, für welches diese Formel zutrift, wenn man unter, 2 n, Sechs (= 2. 3) versteht, und annimmt, es sei aufgegeben, aus der **bekannten** Seite des Sechs-Ecks die unbekannte des Dreieks zu suchen. Da ist **Zeno** der Radius selbst, weil ja ein Sechseck notorisch durch Anlegung des Radius blos gebildet wird, also $Z = r$; folglich wird nun C, (Comus) die Dreieck-Seite leicht so gefunden: $\frac{Z \sqrt{4 r - Z^2}}{r}$

ist $= C$; aber also auch: $\frac{r \sqrt{4 r - r^2}}{r} = C$

eben weil $Z = r$ zu nehmen ist. Vorne aber hebt sich r mit r; also bleibt: $\sqrt{4 r^2 - r^2} = C$. welches, wenn im Zäler r^2 würklich subtrahirt wird, so viel ist, als: $\sqrt{3r^2} = C$; womit wir eben das Aequivalent für die Seite des Dreiecks erhalten, welches wir oben (S. 49.) eben so, oder auch $= r.\sqrt{3}$, erkannt hatten. Ein zweites, meines Bedünkens, wegen ~~in~~ der Ausführung, noch viel schöneres Beispiel kommt unten vor, (wenn wir das Zehneck erörtert haben werden,) beim Fünfeck.

Räsonnement
zu §. 7.

Laßt uns bemerken, wie da der Analyst, der C aus Z sucht, in V Acten dieses versteckte C gleichsam verfolgt; Er wendet immer sein Auge darauf, wie auf eine Beute, und verläßt es nie; und ruht nicht, bis ers ganz degagirt, allein, vor sich stehen hat. . . . . . Das Resultat in jedem Act ist ein Schluß, welcher allemal blos mittelbar heraus kommt. Im Isten Act erhellet dieses für sich. Der Ausdruck für Z ist ja nur entlehnt, und beziehungsweise gültig. Im IIten Act leuchtet eben das wol jedem ein, der nur die Note S. 81 lesen mag; Ohne den gedachten Mittelbegriff,

wel-

welcher, unsrer ursprünglichen Formel gemäs, als nächste Consequenz:

$Z^2 + 2r . \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} C^2)} = 2r^2$, im Ausdruck helfen würde, liese sich aus Z^2 und dessen Aequivalent, nicht unmittelbar das Aequiv. für $2r^2 - Z^2$, das wir dort sehen, folgern. Im IIIten Act mußten etliche Mittelbegriffe eintreten, sonderlich der: daß $\sqrt{a} . \sqrt{a} = a$, und $\frac{4}{4} r^2 = r^2$ sei Im IVten war die Vermittlung nötig, wie im zweiten, und noch weiter die Reduction zu o aus + und —. Im Vten die Einsicht der Entbehrlichkeit von $\frac{r^2}{r^2} = 1$ bei Mltc. und Division, in so fern es nichts in Gröse alterirt.

Vier concatenirte Schlüße führten also zum Haupt-Schluß, von welchen jeder sich bis auf gewisse Prosyllogismen wieder verfolgen ließ, welche der geübte Rechner aber gewönlich unberührt liegen läst. . . . . Uebung kann es hierinn sehr weit bringen, so weit das man auch die notwendige Zwischen-Reihe s e h r verwickelter Mittel-Begriffe, nicht mehr achtet,

 ih-

ihrer im Ausdruck gar nicht weiter erwähnt, ja wol ihres Daseyns sich nicht mehr deutlich bewußt ist! Daher die dunkle Sprache groser Männer; daher die Berechtigung zu der Kürze, mit welcher, zum Beispiel, ein Newton, irgendwo den Calkül blos bis auf die Formel: $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{xx} = b^2$ fortführt, und dann sprechen darf: „Damit ist ja x selbst gefunden, und klar schon im Werth vorhanden." — Die noch hiezu gehörige Evolutionen sind ihm zu geläufig; er ist seiner Sache aus andern ähnlichen Entwicklungen schon gewiß; dahingegen ein anderer bei dieser Formel das ob? wie? erst nach und nach zu berichtigen hat! ....

Sollte es übrigens jemand versuchen, die Ausdrücke des Calküls, (die obige IV Acte hindurch) durch Linien darzustellen, und den Gang des Beweises durch geometrische Constructionen getreu verfolgen zu wollen, so würde derselbe hier ein äuserst mühsames Geschäft übernehmen, und sich in beinahe unabsehliche Zeichnungen verwickeln; Der heilsame Erfolg vieler Bemühungen ähnlicher Art ist aber gar

oft

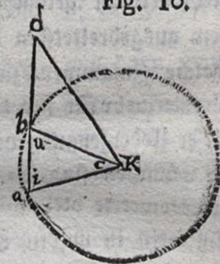
oft die **Ueberzeugung** selbst von dem vortreflichen Dienst, welchen Algeber durch Kürze und Bestimmtheit gewährt, und von der Geschmeidigkeit, mit welcher sie leicht und sicher wenn man sich nur mit einigen ihren Formeln recht bekannt gemacht hat, auf Resultate von dem ausgebreitetsten Umfang hinausführt, auf welche Zusammensezung intuitiver Zeichnungen nimmermehr für sich hingeleitet hatte... Und da dieser Ueberzeugung noch so viele Freunde bei uns zu wünschen sind, da der Unglaube, daß Algeber in Geometrie viel nütze, noch leider! beinahe allgemein in unsern Schulen regiert, so ist gar wol zu wünschen, daß selbst Misgriffe, und Verirrungen, bei welchen man sich endlich selber zugestehen muß, daß der gehofte Erfolg fehlgeschlagen sei, Anlaß geben mögen, die alten Vorurtheile zu verlassen, und die evidenten Vorzüge der neuen Analyse anzuerkennen. —

§. 8.

Aufgabe. Das Verhältnis der Seite des Zehnecks, (das in einem Kreis beschrieben steht,) zum Halbmesser des Kreises zu finden.

Die Seite des Zehnecks ist eine Sehne im Kreiß, ab, welche (gegen den Radius) als Zalgröße, uns noch = x ist. Zu eruiren ist demnach eben, was 1 : x, oder 10 Mill. zu x hier sei?

Fig. 10.



Zuvörderst werden zwo vorbereitende Zeichnungen erfordert, um zum Ziel zu gelangen.

Die erste: Man betrachtet die Seite, ab, als Basis eines leicht zu construireuden gleichschenkl. Dreiecks, welches unmittelbar fertig ist, wenn man 2 Radien, vom Centrum aus gezogen hat, ak = bk. Das △ heißt also, abk.

Die zwote: Man zieht die Seite, od. Linie, ab, gerade fort, so daß das angesezte Verlängerungs-Stück, bd, die Länge des Radius erreicht, d. h. r = bk wird; Damit ist ein zweiter gleichschenklichter Triangel, bdk, fertig, (wenn blos vollends, dk, zugezogen worden.) Die unleugbare Gleichheit der Radien beweist die Gleichheit der Schenkel von selbst.

Nun

Nun wird über die Winkel dieser 2 gleichschenklichten Dreiecke, (die weder gleich-gros, noch einander ähnlich sind,) wie folgt, räsonnirt; —*)

I) Die Seite des Zehnecks unterfängt, als Chorde, einen Bogen von 36°, notwendig, als 360° : 10. Dieser Bogen ist das Maas des Centri-Winkels, c, im Scheitel des kleinen Dreiecks, abk. Der Ausdruck

$\frac{360^\circ}{10} = \frac{4R}{10} = c$, muß also gültig für diesen Winkel seyn, weil notorisch das Maas von 4 rechten Winkeln (4 R) gleichbedeutend mit 360 Graden ist. Statt $\frac{4R}{10}$ gilt kürzer: $\frac{2R}{5} = c$.

II) Weil das △ gleichschenklicht ist, so sind die Winkel auf der Basis gleich, u = i; In Beziehung auf den bekannten ganzen Gehalt

*) — Um heraus zu bringen, (dann ich will mit Fleiß sogleich den Zweck und den Erfolg setzen!) daß das grose Dreieck, adk, das Ensemble der 2 gleichschenklichten, dem kleinern von denselben, abk, ähnlich sei.

eines jeden △, der = 2 R ist, fehlt aber natürlich u und i noch der Scheitelwinkel, c, zu diesem Totalgehalt; d. h. $u + i + c$ ist $= 2R$, folgl. $u + i = 2R - c$, od. $= 2R - \frac{2R}{5}$, dem allererst eruirten Aequiv. von c gemäs, Durch Reduction unter eine Benennung aber ist:

$$2R - \frac{2R}{5} = \frac{5\,2R - 2R}{5} \text{ d. h. } \frac{8R}{5} = u + i.$$

III) Weil $u = i$ ist, so gilt auch die Gleichung: $\frac{8R}{5} = u + u$, oder $= i + i$. Ist aber der doppelte Wink. von $u = \frac{8R}{5}$, so mus der einfache: $= \frac{4R}{5}$ seyn, und ein gleiches für den einfachen Winkel, i, statt haben: d. h. $\frac{u + u}{2} = u$ ist: $\frac{\frac{1}{2}8R}{5}$ d. h. $= \frac{R4}{5}$, und ebenso $i = \frac{4R}{5}$

Welches sich auch in der Zusammenstellung bewährt, wo

$$c + u + i \ldots\ldots\ldots = 2R$$

$$\frac{2R}{5} + \frac{4R}{5} + \frac{4R}{5} = \frac{2 + 4 + 4}{5} = \frac{10R}{5} = 2R,$$

die

die Richtigkeit des Verfahrens doch gewiß erprobt.

IV) Wenn man c mit u in diesen Ausdrücken vergleicht, so zeigt sich c offenbar nur halb so gros, als u, weil ja $\frac{4R}{5}$ doch sicher noch so gros ist, als: $\frac{2R}{5}$; d.h. u = 2c, und i = 2c ebenfalls, oder: erst der doppelt-gedachte Centri Winkel käme einem der zwei Winkel auf der Grundlinie gleich.

V) In dem andern gleichschenkel. △, bkd, sind die Winkel auf der Basis, dk, ebenfalls gleich, d = k. Als äuserer Wink. steht aber diesen beeden, u, (im kleinern △) entgegen, und ist dann beeden im Werth gleich zu achten, u = d + k, oder auch jedem verdoppelten, weil sie ja selbst gleich sind; d. h. u = 2k = 2d. Halbirt man beederseits, so mus auch gelten: $\frac{1}{2}$ u = k = d.

VI) Für die Helfte dieses Winkel des Basis, (oder für $\frac{1}{2}$ u) läst sich aber auch der Centriwinkel, c, setzen, (nach nr. IV.) d. h.

c =

$c = \frac{1}{2}$ u; demnach ist c auch so gros, als jeder der 2 W. in dem obern △, bdk. c = d = k. Hiemit sind alle Data vorhanden, um zu beweisen, daß das kleine △, abk, und das grose, adk, (welches die 2 durchgeforschte kleinere befaßt,) ähnliche Dreiecke seien. Ihre Winkel im Scheitel sind ja gleich, c = d, der Winkel, i, ist beeden gemein, und die Seite, ak, ebenfalls in beeden dieselbe. Wenn man demnach das kleine △, abk, heraus hübe, in das grose hinein rückte und Scheitel auf Scheitel legte, so würde ak mit ab paralel laufen, (als Bases) und die Seite, ad, würde mit ak, homolog, oder gleichnamig seyn, d. h. Die proportion träte notwendig ein:

ak:	ab	=	ad:	ak.
Die Basis im grosen △	zur Basis im kleinen	=	wie die dran liegende Seite im grosen:	zur dran l. S. im kleinen.

Jezt erst trit Algeber ein. In Rückerinnerung auf das Obige werde die Linie ak und bd, schlechthin mit = r, ausgedrückt; (welches wol angeht, da ja beede Linien die Länge des Halbmessers haben müssen) und für die zu su-

chen-

chende Seiten-Grösse, x, gesezt; ($x = ab.$) Hiedurch verwandelt sich die erstgesezte Proportion durch simple Unterschiebung dieser Signaturen in die nächst stehende, $r : x = x + r : r$. Daraus führen nun folgende Acte zum Ziel:

I) Das Product der äus. Glieder ist, dem P. der inn. gleich: $rr = x\,(x + r)$,
oder: $r^2 = xx + xr$; od. auch $r^2 = x^2 + xr$.

II) Wo der Algebraiker nur eine so gebildete Formel sieht da weis er schon, daß eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen sei. Er addirt zu $xx + xr$ noch $\frac{1}{4}\,r^2$, u. sieht dann das Quadrat der binomischen Wurzel:
$(x + \frac{1}{2}\,r)^2 = xx + xr + \frac{1}{4}\,r^2$ vor sich.
Dem andern Glied der Gleichung, (in nr. I,) nehml. r^2, fügt er dann ebendieses $\frac{1}{4}\,r^2$ bei; so steht hiemit beederseits ergänzt:
$x^2 + xr + \frac{1}{4}\,r^2 = r^2 + \frac{1}{4}\,r^2$ als ein reines oder vollkommenes Quadrat. Demnach auch noch in der (zweitheiligen) Wurzel:
$x + \frac{1}{2}\,r = \sqrt{}\,(r^2 + \frac{1}{4}\,r^2)$ Für den leztern

Aus-

Ausdruck gilt aber auch $= \sqrt{\left(\frac{4}{4} + \frac{1}{4} r^2\right)}$

d. h $= \sqrt{\frac{5}{4} r^2}$.

III) Nun ist x gar leicht vollends zu eruiren; Es ist in Gleichung vorhanden, wenn $\frac{1}{2} r$ beederseits abgezogen wird; d. h.

$x = \sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r$. Damit ist die gesuchte Grösse der Zehneck-Seite, ab, dann selbst gefunden, und offenbar in Theilen oder Fragmenten des Halbmessers ausgedrückt; Denn, $\sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r$, ist doch gewiß eine der Grösse des Radius gleichartige Grösse, wie sie ja auch durchaus Benennungen nach ihm, (und aus ihm gebildet) trägt.

Was man demnächst ferner mit diesem erforschten Werth: $\sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r$. vornimmt, ist blos Entwicklung, und Simplificirung zur Bequemlichkeit des Zalen-Rechners. Da sezt man dann:

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r$ ist $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} r^2 - \frac{r}{2}$,

d. h. $\frac{\sqrt{5}.r}{2} - \frac{r}{2}$, od. $\frac{\sqrt{5}.r - 1r.}{2}$ woraus sich endlich formirt:

$\frac{r.\sqrt{5}-1}{2}$, oder $r.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = x.$

In Zalen ist die Qu. Wurzel aus 5, mit 7 Decimalen: = 2,2360679 Folglich:

$\sqrt{5} - 1 = 2{,}2360679 - 1$, d. h. $= 1{,}2360679$

Halbirt ist: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618338\frac{1}{2}$

oder: $0{,}618339 = x.$

So gros ist demnach die Seite des Zehnecks, im Verhältnis gegen den Radius, wenn dieser = 1 gesezt ist; Ist derselbe aber als 10 Mill. angenommen so ist das Verhältnis dann so:

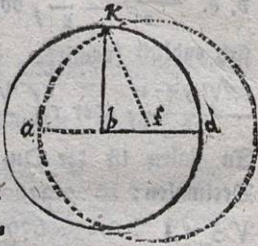
$x : r = 618339 : 10$ Millionen.

Diesen Erforschungen, insoferne sie namentlich die Hauptformel, $r^2 + \frac{1}{4} r^2$ enthalten, ist folgendes geom. Constructions-Verfahren unmittelbar bei zufügen. Man stelle unsern bisherigen Radius, bk, als Perpendikel, an das

Ende

Ende einer Linie, bf, welche gerade halb so gros, als der Rad. sei,

Fig. II.



so ist bk $=$ r, u. bf $= \frac{1}{2}$ r Dem rechten Winkel, an b, gegenüber, läuft die Hypoten kf. Man sehe dieselbe, als den Radius eines andern grösern Zirkels an, dessen Centrum, f, wäre, und denke sich demnächst denselben abwärts sich drehend, bis a, so mus er doch natürlich da noch sich selbst gleich seyn, d. h. af $=$ kf. Jezt concatenirt man folgende Schlüsse:

1) Die Hypotenuse, kf, quadrirt gedacht, ist: $=$ bkq $+$ bfq $=$ kfq, oder da bk $=$ r [ist, und bf $= \frac{1}{2}$ r, auch: $= r^2 + \frac{1}{4} r^2$

2) Beeders. die Qu. Wurzel ausgezogen, giebt $\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} r^2)} =$ kf, wofür sich, erwiesener masen sezen läst: $= \sqrt{\frac{5}{4} r^2} = x + \frac{1}{2} r$

3) Zieht man von dieser Gröse die Helfte des

Ra-

Radius ab, (in der Figur, bf, $= \frac{1}{2}$ r,) so erhält man gerade die schon hinlänglich eruirte Gröse, (im Calkül) $= \sqrt{\frac{5}{4} r^2} - \frac{1}{2} r = x$;
und in Linien, für Intuition: $= kf - bf = x$; oder $af - bf = ab$.

Beisaz. Wir kennen die ausgespähte Seite, als Chorde, welcher ein Bogen von $36^\circ = 360 : 10$ im Kreis correspondirt:

oder: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618339 = x$

Die Helfte dieser Chorde giebt den Sinus zu 18 Grad. obigen Vorgängen gemäs; Also:

Sin. $18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}3090169. = \frac{1}{2} x$;

welches zutrift, wenn man die Sinustafeln aufschlägt, nur daß (aus bekanntem Grund) die lezte Zifern um 1 höher stehen.

Räsonnement
zu §. 8.

Es ist mir jederzeit vorgekommen, der menschliche Wiz könne sich auf die Art der Auflösung, welche wir nun, als Beantwortung der Frage wegen des Zehnecks, kennen, wirklich viel zu gute thun. Ich glaube, es ist erlaubt, einen gewissen Stolz zu fühlen, wenn man nach und nach zu der hellen Einsicht der verketteten Gründe, welche bei diesem Problem unsern Geist beschäftigen, gelangt ist, und am Schluß — gleichsam mit siegendem Blick die Reihe der errungenen Evidenzen schnell durchlaufen kann. Jünglinge sollten frühzeitig auf den Reiz solcher süssen, und gewiß nicht unedlen Empfindungen aufmerksam gemacht werden, von deren bloser Existenz — — viele verständige Leute im Alter sich dann nicht mehr überzeugen lassen. Es ist kaum glaublich, wie sehr aus Ideenbeschränktheit oft hierüber gespottet wird! . . . .

In den vorigen Erforschungen hatten wir überall recht-winklichte Dreiecke nötig, um zum gewünschten Zweck jedesmal zu gelangen; In der gegenwärtigen aber mußten wir blos zu der Vergleichung zweier spizw. und zugleich gleichschenklichten △ unsre Zuflucht nehmen, u. uns von deren Aehnlichkeit (abk ∽ adk) überzeugen. Hierzu waren 6 Verhandlungen, oder 6 besondere Reflexions-Acte, erforderlich; u. dann

dann noch dazu der Act der Imagination, welcher Scheitel auf Scheitel, und Schenkel auf Schenkel legte, und dadurch zur der Einsicht qualitativer Einheit verhalf. Wir müssen das grösere Dreieck im kleinern, gleichsam in Miniatür, wieder finden, und für ebenso qualificirt wieder erkennen; eben die Verbindung der Theile, eben das Anschliesen gleichnamiger Seiten muß anschaulich vorhanden seyn; und daß es vorh. sei, wird aus der beweislichen, (auch oben bewiesenen) Gleichheit der Winkel allemal notwendig ersehen. —

Die viergliedrichte Proportion, wie sie oben detaillirt gesezt wurde, war demnächst nur entwikelte Sprache dieser Aehnlichkeit, oder, successiv-evolvirter Ausdruck derselben.

Nun aber stellt sich Algeber ein. Da wird dann zuvörderst der Schenkel, ad, in dem grosen Dreieck, der in Anschauung in eine Linie zusammenfloß, durch Uebertragung der vorhin ventilirten Begriffe, und deren Recognition, nun wieder synthetisch betrachtet, als $x + r$; und jezt ist alle Anschauung der Figur selbst, von nun an bis ans Ende hin, dem Auge entrückt; dafür aber wird mit der spielend-leicht-gebildeten Gleichung, $r^2 = x + xr$, fortan activ operirt. . . . Aufrichtig zu reden ists gröstenteils eine glückliche Erinnerung, welche zu der Auflösung, die nun schon ganz nahe ist, so gar sehr förderlich wird, die Erinnerung], durch algebraische Künste, wer weis, wann? . . . gelernt zu haben, „wie die Synthesis eines in die zweite Potenz erhöhten Binomiums beschaffen, und wenn etwa irgendwo ein Stück dazu fehlte, wie dasselbe zu ergänzen sei?" Die Gleichförmigkeit dieser Ergänzung, öfters in Vorstellung wiederholt, prägte wol notwendig ein gewisses Bild der Formel ein, das nun im gleichem Fall sich reproducirt; u. wol um so eher sich bei jedem reproduciren dürfte, welchem etwa sein Lehrer bei Entwicklung einer zweitheiligen Wurzel die Hochwichtigkeit ihrer Gestalt selbst mit nachdrücklichen Mementos anempfohlen haben möchte.

Was nüzte auch Algeber, wenn man die oft so theuer ihr abgewundene Resultate nicht mit Sorglichkeit stets vorrätig zum Gebrauch aufbewahrte, und dann würklich zu rechter Zeit immer damit vorrückte?, . . .

Uebrigens ist leicht zu bemerken, daß, wenn man die Glieder der Proportion: $r : x = x + r : r$ so stellt: $x + r : r = r : x$, damit der Radius, als Mittelproportionale, erscheine, welches auch mit der Zeichnung in Linien übereintrift, wenn man Figur II betrachtet, wo $ab + bd : bd = bd : ab$, auch $ab + bk : bk = bk : ab$, ist.

Aus ebenderselben Zeichnung läst sich aber auch eine nicht weniger interessante Proportion deduciren, in welcher die Seite des Zehnecks, ab, als Mittel-Proportionale selbst, erscheint. — Es dürfte wol anderwärts näheres Licht hierüber von mir verbreitet werden. . . . Hier — kann und will ich blos noch einen Wink hin werfen für den Aethetiker, in Rüksicht auf die bemerkungswürdige Simplicität, welche bei der geometrischen Construction (s. 96.) statt hat. Man gelangt dadurch so unerwartet schnell zum Zweck, daß die plözliche Erscheinung des Resultats wirklich die Seele überrascht; — welches sich besser empfinden, als beschreiben läst.

§. 9.

Laßt uns jezt regressiv gehen, und aus der gefundenen Seiten-Gröse des Zehnecks, die des

G 3 Fünf

Fünfecks eruiren. Wir erinnern uns an die Auflösung der allgemeinen Frage: (§. 7) wie aus 2 n zu suchen sei: n? Was dort Z hies, ist hier unser gefundenes, x, und die Seite des Fünfecks wird also hier zur grosen Sehne, C. Was ist dann nun in Zalgröse dieses C? heist demnach die Frage.

Der erste Act, welchen wir mit Z vorgenommen hatten, war Quadrirung; Auch last uns dann x, und dessen Aequivaleut: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$, quadriren. (Ister Act) $x^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}r^2$ welches, wenn 5 und + 1 zusammengerückt wird so viel ist, als: $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4}r^2$ oder $= \frac{3-\sqrt{5}}{2}r^2$. weil der Werth eines Bruchs ganz ungeändert derselbe bleibt, wenn man Zäler und Nenner mit einer ganzen Zal, hier mit 2, dividirt.

II)ter Act. Obiger Vorstellung (§. 81) gemäs mus jezt die Formel, $2r^2 - Z^2$, eintreten, hier als: $2r^2 - x^2$, und im Aequivalent: $2r^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r^2\right)$ od. unter einen Nenner

ner gebracht: $= \frac{4-3+\sqrt{5}}{2} r^2$

III)ter Act. Diese Quadrirung ausgesezt, ist: $4r^4 - 4r^2 . x^2 + x^4 = 4r^4 - r^2 C^2$, immer noch $= \frac{4-3+\sqrt{5}}{2} r^2$, weil ja $r^2 - x^2$ nur formal sich verändert hat.

IV)ter Act. Daraus folgt $4r^2 . x^2 - x^4 = r^2 C^2$; wofür sich aber auch sezen läst: $x^2 (4r^2 - x^2) = r^2 C^2$. Allein in Zalen Grösse? .... erhält man das Aequivalent hiezu durch die Erwägung, daß, wenn zu der Gleichung: $2r^2 - x^2 = \frac{4-3+\sqrt{5}}{2} r^2$, beederseits $2r^2$ addirt wird, sie sodann heisen müsse:

$$2r^2 - x^2 + 2 . r^2 = \frac{4-3+\sqrt{5}}{2} r^2 + 2 . r^2;$$

$$\text{od.}\ 4r^2 - x^2 = \frac{8-3+\sqrt{5}}{2} r^2,$$

d. h. $= \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ und daß also Aequiv. seien:

$$x^2 (4r^2 - x^2) = x^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} r^2\right)$$

d. h. (nach nr. 1) $= \frac{3-\sqrt{5}}{2} . \frac{5+\sqrt{5}}{2} . r^4$, auch noch $= r^2 C^2$.

V)ter Act. Div. durch r^2 beederſ.; ſo ergiebt ſich, (da $\frac{r^4}{r^2} = r^2$ iſt,) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \cdot r^2 = C^2$; oder, wenn in der erſten Formel wirklich *) multiplicirt wird:

$$\frac{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}{4} \; r^2 = C^2;$$

In noch kürzerem Ausdruck, wenn abermals' wie oben nr. 1, Zäler und Nenner mit 2 dividirt werden, $\frac{5}{2} - \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{2} \; r^2$,

d. i. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \; r^2 = C^2$.

Damit iſt die geſuchte Seite, oder Sehne, in ſofern ſie quadrirt gedacht wird, wirklich gefunden; folglich, unquadrirt, die Seite des Fünfecks, oder C ſelbſt, iſt vorhanden, wenn die □ Wurzel ausgezogen wird:

d. h. $r \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = C$,

auch $= r \cdot \frac{\sqrt{(10 - 2 \cdot \sqrt{5})}}{2}$

Um

*) Das Product der Zäler hieſe ja (explicite:) $15 - (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) + (3 \cdot \sqrt{5}) - (5 \cdot \sqrt{5})$ d. h. $15 - 5 + (3 - 5) \cdot \sqrt{5}$, od. $= 10 - 2 \sqrt{5}$

Um diese irrationale Gröse in Zalen, (wenigstens äusserst nahe hin) auszudrücken, verfährt man so: Man nimmt zuerst:

$\sqrt{5} = 2{,}236067977497 \ldots$ (mit 12 Decimalen also;)

Diese Qu. Wurzel-Gröse, doppelt genommen, giebt: $2.\sqrt{5} = 4{,}472135954994.$

welche Zal, von 10 abgezogen, im Auswurf läst: $10 - 2.\sqrt{5} = 5{,}27864045006$;

die Qu. Wurzel hieraus gezogen, giebt:

$\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 2{,}351141 \ldots$ sehr nahe hin;

Folglich kommt C, in so ferne es $= \frac{\sqrt{(10 - 2.\sqrt{5})}}{2} r$, ist, in Zalen zum Vorschein: $\frac{2{,}351141 \ldots}{2} r. = 1{,}175570.\, r. = C$;

als womit dann das Verhältnis dieser Sehne, oder Lateral-Gröse des Fünfecks gegen den Radius zur Genüge bestimmt ist; Wenn der leztere $= 1$ ist, so ist die Seite des Fünfecks in demselben Kreis 1 und noch $\frac{1}{10} + \frac{7}{100}$ u.s.f.

Eine sehr leichte Gleichung, welche sich aus zwo Formeln, die wir nun schon kennen, ziehen läßt, führt zu einer geometrischen Construction selbst hin, welche wir hier ja nicht umgehen dürfen: Wir dürfen die Gleichungs-Gröse zu C^2, nehmlich: $\frac{10 - 2.\sqrt{5}}{4}.r$ natürl. auch so schreiben: $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4}.r^2 + \frac{4r^2}{4} = C^2$ Aus dem Isten Act unsrer Untersuchung wissen wir aber, daß $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4}.r^2 = x^2$ sei; Schiebt man also dieses gültig-anerkannte Aequivalent unter, so wird $x^2 + \frac{4r^2}{4}$, d. h. $x^2 + r^2 = C^2$; Mit Worten ausgedrückt: Das Quadrat unsrer Seite des Fünfecks, C^2, ist so gros, als das Quadrat der Seite des Zehnecks, x^2, und das Qu. des Radius, r^2, zusammen genommen, od. = dem Qu. des 10 Ecks + dem Qu. des 6 Ecks. So gros, als diese zwei Quadrate, ist aber die quadrirte Hypotenuse, ak, wenn man in der leztern Fig. 11. eine Sehne unter den Bogen, ak, zieht; zuverlässig muß ja dieselbe, quadrirt, da stehen, als $ab^2 + bk^2$; das heist aber eben: $x^2 + r^2$ ist $= C^2$; und so läßt sich die Seite des Fünfecks jedesmal äusserst leicht verzeichnen, so bald man nur den Radius (als Per-

Perpendikel,) mit dem halben Radius, r mit $\frac{1}{2}$ r, wie oben beim Zehneck, rechtwinklicht zusammen gestellt hat.

Beisaz. Die Seite des Fünfecks unterfängt, als Chorde, 72 Grade; Dann 360 : 10 ist = 72°. Die Helfte dieser Chorde ist : Sin. 36°; Also $\frac{C}{2} = \frac{1{,}175570.}{2}$ = 0,587785; welche Zal mit der zutrift, die in den Tafeln steht.

Räsonnement.

zu §. 9.

Die Haupt-Säze dieser Erforschungen sind nur Anwendungen der allgemeinen Formeln, auf welche wir, oben §. 7, nach und nach gerathen waren. Ein besonderer Fall soll da eine abermalige Probe abgeben, ob im allgemeinen, durch jene V Acte des Verstandes hindurch, richtig geschlossen worden sei. Und Erfahrung bestätigt dann auch die Richtigkeit der obigen Deduction wirklich; bestätigt, daß man sich gar allerdings auf das Paradigma (§.80-83) sicher verlassen könne. . . . .

Die

Die Ueberzeugung (in diesen und ähnlichen Fällen) daß alles so herrlich eintrifft, wenn von weit-umfassender Allgemeinheit zu speciellen Auflösungen herunter oder hinüber geschritten wird, ist keine der geringsten Freuden, welche dem Algebraiker sein Studium verschaft, — — und die ihm doch so oft und viel Ungeweihte . . nicht einmal glauben wollen. Das mögen sie! . . . . So werden sie es dann auch wol nicht glauben, daß eben in unserm Beispiel, (um auch noch eines individuellen Zugs hiebei zu erwähnen!) die Wendung der Formel: $4r^2x - x^4$ in $x^2(r^2 - x^2,)$ und der schnelle Gebrauch derselben (im IVten Act,) allerdings noch dem Analysten eine ganz besondere Freude gewähre, die ihm gleichsam nur unterwegs zu Theil wird, und die doch gewiß sehr bedeutend ist. Denn die Formel ward nicht blos aus Spielerei so gedreht und verkürzt; Er sieht den grosen Vortheil der dadurch erleichterten Rechnung, die Sicherheit des Calküls, von da an, ganz evident, und bewundert dann den Scharfsinn dessen, dem diese Wendung etwa zum erstenmal einfiel, mit vollem Recht, mit wahrhaftiger Vergnügung

und

und innerer Geistes-Behaglichkeit, die der Unwissende immerhin verlachen mag! —

§. 10.

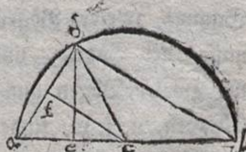
Wir kennen jezt das Verhältnis des Radius zu der Seite des Dreiecks, des Vier- des Fünf- des Sechs- des Acht- des Zehn- des Zwölfecks, und wissen nun hinlänglich, wie sich dem Paradigma, §. 6 u. §. 7 gemäs, hieraus die Verhältnisse zu sehr vielen Polygon-Figur Seiten eruiren lassen. Aber das Verh. des Rad. zur Siebeneck-Seite, zur Neuneck- zur Eilf- zur Dreizehn- zur 15 Eck- Seite läst sich doch nicht auf dem bisher betretenen Weg ausforschen; es gehören hierzu noch besondre in den bisherigen §§. gar noch nicht gelehrte Kenntnisse, namentlich Bekanntschaft mit den Auflösungen der Probleme, wie man den Sinus der Summe zweier Bögen aus den einzelnen Sinussen der Bögen, und die Chorde der Summe zweier Bögen aus den einzelnen paraleien Chorden, u. s. w. findet. Allein ich kann mich in diesen Blättern, deren Zal absichtlich klein seyn soll, hierüber nicht ausbreiten! Blos einige Haupt-Rücksichten auf das, was

Sinus der Summe heist, und auf vorzügliche daraus erforschbare Aequiv. für jeden Sinus überhaupt kann ich hier noch in specielle Betrachtung nehmen. Alles wird sich nach und nach genau an unsre Erörterungen des 1sten und 2ten §phen anschliessen.

§. 11.

Wir beschäftigten uns (S. 1 — 22) mit den zwei Segmenten des Diameters, und dem Perpendikel darauf, oder mit dem Sin. vers. rad ∓ cos, und mit dem Sin. rectus selbst. Jede dieser drei linearischen Grösen läst sich, als 4tes Glied einer geom. Proportion, wie folgt, ansehen, wenn man blos in Fig. 2. noch ein paar Linien einzeichnet, und damit einige Schlüsse verbindet: Man fälle nehmlich auf die Chorde, ad, einen Perpendikel, cf, vom Centrum aus; sie ist damit halbirt: af = fd, und die ganze Sehne ist synthetisch = af ∓ fd; Jede dieser Helften ist auch als

Fig. 12.



als ein Sinus zu betrachten, und zwar zu dem getheilten Bogen, ad, welchem dann auch der getheilte Winkel, d. h. $\frac{1}{2}$ acd, correspondirt, der Figur nach auch = acf, als = $\frac{1}{2}$ c Der Cosinus ist da, fc, beederseits hin. Gerade noch so gros, als dieser Cosinus ist die grose Chorde, dl; Denn der Winkel, d, am Halbkreis ist doch gewiß ein rechter W. (s. oben §. 1. s. 3.), der bei f gleichfalls, weil fc, ein Perpend. ist; folglich läuft fc paralel mit dl; und wenn dann, vom Centrum aus, auch auf die grose Chorde, dl ein Perp. gefällt würde, so könnte es gar nicht anders seyn, als daß dieselbe demnach gleichgetheilt, d. i. $\frac{1}{2}$ dl, auch = fc, und, im Stand gegenüber, gerade so lang, d. h. dem Cosinus gleich seyn müßte. (Auch darum, weil △ afc ∽ adl ist, und es unsinnig wäre, zu leugnen, daß im ersten △ die Seite, af, die Helfte der homologen Seite, ad, im andern △ sei; desgleichen, daß ac, die Helfte der homol. S. al, in eben dem andern △ sei! Schlusfolgl. aber zwischen der Dritten in beeden △, doch

doch notwendig ebendas Verhältnis statt haben, d. h. fc = $\frac{1}{2}$ dl seyn mus.) Also ist auch für dl zu sezen: = |2 cf. Nun argumentirt man so:

I) Da (ausser den gedachten ähnlichen Dreiecken) auch △ ade ∽ acf sind, weil der Winkel, a in beeden gemein, und e = f, (als ad perp.) sind, so ergiebt sich, eben aus ihrer Aehnlichkeit, nach Vergleichung der homologen Seiten, die Analogie:

ac : af = ad : ae; oder in trigonometrischem Ausdruck: $1 : \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, c = 2\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2} c : 1 - \cos.\, c$

Im lezten Glied ist offenbar der S. v. = ac — ec, oder die Differenz Gröse des Radius und Cosinus gemeint. Da das erste Glied dieser Proportion, (r = 1) nicht wirklich dividirt, so wird blos das Product der mitt. Gliedern, das Aequivalent für das lezte; d. h.

$\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, c. \times 2\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, c. = 1 - \cos\, c. = \text{Sin. v.}$

wofür aber, colligirt, gesezt wird:

= 2

$= 2 (\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c)^2$ (*) Welcher Werth sehr wol merken ist!

II) Unser Dreieck, acf, ist aber auch einem andern △ in der 12 Fig. ähnlich; nehmlich acf ∽ edl; (eben weil afc ∽ ade, und die Aehnlichkeit zwischen △△ ade und edl, nach S. 3 in §. 1 erwiesen ist.)

Da gilt dann die Prop.: ac : cf = dl : el, od. in trig. Ausdruck: $1 : \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2} c = 2\,\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2} c : 1 + c$ oder die Summe des Radius und Cosinus hat zum Aequiv. das Product der mittl. Glieder: $2 (\cos\ \frac{1}{2} c)^2 = 1 + \cos.\ c.$

III)

*) Dieser Ausdruck leuchtet nicht immer gleich ein; Aber man stelle sich nur $2\,\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c$ successiv vor, als: $\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c + \mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c$, und denke sodann den Factor: $\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c$, wie er in beede Grösen multiplicirt, so kommt doch gewiß heraus: $(\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c)^2 + (\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c)^2$, welches dann colligirt wird in: $2 (\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2} c)^2$. Eben so verfährt man in nr. II.

III) Eben in diesen 2 ähnl. Dreiecken haben dann auch die 2 andern homologen Seiten die Analogie: ac : af = dl : de, oder:

$1 : \text{Sin.} \frac{1}{2} c = 2 \text{Cos.} \frac{1}{2} c : \text{Sin.} c.$ Folglich ist der leztere Sin. c, synthetisch betrachtet, $= 2 (\text{Sin.} \frac{1}{2} c. \text{Cos} \frac{1}{2} c).$ Mit Worten: Jeder ganze Sinus läst sich betrachten, als ein zweimal gesetztes Product „seines helftigen Cosinus, mit seiner eigenen Helfte multiplicirt.“ oder, als das Duplum seines heftigen Cosinus, mit seiner eigenen Sinus-Helfte mltcirt. .... Eng schliest sich das damit selbst bewiesene Theorem an: „Daß sich überhaupt jeder Radius zum Cosinus eines Bogens verhalte, wie der doppelte Sinus zum Sinus des doppelten Bogens. ac : cf = 2 af : de; Denn im andern Ausdruck ist das eben so viel, als:

$1 : \cos \frac{1}{2} c = 2 \text{Sin} \frac{1}{2} c : \text{Sin.} c;$ wo das Product der mitt. Glieder das nehmliche, wie nr. III ist; wie jeder wol einsieht, der nur weis, daß z. B. x, 2 y = 2 y, x, jedes = 2 x y im Product sei.

Rä-

Räsonnement
zu §. 11.

Hiemit hätten wir zu den drei Grösen, welche wir gleich anfangs in sonderlichen Betracht genommen hatten, drei Werthe gefunden, welche aller Aufmerksamkeit würdig sind.

Durchgehends wird zuvörderst der Radius, welcher immer als das erste der 4 Proportions = Glieder vorkommt, mit einer gewissen linearischen Gröse verglichen, gleich im Isten Saz, r : Sin. $\frac{1}{2}$ c, oder ac : af, d. h. es wird erwogen; wenn in beeden Grösen eine gewisse Menge gleichartiger Theilchen angenommen würde, die man mit Zalen ausspräche, in welchem geom. Verhältnis dieselben gegeneinander stünden? wie oft die Gröse des Radius die andre kleine begreiffen möge? Dieser Exponent, (dann was ist das Resultat dieser Vergleichung anders?) wird nun auch auf die zwei lezten Glieder der Prop. ad : ae übergetragen, oder zwischen denselben erfordert; (Sonst hätten ja die zwo Verhältnisse gar nicht die gesezte Analogie; der Fall der Proportion wäre gar nicht vorhanden.) Und eben so ists mit nr. II und III. Auch kommt eben das heraus, wenn man das erste Glied mit dem 3ten, das 2te mit dem 4ten in Verhältnis sezt. Der Radius ist immer die erste und ganz wesentliche Vergleichungs-Gröse. — Und doch sieht man dieselbe gar nicht in den Schluß-Resultaten, oder in den Werthen für die lezten Glieder? Allerdings ist es eine Licenz, über welche in einem gewissen Betracht Sinnlichkeit und Verstand sich zu beschweren wol Anlaß haben, daß man, (auf deren Unkosten gleichsam,) blos um die algebr. Formel conciser darzu stellen, den hochwichtigen Radius im Ausdruck dieser Werthe gar wegläst, und nur jene Producte zur Gleichung für den Sin. Vers. für $1 \mp \cos$, und für den Sinus selbst hinsezt. Allein diese Licenz ist rechtlich, weil $ac = r = 1$ angenommen wird, die übrigen Glieder ebenfalls blos Zahlen sind, und 1 doch weder in Mltc. noch in Division etwas alterirt. Weshalb dann auch sowol $\frac{af.\,ad}{r}$, als af. ad, oder $2(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,c)^2$ den Sin. V. oder ae ausdrückt.

Ferner folgt aber auch aus der Ansicht der Prop. daß, wenn man das lezte Glied mit den

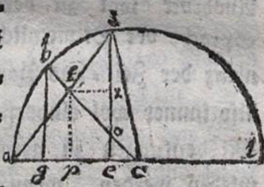
dem 1sten im Product betrachtet, und das Prod. der mittl. Glieder dagegen hält, jede der 3 erforschten Grösen für sich selbst schon die Gröse des Gleichung-Products erreiche, weil 1 auch da nicht mitcirt. Wodurch dann begreiflich wird wie man jedes dieser Resultate, und sonderlich den Sinus bald einen Quotienten bald ein Product heisen könne.
(af. ad = ae. r = ae, ist also mit dem obigem, und schon §. 3 deducirten Quotienten-Ausdruck wol zu behalten.) Mit dieser Sprache der Bequemlichkeit, mit dieser Convenienz der Zeit- und Papier-Ersparniß mus man also immer wol einverstanden sey, um nicht in Misdeutungen zu gerathen, welche blos vermieden werden, wenn man das stillschweigend pactirte Subintellige immer hiebei in Gedanken sich vorstellt, wodurch man allein allen Zweifeln und Ansprüchen sinnlicher Intuition, insoferne diese immer etwas Meßbares haben, und nachmessen will, befriedigend begegnen kann.

Daß Sin. c, und dessen Aequiv. auch als Sinus der Summe zweier Bogen vorstellbar seie, wird sich sogleich im nächsten §. zeigen.

§. 12.

Wenn wir einen Bogen nicht gerade in der Mitte, sondern ungleich theilen, und annehmen, die zwei einzelnen Sinus, und Cosinus seien mit dem Radius bekannt und gegeben, so läst sich, da die zwei Bogen ab + bd den ganzen Bogen ad, als eine Summe, ausmachen der Sinus dieser Summe, de, so in Zeichnung, und dann als Verhältnis Zal gegen den Radius, eruiren:

Fig. 13



Er wird graphisch zusammen gesezt aus zwei Stücken, xe + dx, betrachtet, und jedes dieser Stücke, als 4tes Glied einer geom. Proportion, wie folgt, erwiesen: I) Aehnliche Dreiecke sind: $cfp \backsim cbg$; die homologen Seiten geben die Analogie: $cb : bg = cf : fp$; Statt fp, der paralelen Hülfs-Linie gegen xe, läst sich aber xe auch selbst sezen; also ist

$$cb : bg = cf : xe, \text{ und } xe = \frac{bg.\ cf}{cb}$$

II) Aehnliche Dreiecke sind weiter: $cbg \backsim coe$; ferner: $coe \backsim fox$; (in dem ja in beeden ein

rech-

rechter W. und ein vertical W. vorkommt;) ferner fox ∽ fdx, folglich auch △ cbg ∽ fdx; Demnach geben die gleichnamige Seiten die Analogie: cb : cg = df : dx; also $dx = \frac{cg.\ df,}{cb}$ Damit ist der (synthetische) Sinus der Summe, de selbst erforscht. In beeden Haupt-Formeln ist, cb, Divisor, d. h. der Radius selbst; folglich bleibt er im Calkül, als r = 1 gar weg, und man sezt statt: $\frac{bg.\ cf}{r} + \frac{cg.\ df}{r}$ schlechthin: bg. cf + cg. df; mus aber doch, immer dabei sich mit dem Gedanken tragen, die Formel habe den versteckten Sinn: I) Der Radius verh. sich zum Sinus des untern Winkels, (r : bg,) wie der Cosinus des obern Winkels zum untern Fragment des grosen gesuchten Sinus, (cf : xc.) Und II) der Radius verhalte sich zum Cosin. des untern Winkels, (r : cg,) wie der Sinus des obern zum übrigen Fragment des grosen gesuchten Sinus, (df : dx.) Erst dieß vorausgesezt, ist die Regel für den mechanischen Rechner, als gültig zu statuiren: Bringe durch Calkül schlechthin die zwei bemerkte Producte ans Licht, und addire sie, so hast du den Sinus der Summe;

Im ersten Product kommt ein Sinus als der eine Factor vor, aber sein zugehöriger Cosinus ist nicht sein Mitfactor, sondern der Cosinus, welcher in der Figur den andern Sinus angeht; und ebenso verhält sichs mit dem zweiten Product. — Diese notwendige Verwechselung veranlaßt die Structur der viel bedeutsameren Formel, als bg. cf. ✠ cg. df, ist, nehmlich: Sin A. Cos B ✠ Cos A. Sin B = Sin C, wo man also unter bg den Factor Sin A, unter df den Sin B zuverstehen hat; folglich unter cg den Cos A und unter cf den Cos B. Der grose Sinus der Summe, de, aber erhält den kurzen Ausdruck: Sin C. Die neue Formel selbst sieht nun sehr einfach aus; Ihr Gebrauch ist aber äusserst mannichfaltig. Vergleicht man mit ihr die Synthesis des Sin. c im vor §. nr. III, so zeigt sich bald, daß es wol vergönnt sei, statt der concisen Formel, welche wir dort im Product ersahen, ausgesezt unterzustellen,

$$\text{Sin. C} = \text{Sin A.} \quad \text{Cos B} ✠ \text{Cos A.} \quad \text{Sin B.}$$

$$\text{Sin. c} = \text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\text{c.}\ \text{Cos}\,\frac{1}{2}\,\text{c} ✠ \text{Cos}\,\frac{1}{2}\,\text{c. Sin}\,\frac{1}{2}\,\text{c},$$

welche Summe doch gewiß nicht mehr besagt,

als:

als: $2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} c. \times \operatorname{Sin} \frac{1}{2} c$, das heist eben

$2 (\operatorname{Sin} \frac{1}{2} c. \operatorname{Cos} \frac{1}{2} c)$ Demnach ist Sin c. allerdings auch als Sinus der Summe vorstellbar; und da jeder Bogen sich, als aus 2 Bogen gebildet, denken lässt, so ist auch jeder Sinus als Sinus einer Summe gedenkbar.

Räsonnement
zu §. 12.

Ich wiederhole, was ich oben, S. 21, von der billigen Vorliebe für ähnliche Signaturen, wie hier Sin. A. Cos B statt bg. cf sind, gesagt habe. Die Sprache wird weit eindringlicher; der Verstand findet weit mehr Nahrung dabei, und die Begriffe haften zu anderweitem Gebrauch viel fester. . . . . Aber mich dünkt eben, man würde doch noch mehr für Erinnerung und Gedächtnis sorgen, wenn man auch da ganze Nahmen sezte —

Den geführten Beweis selbst betreffend, so sieht man daraus abermals, wie wichtig es wol ist, früh mit dem, was Aehnlichkeit in Dreiecken heist, und mit sich bringt, bekannt zu seyn. Die Stellung mit vertikal=Winkeln, wie nr. II. coc ∽ fox, wird, dünkt mich, Anfängern viel zu selten vorgehalten.

Das Fortrücken von einem ähnlichen △ zum andern, und die dadurch erzielte Combination zweier, deren Analogie nicht unmittelbar einleuchten wollte, und dann doch einleuchtet, führt übrigens etwas erfreuendes bei sich, od. veranlaßt eine gewisse Geistes Behaglichkeit die abermals den Aesthetiker angeht, — und die ich hier blos berühren kann. —

§. 13.

Die Anwendung der erforschten Formel für den Sinus der Summe wird dem Analysten am interessantesten, nach Vorausschickung des Lehrsazes: „Daß sich in jedem △ die Seiten gegen einander verhalten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel." Dieser Lehrsaz wird kurz so bewiesen: Das im Kreis eingezeichnete Dreieck zeigt drei Peripherien-Winkel, deren Maas bekanntlich nicht der ganze Bogen zwischen den geöfneten zwei Schenkeln, sondern nur die Helfte dieses Bogens ist. Notwendig hat also z. B. der Wink. B eben das Bogen-

maas,

maas, wie der Centri=Winkel, u; folglich hat er auch dessen Sinus; Dieser aber ist $\frac{1}{2}$ AC die Helfte der Chorde des doppelten Bogens. Desgleichen ist für den Periph. W. C, wie für den gleichen Centri W. o oder s, der Sinus $\frac{1}{2}$ AB, ebenfalls die Helfte der Chorde des dopp. Bogens. Also in Vergleichung sind, Sin B: Sin C = $\frac{1}{2}$ AC: $\frac{1}{2}$ AB.

Fig. 14.

BC = m
AC = y
AB = n

und da alle Helften sich verh. wie ihre Ganzen, auch Sin B: Sin C = AC: AB, d. h. wie die entgeg. st. Seiten, AC: AB. Leichteracht=lich gilt derselbe Schluß auch für die übrige Winkel u. Sinus in dem △. Natürlich ist also auch: Sin A: Sin B = BC: AC, und Sin A: Sin C = BC: AB. Jezt nenne man die Seiten, wie unter der Fig. 14. angemerkt steht, kurz n, m, y; so ergeben sich die Proportionen: (I) m: y = Sin A: Sin B, (II) y: m = Sin B: Sin A.

Sin

(III) m : n = Sin A : Sin. C. Hieraus erhält man Aequivalente für jeden Sinus, als leztes Glied einer geom. Prop. die so heisen:

$$\frac{y.\ \mathrm{Sin}\ A}{m} = \mathrm{Sin}\ B;\quad \frac{m.\ \mathrm{Sin}\ B}{y} = \mathrm{Sin}\ A;\quad \frac{n\ \mathrm{Sin}\ A}{m} = \mathrm{Sin}\ C$$

Nun beginnt der rüstige Algebraiker gar bald sein Werk; Nur mit einer Vorstellung mus er noch zuvörderst vertraut seyn.

§. 14.

Der Sinus des spizen Winkels wird immer so gros angenommen als der Sinus des stumpfen, welcher auf dem Diameter darneben liegt; z. B. S. 11 Fig. 4 ist Sin acd = Sin dcl, weil man blos auf die Differenz gegen den Quadranten allgemein Rücksicht nimmt, und beim stumpfen W. allemal eben soviel Ueberschuß über das Bogenmaas von 90° vorhanden ist, als viel dem spizen W. dazu (zu 90°,) gebricht, (das en plus ist dem en moins gleich.) Also wird fest angenommen, es seien durchaus unter jedem Halbkreis, folglich unter dem Bogen von 180 Grad auf dem Diameter 2 gleiche

Si-

Sinus vorhanden. Nun haben die drei Winkel eines Dreiecks ebenfalls den Halbkreis zum Maas, und werden mit der bekannten Gleichung: = 2 R = 180°, gedacht; lassen sich auch durch geometr. Construction, als Centriwinkel, wie in der Figur s + o + u = 2 R darstellen. Bezieht man also Sin C auf den Winkel s, und den zugehörigen Bogen BF, so ist natürlich für Sin A und B blos der übrige den Halbkreis ergänzende Bogen, FAG, (der die Winkel o + u = A + B befaßt,) noch vorhanden, welcher aber keinen grösern Sinus haben kann, (weil o + u eben den stumpfen Winkel ausmachen) als Sin C selbst; Und wenn dann Sin C, als Sinus der Summe, gedacht wird, oder als Sin A. Cos B + Cos A. Sin B, so ersieht man wohl, daß die übrigen zwei Seiten des Dreiecks eben hiezu verwendet werden, und gleichsam drauf-gehen, um den Sinus des stumpfen Winkels, (der dem Sinus des spitzen, oder Sin C, wie gedacht, allezeit gleich ist,) auszumachen, d. h. daß bei jedem vorkommenden Dreieck Sin C = Sin A. Cos B + Cos. A. Sin B gesezt werden könne, und die zwei andern Sin. und Cosinus den Sinus der Summe, der Formel gemäs, abgeben.

Jezt

Jezt schiebe man 1) die Aequivalente für die Sinus, welche wir als 4te Glieder der Proportionen formirt hatten, blos unter: so erhält man:

$$\mathrm{Sin}\,C = \mathrm{Sin}\,A.\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A.\,\mathrm{Sin}\,B$$

$$\frac{n.\,\mathrm{Sin}\,A}{m} = \frac{m.\,\mathrm{Sin}\,B.}{y}\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A.\,\frac{y.\,\mathrm{Sin}\,A}{m}$$

2tens) Div. man allerseits mit Sin A, so zeigt sich:

$$\frac{n.\,\mathrm{Sin}\,A}{m.\,\mathrm{Sin}\,A} = \frac{m.\,\mathrm{Sin}\,B.\,\mathrm{Cos}\,B.\,y}{y.\,\mathrm{Sin}\,B.\,m} + \frac{\mathrm{Cos}\,A.\,y.\,\mathrm{Sin}\,A}{m.\,\mathrm{Sin}\,A.}$$

wofür aber kurz sich sezen läst:

$$\frac{n}{m} = \mathrm{Cos}\,B + \frac{\mathrm{Cos}\,A.\,y}{m},$$

Wird alsdann 3tens) beederseits mit m multiplicirt, so kommt heraus: $n = m\,\mathrm{Cos}\,B + y.\,\mathrm{Cos}\,A$; d. h. die Summe dieser 2 Producte giebt die Seite, n, oder Latus AB.

Man ziehe 4tens) y. Cos A beederseits ab, so bleibt. $n - y.\,\mathrm{Cos}\,A = m.\,\mathrm{Cos}\,B.$

5tens) quadrire man beede Glieder; so hat man: $nn - 2\,ny.\,\mathrm{Cos}\,A + y^2.\ \mathrm{Cos}\,A^2 = mm.\,\mathrm{Cos}\,B^2$ oder wenn man die zwei lezte Cosinus durch die Differenz des Rad. und Sin. ausdrückt: $nn - 2ny.\mathrm{Cos}A + y^2(1 - \mathrm{Sin}A^2) = mm.(1 - \mathrm{Sin}B^2)$; und dann, wenn man für den Sinus B, seinen Werth, wie nr. 1 einschreibt:

$nn \ldots + y^2 (1 - \text{Sin}\, A^2) = m^2 (1 - \frac{\text{Sin}\, A^2\, y^2}{m^2},)$

od.: $n^2 \ldots + y^2 - y^2 \text{Sin}\, A^2 = m^2 - y^2 \text{Sin}\, A^2$.

6tens) addire man beederseits $y^2 . \text{Sin}\, A^2$; so bleibt der Werth für m^2 allein:

$n^2 - 2\, ny . \text{Cos}\, A + y^2 = m^2$; und wenn verfaren wird, (wie S. 81 in der Note,) folgt daraus:

$n^2 + y^2 = m^2 + 2\, ny . \text{Cos}\, A$; weiter:

$n^2 + y^2 - m^2 = 2\, ny . \text{Cos}\, A$, daher dann:

$$\text{Cos}\, A = \frac{y^2 + n^2 - m^2.}{2\, ny}$$

§. 15.

Da stehen nun für den Werth des Cosinus von A auf der Gegenseite blos Signaturen von Seiten-Grösen; Daher ist diese Erforschung sehr wichtig; Sie führt darauf, wie man blos aus den gegebenen Seiten eines △ die Winkel alle finden kann. . . .

Wir werden nun sogleich mittelst eben dieser Formel neue Aequivalente für die 3 Grösen, von welchen wir, von §. 1 an, ausgegangen waren, eruiren: nehml. für 1 — Cos, für 1 + Cos, und für den Sinus selbst; Zuerst trette hier 1 + Cos in die Reihe:

Ist

Ist $\cos A = \frac{yy + nn - mm,}{2ny}$ so ist der Werth (I) für $1 + \cos A = \frac{2ny + y^2 + n^2 - mm}{2ny}$, da $\frac{2ny}{2ny}$ für $= 1$ gilt. Man seze im Zäler die 3 ersten Grösen $2ny + y^2 + n^2$ einmal so: $y^2 + 2ny + n^2$, so ist dieß offenbar ein ausgeseztes Quadrat, und soviel als: $(y + n)^2$; und die ganze Formel mus dann auch so viel heisen, als:
$\frac{(y+n)^2 - mm}{2ny}$, wofür gilt: $\frac{(y+n+m)(y+n-m)}{2ny}$, wie jeder zugestehen mus, der nur etwas von Mltcation mit Buchstaben versteht. Das ist also der neue Werth für unser $1 + \cos$.

(II)tens für den Sin. Versus, oder $1 - \cos A$, mus demnach, wenn abermals die Haupt-Formel zu $\cos \cdot A$ benüzt wird, gültig seyn: $\frac{2ny - y^2 - n^2 + mm,}{2ny}$ d.h. $\frac{mm - (y-n)^2}{2ny}$, oder, wenn wirklich multiplicirt wird: $\frac{(m + y - n)(m - y + n)}{2ny}$, als $= 1 - \cos A$

(III) Da wir nun aus §. 2. (s. 14) wissen, daß $1 - \cos A$, mult. mit $1 + \cos A$, zum Aeqniv. haben müsse: $1 - \cos A^2$, d. h. $= \sin A^2$, so mus der Werth für das Qu. des Sinus auch

auch hier heraus kommen, wenn man die 2 gefundene Gleichungs-Grösen mit einander miltcirt: nehmlich:

$$\frac{(y+n+m)(y+n-m)}{2ny} \times \frac{(m+y-n)(m-y+n)}{2ny}$$

als $= (1 + \text{Cos } A) \times (1 - \text{Cos } A) = \text{Sin } A^2$.

Man erhält dann:

$$\frac{(y+n+m)(y+n-m).(m+y-n)(m-y+n)}{4n^2y^2} = \text{Sin } A^2$$

Wird endlich aber beederseits die Qu. Wurzel ausgezogen, so bleibt:

$$\frac{\sqrt{\left((y+n+m)(y+n-m).(m+y-n)(m-y+n)\right)}}{2ny} = \text{Sin} A;$$

Räsonnement.

zu §. 13. 14. 15.

Es ist unbeschreiblich, wie sich, so bald wir diesen Weg durchmessen haben, der Kreis unserer Blicke erweitert! Schon, wenn der Beweiß des Lehrsatzes §. 13 vollendet ist, läst die Aussicht sich etwas ahnden. Aber sie wird wirklich vast, ja unübersehlich, wann wir durch die Reihe der Mittelbegriffe, die in §. 14 stehen, bis zu der ausgespähten Gleichung für Cos A vorgedrungen sind, von wo aus nur noch wenige Schritte zur homogenen Erkenntnis der Haupt-Gleichungen für den Sin. vers. für r + Cos, und den Sinus selbst, sind. — Das Maas des Himmels und der Erde kommt dadurch in des Menschen Gewalt, wenn nur wenige Ausbildung weiter hinzugetan wird. Diese Blätter sind nicht bestimmt, auch über diese stolze Idee zu commentiren; . . . . Ueber die erwähnte Mittelbegriffe habe ich noch einiges beizufügen; (Ich verstehe darunter die Säze, §. 14.) Erstens, über die angenommene Grössen-Gleichheit des Sinus im spizen und stumpfen Winkel. Die Vorstellung dieser Gleichheit will selbst Männern von vielem Verstand oft nicht in den Sinn, weil sie ein für allemal an die 2 verschieden-grose Bogen, und Winkel denken. Allein man halte sich nur an den Haupt-Gedanken, daß doch der Sinus, als Perpendikel, die Annäherung znm Sinus Totus eben so gut, als die Entfernung (den Lauf) über denselben hinaus bestimme, oder auf der Stelle, wo er steht, anzeige, welches sich auch in der Figur bestätigt, wo man sich immer den stumpfen Winkel FAG auch = BFA vorstellen darf, dessen Bogen bis an

die

die Stelle hinreicht, wo kein andrer Perpendickel, als der erstere wieder, statt haben kann. Also ist derselbe Sinus Kanon für den einen, wie für den andern Bogen. Zweitens, geht die Vorstellung anfangs schwer ein, daß die Sinusgröße der 2 übrigen Dreieckswinkel, zum Sinus der Summe als Gleichung für Sin C jederzeit benüzbar seyn soll. Hr. Hofr. Kästner sezt kurz: „Weil ein Winkel mit den beeden andern 180° ausmacht, so folgt

$\mathrm{Sin}\,C = \mathrm{Sin}\,A.\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A.\,\mathrm{Sin}\,B.$“ Vielleicht hellen die Vorstellungen, welche ich §. 14 angebracht habe, das, was manchem bei dieser Stelle noch dunkel scheinen möchte, auf. Auch erinnre man sich, (aus §. 12) daß man doch ja jeden Bogen synthetisch betrachten kann, so daß sich zwei Sinus nebst den Cosin. drunter hin zeichnen lassen, welches beim spizen wie beim stumpfen Winkel mit gleicher Befugniß statt haben mus, weil .. dieselbe gleiche Rechte haben.

In §. 14. kommt die scheinbar=schwerste Stelle nr. 2 vor. Vornen und hinten wird wirklich in den dortstehenden Formeln Sin A, als Divisor gebraucht und eingeschrieben, in der Mitte aber der Werth dafür, aus nr 1,

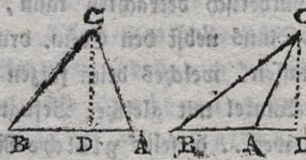
 und

und zwar umgekehrt, d. h. Zäler und Nenner wechseln ihren Stellen, weil $\frac{m. \text{Sin. } B}{y}$ ein Bruch ist, und doch dividiren soll. Der Act wird dann durch Mltc. verrichtet, vermittelst der bekannten Umkehrung. . . . Und siehe da! wie schön hebt sich dadurch alles, bis auf Cos B; Der immer bleiben darf und soll! —

§. 16.

Ein andrer Weg, als der war, den wir §. 13 — 15 gegangen sind, um Cos A, und dann auch Sin A selbst zu erforschen, ist folgender: Wenn man die beigesezte 2 Figuren betrachtet, in deren einer der Perpendikel, CD, iñerhalb des Dreiecks, der andre ausserhalb, herabfällt, so läst

Fig. 15



sich aus obigem §. 3 leicht abnehmen, daß, da der Sinus für den Winkel, A, immer als ein Quotient, 1 : Sin A, sich schreiben läst, diesem Verhälthältnis in beeden Figuren die Linien AC : CD correspondire, und also sicher sich die Analogie denken lasse: AC : CD = 1 : Sin A; Eine ähnliche Analogie folgt für Sin B, oder es mus auch bei ihm statt haben: BC : CD = 1 : Sin B. Sezt man diese zwo Poropotionen, wie folgt, unter einander,

$$\begin{array}{l} AC : CD = 1 : \text{Sin } A. \\ \underline{CD : BC = \text{Sin } B : 1.} \end{array}$$

so ergiebt sich AC : BC = Sin B : Sin A sehr leicht daraus, in dem man nach dem technischen Ausdruck perturbate & ex aequo verfährt, und bekannte Wechsel-Beziehungen eintreten läst. Hierdurch geräth man aber gleichsam unvorsezlich und mechanisch auf den oben §. 13 erwiesenen Lehrsaz selbst, und erhält damit eine neue Probe seiner Richtigkeit: (Die Sin. der Wink. in einem △ verh. s., wie die gegenüber lieg. Seiten.) II)tens fließt aus dieser Prop. die Gleichung AC. SinA = BC. SinB, als Producte der äus. und innern Glieder; mit obigen Buchstaben geschrieben:

y. Sin A = m. Sin B. wobei ich blos Hrn. Prof. Klügels Worte wiederhole: „Weil der Sin. eines stumpfen Wink. gänzlich derselbe mit dem Sin. des spizen Complements ist, so läst die Rechnung ebenfalls das unbestimmt, was die Geometrie nicht entscheidet." Eine andre Gleichung ergiebt sich (III) aus der aller-ersten Proportion: AC : CD = 1 : Sin A, für CD, welches, da 1 nicht multiplicirt, dem Product der äus. Glieder gleich seyn muß; d. h. AC. Sin A, oder y. Sin A = CD. Hiedurch werden wir von neuem berechtigt, da der Perpend. CD den Sinus zugleich vorstellt, jeden Sinus, nicht nur, als einen Quotienten, sondern auch als ein Pro[illegible] mit einem Radius anzusehen, oder anzuer[illegible]nen, daß immer r. *Sin* = *Sin.* sei.

IV) In beeden Figuren ist, der gewöhnlichen Sprache nach, die Linie, AD, der Cosinus des Winkels, A; da sie aber zu dem nehmlichen Radius, zu welchem der Sinus, gehört, und eben so gut Verhältnis-Gröse gegen denselben, also gewiß jedesmal r. Cos = Cos. ist, so muß auch hier die Gleichung statt haben: Cos AD = y. Cos A; und dieses Product für den Cosinus fortan gültig seyn.

V) In sofern der Figur gemäs, AD sich auch als Fragment der ganzen Linie, AB, ansezen,

sich

sich also auch von derselben in Abzug bringen, d. h. als Subtrahend betrachten läst, folgt ferner daraus die Gleichung: $BD = AB - AD$, in einen bedeutsamern Ausdruck: $= n - y.\mathrm{Cos}A.$ Wir benüzen denselben sogleich! . . . Die Seite BC in beeden Figuren ist ohnleugbar, als dem rechten Winkel, D, gegenüber, Hypotenuse, folglich quadrirt, oder, BCq, mus seyn $= CDq + BDq$; Wenn aber die eingeführten kleinen Buchstaben, und die erst gefundene und damit ausgedrückte Gleichungen gebraucht werden, nach welchen $BC = m$, $CD = y.\mathrm{Sin}A$, und $BD = n - y.\mathrm{Cos}\,A$, angegeben waren, so ergiebt sich, nach vorgängiger Quadrirung, die Gleichung: BCq oder mm,

$= (yy.\mathrm{Sin}A^2) + (nn - 2yn.\mathrm{Cos}A. + yy.\mathrm{Cos}A^2,)$ indem $n - y.\mathrm{Cos}\,A$ hier als eine in die 2te Potenz erhobene zweitheilige Wurzel behandelt wird; (wie oben s. 64 auch vorkam.) Diese chargirte Gleichuugs-Gröse wird einfacher, wenn man bedenkt, daß, yy Factor mit $\mathrm{Sin}\,A^2$, und auch mit $\mathrm{Cos}\,A^2$ ist, daß $yy.\mathrm{Sin}^2 + yy.\mathrm{Cos}A^2$ so viel heise, als $(\mathrm{Sin}^2 + \mathrm{Cos}\,A^2).yy$, dieses Product aber nicht mehr besage, als: $(1).yy$, d. h. als yy allein, weil immer $\mathrm{Sin}^2 + \mathrm{Cos}A^2 = 1$

oder r^2 gilt, wie wir schon aus §. 2. S. 14. ersehen haben.*) Demnach heist jezt viel kürzer der Werth von BC^q od. $m^2 = yy + nn - 2yn\, \mathrm{Cos} A$, der', wie ein ausgeseztes Qu. aus einem Binomium, geschrieben: $= y^2 - 2yn. \mathrm{Cos} A + n^2$; Diß ist aber ebendasselbe Resultat, welches wir oben §. 14. s. 127 für m^2, heraus gebracht hatten; woraus dann ferner die Gleichung zu Cos A sich ergiebt, ganz natürlich, wie sie dort angegeben ist.

Räsonnement
zu §. 16.

Hiemit sind wir auf zwei Wegen zu einem und demselben Ziel gelangt. Den ersten scheint Hr. Hofr. Kästner, den zweiten Hr. Prof. Klügel vorzuziehen. Beede sind lehrreich, und verdienen, gekannt zu seyn. — Auf bee-

den

*) Graphisch genommen, ist ja jeder Radius als Hypotenuse, der Sinus aber als Kathetus, und der Cosinus als Basis vorstellbar; Folglich, dem Pythag. Theorem gemäs, $r^q = \mathrm{Sin}^q. + \mathrm{Cos}^q$, oder der quadrirte Halbmesser ist die Summe dieser 2 Quadrate.

den kommt man an Stellen, wo das ganze Verfahren stocken, und der Calkül gar unvollendet bleiben müßte, wenn man sich nicht durch Differenz-Grösen, und deren Quadrirung eine weitere Bahn zum Ausgang bräche. Ich bitte desfalls nr. 5 in §. 14, mit nr. V in dem erstgesezten §. 16. zu vergleichen. Für zwei Cosinus werden dort Differ. Grösen eingerückt; hier für BD die Werthe, die auf dem vorigen Blat zu lesen sind. Man gehe auch auf §. 6 zurück, und verbinde die Erörterungen S. 65, mit dem, was ich S. 77 gesagt habe.

Auf der Reise selbst, auf der ich mich geflissentlich weder hier noch §. 14 aufhalten wollte, geräth man übrigens auch nur im percursorischen Lauf, auf interessante Erscheinungen das heist hier, auf Formeln, welche unvermutet für sich ganze Probleme, die dem speculativen wie den praktischen Geometer wichtig sind, auflösen. So giebt 1stens die Formel. §. 14. nr. 4 nehmlich: $n = m. \mathrm{Cos} B + y. \mathrm{Cos} A.$ zu erkennen, daß die 3te Seite in einem $\triangle$ gefunden werde, wenn man die zwo andre, jede mit dem Cos. des Winkels, der an ihr liegt, multipl. 2tens) die Formel $m^2 = y^2 + n^2 - 2yn \; \mathrm{Cos} \; A.$

K (ebendd,)

(ebendd.) nr. 6 verräth, wie die dritte Seite aus den 2 andern, die mit dem eingeschloßnen Winkel gegeben sind, gefunden werde; 3tens) für die Gleichungen zu $1 - Cos. c$ und zu $1 + Cos\ c$ die wir oben §. 11 erhalten haben, als =

$2\,(Sin\ \frac{1}{2}\ c)^2$ und $2(Cos.\ \frac{1}{2}\ c)^2$, werden durch die neue Aequivalente in §. 14, auch neue Werth=Ausdrücke veranlaßt; nehmlich der Werth

von $2\ (Sin\ \frac{1}{2}\ A)^2$ ist jezt hier $= 1 - Cos\ A$,

auch (nach S. 128) $= \frac{(m + y - n)\ (m - y + n)}{2\,ny}$.

Also wird auch seyn, (wenn alles halbirt wird,

$$\frac{1 - Cos\ A}{2} = (Sin\ \frac{1}{2}\ A)^2 = \frac{m + y - n . m - y + n}{4\,ny}$$

Folglich $Sin \frac{1}{2} A = \surd\left(\frac{m + y - n . m - y + n}{4\,ny}\right)$

$$= \frac{\surd\ (m\ \ldots\ldots + n)}{2\ (\surd\ ny)}$$

$$= \frac{1}{2}\ \surd\left(\frac{m\ \ldots\ldots + n}{ny}\right) = \surd\left(\frac{1 - Cos A}{2}\right)$$

Mit Worten: Der halbe Sinus ist, der halbirten Qu. Wurzel = Gröse aus

$\frac{(m + y - n).(m - y + n)}{ny}$ gleich. Dem halben

ben steht der ganze Sinus entgegen; der halbe läst sich aber auch als einfacher, und der Ganze dagegen als doppelter Sinus betrachten; die Grösse, (quantitas extensi) bleibt; blos die Subsumtion unter die Categorien (der Vielheit und Allheit) wechselt.

Eben so gehts mit dem Werth für

$1 + \text{Cos}A = 2\left(\text{Cos}\frac{1}{2}A\right)^2$. Man substituirt

auch da $= \frac{(y+n+m)\,(y+n-m)}{2\,ny}$;

folglich ist, die Helfte, von diesen drei Aequivalenten:

$$\frac{1+\text{Cos}A}{2} = (\text{Cos}\frac{1}{2}A^2) = \frac{(y+n+m).(y+n-m)}{4\,ny};$$

und also:

$$\sqrt{\left(\frac{1+\text{Cos}A}{2}\right)} = \text{Cos}\frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(y+n+m).(y+n-m)}}{2\sqrt{(ny)}},$$

d. h. $\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(y+n+m).(y+n-m)}}{ny}$, oder die Helfte dieser Wurzel-Gröse ist der Werth des halben Cosinus.

Das sind so natürliche Folgerungen, daß der gemeine Menschen Verstand, wenn er nur einige Minuten auf dem Gehalt von $2(\text{Sin.}\frac{1}{2}A)^2$

verwellt, und die simpelste Schritte regressiv macht, darauf verfallen mus.

§. 17.

Man wird bei vielen Mathematikern die (lange) Hauptformel für den Sinus, (die S. 188 steht,) etwas anders gebildet finden; desgleichen auch die für den Sinus Versus. Damit dieß nicht befremde, bedenke man folgendes: In der einen Formel für den Sin. V. kommt die Potenz $(y - n)^2$ vor; für dieselbe läst sich auch $(n - y)^2$ sezen; das Resultat ist ganz im Werth das nehmliche, (nur die Stellung verändert sich:) $= nn - 2ny - yy$. Schreibt man nun den Werth für 1 — Cos statt: $\frac{mm - (y - n)^2}{2ny}$, jezt $\frac{mm - (n - y)^2}{2yn}$, so folgt auch das nächst daran stehende Aequivalent nun so evolvirt:

$= \frac{(m + n - y).(m - n + y)}{2ny}$, auch, so viel als

$\frac{(m + n - y).(m + y - n)}{2ny}$, für den Werth

des S. V. Dieser lezte Ausdruck, in welchem man blos ein Spiel der Stellung bemerken wird, veranlaßt dann für die Schluß-Gleichung zum

Si-

Sinus selbst notwendig die Formel:

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+n-m)(n+m-y)(m+y-n)}}{2ny}$$

wo man erst wahrnimmt, daß dieses Spiel gar nicht verächtlich oder unwichtig sei; sondern daß vielmehr eine bewundernswürdige Ordnung wol in die ganze äuserliche Formel, als in den Calkül dadurch zugleich komme. — Ich möchte wol Menanders goldnen Spruch hierauf anwenden:

ὡς μεγα το μικρον εστιν, εν καιρῳ δοθεν.

Diese kleine Umdrehung verhilft jezt dem Verstand zu der etwa so übersezbaren Gedankenreihe: Um den Sinus eines Winkel zu erhalten, addire (I) die 3 Seiten-Grösen des $\Delta (y+n+m)$. Addire (II) je zwo Seiten, $y+n$, $n+m$, $m+y$. Ziehe (III) von jeder dieser 3 Summen die Gröse der übrigen dritten Seite ab. Das giebt drei bejahte Reste: $y+n-m$, $n+m-y$, $m+y-n$. Nun bilde (IV) ein Product aus den Grösen der nr. I. und III. Ziehe (V) daraus die Qu. W. dividire sie (VI) durch das doppelte Product der 2 Seiten, die den Winkel, A, einschliesen; (2 ny). Der Quotient ist der gesuchte Sinus für den Radius, der = 1 ist.

Alle diese Acte giebt die blose Stellung der lezten neugeordneten Formel an. Aus der erstern (§. 15. S. 138) für sich war dieses äusserst interessante Verfaren durchaus nicht zu deduciren; Die neue aber wird Schöpferin der erläuterten Gedanken-Reihe selbst. — Dabei fällt mir ein Wort von Hr. Pr. Kant ein, welches auch sein Hr. Recens. in d. A. L. Z. sehr herausgehoben hat; „Eine neue und „richtige Formel, (die das, was zu tun ist, um eine „Aufgabe zu befolgen, genau bestimt, und nicht ver„fehlen läst,) ist etwas sehr wichtiges ..... Alle „unsre wissensch. Bemühungen sind weiter nichts, als „Aufsuchen von Formeln!“ — Ich getraute mir, als ein groses Beispiel und Beleg hiezu, Newtons herrliche Erfindung des binomischen Lehrsazes selbst desfalls anzuführen, und mit Hinsicht auf diese Zeilen, und das vorhergehende Blat überhaupt, zu beleuchten, und getraute mir, auf dem Verfolg dieses Gangs oder Wegs, Seiten daran aufzudecken, die noch nicht aufgedeckt sind. — Aber der Ort ist hier nicht dazu, — vielleicht anderwärts, und zu andrer Zeit... Ich gebe zum Schluß blos noch die nachstehende Folgerungen:

§. 17.

§. 18.

Man erhält die Gröse des Perpendikels, CD, für sich, nicht, als Gröse des Sinus,) vermittelst kurzer Erwägungen, wie da folgen: Durch Mltcation der äus. Glieder wurde $CD.1 = y.\sin A$; nach nr. III. §. 16; Da war CD also Product. Das grose Aequiv. für Sin A kennen wir aus dem Schluß des §. 15. Sezt man nun y würklich als Factor (oberhalb des Bruchstrichs) dem langen Zäler bei, so hebt sich dadurch das im Nenner befindliche y eo ipso, u. man erhält die Gleichung für die Gröse des Perpendikels allein;

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+n-m)(n+m-y)(m+y-n)}}{2n}.$$

womit dann auch die Höhe des Δ selbst aus den Seiten, als gleichartige Zalgröse eruirt ist.

Gleichergestalt erhält man die Gröse des Segments der Grund-Linie AD für sich. Nehmlich als Cosinus, der an dem W. A liegt, war $AD = y.\cos A$; Sezt man nun y wirklich, als Factor, zu dem gefundnen Werth für Cos A, neben den Zäler; so wird

$$\frac{yy+nn-mm.y}{2ny} = \frac{yy+nn-mm}{2n} = AD$$

Endlich ergiebt sich auch dann äuserst leicht hieraus der Inhalt des Dreiecks selbst (area $\triangle$ ABC,) so: Die Helfte der Grundlinie, mit dem Perpendikel (oder der Höhe) multiplicirt, hier $\frac{n}{2}$ mult. mit CD, als bereits auscalkulirte Zal-Grösen, stellen (bekannten Säzen gemäs,) das Product dar:

$$\text{Area } \triangle = \frac{1}{2}\,\text{AB}.\,\text{CD},$$ so viel als: =

$$\frac{n}{2}\,.\,\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+\,.\,.).(\,.\,.\,.\,.)(m+y-n)}}{2n},$$

oder, welches gleichviel ist, da sich n hebt; =

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+\,.\,.).(\,.\,.\,.)(m+y-n)}}{4};$$

Mit Worten: Ein Viertel dieser Wurzel-Gröse ist der Inhalt des Dreiecks selbst; also auch auszudrücken, als:

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(y+n+m)(y+n-m).(n+m-y)(m+y-n)}.$$

Räsonnement

zu §. 18.

Ich fühlte Versuchung, dieses lezte Resultat ein sehr schönes Phänomen zu nennen, wenn man diesen Ausdruck nicht längst aus den Regionen

einer

einer Scienz ganz verwiesen hätte, in welcher alles streng bewiesen, und nichts für dunkle Empfindung, für Bewunderung, oder unerklärliche Rürungen der Sinnlichkeit (anmaaslich) übrig gelassen wird! Was notwendig, festfixirt, und demonstrativ-gewiß ist, das soll man nicht anstaunen! Aber bei der ersten Bekanntschaft mit vielen grosen Säzen der Mathematik, ists doch menschlich, manchmal Ausnamen von diesem axiomatischen Verbot zu machen, und zu zugestehen. Johnson sagt irgendwo: Things neceſſary and certain often ſurprize us, like unexpected Contingéncies! Das ist ein sehr wahres Wort, und ein Wort, das von gar ächter Menschenkenntniß zeugt. Die Anwendbarkeit desselben für meinen Saz ist einleuchtend. Nicht nur die Formel hat eine gewisse anziehende Eleganz, (das was die Lateiner concinnum nennten,) sondern auch der Gedanke, den Inhalt eines jeden Dreiecks, es sei so ungleichseitig, als es wolle, mittelst dieser 4 Producte, die in so gefälliger Ordnung aneinandergereiht stehen, übersehen zu können, ohne sich um das Maas auch nur eines Winkels in der Area bekümmern zu dürfen, dieser Gedanke hat wirklich etwas unbeschreiblich-reizendes, ... welches ihm, meines Erachtens, auch die subtilste Zergliederung niemals nehmen wird. — Auf welche Art sich die Säze des lezten §. auch aus Euklids Elemente herleiten lassen, hat Hr. Prof. Pfleiderer zu Tübingen sehr vortreflich in einer (mir eben erst zu Gesicht-gekommenen) Dissertation gezeigt, welche die Aufschrift hat: Analysis triangul. rectilin. (1784); Ich verweise diejenige meiner Leser darauf, welche auch bei einigen meiner obigen Hyben nach tieferer Belehrnng begierig sind.

Nähere Anwendung für den praktischen Geometer erfordert übrigens auch Kenntnis der Tangenten Lehre, welche ich in diesen Blättern geflissentlich nicht berührt habe.

Anhang.

Ehe ich schliese, erlaube ich mir, mit Rück-Erinnerung an eine Stelle im Räs. zu §. 8. (oben S. 101), noch die Beischliessung folg. Hyhens.

§. 19.

Wenn man das Verh. der Zehneck - Seite zum Rad. auf die bekannte Weise ausgespäht

hat