Werk

Titel: Nuovi Istromenti Per Descrizione Di Diverse Curve Antiche E Moderne E di molte al...

Untertitel: Col Progetto Di Due Nuove Machine Per La Nautica Ed Una Per La Meccanica ; E con ...

Autor: Suardi, Giambatista

Verlag: Rizzardi

Ort: Brescia

Jahr: 1752

Kollektion: DigiWunschbuch

Werk Id: PPN780784294

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN780784294|LOG_0008

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=780784294

NUOVI
ISTROMENTI
PER LA DESCRIZIONE
DI
DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE,

E di molt' altre, che ſervir poſſono alla ſpeculazione
de' Geometri, e all' uſo de' Pratici.

PREFAZIONE.

LA campagna, che per ordinario riesce altrui di sollievo e di ricreazione, a me già porse motivo di più serio trattenimento, quando accadendomi di osservarla con più attento animo nelle sue produzioni, ed ammirando specialmente i fiori, e le foglie m'avviddi, che per lo più portavano vagamente impressa la forma di una qualche Curva. Questo riflesso traendomi d'una in altra cosa m'indusse a voler tentare, se si potesse richiamare alle leggi di Meccanica la forma di alcune di quelle, e delineare con qualche ingegno le Curve, che ne caratterizzano le diverse specie. Per quanto strano mi paresse da principio questo pensiero, tuttavia dappoi tanto mi vi addomesticai, che d'indi passando a metter mano all'opera, mi venne fatto finalmente di descrivere con alcuni stromenti, oltre diverse Curve note a Matematici antichi e moderni, altre non poche somiglianti a un di presso a quelle, che osservate ne' campi erano state l'occasione, ed il soggetto delle prime mie meditazioni.

La costruzione adunque, e l'uso di cotali stromenti è appunto ciò che mi son ora determinato di dare alla luce; non per altra cagione, che più possa dar credito al mio consiglio, se non perchè mi son lusingato, che tal cosa potesse vantare qualche pregio di novità; la quale quanto suole piacere al pubblico, altrettanto rende scusabile un autore, che si lascia egli pure traportare da quella passione, che si ha di piacere ad altrui nel fargli un presente benchè tenue de' suoi ritrovamenti.

In fatti io posso asserire costantemente di non aver mai saputo, che altri abbiano prima scoperto cosa pubblicata ora da me come di mia invenzione. E benchè non essendomene forse assicurato con tutte le possibili diligenze, potrebbe alcuna cosa da me creduta mia essere già stata ritrovata da altri; nonostante mi parrebbe assai difficile, che o nella specie delle descritte Curve, o nel modo del descriverle, se per avventura fossero già state descritte, andassi io così sempre ad appormi, *mi, e fatalmente urtare nello altrui, che in tutto questo trattato non avesse ancora a restarvi qualche cosa del mio.*

Tuttavia non può negarsi, che ad un' Opera, cui non si contenda il titolo di novità, non si richieggano ancora delle altre prerogative, acciocchè venga generalmente ricevuta come degna delle stampe; quali forse sarebbero la dignità della materia, la rettitudine del discorso, e la purità dello stile, le quali da taluno o tutte od in parte si potriano in questi miei scritti desiderare. Ma che che siasi sperarei di poter agevolmente comportare, che altri mi accusasse di qualche mancamento, e si ponesse eziandio a contraddirmi liberamente; giacchè poi quanto al primo nulla più mi accaderebbe, che trovarmi avvolto nella folla di molti, che soggiacquero ad egual sorte, per esser tale la condizione delle umane imprese, che niuna veramente va esente da difetto. E quanto al secondo professandomi io d'apprezzare sopra tutto la verità, avrei anzi per bene, che conforme all' antica consuetudine di Socrate si procurasse di dargli un più bel giorno per mezzo della contraddizione. Questa però come che sogliasi spesso adoperare a capriccio, e rivolgere del pari contra le vili, e le pregevoli cose, non permette, al dir di Cicerone, altro modo più sicuro di sottrarsi al suo rigore, che rimanersi del tutto dallo scrivere. Il che se finora fosse accaduto, siccome non avrebbe il mondo letterato a dolersi di molte inutili e stucchevoli inezie, così per contrario deplorarebbe la privazione di non poche stupende, e vantaggiosissime scoperte. Nè è già che io quindi presuma di porre le mie piccole cose in paragon di queste ultime, ma d'inferire solamente, che per timore della contraddizione non doveva ritenermi dal pubblicarle; perchè quantunque non sia così insensibile di non risentirne diletto, quando almeno vengano accolte con benigno compatimento, però nemmeno sono per reputare ad ingiuria, quando vengano criticate o riprese, mentre per altissimo favore mi ritrovo in tale disposizione di animo, che più amo il merito che la lode, e sono egualmente preparato a sofferire un biasimo che mi faccia accorto de' miei falli, che a ricevere un' approvazione, che a torto ricompensi le mie fatiche.

ISTRO-

ISTROMENTO I.

PER LA DESCRIZIONE ORGANICA DELLE CONCOIDI.

SEBBENE Nicomede, Diocle, Dinostrato, Archimede nell' investigare la duplicazione del cubo, la trisezione dell' angolo, o la quadratura del circolo furono men fortunati d' Ippocrate da Chio, cui per lo meno avvenne di quadrare geometricamente alcune porzioni o segmenti di quello, non perciò si conserva di tutti loro meno onorata memoria, sicchè delle quattro curve a tal fine inventate da essi, come d'ingegnose produzioni della rispettabile antichità, non si faccia tuttavia grandissima stima. Ma perchè, non potendosi esse delineare geometricamente, riuscivano affatto inutili a quel fine appunto cui erano destinate; perciò ho creduto, che per avventura fosse lodevol cosa descriverle almeno con qualche artificio meccanico, e prima

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Concoide di Nicomede.

NOn è già ch' io intenda di riferire l'origine di questa curva (inventata (1) dal suo Autore per la duplicazione del cubo) o di qualunque altra, perchè pensi, che

(1) Serve questa curva per determinare (Milliet De-Chales *Geom. Tract.* lib. III. prop. 31.) rispetto a' due dati estremi la posizione d' una retta eguale ad una data, e menata da un dato punto; per mezzo della quale si viene poi al conseguimento di due medie continue proporzionali. Ma come parmi, che l' applicazione, che si fa della Cissoide a questo medesimo effetto, sia molto più breve, e l' operazione meno implicata; così quando occorresse la duplicazione del cubo, meglio fia attenersi a questa, la quale ricorda remo a suo luogo, come si metta in pratica.

che essa sia meno altrui nota, ma perchè ciò è troppo per venirmi in acconcio, quando passarò a provare la struttura degl' Istromenti annessi.

Sia però (*Fig.* 1. *Tav.* 1.) perpendicolare alla *direttrice* indeterminata DR la retta PC *costante* data, dal cui estremo punto P, che dicesi *polo*, sono tirate molte parimente indeterminate P*t*, P*t* ec. secanti detta *direttrice*. Di queste col compasso si recidano altrettante quantità, che *intercette* appellansi, eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, quali sono *pt*, *pt*, ec., o al di sotto, come *tn*, *tn* ec., ovvero *tr*, *tr* ec. *to*, *to*, ec. Allora la linea LTZ condotta per i punti *p*, *p* ec. sarà una Concoide *esteriore*, e Concoidi *interiori* le tre linee GMH, BPE, KPQPS, la prima delle quali unisce i punti *n*, *n* ec., la seconda passa per i punti *r*, *r* ec., la terza per i punti *o*, *o* ec., corrispondenti appunto per ordine ai tre casi della Concoide *interiore*: primo, quando la *intercetta*, come *tn*, è minore della *costante* CP. Secondo, quando è eguale, come *tr*. Terzo, quando è maggiore, come *to*.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione scenografica dell' istromento per la Concoide.

OLtre che io mi recai a noja lo spiegare in disegno il *piano orizzontale*, e *verticale* di questa macchinetta, parvemi ancora che la sua perfetta costruzione si potesse raccogliere assai bene dalla sola elevazione in prospettiva. Di che per convincersi figuriamoci, che alla tavoletta orizzonle BEFK (*Fig.* 2.) sia fermato con due viti NN un telaro DMQR composto di un pezzo DR, nelle due estremità del quale sono eretti due stanti DM, RQ, che sostengono un altro pezzo MQ. Il pezzo DR è un parallelepipedo di legno o di metallo, solcato per il lungo da una scannellatura

tura di tal forma, che nell' interiore ſua cavità ricever poſſa il priſma *pt* della *Fig.* 3., e combaciare al di dentro con l' eſteriore ſuperficie di detto priſma. Laonde queſto priſma *pt* fornito di un pivolo *t* al di ſopra, già figuriamolo inſerto e mobile per eſſa ſcannellatura nella direzione DR; coſicchè il pivolo *t* anneſſo tracci una linea retta, che rappreſenti la *direttrice* DR della *Fig.* 1.; ma per ora via ſi tolga (*Fig.* 3.) il raggio *t*K, che quanto prima ad altre curve ſia d' uopo.

Nelle due eſtremità del parallelepipedo DR ſono, come già diſſi, eretti due ſtanti RQ, DM, ai quali pure ſta in alto afferrato un altro parallelepipedo MQ, il di cui piano verticale apparente in figura perpendicolarmente ſovraſta alla linea detta di ſopra, che per il lungo della ſcannellatura DR ſi concepiſce eſſer tracciata dallo ſcorrente pivolo *t*. Nel mezzo di queſto parallelepipedo avvi per di ſotto un incaſtro di quella forma, che è l'aſta PH in eſſo introdotta ad angoli retti, e che ſi ferma in qual punto più ſi vuole con una vite ſuperiore C. Dall' eſtremo punto P di queſt' aſta diſcende perpendicolarmente un palicello d'acciajo PZ quale, come meglio oſſervaremo in ſezione, poichè è entrato nella ſcannellatura del regolo AG, dilatandoſi in cerchio, riempie il largo di quella cavità. La diſtanza poi PC preſa in detta aſta da P ſino all' incontro del piano verticale MQ, ſecondo che più o meno ſi caccia innanzi, ſoſtiene le veci d' ogni *coſtante* data, ed il palicello PZ ſta in luogo di *polo*.

Il regolo AG circa la metà di ſua lunghezza ha un forame verticale, in cui per di ſotto (interpoſta prima una laminetta rotonda perforata, come nella *Fig.* 5., e groſſa quanto il raggio *t*K della *Fig.* 3.) entra il pivolo *t*, e quindi parte una ſcannellatura verſo A, in cui s'introduce, come ſi è detto, il palicello d' acciajo PZ. E' poi circondato da due anelli rettangoli forniti ciaſcheduno di uno ſtilo S, onde la curva ſi deſcrive; ma l'anello a ſiniſtra preſſo *n* in luogo d'abbracciare perfettamente detto regolo, come prima va a baciare il margine della ſcannellatura rimane interrotto, e laſcia paſſaggio libero al palicello PZ: lo che, diſſi, aſſai più chiaramente ſi dà a vedere in ſezione (*Fig.* 4.) dove il parallelogrammo A*n* per ombra diſtinto rappreſenta l'anello A*n* della *Fig.* 2. coll'anneſſo grafio S, e con la vite *d*, onde ſi fermi in quel punto, che più piace; il ſeguente parallelogrammo da quello circoſcritto, e che tiene tuttavia la bianchezza della carta, rappreſenta un taglio del regolo AG fatto per traverſo; e finalmente l'intimo PZ da queſto bianco racchiuſo ſignifica il palicello PZ della *Fig.* 2. che ſi dilata e riempie detta bianca cavità.

Lo ſpazio *t*A preſo ſu detto regolo AG, a qualunque data *intercetta* ſi può eguagliare, ſoſpingendo li anelli, e fermandoli in data diſtanza con le opportune viti. Avvertendo per fine, che tanto ſiano lunghi li ſtili e palicello PZ, quanto fa di meſtieri, acciò i *piani orizzontali* dei parallelepipedi, aſta, e regolo ſiano tra di loro ed all'orizzonte paralleli.

Ciò fatto qualora ſia data qualunque *interiore* o *eſteriore* Concoide da deſcriverſi, preparata prima, come ſi è detto, la macchinetta, niente più importa, che con la deſtra dar moto al regolo AG, acciocchè movendoſi in *t* nella direzione DR, e ſtriſciando nello ſteſſo tempo d'intorno al palicello PZ, dalli ſtili S overo *ſ* vengan deſcritte le propoſte curve, vale a dire, dallo ſtilo *ſ* la Concoide *eſteriore*, e dallo ſtilo S l'*interiore*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Origine e descrizione organica della Concoide della Contessa Agnesi.

NOn è da tralasciare, che la Concoide KPQPS (*Fig.* 1.) che la celebre Contessa Maria Gaetani Agnesi (1) produsse nelle sue *Instituzioni Analitiche*, non è stata, che si sappia, prima da altri conosciuta. Essa si avvolge in nodo, e nel *polo* P si interseca e risulta, come già dissi, dall' essere le intercette *to*, *to* ec. più lunghe della data *costante* CP, della quantità PQ. Onde per descriverla si dovrà far di modo, che la distanza *t*A (*Fig.* 2.) sia maggiore della CP, come appunto si ritrova a caso nella presente figura.

ARTICOLO QUARTO.

Origine delle Concoidi di base circolare.

CErta cosa è presso tutti i Matematici, che la linea retta aver si può come porzione della periferia di un circolo infinito; onde ne segue, che le Concoidi di Nicomede, che hanno per base o sia *direttrice* una retta, han per base o *direttrice* una porzione della periferia di un circolo infinito; e sono caso particolare, e dipendente da un generale, nel quale le Concoidi nascono da base, che sia un circolo finito. Dopo aver dunque detto di quelle ormai vecchie nella memoria degli uomini passeremo ad esporre l' origine e descrizione organica di queste, che, se mal non penso, non furono note per lo innanzi.

Pertanto se per i punti (*Fig.* 1. *Tav.* 2.) della perife-
ria

(1) *Instit. Analit.* Lib. I. cap. 5. probl. 4.

ria TT*tt* ec. e per il *polo* R ſi tirino molte rette indeterminate PTNRN, PTNRN ec. ed in queſte col compaſſo ſiano definite le *intercette* eguali ad una data, o al di ſopra della *direttrice*, come ſono TP, TP, *tp*, *tp* ec., o al di ſotto come TN, TN, *tn*, *tn* ec. la linea ſcorrente per i punti PP *pp* ec. ſarà una Concoide *eſteriore* ed *interiori* quelle, che uniranno i punti NN *nn*, NN *nn*, le quali tutte è da notare, che avranno l' aſſe eguale al diametro del *circolo generatore*, o ſia periferia *direttrice*.

Due cagioni poi concorrono a modificare la forma apparente delle Concoidi di queſto genere. Prima, perchè le *intercette* TP, TP, *tp*, *tp* ec. o ſia TN, TN, *tn*, *tn* ec., ovvero (*Fig.* 2.) TO, TO, *to*, *to* ec. ſono pareggiabili ad ogni data; onde le Concoidi *interiori* ora accadono tra il *polo*, e la periferia *direttrice* dentro l'angolo *t*R*t*; ora al di qua del *polo* compreſe nell' angolo al vertice oppoſto *a*R *a*; talora ſono eguali e dal *polo* egualmente diſtanti, come NN *nn* ec., NN *nn* cc., ma ſempre per il vertice oppoſte; e talora parte di una medeſima Concoide, come OO ec. (*Fig.* 2.) ſta ſituata di qua, e parte *oo* di là dal *polo*, coſicchè preciſamente nel punto polare R ſe ſteſſa interſeca, formando due ſeni, che eſſer poſſono eguali, o l' uno dell' altro maggiore, o minore; e in queſto caſo la Concoide OOR, *oo* ec. è analoga a quella della Conteſſa Agneſi celebrata di ſopra; perchè parte delle *intercette*, come TO, TO metton capo tra il *polo* R, e la periferia *direttrice* ſotto l'angolo *t*R*t*, e parte come *to*, *to* cadono nell' apertura dell' angolo oppoſto *o*R*o*. In ſecondo luogo variano dette Concoidi, perchè la diſtanza, che è dal *polo* R al *centro* C della periferia *direttrice*, può parimenti eguagliarſi ad una *coſtante* data, quale ſe ſi ſupponga infinita, e però nell' infinito andato anche il *polo*, le indeterminate dovendoſi in tal caſo conſiderare a ſe ſteſſe parallele, le *intercette* poi non potrebbero altra curva fornire, che una periferia

riferia eguale affatto alla periferia *direttrice*. Ma se il *polo* è situato di qua dall' infinito (prescindendo per ora dalla lunghezza delle *intercette*) più o meno acuto risulta il vertice della curva, secondo che più o meno essendo distante il *polo* della periferia *direttrice*, risulta l'angolo al *polo* di maggiore o minore apertura. Onde è qui da notare ciò che aggradiranno per avventura i Meccanici, ed è, che se la *costante* CR sarà eguale a otto diametri incirca del circolo generatore, e le *intercette* a tre, ovvero $13\frac{1}{2}$ incirca, ne verrà una curva (*Fig.* 3.) o tra il *polo*, e la periferia per il primo caso, cioè se le *intercette* saranno eguali a tre diametri del circolo generatore; o di qua dal *polo* per il secondo caso, cioè se dette *intercette* saranno eguali a $13\frac{1}{2}$ diametri di detto circolo, la quale gentilmente rappresentarà una sezione di uovo, di cui spesso può occorrerne l'uso, per fare di una simil forma o quadri di pittura, o cornici, o che altro so io.

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica delle Concoidi di base circolare.

LA descrizione organica di questo genere di Concoidi si riduce felicemente alla macchinetta di sopra esposta. Primieramente sol basta condurre il prisma *pt* (che già s' intende essere dentro la scannellatura dal parallelepipedo DR) nella giusta metà di essa, cosicchè il pivolo *t* soggiaccia verticalmente a quel punto del piano verticale MQ, in cui va a urtare la linea PC. Si fermi poi in detto punto il prisma con la vite *q* situata nel fianco del parallelepipedo, giacchè resta per queste Concoidi inutile affatto la scannellatura DR. Indi levata dal pivolo *t* la laminetta espressa nella

Fig.

Fig. 5., bisogna mettervi in suo luogo il raggio *t*K della *Fig.* 3., e far entrare (*Fig.* 2.) nel forame *t* del regolo AG non già il pivolo *t*, ma la estremità K uncinata di detto raggio *t*K. Per altro tanto le *intercette* TP, TN, TO della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., quanto la *costante* CR a qualunque data si eguagliano, prendendo rispettivamente quelle nel regolo AG (*Fig.* 2. *Tav.* 1.) e facendo *ta*, ovvero *t*A eguale a dette *intercette*, e questa nell' asta PH, facendo CP eguale alla data *costante* CR della *Tav.* 2., non altrimenti che se si trattasse di preparare la macchinetta alla descrizione delle Concoidi di Nicomede, cosicchè il pivolo *t* vaglia per il centro C della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., ed il palicello PZ per il *polo* R di dette figure. E per ciò che riguarda il moto di detta macchinetta, dove per le Concoidi di Nicomede il forame *t* del regolo AG era mosso nella direzione DR, ora per questa sarà con la mano spinto per un cerchio, il di cui raggio sia *t*K della *Fig.* 3. *Tav.* 1. Notando che quantunque detto raggio *t*K sia sempre il medesimo, perchè però si può modificare ad arbitrio l'asta PH, che fa, come dissi, per la data *costante* CR, si ponno nondimeno conseguire infinite Concoidi di questo genere di base circolare.

Qui però io non voglio dissimulare una difficoltà, che da' Meccanici potrebbe venir fatta in proposito della descrizione da me loro promessa della sezione di un uovo; perchè intorno a picciole sezioni, qual' è quella della *Fig.* 3. *Tav.* 2., non v'è che ridire, ma se ad un quadro o cornice si dovesse dare la forma di una tal curva, di cui l'asse maggiore *ab* fusse (che poi non sarebbe gran fatto) lungo cinque soli piedi di Parigi, ne seguirebbe che sebbene accadesse la descrizione tra il *polo* e la periferia *direttrice* (supponendo le *intercette* eguali a' tre diametri di detta periferia) nonostante, essendo stata supposta la *costante* CR eguale ad otto diametri della periferia medesima, la porzione PC dell' asta PH della *Fig.* 2. *Tav.* 1. verrebbe per lo meno ad

essere

essere lunga 40. piedi di Parigi. Perchè essendo l'asse dato di piedi cinque, di cinque piedi parimenti sarebbe il diametro del circolo generatore, che, come abbiam detto, all' asse della curva si eguaglia; ma la data *costante* CR, ovvero CP, cui si suppone eguale, si suppone dover essere eguale a otto diametri incirca del circolo generatore; e perciò moltiplicato 8 per 5, la lunghezza della data CR, ovvero CP ascenderebbe certamente fino a 40. piedi di Parigi. Onde chi non vede essere la bottega di un Artefice angusta troppo per una macchina tanto enorme? Pure io son per farmi incontro a questa obbiezione, non già con animo di risolverla, ma col tentare di procacciar loro questa comodità per altra via. E però oltre che assai bene riesca una simil curva dall' accozzamento di un semicircolo *mbn* con un semielisse *man* (*Fig.* 3. *Tav.* 2.) di cui l'asse minore *mn* sia eguale, e coincida col diametro di quello, spiegarò inoltre a suo luogo (a) come conseguir anche si possa con l'uso di un semplice filo; metodo, per vero dire, di cui nell' opinione degli Artefici non v'ha il più utile, nè il più facile. Ma per ora basti della descrizione ed uso di questo primo Istromento.

(a) Istrom. VI. Art. III. e IV.

ISTROMENTO II.

PER LA CISSOIDE DI DIOCLE, E PER LA CURVA DI M.R CARRE'.

COspirarono ad un medesimo fine le invenzioni di Nicomede, e di Diocle, poichè quello la Concoide, e questo la Cissoide inventarono per la duplicazione geometrica del cubo (1); ma essendo che per questa non che gli antichi Filosofi indarno travagliarono, ma ancora i moderni vanamente v' impiegarono le forze del loro ingegno, noi contenti di più umili ricerche, dappoichè abbiam detto della Concoide, passeremo soltanto a spiegare l' origine e descrizione organica della Cissoide.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine della Cissoide.

SIa dunque (*Fig.* 1. *Tav.* 3.) la retta QO tangente il *semicircolo generatore*, e posta ad angoli retti del diametro

(1) Voglio dire per trovare due medie proporzionali. Conciossiacchè quando fosse proposto di trovar due medie continue proporzionali x, z tra due dati estremi A, B si segni, (*Fig.* 1. *Tav.* 3.) sul diametro QP la QI = alla data A; e da I si meni la perpendicolare Iu = alla data B. Poi dal punto Q per u occorra nella già descritta curva PZ la retta QZ; e si faccia A ad x, come QL ad Lm; e come mL ad LP, così x a z, perchè le rette x, z che ne verranno, saranno le due medie cercate.

Il P. Milliet (*Geom. Prat.* Lib. III. Prop. 28.) facilmente dimostra, che tirato per qualunque punto z della Cissoide la mL perpendicolare al diametro PQ risulta ⸫ QL . Lm . LP . LZ. Ma QI sta ad Iu, come QL ad LZ; ed è QL ad LZ in ragion triplicata di QL ad Lm, cioè in ragion triplicata di A ad x; così pure QI ad Iu in ragion triplicata della medesima A ad x, ed anche di x a Z. Dunque le rette xZ sono medie continue proporzionali tra QI ed Iu, cioè tra A e B. Ciò che era a dimostrarsi.

Quando perciò di questi quattro termini ⸫ A . x . z . B si supponesse che A fosse doppio di B, il cubo eretto sulla Z sarebbe (come già si sa) doppio del cubo eretto sulla B; ed il gran Problema risolto.

metro Q P, e siano dal punto estremo P alla tangente condotte molte rette P*b*, P*d*, P*f* ec. delle quali le porzioni *ab*, *cd*, *ef* ec. comprese tra la periferia del semicircolo, e la tangente siano col compasso trasferite dall'altra parte sulle medesime linee rispettivamente; cosìcchè facendo sempre capo in P, siano P$t = ab$, P$r = cd$, P$z = ef$ ec. Allora la linea scorrente per i punti P, t, r, z, y sarà la proposta Cissoide.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Cissoide.

L'Istromento preparato (*Fig.* 2.) alla descrizione organica di questa curva nella simplicità e geometrica eleganza va, se non erro, del pari con quelli che per le sezioni coniche, o altre curve si inventarono. Egli consiste primieramente in una tavoletta LNP, il di cui margine LCP sostiene le veci del diametro del circolo generatore PQ, quale appunto s'intende essere ad esso margine eguale, e messo per dritto con tutto il rimanente della *Fig.* 1. quivi posta a lato. Ad angoli retti poi di detto margine, o sia diametro LCP sta afferrato alla tavoletta un regolo PG, ch'è invece della tangente QO, e ad essa parallelo incavato per il lungo di una scannellatura, non altrimenti che il parallelepipedo DR della *Fig.* 2. *Tav.* 1., ed in esso altresì scorre un prisma fornito al di sopra di un pivolo D. Due altri pivoli P ed L stanno pure fissi nei due estremi del margine, o sia diametro LCP. Un altro pivolo ancora è posto in C, intorno a cui si muove l'asta CR, che sta per raggio del semicircolo PRL al generatore eguale, e che incurvandosi nella estremità R, s'introduce ed abbraccia i lati fessi di due norme indeterminate ADB, FPE, la prima delle quali gira d'intorno al pivolo fisso nel prisma D, e riceve nel fesso lato AD il pivolo L, oltre il detto raggio uncinato CR. L'altra poi è mobile d'intorno al pivolo P, ed un lato PF, come dissi, si attiene parimenti all'introdotto uncinato raggio CR, e nell'altro PE ha un anello scorrente fatto come in sezione z fornito di uno stilo, che s'insinua nella fessura del lato della prima norma ADB, e quindi perpendicolarmente discende sul piano della carta. Ora fermata al detto piano con la sinistra la tavoletta LNP, e situate prima le parti in guisa tale, che CR coincida per quanto sia possibile con CP, DL con PL, PF con PG, PE con PQ, ed i punti RDS siano uniti tutti nel punto P; traendo poi con la destra il pivolo D con lo scorrente prisma verso G, dallo stilo S del lato BD della norma ADB sospinto, verrà descritta la proposta curva. Della quale alcuni soli punti mancaranno in P, perchè ivi non può darsi in pratica un preciso concorso dell'uncino R, pivolo D, e stilo S; difetto che sarebbe considerabile, se anche ad altre macchinette inventate da' più celebri uomini (1) non fosse comune. E molto più se (ciò che non è) rendesse inutile la curva in quell' uficio, cui è stata destinata.

Per verificare poi la prefata costruzione per rapporto all'origine della curva, dimostrarò essere P*e* costantemente eguale ad SH. Imperciocchè dovendo in qualunque posizione l'angolo LRP esser retto, retto del pari sia l'angolo PRD, e così essendo gli angoli ai punti P, D per supposizione retti, retto pure sarà l'angolo PSD, e quindi sarà PRDS un parallelogrammo, e però il lato PR parallelo è eguale al lato SD, ed il lato RD costantemente parallelo ed eguale al lato PS. Ma essendo LP posto in diretto con PQ, la retta QL cadendo sopra le parallele ESP, DRL, fa l'angolo esterno EPQ eguale all'interno PLD, e quindi gli archi Q*e*, PR, dalla metà de' quali vengono mi-

(1) Le macchinette di Francesco Schooten composte col filo per le sezioni coniche soggiacciono al medesimo difetto.

ſurati, appartenendo a' cerchj eguali, ſaranno parimente tra loro eguali.

Inoltre perchè ne' due triangoli PLD, QPH gli angoli PLD, QPM ſono ſtati moſtrati eguali, e gli angoli in P, Q ſono per ſuppoſizione retti, e per ſuppoſizione pure il lato LP è eguale al lato PQ, ſarà anche il lato PD al lato QH eguale.

Quindi ne' due triangoli miſti RPD, *e*QH i lati PR, PD dell'uno ſaranno eguali ai lati corriſpondenti Q*e*, QH dell' altro, ed eſſendo gli angoli RPD, *e*QH da eſſi compreſi eguali, per eſſer angoli che fanno le tangenti PD, QH cogli archi riſpettivi PR, Q*e* di cerchj eguali, ſarà anche la baſe RD d'un triangolo miſto eguale alla baſe *e*H dell' altro; ma RD ſi è moſtrato eguale a PS; ſarà dunque PS ſempre eguale ad *e*H. E togliendo ad ambedue la porzione comune *e*S, reſtarà P*e*=SH. Ciò che era da provarſi.

ARTICOLO TERZO.

Deſcrizione organica della Curva di M.r Carrè.

SE poi tolte via dall' Iſtromento le parti inutili, ſi componga la norma ERF in quella ſituazione, che dimoſtra la *Fig.* 3. e che con la vite *z* ſi fermi l'anello con l'anneſſo ſtilo, qualora RS ſia eguale a PL, movendo il raggio CR, e ritenendo ferma con la mano la tavoletta LNP, riſultarà la deſcrizione della Curva di M.r Carrè (1) celebra-

(1) *Memoires de l'Academie. An.* 1705. *pag.* 56. Ivi il teſto Franceſe dà a veder chiaro, che la curva deſcritta dall'Iſtromento è appunto quella di M.r Carrè. Perchè (mutate le ſole lettere del teſto in quelle della mia figura) ſi eſprime così: *Soit décrit le demicercle* PRL; *ſi l'on ſuppoſe que ſon diamêtre* PL *ſe meuve ſur le point* L, *tandis que l'extremitè* P *parcourt la demi-circonference* PRL, *il eſt viſible que l'autre extremitè de ce diamêtre decrira dans ce mouvement une courbe* LSD, *qui à pour axe la ligne* LD = PL. E però anche l'equazione viene ad eſſere la medeſima, che ivi ſe gli aſſegna: cioè che S*n* = RL − L*m*.

brata nelle memorie dell' Accademia, e la di cui origine non espongo, come quella che dal necessario moto dell'Istromento si mostra chiaramente.

Di più, se levato via il raggio CR (*Fig.* 2.) e la norma FPE, e nelle braccia dell'altra norma ADB fusse introdotto, e fermato in qualunque sito m, ovvero x l'anello con lo stilo S, mentre il pivolo D fusse condotto da P verso G lungo il regolo PG, il punto m descriverebbe una Concoide *interiore*, ed il punto x una *esteriore*; delle quali sarebbero LP la data *costante*, L il *polo*, PG la *direttrice*, Dm, Dx le *intercette*; potendosi generalmente prendere in considerazione un qualunque altro punto del circolo $gxmq$, di cui il diametro gm prodotto sempre passi per il *polo* L, mentre il centro D sia guidato per la base PG: perchè qualunque sito D acquisti il centro D partito da P verso G, primo le intercette Dx (giacchè sull'intercetta Dm non cade quistione, essendo il caso semplicissimo della Concoide *interiore* di Nicomede) tra la Curva, e la *direttrice*, benchè costituenti con l'indeterminata LD un angolo dato LDx, restano anche in questo caso tuttavia eguali. Secondo, è da concepire che in principio di moto, quando D era in P, qDx era posto in diretto con GP prodotto; ed mDg con LPQ coincideva. Onde sospinto poi D verso G, la differenza dell'angolo d'inclinazione, che le intercette per esempio Dx, Dg fanno di mano in mano con la *direttrice* PG, è sempre la medesima quantità oDq passata di sotto della *direttrice*; e ciò così rispetto al punto g, che prima in P faceva un angolo retto con detta *direttrice*, come rispetto al punto x, che con essa *direttrice* formava due angoli parimente retti, e rispetto a qualunque altro punto, che fosse preso su detta circonferenza g, x, m, q. E quindi si può dedurre una proprietà molto semplice e comune a qualunque punto preso su detta periferia g, x, m, q, qual è, che il rettangolo della porzione di base PD moltiplicata nell' intercetta, sarà sempre eguale al rettangolo della porzione ne dell' indeterminata LD moltiplicata in oq, ſeno della differenza oDq di detto angolo d'inclinazione qualunque dato. Perchè (tirate le perpendicolari gr, qo prodotta in y) i triangoli gDr, LDP ſono ſimili; ma ſono pur ſimili gDr, yDo; e per eſſer Do perpendicolare ad yq, e l'angolo gDq retto, ſono ſimili anche i triangoli yDo, Dqo, e quindi ſimili gDr, Dqo; e per conſeguenza ſimili LDP, Dqo. Onde DL. DP :: Dq. qo. Dunque per fine $PD \times Dq = LD \times oq$. Ciò che era a dimoſtrare.

Io avrei potuto di leggiero, modificando la mia prima macchinetta, renderla atta a deſcrivere anche tutte queſte *Concoidi*, ſe non tanto l'inutilità e facilità del progetto, quanto la difficoltà di poterla dare poi ad intendere in diſegno con eguale nettezza, non me ne aveſſe diſtolto.

ARTICOLO QUARTO.

Quali Curve ſi convenga deſcrivere con un medeſimo Iſtromento.

PRegiando io al ſommo il giudicio di un Uomo preclaro tra i più illuſtri di queſta noſtra età, ho motivo non piccolo di dubitare, che donando egli forſe, quando che ſia, qualche rifleſſo alla coſtruzione del predetto Iſtromento, trovi che opporvi, maſſimamente avendo altra volta dimoſtrato in queſta parte l'animo ſuo dicendo: (1) *Inſtrumenta . . . . . . non alia facile recipienda eſſe . . . . præterquam illa, quorum unumquodlibet lineas infinitas generis ejuſdem deſcribere queat*. Ma appunto queſto giudicio di lui quanto più da me venerato, altrettanto mi conforta a produrre il mio parere. Sembrami dunque, che, rettamente eſaminando, abbiaſi a diſtinguere, ſe le Curve, che intraprendiamo a deſcrivere, ſiano di tal genere, che non v'abbia altra differenza tra l'una e l'altra, che di maggiore o minor

(1) Poleni in Epiſt. ad Jacobum Hermannum.

nor grandezza, come la *Cissoide*, il *Circolo*, la *Cicloide*, che sono mutabili soltanto secondo il più ed il meno, immutabile restando la loro simmetria; o siano pur di tal sorta, che non solo siano alterabili secondo il più ed il meno, ma in varie e nuove guise spiegandosi, e flessi e regressi variando, all' occhio d'esse più non appajano, quantunque lo sieno, e per tali vengano dall' equazione accusate. Il che avviene delle *Concoidi*, mentre per la forma apparente le *esteriori* alle *interiori* non s'assomigliano nè le prime, nè le seconde a quella della Contessa Agnesi. E però dico, che si debbano descrivere con un solo Istromento infinite Curve d'un istesso genere di quest' ultima razza, perchè così veggasi la Curva trasformarsi, e passare per tutti li stati suoi quasi per gradi. Intorno poi a quelle di tal genere, che altra alterazione non patiscono, che di maggiore o minor estensione, distinguo di nuovo: O elleno tornano frequentemente in uso agli uomini, come il *circolo*, l'*elisse*; o sono per questo capo tuttavia inutili, come la *catenaria*, e simili. Nel primo caso parmi, che costruendo l'istromento si debba aver riguardo ad infinite grandezze di un medesimo o *circolo*, o *elisse*, o altre tali, intendendo però il termine d'infinito per il suo dritto. Nel secondo della *catenaria*, e simili, stimo certamente soverchio, che un prudente inventore indirizzi a tale scopo le sue meditazioni; sì perchè manca una certa utilità, che lo persuada, sì anche perchè questi tali Istromenti non ad altro occupano i tavolini de' Geometri, che per tosto fornir loro una curva, qualora per avventura solleciti di una bella figura, che dovesse incidersi in rame, o usare in qualche dimostrazione, vogliono sottrarsi al tedio di un più lungo metodo. Per altro era facile a me il render capaci di modificazione le distanze CR, CP, CL (*Fig.* 2. *Tav.* 3.) per conseguire *Cissoidi* infinite, le une maggiori dell' altre, quando avessi giudicato, che altri non avessero saputo farlo da se, siccome mi son ingegnato di fare per la descrizione organica ca della *Cicloide*, conformandomi appunto al piacere del ſopra celebrato Autore per le ragioni addotte. Ma ſia per ora fatto fine a queſto ragionamento.

ISTROMENTO III.

PER LA LINEA QUADRATRICE.

E' Sempre ſtato, e credo che mai ſempre ſarà un arcano profondiſſimo della Geometria l'arte di dividere colla ſola riga, e compaſſo un angolo qualunque in tante date parti, e ſpecialmente in tre; così pure la maniera di quadrare l'area di un circolo dato. Perciò ſin da più alti ſecoli ſi è inveſtigata la ragione, che paſſa tra il raggio e la periferia, come quella che avrebbe potuto condurci allo ſcoprimento dell'uno e dell'altro miſtero. Dinoſtrato fiſſando l'animo a queſto doppio ſcopo inventò la ſua linea *Quadratrice*, la quale ſe ſi poteſſe deſcrivere geometricamente, manifeſtando la ſuddetta ragione, ſciorrebbe li due (1) celebri problemi; ma

C non

(1) Per moſtrare come queſta curva ſoddisfi alla prima intenzione dell'Autore, che è la triſezione dell'angolo, ſupponiamo per eſempio (*Fig.* 3. *Tav.* 2.), che ſia propoſto l'angolo MCD da dividere in tre parti date. Onde dal punto S, in cui il raggio CD s'interſeca con la curva MSBH (che già ſi vuol ſupporre deſcritta) ſia condotta una SP perpendicolare al lato MC. Di poi ſi divida geometricamente, come far ſi può, la retta MP nelle tre date parti, dalle quali tirate altrettante parallele a PS, per li punti, dove queſte tagliano la curva, ſi menino tre raggi dal centro C, li quali divideranno l'angolo MCD nelle tre parti date.

Circa poi al ſecondo progetto, che è la quadratura del circolo, quando geometricamente ſi deſſe, come in vero non ſi dà, la preciſa ſituazione del punto eſtremo H; e che CH *baſe*, come ſi dice della *Quadratrice*, foſſe rigoroſamente data, moſtrando Apollonio, ed il P. Milliet (*Lib.* 2. *De Indiviſ. pro.* 4. *de Quadratrice linea*) che ∺ CH. CQ. QM circonferenza del quadrante, dati i primi termini CH, CQ, ſi conſeguirebbe anche il terzo QM. Onde poichè ſi ſa, che l'area d'un circolo è eguale ad un triangolo, di cui ſia baſe la circonferenza, ed altezza il raggio; ovvero eguale ad un rettangolo, del quale un lato ſia detta circonferenza, e l'altro lato la metà del raggio, l'area di un quadrato eretto ſopra una retta media proporzionale tra la circonferenza data per mezzo della *Quadratrice*, ed il raggio, ſarebbe eguale all'intiera area del circolo dato.

non potendosi ciò così conseguire, tenteremo almeno di delinearla per mezzo d'un Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Quadratrice, e sua descrizione per punti.

PEr dare ad intendere l'origine di questa curva, descritto prima il quadrante MCQ (*Fig.* 4. *Tav.* 2.) figuriamci che il semidiametro MZ conservandosi sempre ad angoli retti del lato MC si porti con un moto equabile verso il lato CQ, ed ivi giunga a coincidere nello stesso tempo, che vi perviene, anche il raggio CM, il quale ruotando equabilmente intorno al centro C, scorre tutti i punti DFQ di detto quadrante. Imperocchè allora tutti i punti d'intersezione del lato MZ col ruotante raggio CM presi insieme forniranno una curva MSBH, che è la *Quadratrice* di Dinostrato, ma in rigore mancante dell'ultimo punto H, il quale, ivi non seguendo più intersezione, si perde.

Si manifesta questa tale origine anche dalla descrizione per punti della medesima curva. Imperocchè diviso prima il lato CM in quante più si può parti eguali MP, PG, GC ec., e l'arco MDFQ in altrettante, conducendo poi ad angoli retti del lato CM le ordinate MZ, PS, GB ec. ed alla circonferenza li raggi CM, CD, CF, li punti d'intersezione MSB ec. saranno elementi della *Quadratrice*, che intraprendo ora a descrivere col seguente Istromento.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Quadratice.

IL P. Milliet (1) si lusinga, che la descrizione organica di questa curva sia facile, ma la prova mi fa accorto del contrario. Non ostante qualunque siasi, propongo la presente, e m'immagino che KAEN sia (*Fig.* 5. *Tav.* 2.) un telaro, di cui nel lato NE scorra la guida ZO connessa ad angoli retti col fesso regolo *o*P. D'intorno poi ad un pivolo C fisso nel lato AK movasi un quadrante C*ax*, di cui il raggio *x*C prolungato sia verso D, e fesso esso pure in una parte di sua lunghezza, e corredato di una guida S fermata ad uno stilo, il quale passando per le fessure del raggio *x*C prolungato, e del regolo *o*P, discenda sul piano a descrivere la curva.

Sia inoltre alla guida ZO attaccato un filo o catenella, la quale piegandosi indi d'intorno alla carrucola E vada per fine a congiungersi col quadrante suddetto nel punto *x*. Si rilevi poi la circonferenza del quadrante *ax* col farlo girare da Q verso Z, come per descrivere un quarto di *Cicloide*; e si rimova il punto O da Q verso Z uno spazio QZ eguale alla suddetta circonferenza *ax*. Cosicchè in principio di moto PO coincida con MZ; il lato *x*CD del quadrante con CM; ed il lato *ca* con CQ; e la catenella sia in questa prima situazione tangente in *x*. Perchè poi con la mano posta nella sommità D fatto volgere da M il regolo CD a destra sino in Q, avverrà che giungendo CD a coincidere con CQ, pervenga C*a* nella direzione CM, e la catenella diventi tangente a detto quadrante in *a*. Essendosi tanta quantità di essa avvolta sulla circonferenza del quadrante, quanta si è ritirata da Z fino a Q; giacchè per la costruzione QZ=*ax*; e però anche il regolo P*o* verrà tirato nel medesimo tem-

 po,

(1) Lib. II. *De indivisib.* prop. 1. *Descriptio lineæ Quadraticis.*

po, mantenendosi sempre verticale ad MC sino in CQ; e lo stilo S dalli due regoli CD, *o*P determinato alla descrizione della suddetta curva.

Questo Meccanismo (accresciuto di una correzione omessa a bella posta, ma necessaria per non perdere (*Fig.* 4.) i primi punti della curva in M, nè gli ultimi in C di un' altra curva M*r*C) regge sicuramente per conseguire una sola *Quadratrice*, di cui il lato ZQ, cioè MC sia eguale (*Fig.* 5.) ad *ax* circonferenza costante del quadrante. Ma per soddisfare intieramente al Problema, e molto più perchè questa curva entrarebbe nel numero delle curve utili, sarebbe stato mestieri, che, potendo modificare a piacere la circonferenza del quadrante *ax*, l'Istromento descrivesse una *Quadratrice* di un lato MC qualunque dato; il che non è così facile, come pare al P. Milliet. Tuttavia se si supponesse che il quadrante C*ax* fusse la base di un quarto di cono, di cui il vertice andasse perpendicolarmente a cadere nel centro C, si potrebbero sulla sua superficie prendere anche quadranti di diverse grandezze; ordinando poi le parti dell'Istromento in modo, che la carrucola E, ed il punto d' attacco *o* si potessero portare a livello delle differenti altezze de' quadranti presi d'intorno alla superficie del cono eretto su detta base C*ax*.

Un' opposizione ancora potrebbesi fare a questa macchinetta, ed è, che si prende la ZQ eguale al perimetro *ax* del quadrante, che si mette in uso; dunque nella costruzione di questo Istromento si suppone quel che si cerca col beneficio della curva da descriversi. A che risponderei, che si cerca nell' atto di costruire l' Istromento, come nell' atto di fabbricare un compasso di proporzione si cercano le sue divisioni; ma quando si vuole adoperarlo, senza altro tentare non si ha che portare il punto *o* nel Z già determinato.

A dir vero però io era per questa opposizione in procinto di rigettare l' Istromento, come non soddisfacente al Proble-

ma

ma in modo perfetto. Ma nonostante dappoi un nuovo animo mi suggerì di pubblicarlo, avvisando cosa onde si scemi in parte l'opposizione suddetta, e porgasi al leggitore di che pascere l'avida sua mente con nuova scoperta. Trovo adunque (*Fig.* 4. *e* 5.) che la ragione di ZQ comparato ad ax si riduce a tre casi: cioè ZQ eguale ad ax; ZQ maggiore di ax; ZQ minore di ax. Quando ZQ$=ax$, il raggio percorre la periferia di tutto il quadrante MDFQ, mentre l'ordinata scorre per tutti i punti del lato MC, e nasce la MSBH *Quadratrice* di Dinostrato, che ha per base CH. Quando ZQ$>ax$, mentre il raggio CM percorrerebbe tutto il quadrante NDFQ, l'ordinata compisce per esempio $\frac{2}{3}$ soli del lato MC, e nasce la curva MmF, la quale non può mai giungere a toccare il lato CQ, appunto perchè, non compiendo l'ordinata tutti tre i terzi del lato MC, non arriva nemmeno essa a coincidere con CQ; ma più che sarà maggiore lo spazio percorso da detta ordinata su detto lato MC, la piegatura della curva in F si farà maggiore e più vicina al punto H, dove così a poco a poco disponendosi, anderà a cadere, quando detta ordinata percorra tutto il detto lato MC, e la curva si trasformarà nella *Quadratrice* MSBH, mentre svanisce una parte di se confondendosi con la porzione HQ del lato CQ. Quando ZQ $<ax$, allora mentre il raggio CM percorre per esempio $\frac{2}{3}$ soli del quadrante MDFQ, l'ordinata compie intanto tutto lo spazio MC, e giunge a coincidere con CQ, e quindi deriva la curva MrC, la quale sempre tiene un' estremità nel centro C, e con una piegatura tanto più vicina al punto H, quant'è maggiore l'angolo MCF, si dispone a rimanere finalmente in H, trasformandosi essa pure nella *Quadratrice* suddetta MSBH, mentre svanisce una parte di se, perchè si combina, e si confonde colla porzione CG del medesimo lato CQ.

Ora

Ora questi due ultimi casi soggetti alla macchinetta sono casi particolari di un altro, che comprende anche quello della *Quadratrice* di Dinostrato, ed altri nove ancora, come qui appresso osservaremo, e che potrebbe in termini generali esser esposto così: Descrivere una curva formata dai punti d'intersezione del raggio CM moventesi equabilmente in un quadrante MDFQ intorno al centro C, e dell' ordinata MZ pure moventesi nel medesimo quadrante equabilmente, e sempre verticale ad alcuno dei quattro lati di esso quadrante. Quindi nel caso che tanto l'ordinata MZ, quanto il raggio CM si avvanzino verso la medesima metà CQ, si ponno immaginare, secondo la ragione delli spazj rispettivi percorsi equabilmante, moltissime curve; tutte però simili ad una delle tre MSBH, M*m*F, M*r*C, per mezzo delle quali si potrà sempre dividere in parti date un angolo dato, che non sia però maggior di quello, a cui sono opposte. La curva per esempio MSBH è opposta all'angolo retto MCH, e perciò vale a dividere in parti date qualunque angolo, che non sia maggiore di un retto. La Curva M*m*F ed anche la curva M*r*C essendo per supposizione opposte al medesimo angolo MCF vagliono a poter dividere in parti date un angolo, che non sia maggior del detto angolo MCF. In fatti supponiamo che sia proposto l'angolo MCF da dividere in due date parti per mezzo di ciascheduna delle tre curve suddette. Onde volendo primieramente adoprare la curva MSBH, si conduca dal punto B d'intersezione di detta curva, e del raggio CBF, che determina l'angolo MCF, si conduca, dissi, BG ad angoli retti del lato CM, indi dalla metà di GM si meni la perpendicolare PS, che il raggio CD condotto per S dividerà l'angolo MCF nelle due date parti. Secondo, così volendo far uso della curva M*m*F, tirata F*b* perpendicolare al lato MC, e dalla metà di *b*M condotta la verticale *dm*, avverrà che il medesimo raggio CD condotto per *m* dividerà l'angolo MCF in due date parti. Terzo, presa pure

alle

alle mani la curva M*r*C, e dalla metà del lato CM condotta la perpendicolare *yr*, ancor qui l'isteſſo raggio C*b*, che paſſa per *r*, dividerà l'angolo propoſto MCF in due parti date. Onde tutti i punti d'interſezione S, *m*, *r* dell' ordinate PS, *dm*, *yr* col perimetro delle curve corriſpondenti MSBH, M*m*F, M*r*C cadono nel medeſimo raggio CD, e il dato angolo MCF viene diviſo nelle due date parti per mezzo di qualunque delle tre curve propoſte.

Non ſo veramente ſe queſte due ultime curve abbiano una proprietà ſimile a quella, che tanto brilla nella *Quadratrice* di Dinoſtrato, cioè ſe, ſiccome in detta *Quadratrice* è ∺ CH. CQ. QM, così in quelle ſi poſſano fiſſare tre termini continui proporzionali, l'ultimo de' quali ſia una porzione della periferia di un circolo; ma io credo di no, perchè nella *Quadratrice* un termine della proporzione è la baſe CH, e abbiamo già oſſervato, che la curva M*m*F non ha baſe, perchè non giunge mai a toccare il lato CQ, così M*r*C non ha baſe, perchè va ſempre a reſtringerſi nel centro C. Nonoſtante io concludo in favore del mio Iſtromento, che quand' anche le curve nate dal non eſſere QZ eguale ad *ax* non ſerviſſero a rilevare la circonferenza del quadrante MDFQ per quindi definire la quadratura del circolo, almeno però ſoddisfano alla triſezione dell' angolo, che fu uno dei progetti, cui Dinoſtrato preteſe di applicar la ſua celebre *Quadratrice*.

Finora, ſuppoſto il raggio CM ruotante da CM verſo CQ, mentre l'ordinata MZ ſi avanza verſo la medeſima metà CQ, abbiam diſtinti tre caſi; ma tre ſimili caſi ſi ponno immaginare nel caſo che (ſempre ruotando il raggio CM da CM verſo CQ) l'ordinata andaſſe da CQ verſo MZ; tre altri quando detta ordinata progrediſſe da CM verſo QZ; tre caſi pure quando detta ordinata partiſſe da QZ verſo CM; onde dodici curve riſultano corriſpondenti a queſti dodici caſi tutti compreſi nel caſo generale ſovra enunciato.

Di tutte queste curve almeno sei sono descritte per mezzo della mia macchinetta. Imperocchè primieramente si è visto come si faccia uso di essa nel caso che ruotando il raggio CD (che fa per tutti i raggi) da CM verso CQ, l'ordinata poi (cioè il regolo P*o*, che fa per tutte le ordinate) proceda da MZ verso CQ. Ma quando detto regolo dovesse moversi da CQ verso MZ, la catenella passata su la carrucola E facciasi passare anche sopra un' altra carrucola N prima di fermarla a detto regolo P*o*; perchè allora mentre il raggio CD da CM girerà verso CQ, il regolo P*o* da CQ procederà verso MZ. Se poi la guida *o*Z col regolo P*o* annesso si trasporti nel lato del telaro KN, e la catenella passi sopra le due carrucole E, N; allora esso regolo movendo il raggio CD da CM verso CQ, si avanzerà da CM verso QZ. Se finalmente la catenella passerà sopra tutte tre le carrucole E, N, K, prima di essere attaccata al regolo PO, che si suppone ora scorrente nel lato KN, dico che procedendo il raggio CD tuttavia da CM verso CQ, il regolo si moverà da QZ verso CM.

Pare che queste curve, essendo ambedue i mobili generatori affetti di moto equabile, siano per avere fra esse un qualche comune rapporto, e ben sarebbe stato l'indagare le proprietà di ciascuna. Ma io lascio per ora da parte tali ricerche aliene in certo modo dal mio soggetto, acciocchè se gli aggrada, ne vadino in traccia quelli, che sono in materia d'ozio e in valore d'ingegno più di me felici.

Sarebbe qui il luogo ove riporre l'accennata *Spirale* d'Archimede, come quella che è nel numero delle curve antiche; ma si trova (1) altrove esposta per essere compresa negli usi di un altro Istromento.

ISTRO-

(1) Istromento IX. P. II. Artic. X.

ISTROMENTO IV.

PER LE SEZIONI CONICHE.

ARTICOLO UNICO.

COnobbero gli Antichi l'origine di queste mirabili curve nascenti dalla diversa sezione di un cono, e li Moderni le recarono a profitto, e non prima furono applicate alla *Catottrica*, *Diottrica*, *Prospettiva*, e in una parola all' *Ottica* tutta, non men che alla *Gnomonica*, e *Meccanica*, che diventarono le delizie de' Geometri più insigni; e però altri (1) dappoi trattarono della loro *descrizione per punti*, altri (2) della *Organica*. Ma tacendo della prima, che non entra se non per accidente nel mio instituto, circa alla seconda dico, che parecchi Istromenti furono inventati, e per quanto sia arrivato a mio lume, tre avvene per la *Parabola*, sei per l' *Iperbola*, dieci o dodici per l' *Elisse*, e per la medesima altri ancora, ma di minor pregio; perchè in molte arti occorrendo spesso la *descrizione organica* dell' *Elisse*, molti più chiari ingegni intorno a questa, che a verun' altra curva si occuparono. Ma per dire il vero quasi tutti questi Istromenti, quantunque affatto geometrici, in pratica però soggiacciono a molte incomodità e difetti, ai quali non si può facilmente trovare rimedio. Quindi è, che l'Istromento chiamato d'*Immitazione*, quantunque, anzichè parer geometrico, sia in vero troppo rozzo e volgare, perchè però per opinione anche d'altri (3) torna meglio di qualunque altro all' uso di un Professore, io

(1) Midorgio ha trattato diffusamente della *descrizione per punti* delle *Sezioni Coniche*.

(2) Francesco da Schooten della *descrizione Organica*. Ed altri ancora.

(3) Il P. Castel Traité LVI. *Descrip. General des Courbes*, dico: *Une methode organique, que je crois la meilleure des toutes pour dêcrir assez exactement toutes sortes de courbes, c'est celle de l'imitation. Prenez une lame* ec.

io ſopra tutti lo pregio. Laonde non ſarà forſe altrui diſcaro, che io qui ne rechi un ſimile per la deſcrizione delle tre curve ſuddette, quanto men conſiderabile da una parte, altrettanto più ſpedito dall'altra, più ſemplice e ſicuro. Sia dunque preparata una polita lamina d'argento, o altro metallo, in cui (*Fig.* 1. *Tav.* 5.) col metodo per punti ſi deſcriva diligentemente un' *Iperbola* HIL, una *Parabola* PRo, ed un' *Eliſſe* ABMN. Dipoi con finiſſima lima ſi tolga via tutto il ſuperfluo, coſicchè non rimanga ſe non quanto appare in figura. Ora con la mano guidato uno ſtilo o penna ſtrettamente d'intorno ai margini della reſtante lamina, quella ſezione verrà, che piuttoſto volevaſi delineare. Tale è l'Iſtromento, che per tali deſcrizioni tengo ancor io per mio uſo.

ISTROMENTO V.

PER LA LOGARITMICA E TRATTORIA.

NOn ſenza grande riputazione del nome loro Nepero trovò la *Logaritmica*, Claudio Perralto la *Trattoria*, ed il Sig. Marcheſe Poleni dell' una e dell' altra la *Deſcrizione Organica*. Ma avvegnacchè forſe, ſe mal non m' avviſo, riducendo la macchinetta del prefato Sig. Marcheſe a più poche parti, potrebbe forſe la compoſizione della medeſima riuſcire più facile ed intelligibile, ho penſato, che così foſſe bene deſcriverla come ſta in figura, laſciando nel piacere del diſcreto artefice l'aggiungervi da ſe altre parti, quando in pratica le trovaſſe neceſſarie, e conferenti alla natura dell' Iſtromento. E però vediam prima come ſi generi la *Logaritmica*, che poi paſſeremo alla ſua deſcrizione.

AR-

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Logaritmica.

PEr dar chiaramente a conoſcere l' origine di tal curva (*Fig.* 1. *Tav.* 4.) dai punti A*bcd* ec. egualmente diſtanti, e preſi nella linea A*f*, che ſarà la *direttrice* della curva, ſiano perpendicolarmente erette le linee A16, *b*8, *c*4 ec. che ſaranno le ordinate decreſcenti in data ragione geometrica. La linea 16, 8, 4, ec. che detti punti uniſce, ſia la *Logaritmica* propoſta, della quale l' eſſenziale proprietà è l' eſſere la di lei *ſottangente* eguale ad una coſtante data. Proprietà appunto ſu cui l' inſigne Autore fondò l' ingegnoſo ſuo Iſtromento, quale per me, come diſſi, non ſi muta, ma ſi riſtrigne, per così dire, in poco, acciocchè più agevolmente la ſua coſtruzione ſi concepiſca.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica della Logaritmica.

ECco pertanto di nuovo (*Fig.* 2.) un parallelepipedo EP ſimile a quello della *Fig.* 2. *Tav.* 1. ſcavato per il lungo di una ſcannellatura, in cui ſcorre un lungo priſma *d*A di ſimil forma, di cui parte ſta incaſſato nella cavità di quello, e parte ſovraſta al di fuori, abbracciato circa l' eſtremità *d* da una lamina traſverſale T*cd*, nel ſito *cd* ſimilmente per di ſotto incavata, e che ad angoli retti a detto priſma con una vite *c* ſi può in qualunque punto di quello fermare, come più chiaramente ſi moſtra in ſezione (*Fig.* 3.) dove D*c*R rappreſenta la lamina traſverſale T*cd* della *Fig.* 2.; EP dimoſtra un taglio fatto per traverſo del parallelepipedo PE, e la parte T nel mezzo con puntini ombreggiata è la ſezione del detto priſma *d*A, che quivi ſi vede, come per la ſua forma colla vite ſuperiore *c* ſi poſſa ſtringere con la lamina traſverſale DR. Parte di queſto priſma (*Fig.* 2.) è anche il pivolo *g*, che ſulla cima in ſpira ſi avvolge, e ſi accoppia con la madrevite *y*, di modo che, fermato comunque il parallelepipedo PE al piano della carta, ſe meſſa mano al manichetto M, ſi tira il priſma *d* A verſo E, ſeco eſſo porta anche il pivolo *g*, e la lamina traſverſale T*cd*, perchè tutti tre inſieme, quaſi che formano un medeſimo ſolido.

Semplice e intelligibile del pari riſulta anche la coſtruzione della ſeguente aſta *o*D e per la *Fig.* 2., e per un tronco di detta aſta traſportato più in grande nella *Fig.* 4.. Eſſa quindi (introdotto il pivolo *g* nella feſſura, ond' è per il lungo aperta e larga quaſi così come quello è groſſo) giace ſul priſma *d*A, e quindi preſſo D è ſoſtenuta da una ruota R verticale all' orizzonte, alla quale un' altra ruota K ſovraſta a quella eguale, ma all' orizzonte parallela e mobile d'intorno al pivolo *m*, ſituata di modo che una linea condotta dal centro di queſta ruota al punto, in cui la ruota verticale R tocca il piano della carta, paſſar debba preciſamente pel centro di detta ruota verticale R. Queſta ruota R dovendo ſegnar la curva ſulla carta, termina la ſua circonferenza in acuti e minutiſſimi denti, l'altra ruota all' oppoſto in un margine liſcio, eguale, e polito, acciocchè volgendoſi ſulla lamina traſverſale, non ſi ſcomponga, e turbi il moto dell' altra ruota R; avvertendo che ſe detta ruota R foſſe troppo leggiera per imprimere la curva ſulla carta, ſi potrebbe render più grave, caricando di una sferetta V il pivolo *m* prodotto al di ſopra della ruota orizzontale K. Si vuole inoltre (*Fig.* 2.) che i due maggiori piani dell'aſta *o*D ſiano coſtantemente paralleli all' orizzonte, al che coſpira e la grandezza della ruota verticale R, e la madrevite *y*, che a queſt'uopo nel fondo è aſſai larga, ed intorno al pivolo *g* ſer-

ſerrandoſi, frena e ritiene la inſtabil aſta *o*D, coſicchè non vacilli nè declini dal detto paralleliſmo, ma pure liberamente muovaſi. La lamina poi traſverſale T*cd* nel ſito *cd* in groſſezza tanto ſi eſtende, che la diſtanza *cd* dal piano verticale *c*T apparente in *Fig.* 2. al piano verticale *d* di detta lamina ſia eguale al raggio della ruota orizzontale K.

Ma ormai ſi concepiſca, la *direttrice* della curva eſſere una linea, che pel lungo tagliando per metà il parallelepipedo PE, ſi arreſti nel piano, e ſtia invece della *direttrice* A*f* della *Fig.* 1.; ond'io dico ora, che la linea tirata dal punto R (ove la ruota verticale tocca il piano della carta) al punto, che perpendicolarmente nella linea dell'aſſe, o ſia *direttrice* EP ſoggiace al punto *d*, ſarà un'ordinata alla curva; la linea tirata dal medeſimo punto di contatto R al punto, che nella linea dell'aſſe ſoggiace al punto *g*, ſia la tangente; e la *ſottangente* ſarà la linea preſa nell'aſſe e definita dai punti perpendicolarmente cadenti nel detto aſſe dai punti *d*, e *g*. Onde ſi vede, che per modificar detta *ſottangente*, non ſi ha che rimovere, o accoſtare al pivolo *g* la lamina traſverſale T*cd*, e poi in detta diſtanza fermarla con la vite *c* al priſma *d*A.

Tutte queſte coſe poſte, tirando col manichetto M il priſma *d*A verſo E, e conſeguentemente la lamina traſverſale T*cd*, gireranno tutte e due le ruote, ed il punto di contatto R ſi moverà per una linea, di cui la *ſottangente* *dg* ſarà coſtante, e quindi deſcriverà la *Logaritmica*.

ARTICOLO TERZO.

Della Trattoria di Perralto, ſua origine e deſcrizione per approſſimazione.

ESſendo che i prudenti e dotti uomini talvolta negli oziosi tempi degnarono della loro attenzione alcune coſe, che da prima parevano diſpregevoli, ma poi da quelle a grandi ſcoperte ſi trovarono impenſatamente condotti; così Perralto un dì oſſervando attentamente il movimento del ſuo orivolo portatile tirato per un capo della catenella anneſſa lungo una riga, s'accorſe di una curva tracciata dall' orivolo ſul piano della tavola. Onde (1) fattone conſapevole il Leibnitzio, e poi venutane notizia a Criſtiano (2) Hugenio, e da eſſi richiamata a ſottil eſame la natura ſua, ſi ebbe preſto trovato, che era ben degno oggetto di que' due inſigni Geometri quella curva, che prima ſol fu trattenimento di un ſaggio Oſſervatore; perchè e per eſſa ſi quadrarebbe l'*Iperbola*, e ſomminiſtra i punti della *Catenaria*, e della *Logaritmica*, e di altri teoremi belli e leggiadri è feconda, eſpoſti ampiamente e divinamente dal Sig. Marcheſe Poleni nella ſovracitata epiſtola. Ma fra le eccellenti ſue proprietà una principale, e che per ora fa al mio propoſito, è, che di tutte le *tangenti* alla curva le porzioni intercette fra eſſa e la ſua *direttrice* ſiano eguali; e però da queſta ſi potrebbe dedurre la ſeguente deſcrizione per *approſſimazione*.

Laonde preſa (*Fig.* 5.) col compaſſo una data *coſtante* aB, e fatto centro in un punto m qualunque di detta *coſtante*, ma più vicino ad a che ſia poſſibile, ſi ſegni il punto

(1) Negli *Atti di Lipſia* meſe di Settembre 1693.

(2) Nel *Giornale de' Letterati Oltramontani* meſe di Febbrajo 1693.

to C nella linea BK, che ſarà la *direttrice*, a cui da *m* ſia condotta la retta *m*C; poi fatto centro in *n* tanto da *m* diſtante, quanto *m* da *a*, e con la medeſima apertura tagliata BK in D, ſia condotta la retta *n*D; e così via via fatto centro in *o*, ſecata BK in E, ſia tirata *o*E ec. La linea ſcorrente per i punti *a*, *m*, *n*, *o* ec. ſarà la propoſta *Trattoria*. Imperciocchè e le linee B*a*, C*m*, D*n* ec. ſono per la coſtruzione eguali, e ſono anche *tangenti*; mentre dacchè la intercetta F*d* qualunque coſtitui una parte di ſe *bd* per elemento della curva, ancorchè poi venga prodotta in *z*, non però entra mai più nell' interno di quella; perchè quinci la porzione *b*F col proſſimo elemento *bc* forma l' angolo eſteriore F*b*G; e quindi nella parte oppoſta la prodotta *b*Z con l' elemento *bo* l' angolo parimenti eſteriore Z*do*; coſicchè per la coſtruzione tutte le intercette l' una nell' altra incontrando ſempre alla parte interiore con un angolo d' inclinazione qualunque (angolo però, il di cui lato oppoſto è coſtantemente una qualche parte della *direttrice* BK) ne ſegue, che dopo l' interſezione, l' angolo al vertice oppoſto ſempre occorra del pari alla parte eſteriore, e però le intercette B*a*, C*m*, D*n* ec. ſiano *tangenti*, e la curva deſcritta una *Trattoria*.

Ma qui m' occorre d' avvertire, che la ſuddetta deſcrizione è dalla deſcrizione dell' altre curve diverſa in queſto, che in quelle (come nella *Logaritmica Fig.* 1.) almeno alcuni pochi punti 16, 8, 4 ec. ſono realmente punti della deſcritta curva, benchè poi gli altri poſti fra il 16. e 8., fra 8 e 4 ec. non ſiam ſicuri che ſe le appartenghino. Ma nel mio caſo (*Fig.* 5.) niun punto ſi potrebbe veramente dire, che foſſe punto di *Trattoria*; perchè ſe foſſe altrimenti, converrebbe, che ſu le *tangenti* foſſero ſtate preſe le particelle *am*, *mn* ec. infinitamente piccole, ma col compaſſo non ſi potevano prendere ſe non di finita grandezza; onde ne ſegue che la propoſta deſcrizione della *Trattoria* per

approſ-

per *approssimazione* (1) vera in astratto, sia impossibile in pratica. Tuttavia parmi che il metodo usato in detta *Fig.* 5. quan-

(1) Dalla considerazione di questa curva pare che si possa dedurre una nuova foggia di armare un trave (*Fig.* 7.) BK, che alcun grave peso dovesse sostenere, componendo per di sotto a quello alcuni vetti Cm, Dn ec. in guisa di *tangenti* ad una *Trattoria*; perchè a prima vista si vuol credere, che di tutto il peso del trave BK parte debba gravitare contro il fianco della muraglia mB, e parte della sua forza premente venire conversa in se stessa. Imperciocchè supposto che il vette mC quinci poggi al muro nel punto m, e quindi nel punto C sostenga il trave BK, parmi (perchè il vette è applicato obbliquamente nel punto C) che la sua forza rispetto all' inclinazione della potenza a cui resiste, si possa considerare come risolvibile nelle due mB, mx, le quali resistono al trave in C: la prima da C verso b, che si oppone alla sua gravità, l' altra da C verso K; perchè è evidente, che, se il trave non fosse ben serrato nel muro, la gravità sua, e la obbliquità del vette cospirerebbero a farnelo uscir fuori.

Ora per trattenimento vorrei dimostrare, che se v' aggiungo un altro vette Dn, la gravità del trave nel punto D, che per mezzo del vette Dn va ad agire nel punto n del vette mC, accrescerà la forza del vette mC, che resiste nella direzione Cb, e diminuirà quella ordinata nella direzione CK. Doppio vantaggio onde il trave sia più validamente sostenuto, e ritenuto nel muro nel suo luogo B. E ciò perchè la forza mC, che prima era di semplice resistenza, viene ora per l'urto del secondo vette Dn accresciuta di una forza attiva risolvibile in due, una delle quali, come farò vedere, agisce in conseguenza della direzione Cb, scaricando così il muro di una parte di pressione, e l'altra opera da C verso B, cioè in verso contrario della direzione CK.

Risolta la forza del secondo vette Dn (*Fig.* 8.) nelle due gn, en, certo è che sulla forza gn non cade quistione, perchè questa agendo nella medesima direzione del vette cm, sicuramente si adopera contro la muraglia in m; ma la forza en agisce nel punto n ad angoli retti del vette mc; onde qui si troviam nel caso di una leva del terzo genere, in cui la potenza si esercita in n contro due resistenze, l' una in c, l'altra in m. Dunque l'azione della forza en sarà in c ed m in ragion reciproca delle distanze nc, nm. Si divida perciò la forza ne in i in ragion di dette distanze, cosicchè $cn : nm :: ni : ie$. E poi alla estremità della parte minore nm si faccia a detto vette mc una perpendicolare mz eguale alla maggior porzione ni, ed alla estremità c della parte maggiore nc si tiri la perpendicolare cd eguale alla minor porzione ei. Ora la retta mz rappresenta l' azione della forza en del vette Dn esercitata parimenti nella muraglia; la retta poi cd rappresenta la quantità dell' azione, che detta forza en adopera contro il trave BK.

Finalmente anche questa forza cd si risolva nelle due cq, cb; e si vedrà che cb opera in conseguenza della forza supposta nella *Fig.* 7. resistente nella direzione Cb; e perciò aumenta detta forza di una forza viva eguale a cb a scarico della muraglia. La forza poi cq, perchè opera in verso contrario alla forza ivi supposta ordinata nella direzione cK, diminuirà detta forza diretta per cK di una forza viva egua-
le

quantunque rigorosamente falso, nonostante in pratica si potrebbe ammettere, perchè se non altro, prendendo dette particelle *am*, *mn* ec. più piccole che si può, tanto detta descrizione fisicamente si accosta al vero parametro della curva, che si può dire quasi esser dessa; e spicca del pari quella proprietà principale detta di sopra, su cui si fonda anche la seguente descrizione organica.

le a *c q*; onde il trave BK sarà meno sforzato ad uscir fuori della muraglia. Ciò che era da dimostrarsi.

Un tale raziocinio stando per tutti gli altri vetti (*Fig.* 7.) *o* E ec. le forze contranitenti al trave dovrebbonsi poi intendere come sottrate da quel peso assoluto, con cui in altra guisa nel muro gravitato avrebbe. Mentre benchè a fortificar detto trave potrebbero immaginarsi altre disposizioni di vetti, come se tutti dai punti C, D, E andassero ad unirsi nel punto *m*; nonostante e allora graviterebbe il trave contro il muro con tutta la sua forza assoluta, e l'area E *m n o*, che nel mio caso si reca a guadagno, n' andrebbe per quelli impedimenti perduta.

Che se il trave BK (replicando a destra le *Figg.* 7. e 8. rovesciate) stasse con ambidue le estremità riposto per esempio su due muraglie per servire di volta, o sulle sponde di un fiume navigabile in luogo di ponte; in tal caso (oltrecchè l'area E *m n o* raddoppiata sarebbe molto opportuna acciocchè la volta riuscisse più aperta, ò i Navigj trovassero più spazioso e libero il passaggio) sembrarebbe poi anche, che la proposizione dovesse essere più probabile; perchè lasciando andare le forze *c q* ec. a sinistra distrutte dalle simili contrarie a destra (nelle quali a mio parere versava la maggior difficoltà) nulladimeno tutte le forze simili alla *c b* restarebbero, le quali contrapponendosi alla gravità del trave, alleggerirebbero le muraglie, o le sponde di una parte del suo peso assoluto; anzi viene in via di corollario, che quando il trave si caricasse di più, le forze contranitenti dovessero risultare maggiori.

Forse, avendo riguardo alla flessibilità del legno, e volendo che il peso ne' punti C, D, E sia maggiore, più che si ritrova distante da B verso K, potrebbe questo mio discorso riuscire anche più retto; ma io non vommene dichiarare in verun modo garante, e quand' anche andasse per avventura tutto ad urtare in qualche paralogismo, come pure ho qualche ragion di dubitarne, e che il trave, nonostante tale combinazione di vetti, caricasse tuttavia la muraglia con tutto il suo peso assoluto; contuttociò ho voluto questo mio sospetto semplicemente produrre per animare altrui a tentare con più efficace industria di recare la *Trattoria* a qualche uso, come il celebre Nepero fece della sua *Logaritmica*, proponendo sull' idea di questa curva il suo sistema de' *Logaritmi*.

ARTICOLO QUARTO.

Descrizione organica della Trattoria di Perralto.

SIccome Leibnitzio, che descriveva questa curva con un peso attaccato ad un filo, ed Ugenio con una rigida verga fornita alle due estremità di una punta, non erano contenti di questi loro Istromenti, perchè involgevano il Problema, ed erano lo stesso che tirar per la tavola l'orivolo di Perralto, in quella guisa appunto che sarebbe apposto a biasimo, se per descrivere le sezioni coniche, altri recasse prestamente innanzi tre pezzi di un cono, intorno a' quali una penna si avesse a guidare; così per la stessa ragione il Sig. Marchese Poleni non avrebbe di che esser molto lieto dell' Istromento suo, se non si potesse considerare come ad altra curva inventato, e quasi per un di più applicato anche alla *Trattoria*; e se di quello del Leibnitzio, e di Ugenio non fosse senza alcun dubbio migliore, e l'inventarne un ottimo sulle presenti equazioni impresa quasi che disperata non fosse.

Perlocchè ripigliando l'Istromento suddetto, dico che per descrivere la *Trattoria* basta (*Fig.* 2.) estrarre fuori del prisma A*d* la lamina trasversale *dc*T, e porla da canto come inutile, e nel forame *o* dell' asta *o*D far entrare il pivolo *g*, e usar poi l'Istromento, come si è detto, che così detta asta sarà la *tangente*.

Ma acciocchè la *tangente* si possa far eguale ad una costante data, in vece d'introdurre il pivolo *g* nel predetto forame, si faccia che entri nel forame di un anello, di cui (*Fig.* 6.) *ab* sia il piano orizzontale, ed il piano verticale sia *bd*, quale nei voti di mezzo riceva detta asta, espressa qui per il tronco GH, e che si possa a qualunque punto di quella fermare con la vite laterale *b*; avvertendo, che

l'anell'anello non circondi affatto detta asta, ma si arresti come prima tocca il margine del piano inferiore orizzontale di quella; acciò detta asta nel sito *g* non sia per la grossezza dell'anello più alta in questo caso della *Trattoria*, che non fu in quello della *Logaritmica*.

ARTICOLO QUINTO.

Trattoria di base circolare, sua origine, e descrizione per approssimazione.

Potendo noi non che le *Trattorie* pensate (1) dal Bernuglio, e dal Leibnitzio (2), ma infinite altre immaginare per lo variare infinito delle lor direttrici, dovrebbero restar in tanta dovizia le nostre brame spente, e di una già esposta contente. Pure non vo' mancare di accennare almen quella di base circolare, e per essere gentil cosa, e per essere un caso generale, che per le ragioni altrove addotte, comprende anche la *Trattoria* di Perralto.

Se dunque si concepisca (*Fig.* 2. *Tav.* 5.) un filo *ab* eguale per esempio al raggio del circolo *bcd* ec. di cui ad un' estremità *a* alcun peso sia attaccato, e l'altra *b* sia condotta per la periferia *bcd* ec. il peso *a* descriverà una *Trattoria* *a*, *e*, *f*, *g* ec. di cui *ab* sia la *tangente* eguale ad una costante data, e la base, o sia *direttrice* sarà la periferia *bcd* ec.

Questa curva si descrive altresì per *approssimazione*, come quella di Perralto; imperciocchè presa col compasso la data costante *ab*, che non ecceda il raggio del detto circolo *bcd*, e fatto centro in *e* punto vicino ad *a* più che sia possibile, si segni il punto *c* nella periferia direttrice *bcd* ec. cui da *e* sia condotta *ec*; poi fatto centro in *f* tanto da *e* distante, quanto *e* da *a*, e tagliata con la medesima apertura

(1) Bernuglio negli *Atti di Lipsia* mese di Giugno 1693.

(2) Leibnitzio negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

tura la periferia in *d*, sia condotta *fd*; e così procedendo fatto centro in *g* tagliata la periferia in *h* si tiri la retta *gh* ec. Allora la linea *aef* ec. rappresenta una *Trattoria* di base circolare; in cui, come in quella di Perralto, il peso *a* sempre più s'accosta alla base BK senza arrivare mai a una minima distanza, cioè a toccarla; così in questo caso della base *bcd* sempre più s'allontana, senza mai pervenire ad una distanza massima, cioè senza mai andar nel centro *c*, dove inclinando per una spirale *efgm* ec. sempre più s'avvicina, e non vi arriva giammai. Inoltre come (*Fig. 5. Tav. 4.*) nel caso di Perralto, scorrendo nella *direttrice* BK il *raggio* G*u* insieme col *quadrante conjugato* L*bu*G, ovunque in *b* taglia detta *Trattoria*, la taglia ad angoli retti; così anche in questo caso (*Fig. 2. Tav. 5.*) scorrendo il centro di un quadrante per la periferia *bcd* ec., e un sito *u* qualunque acquistando, dovunque ad un medesimo verso le spire della *Trattoria* da quello si tagliano in *m* ed *n*, si tagliano appunto ad angoli retti. Ma voglio lasciare nell'altrui piacere di rincontrare con più lungo confronto le restanti proprietà di queste due curve, giacchè ciò non appartiene al mio argomento.

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica della Trattoria di base circolare.

PEr non fabbricare appostatamente un Istromento per questa sola curva, basterà per ora levare da quello della *Fig. 2. Tav. 4.* l'asta oD, e messo un pivolo nel forame *o* di detta asta, o in quello dell'anello *ab* (*Fig. 6.*) che la circonda, condurre poi detto pivolo per la periferia di un circolo già prima segnato con lapis sul piano della carta. E qui voglio che la materia delle *Trattorie* sia spedita e al suo fine condotta.

ISTROMENTO VI.

PER LA CICLOIDE.

IN quella guiſa che le *Concoidi*, e le *Trattorie*, e tant' altre curve variano per lo infinito variare delle loro *direttrici*, così le *Cicloidi*, che generalmente naſcono dalla revoluzione di un cerchio ſopra una linea qualunque data, per lo infinito variar di detta linea, infinitamente variano. Ma per non entrare in queſta interminabile varietà, a quelle ſole conviene attenerſi, che o per il volger di un cerchio ſopra una retta, o ſulla periferia di un altro cerchio riſultano; giacchè, come fu altre volte notato, l'un caſo l'altro contiene, perchè ſi reputa la linea retta eſſere una periferia di un circolo infinito. Laonde riſervando per un altro luogo (1) le *Cicloidi* della ſeconda claſſe, ſi comincierà da quelle della prima, cioè di baſe retta; le quali avvegnachè ſiano di tal genere che non ripigliano nuove forme, ma ricevono ſoltanto alterazione di grandezza o eſtenſione; nonoſtante nella coſtruzione del preſente Iſtromento voglio riguardare anche a queſta ſorta di cangiamento; sì perchè queſta curva negli oriuoli a pendolo utilmente ſi potrebbe forſe adoperare, sì anche perchè l'Autore altre volte da me (2) lodato in propoſito della *Cicloide* eſpreſſamente dice: *Rotulam, cujus rotationis ope delinearetur Cyclois, inter germana organa haudquaquam ponerem, cum rotula una ad unam tantum Cycloidem delineandam uſui eſſe poſſit.*

AR-

(1) Iſtromento IX. Artic. IX.

(2) Il Sig. Marcheſe Gio: Poleni nel luogo ſopracitato.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine e proprietà della Cicloide.

SE adunque ſuppongaſi (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) un dato *circolo generatore* VRD ruotare ſulla retta baſe, o ſia *direttrice* DK dal punto V preſo nella periferia di detto circolo, verrà deſcritta una curva VSK, che ſarà una *Cicloide*, e le proprietà ſue inſervienti alla ſeguente coſtruzione ſaranno:

I. Che la *tangente* RT del *circolo generatore*, determinata dalla *tangente* ST della *Cicloide* nel punto d' interſezione T, eguaglia la porzione RS dell' *ordinata* OS compreſa fra la curva VSK, e la *periferia generatrice* VRD.

II. La porzione RS è eguale all' arco VR; ma la *tangente* RT è eguale a RS: dunque RT eguale all' arco VR; e perciò la *tangente* RT ſi chiama anche *devoluta* dell' arco VR.

III. La *Cicloide* VSK, di cui ſta il vertice nel punto V, due volte preſa è eguale a quattro diametri VD.

IV. Se finalmente ſi produca la ſottenſa DR, finchè occorra nella *tangente* ST della *Cicloide*, dico che la prodotta DR nel punto N divide per metà, e ad angoli retti la porzione di detta *tangente* definita dai punti eſtremi dell' *ordinata* OS, e della *tangente*, o ſia *devoluta* RT. Concioſſiacchè eſſendo eguali gli angoli ERD, DRF, perchè miſurati dalla metà d'archi eguali FD, DR, ſaranno eguali gli angoli al vertice oppoſti TRN, NRS; ma ſono eguali parimenti gli angoli TSR, STR, perchè oppoſti a lati per la coſtruzione eguali TR, RS; e perciò il triangolo STR è *iſoſcele*. Dunque la prodotta DR dal vertice dell' *iſoſcele* R condotta nella baſe ST, giacchè divide per metà l'angolo TRS al vertice R, tagliarà parimenti per metà, e ad angoli retti la baſe ST a quello oppoſta.

Tutte queſte coſe ſi vogliono aver dette in qualunque punto to della periferia VRD occorra il punto R di comune intersezione delle linee ET, DN, OS, e raggio CR. Onde mi piace di seguire questo punto d'intersezione R per tutto il corso della *periferia direttrice* VRD, ed esaminare i moti particolari di dette linee intersecanti, che per rapporto alle suddette proprietà devono risultare.

ARTICOLO SECONDO.

Nuova origine della Cicloide risultante dalle sue proprietà.

QUel *circolo generatore* VRD, che nel precedente Articolo fu detto, che generava la *Cicloide* ruotando sopra la *direttrice* BK, ora intendo, che immobile stia, e che la curva derivi da tali movimenti relativi alle sue proprietà.

Laonde acciocchè primieramente la porzione RT della *devoluta*, o sia *tangente* ET (in qualunque punto R tocchi la periferia direttrice) sia eguale alla porzione VR di detta periferia, fa di mestieri, che prima coincida con la retta VB, e l'estremo suo punto T si trovi precisamente nel vertice V, e che poi a poco a poco da detta periferia discostandosi dalla parte VRT, ed accostandovisi dalla parte DRE, finalmente vada a finire nella retta DK, e l'estremo suo punto T nell'estremo punto della curva K coincida.

La *norma* poi (che così mi giova chiamar le due linee DN, TS congiunte insieme in N ad angoli retti) perchè deve esser toccata e repulsa dalla *devoluta* RT in T, e non declinare però mai nè dal punto D, nè dal punto R di comune intersezione, avrà tal movimento, che il punto N sarà prima stato precisamente in V, ma poi dalla *devoluta* RT quasi, dirò così, urtata e respinta, anche il punto N si sarà sempre più allontanato dalla periferia, sinchè nel punto K sia anch'esso concorso, ed il lato DN coincida con DK.

Segue l'*ordinata* OS, quale acciò costantemente formi l'angolo

golo FRD eguale a DRE, coinciderà precisamente con la retta VB, e s'andarà poi di modo allontanando da quella, ed accostando a DK, che a queste ad a sestessa sia costantemente parallela, e normale al diametro VD.

Quanto al *raggio* CR mobile intorno al centro C coinciderà prima con CV, e seguendo poi anch'egli di continuo il punto R di comune intersezione, finalmente terminerà in CD, e sarà sempre normale alla *tangente* RT.

Ora per questi movimenti eccitati tutti in un tratto, come necessariamente dipendenti e inseparabili dalle sovr'accennate proprietà, avviene, che il punto d'intersezione S si debba costantemente in un punto della curva ritrovare. Anzi quantunque nel punto V, e nel punto K non sia per essere alcuna intersezione, perchè però ivi è per essere il principio ed il fine di quella, il punto V ed il punto K dovranno nonostante annoverarsi fra i punti della curva. Ma giova qui ricordare una cosa, che quanto prima occorrerà, cioè che in principio di moto il punto estremo T della *devoluta* RT, i due punti d'intersezione R ed S si troveranno ristretti nel punto N, e questo N in V, onde tutti si troveranno raccolti nel punto V; e che nel fine di detto moto, cioè quando il punto R sarà pervenuto in D, i punti T ed S saranno ridotti in N, ed N in K; e però T, N, S uniti tutti coincideranno in K.

Tutte queste cose poste, concludo che composta una macchinetta con tali e tante parti, che alle predette linee, cioè al *circolo generatore* VRD, al *raggio* CR, alla *devoluta* RT, alla *norma* DNTS, all' *ordinata* OS corrispondano; e ciascheduna movasi con movimenti ai moti di quelle rispettivamente conformi, questa potrà fornire la descrizione della *Cicloide* proposta. Ma per far prova di questo fatto, prestamente passerò alla descrizione di detta macchinetta, e dirò prima del suo *piano orizzontale*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Piano orizzontale dell' Istromento per la Cicloide.

DOvrebbe riuscir facilissimo a comprendersi il *piano orizzontale* di questa macchinetta, perchè le sue parti (*Fig.* 1. *Tav.* 6.) corrispondono appunto alle linee sopraddette della *Fig.* 3. *Tav.* 5., e sono indicate colle medesime lettere, con i medesimi nomi, e non resta se non da mostrare, come siano anche capaci di quei medesimi movimenti, che furono a ciascheduna attribuiti nell' antecedente Articolo.

E' dunque VRD il *circolo generatore*, qualunque dato preso nella superficie di un tronco d' un cono di legno, espresso nel *piano verticale* della *Fig.* 2. per il trapezio *p a b f*, qual circolo s' intende essere nella detta *Fig.* 2. la linea *e g*, e parallelo alla base *p a* di detta *Fig.* e stare sempre immobile. D' intorno al centro C di detto circolo (torniamo alla *Fig.* 1.) gira orizzontalmente in luogo di *raggio* l' asta CR (che porta un cilindro *n* ombreggiato mobile pure orizzontalmente) da R prodotta fino al forame *n*.

Tra questo cilindro (fatto come in sezione *bd Fig.* 2.) e la periferia del *circolo generatore* VRD è interposto un regolo di legno TE, che sta per la *tangente*, o sia *devoluta*, quale (mentre il *raggio* CR da V si muove verso D, e porta seco il cilindro *n*, che nell' istesso tempo volgesi orizzontalmente intorno al proprio asse) vien quasi per una sorta di trafila spremuto fuori delle due periferie del cilindro, e del *circolo generatore*; cosicchè detto regolo successivamente si muove, e si scosta dalla periferia VR dalla parte VRT, ed a quella vassi di mano in mano combaciando dalla parte DRE, finchè giunga a toccare la periferia nel punto D, dove fermandosi il raggio CR col cilindro annesso *n*, anch' esso cessa di più moversi. Onde a buon conto qui si può osservare, che la *devoluta* risponde a quelle leggi di moto, che le furono poco fa assegnate. Perchè ed è *tangente* al *circolo generatore* nel punto R, e normale al *raggio* CR, ed accade che la porzione RT sia eguale all' arco VR, nel supposto che in principio di moto la sua estremità T coincidesse in V.

Segue la *norma* di metallo DNTS fessa per mezzo per tutti i lati, regolata al dovuto suo moto da tre pivoli d'acciajo. Il primo dal punto estremo T del regolo, o sia *devoluta* RT, cui sta afferrato, cala giù nella fessura del lato NT, e movendosi insieme con detta *devoluta*, risospinge sempre più ed allontana dalla periferia VR la *norma*, che prima col punto N coincideva nel punto V, sinchè si arresta, arrestandosi detta *devoluta* nel punto D. Il secondo fisso nel punto D dell'immobile periferia VRD s'introduce nella fessura del lato ND, e ritiene detto lato, acciocchè da detto punto D non si scosti. Il terzo ed ultimo pivolo, essendo per di sotto fisso nel punto R del rotante *raggio* CR, entra nella fessura del lato ND, e costantemente fa che non declini dal punto R di comune intersezione; onde tenendo detta *norma* ai due punti D ed R, ed essendo dall'estremità della *devoluta* T risospinta, come si è detto, viene appunto a quel moto determinata, che s'era già divisato.

Questo medesimo ultimo pivolo R portato dal *raggio* CR urta, e fa muovere una verga di metallo *t t* F 4 con puntini distinta, che porta le veci di *ordinata*, e che sebbene men si ravvisa in questo *piano orizzontale*, però assai bene si mostra nel *verticale* della *Fig.* 2. per le lettere *qa* K 3 4. Ella è (*Fig.* 1.) connessa e normale ad un prisma *t t* mobile nella scannellatura AQ, che è parallela al diametro VD. Si dirigge detta *ordinata* da *t t* a sinistra verso F, e poi (vedi anche la *Fig.* 2.) ripiegandosi per di sotto a destra arriva sino a 4, e s' interseca col lato della norma N*y* nel punto S, dove è uno stilo afferrato ad un

anel-

anello, o ſia guida mobile per N*y*, che queſta interſezione continuamente ſeguendo, deſcrive intanto ſul piano della carta la propoſta *Cicloide*. Imperciocchè mentre detta *ordinata* è dal pivolo R urtata, l'anneſſo priſma *tt* cedendo ſcorre da A verſo Q, e intanto l'*ordinata tt* F4 ſi muove ſempre a ſe ſteſſa parallela, e normale al diametro VD, e s'accoſta per di ſotto al punto D, e s'interſeca anch' eſſa nel punto di comune interſezione R, perchè non ſi muove, ſe non ſe eſſa è appunto dallo ſpingente pivolo R determinata a muoverſi.

Dirò ora, per qual cauſa alcune parti di queſta macchinetta ſiano in diſegno ora eſpreſſe con linee vive, ora con morte. Onde egli è da ſapere, che le parti dell'Iſtromento ſono realmente collocate a diverſe altezze, come meglio ſi potrà poi anche oſſervare nel *piano verticale* della *Fig.* 2. La *norma* DTNS (che nel *piano verticale* della *Fig.* 2. è eſpreſſa per *x*78*y*) è nel più baſſo luogo di tutte le altre; ſopra a quella ſegue l'*ordinata tt* F4 (che in *Fig.* 2. ſi moſtra per *qa*K34); d'indi più alta ſta la *devoluta* ET (eſpreſſa *Fig.* 2. per *eb*) ſuperata però da una porzione del cilindro *n*, e per fine nel più ſublime poſto avvi il *raggio* CR*n* (che in *Fig.* 2. compare per *rpn*), ed avvi pure una porzione dell' *ordinata tt* F (che in *Fig.* 2. è la porzione *qa*K). Quindi è che quella porzione di eſſe parti, che nel *piano orizzontale* viene ricoperta da quelle, che ſi trovano ſituate in maggior altezza, è con ſoli punti diſegnata; e diſtinta poi con linee vive reſta in viſta quella porzione, che ſotto a quelle perpendicolarmente non cade. Perciò ora ſi concepiſca (*Fig.* 1.) come parte della *norma* DTNS ſi moſtra abbagliata, e coperta ſotto dell'*ordinata tt* F4; queſta coperta dalla *devoluta* ET, benchè in figura veramente non appare; la *devoluta* dal cilindro *n*; il cilindro dal *raggio* CR*n*. Ma facciamſi ormai appoſtatamente da capo al *piano verticale*, di cui ſoltanto di paſſaggio alcuna coſa ſi è detta.

ARTICOLO QUARTO.

Piano verticale dell' Istromento per la Cicloide.

MOlte cose appariranno in questo *piano*, che in quello *orizzontale* o per evitar la confusione non si son poste, o se poste anche vi sono, non si potevano però abbastanza concepire; perchè per la intelligenza di qualunque costruzione organica un piano reciprocamente l'altro ajuta, riuscendo per lo più in un piano men distinte quelle parti, che aperte e chiare risultano nell'altro.

Si concepisca dunque (*Fig.* 2.) che sia con una vite N fermato ed eretto sopra una tavoletta orizzontale RS un forte piedestallo d'acciajo RLC forato in C ed L, ed indi si supponga un chiodo *mr* A, che trapassi per l'asse del cono *fbap*, poi per un bucco *r* circolare della verga *rpn*, e quindi per detti due forami quadrangolari C ed L; finchè per ultimo nella sommità A con una vite si stringa, e ritenga il cono al predetto piedestallo sospeso, di modo che e questo, e quello, e la tavoletta orizzontale formino un corpo costantemente immobile; acciocchè quindi per primo capo nella superficie di questo cono dare e prender si possano infiniti *circoli generatori*.

L'asta poi *rpn* mobile orizzontalmente intorno al punto *r*, cioè d'intorno all'asse del cono, o sia chiodo *mr* A sta per il *raggio* C*n* della *Fig.* 1., nel di cui forame *n* s'introduce il palicello *i o n* d'acciajo talmente ripiegato, che la porzione *nb* divenga parallela al lato del cono *pf*, e dopo due piegature, una verticale, l'altra parallela all'orizzonte seguiti la porzione *o i* parallela all'asse *mr* A, e verticale in un con detto asse all'orizzonte. Questa porzione *o i* (perchè per linea retta mira nell'estremo punto R del raggio CR della *Fig.* 1., ed insieme col raggio *rn* della 2. volgesi

gesi d'intorno nel punto *r*) descriverà un cerchio eguale al dato *circolo generatore* VRD della *Fig.* 1., ovvero *eg* della 2., e la modificazione di detto circolo niente più importarà, che spingere su, o giù nel forame *n* il palicello *ion* fermandolo poi con la vite laterale, qualora la porzione *io* miri nel punto *e* del circolo *ge* qualunque dato.

Segue ora il *tangente* regolo, o sia *devoluta* ET, che nel *piano orizzontale* della *Fig.* 1. è situata, di maniera che nel *verticale* della 2. esprimer non si può se non per la sezione *eb* con puntini ombreggiata. Nulladimeno si scorge, come (essendo interposta fra il lato del cono *pf*, e del cilindro *bd* mobile d'intorno ad una porzione del palicello *i o n*) per lo volger di detto cilindro dal *raggio r p n* portato, possa anch'essa girare d'intorno al cono dalla superficie di questo, e da quella del cilindro spremuta fuori quasi, come già dissi, per una sorta di trafila. Ma non si può del tutto rilevare, come dal punto estremo *e* di detta *devoluta* cali giù perpendicolarmente un altro palicello pur d'acciajo, parallelo anch'esso all'asse *mr* A, essendo situato, e coperto di dietro alla porzione *o i*, perchè tanto il punto *e*, che corrisponde al punto T della *Fig.* 1., quanto detta porzione *o i*, che risponde al punto R, occorrono in disegno nella medesima retta *e i* TR.

Ma giacchè abbiam detto di due palicelli, che fanno per i supposti pivoli T ed R moderatori della *norma*, ed *ordinata* della *Fig.* 1., parliam qui anche di un altro palicello, che risponda al terzo pivolo D in detta prima figura supposto. Però il trapezio, o sia figura piana *p a b f* rappresentando in verità la superficie di un solido, cioè di un tronco cono (ciò che è da imprimersi bene nella mente) segue che la linea *r m* condotta sulla superficie del cono della linea *p a* alla linea *f b*, si debba concepire non solo eguale al lato *p f*, ma ancora all'asse del cono egualmente inclinata, e quindi la parte pure *r t* egualmente inclinata, ed eguale

alla

alla parte *p e*. Ciò posto, s'intenda esser fatta nel lato *r m* una tale scannellatura, qual dimostra la *Fig*. 1. nel punto D, in cui si muova, e con una vite si fermi in qualunque punto *t* un prisma di simil forma *l z* congiunto ad un palicello *z &*, che nel punto *z* costituisca con detto prisma un angolo *l z &* eguale all'angolo formato dal lato del cono col suo asse; onde avverrà, che il palicello *z &* (cioè il palicello *t* V, che ormai si vuole intender lo stesso) sia parallelo all'asse del cono, ed al rotante palicello *o i*, e si ritrovi nella circonferenza del medesimo circolo da detto palicello *o i* descritto; perchè il punto *e*, in cui si dirigge la porzione *i o*, ed il punto *t*, in cui si è fissato il palicello *t* V, sono dai punti *p* ed *r* rispettivamente equidistanti. Questo palicello *t* V, fisso che sia con la vite al cono, starà insieme con detto cono costantemente immobile; e tutti questi tre palicelli introdotti nella fessura della *norma* determinaranno ai detti moti non solo la *norma* (di cui in questo *piano verticale* non si mostra se non la costa *x* 7 8 *y* sostenuta da nodi sotto fermati con picciole viti contro i detti tre palicelli) ma anche la seguente *ordinata*, perchè verrà urtata dal prodotto palicello *o i*, che come rispondente al punto R della *Fig*. 1., regola anche la comune intersezione delle dovute parti.

La verga dunque *q a* K 3 4, che già poc' anzi fu accennato essere la *ordinata*, quando viene urtata dal palicello *o i*, scorre per la scannellatura superiore *q* corrispondente a quella orizzontale AQ della *Fig*. 1., e segue di essa (quantunque in questo *piano verticale* non possa apparire) una intersezione col lato della *norma* 8 *y* dichiarato per N *y* della *Fig*. 1., e condotto con la mano dietro a questo punto d'intersezione uno stilo MS connesso, e normale ad una guida mobile in detto lato 8 *y*, dalla punta del detto stilo S vien descritta la curva sul piano della carta.

Ora per passare ad un esempio, nella superficie del tronco co cono dato ſia per *generatore* della propoſta *Cicloide*, invece del ſuppoſto *circolo eg*, il *circolo* EG, che riſponde nella *Fig.* 1. al *circolo u*. Onde preſtamente calato giù il palicello *noi*, e fermato con la vite *n*, quando *io* mirerà in E, ſpontaneamente diſcenderà anche la *devoluta eb* in un col cilindro *bd*, che la ſoſtiene ed abbraccia. Così il palicello *t*V ſia giù cacciato ſino al punto T, e con la vite fermato. Di più eſſendo ſtato detto (1) che in principio di moto (*Fig.* 1.) i pivoli T ed R, e lo ſtilo S debbano ridurſi in N, ed N coincidere col vertice V, tanto dovrà ora ſeguire (*Fig.* 2.) del palicello della *devoluta be*, del palicello *oi*, e dello ſtilo MS, che quei pivoli e ſtilo rappreſentano. Onde (queſti riſtretti prima nel punto 8 della *norma*, cioè N della *Fig.* 1., e queſto 8 condotto inſieme con l'*ordinata* nel vertice *u*, che qui è coperto dall'antepoſto punto T, ma è viſibile nel *piano orizzontale*) ſi move poi con la ſiniſtra il *raggio rpn* verſo chi legge d'intorno al punto *r*, e con la deſtra meſſa in M ſia lo ſtilo MS guidato appreſſo al punto, dove la *norma* s'interſeca con la *ordinata*, che ſi conſeguirà la deſcrizione propoſta.

Notate per fine, che ſebbene quanto ſi è detto ſembra difficile a comprenderſi, ed eſiga per dir vero non poca forza di fantaſia, nonoſtante ſe tornate bene a mente le leggi di Proſpettiva, ſi farà diligente rifleſſione alle ſole linee parallele morte condotte dal *piano orizzontale* al *verticale*, molto meno ardua riuſcirà la intelligenza di queſta coſtruzione; e molto meno ancora, quando per un momento ſi avran meſſi gli occhi ſulla ſeguente tavola, che la elevazione ſcenografica rappreſenta.

AR-

(1) Artic. II. di queſto Iſtromento.

ARTICOLO QUINTO.

Scenografia dell' Istromento per la Cicloide.

QUesta *Fig.* 1. *Tav.* 7. è tanto per se stessa chiara, che non avrebbe forse mestieri di altra esposizione, ma pure volendo qui recar in poche le molte parole dette nei piani antecedenti, sappiate che le parti dell'Istromento messe qui in prospettiva portano rispettivamente le medesime lettere delle medesime parti descritte nell' antecedente *piano verticale*; perchè RCL è il piedestallo (fermato ad una tavoletta orizzontale con la vite N) a cui per mezzo del chiodo *mr* A (qui non si vede *m*) sta in alto il tronco cono sospeso ed immobile. Intorno a detto chiodo in *r* gira verso *q* il *raggio r n*, che seco porta il palicello *n o i*, intorno a cui movesi il cilindro *d*; e tra la superficie di questo, e del predetto cono lo interposto regolo *tangente*, o sia *devoluta b e* si spreme, e sempre più s' allunga dalla parte di *e*, dove un palicello cala giù dritto ad introdursi nella norma *x* 7 *y*, nella quale s' introduce pure l'immobile palicello TV, ed il palicello *n o i*. Questo palicello *n o i* urta nel medesimo tempo contro la *ordinata q* K 3 4, onde ella scorre nella scannellatura superiore da Z verso *q*; ed intanto lo stilo S connesso alla sua guida M, scorrendo per il lato della *norma* 8 *y* dietro al punto d' intersezione della *norma* coll' *ordinata*, segna sul piano della carta RS la proposta *Cicloide*. Avvertendo che il lato *y* 7 della *norma* sarà sempre tangente alla curva; ed inoltre che sta nel piacere altrui il fare che o l'*ordinata* urti nel palicello *o i*, o che piuttosto il palicello urti nell'*ordinata*, come in figura. Così è arbitraria la situazione della scorrente guida coll'annesso stilo MS; perchè in figura è messa nel lato 8*y* della *norma*, ma tanto si poteva anche introdurre nel-quella *ordinata*, facendo però, che lo stilo passasse per la fessura di detta *norma* prima di discender nel piano. Ma perchè tante parti adoprando in questa macchinetta, e troppi moti seguendone, si potrebbe dubitare della felice sua riuscita, voglio almeno nel seguente Articolo farmi incontro a quelle obbiezioni, che mi potrebbero venir mosse dagli altri.

ARTICOLO SESTO.

Obbiezioni alla costruzione predetta, e sue risposte.

NOn volendo io, come altri fanno, dissimulare accortamente i difetti di questa mia macchinetta, io medesimo li produco, quali alla meglio correggendo, e quali così lasciando stare come stanno. Potrebbesi dunque opporre

Obbiezione I.

Che essendo due palicelli, ed uno stilo, che (*Fig.*1.*Tav.* 6.) nel principio di moto hanno a concorrere nel punto N, lo stilo S per la grossezza loro non trovandosi precisamente in detto puncto N, non potrà (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) segnare i primi punti della Curva in V, e così nemmen gli ultimi in K; poichè la verga, che sta per l'*ordinata*, quando arriverà a toccare il palicello D, o sia *t*V della *fig.* 2.*Tav.* 6. la punta dello stilo sarà lontana da K la metà della grossezza dello stilo, tutta la grossezza dell'*ordinata*, e la metà della grossezza del palicello *t*V; e però la curva rettificata non reggerà all'equazione, cioè (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) la *semicicloide* VSK non sarà eguale a due diametri VD, nè tutta a quattro, come dovrebbe.

RISOLUZIONE.

L' obbiezione non ha altra risposta, se non che questa imperfezione è, come già notai altrove (1), comune anche ad altri Istromenti inventati da altri singolarissimi uomini.

OBBIEZIONE II.

Ancorchè non andassero dispersi alcuni punti della Curva in K ed V, pure non si ha, che una sola *semicicloide* VSK, restando delusi dell' altra metà a sinistra.

RISOLUZIONE.

Ma volendo pure conseguire anche l' altra metà, lasciando star fermo il tronco cono nella presente situazione, e soltanto portato a man destra il piedestallo RLC *Fig.2.Tav.6.* e messa la *ordinata qa*K 3 4 nella scannellatura B, si potrebbe descrivere anche l' altra metà della *Cicloide* a sinistra; e ciò bastar dovrebbe, come basta per la perfezione d' altri simili Istromenti in questo genere, che non descrivono le Curve, per le quali sono inventati, se non ad una metà per volta. A questo s' aggiunga, che per li usi meccanici basterebbe il poter descrivere una mezza Cicloide, come per esempio nella fabbrica degli Orologi a pendolo.

OBBIEZIONE III.

Essendo piuttosto lunghi i palicelli, e lo stilo, e dovendo il palicello *oi*, e il palicello *e* (*Fig.1.Tav.7.*) urtare e respingere la *norma*, è da temere, che per l' elaterio intrinseco della materia metallica si pieghino i palicelli avanti di po-

(1) Istromento II. Art. II.

poter muovere le rispettive parti, e però non duri in esse quella mutua azione, che ai movimenti già stabiliti si richiede.

RISOLUZIONE.

Onde anche questa infermità pare senza rimedio, perchè non può uom mortale togliere dalla natura l'elasticità. Si potrebbe però se non altro diminuirla, fabbricando l'Istromento di materia poco elastica e dura assai, e più grande che in figura non è.

OBBIEZIONE IV.

Il regolo *tangente*, o *devoluta eb* (*Fig.* 2. *Tav.* 6.) non è possibile che, volgendosi intorno alla superficie del cono, cammini esattamente col margine *e* nella periferia del dato *circolo eg*; perchè naturalmente inclina anzi per una spirale verso la base di detto cono *pa*.

L'esperienza può presto render paghi i curiosi di questa verità dipendente da una proposizione (1) già dimostrata,

(1) Questa medesima proposizione, benchè enunziata differentemente, è dimostrata dal P. Andrea Tacquet nella Dissertazione Fisico-Matematica: *De Circulorum volutionibus Theor. VIII.* dalla quale derivano alcune conseguenze, che non mi pajono in vero così poco gentili, che si abbiano a tralasciare. Segue dunque:

1. Che, più che sarà lungo il cono, si moverà nell'area di un maggior circolo, perchè (*Fig.* 7. *Tav.* 5.) più acuto che è l'angolo al vertice C, più aperti sono alla base gli angoli CKS, CSK compresi tra il lato del cono, ed il diametro della sua base SK. Ma una spirale non è che una curva, che passa per i punti di un cerchio ai punti di un altro cerchio maggiore. Dunque se nel medesimo tempo che il cono rotola il punto di concorso C dei convergenti lati KC, SC, passando in *x*, poi in *d*, *b* ec. s'allontanasse sempre più dalla base KS, il cono in tal caso moverebbesi sul piano per una spirale KS*z*; finchè andando detto punto C all'infinito, e (*Fig.* 8.) diventato il cono un cilindro I*n*, moverebbesi in tal caso per un circolo infinito; cioè ivi in tal caso si moverebbe per una retta *nm*. Se poi i lati divenissero convergenti dalla parte opposta, il cilindro diventato di nuovo un cono, tornerebbe ai medesimi movimenti spirale e circolare. E tanto si

strata, qual' è, che fatto rotolare sul piano dell' orizzonte un cono rovesciato KSC (*Fig.* 4. *Tav.* 5.) per un impulso che

si vuole aver detto anche rispetto ad un solo tronco di cono Kg, Se (*Fig.* 4.) Perchè non altrimenti che se fosse intiero, non resta che i lati Kg, Se non siano tuttavia convergenti, e però muoverebbesi in un circolo, il di cui centro accada nel punto, dove detti lati Kg, Se prodotti verrebbero ad unirsi, cioè nel centro C. Oppure moverebbesi per una spirale per una retta; e poi di nuovo per una spirale, o per un circolo, secondo che entrassero in supposto o l'uno o l'altro dei predetti casi.

2. Immaginiamoci (*Fig* 2. *Tav.* 7.) che un pezzo anteriore ed un posteriore di un carrettino a quattro ruote, o pur anche di tre, sia colla vite D stretto e confitto l'un all'altro, cosicchè diventi immutabile l'angolo KDS, ed in conseguenza anche l'angolo KCS formato dai convergenti assili Kg, Se in C prodotti. Per l'analogia che questa macchina ha col tronco cono rotante della *Fig.* 4. *Tav.* 5. e per la medesima ragione addotta nel Testo, onde detto cono movesi in un circolo, si raccoglie che urtata comunque nel centro della sua gravità, debba muoversi anch' essa in un circolo, di cui C sia il centro. Di più se nel tempo che rotola, rallentata la vite D, l'angolo KDS si aprisse sempre più, e l'angolo KCS sempre più facendosi acuto, si andasse C accostando all' infinito, essa moverebbesi per una spirale, e poi giunto che fusse C all' infinito, per una retta ec. Perchè in somma ha qui luogo l' antecedente annotazione con tutte le sue parti.

Quindi bellamente si scorge, quant' è per esser d'uopo nell' idea di una carrozza, che dovesse andare non solo in un perpetuo cerchio, artificio già fatto volgare, ma andare (ciò che fu visto sulla piazza di S. Marco in Venezia anni fa) e per dritto e per traverso, e volgersi per ogni parte da se, o per l'opera delle persone che dentro fossero. Conciossiacchè o per una validissima molla, che per mezzo di ruote dentate intermedie facesse volger li assili Kg, Se fermi alle sue ruote, o supplendo gli uomini all' azione della molla (secondo che questa azione fosse applicata o a sospingere, o a respingere) la carrozza o innanzi, o indietro moverebbesi. Ma acciò si movesse anche o per dritto, o a destra, o a sinistra, secondo che la tortuosità della strada il richiedesse, in quella guisa che l'accorto Nocchiero col timone guida la sua nave, così avrebbesi qui a preparare l'ingegno in modo che si potesse ad ogni occasione stringere prestamente, o allargare, ed annullare l'angolo KDS, e restituirlo anche, quando bisogno fosse, dalla parte opposta. Meccanismo che quanto in esecuzione riesce mirabile, altrettanto importa meno di sagacità nell' inventarlo. E' ben vero per altro, che quando si volesse applicare la carrozza al trasporto di enormi pesi, non potendosi superare le grandi resistenze, se non con grande discapito della velocità, perciò tal macchina non si potrebbe recare in pratica con gran vantaggio della società. Conciossiacchè lo sforzo di un cavallo, che seguitamente affatica in luogo di una potenza, può vincere al più una resistenza di 1230. lire; e lo sforzo di un uomo, una resistenza di lire 205., sforzi che sono come 6 a 1. Onde supposto che la carrozza tirata da quattro cavalli, e pe-che duri nel centro della sua gravità, deve egli muoversi in un circolo Syz, nel di cui centro C starà sempre il vertice di detto cono. Perchè essendo i lati KC, SC del cono convergenti ad una medesima parte C, e sempre egualmente convergenti, il cono si deve muovere per una curva, che non solo sia inclinata ad una medesima parte, ma sempre egualmente inclinata; e questa Curva non è altro che il circolo. Se per contrario si facesse muovere il piano Syz d'intorno al fermo cono, il piano si muoverebbe in un circolo, persistendo col punto C nel vertice C di esso cono; perchè o che si muova il cono sul fermo piano, o che si muova il piano sul fermo cono, niente però si mu-

ta

pesante insieme col carico 4920. lire (che è la somma delli sforzi di quattro cavalli) faccia il viaggio di una lega all'ora; se dovesse essere spinta innanzi da quattro uomini applicati per dentro a farla muovere per mezzo di ruote dentate, dovendo la forza dell'uomo essere accresciuta di sei con altrettanta necessaria diminuzione della velocità, essa non farebbe in tal caso più di una lega in ore sei. Tardità in vero fastidiosa, per non dire insopportabile.

3. Quindi dipende anche l'uso che si fa (*Fig.* 3. *Tav.* 7.) de' cilindri per trasportare, dove che sia, qualche grave peso; perchè se essi sono paralleli, il peso avanza per drittura (facendo astrazione dalla inegualità del piano, del peso, e de' cilindri) se convergenti, per circolo ec.

4. Nei molini costrutti per macinare il seme di lino si fa uso (*Fig.*4.*Tav.*7.) di una pietra LG della forma di un pezzo di cilindro in questo modo: sta verticale all' orizzonte eretta un' antenna AB mobile intorno a se stessa, per lo volger di una ruota trasportata dalla corrente di un rio. Da quest' antenna si spicca un forte braccio verso G, che introdotto nell' asse del cilindro, e in un coll' antenna movendosi, trae seco in giro il pesante macigno, quale girando intorno al braccio, ed insieme rotolando sul piano, frange così e pesta il sottoposto seme. Onde a me pare, che se detto macigno fosse piuttosto della forma di un tronco cono $KSge$ tornerebbe assai meglio. Perchè un cilindro rovesciato urtato nel centro della sua gravità naturalmente, come si disse, inclina per una retta; onde volendolo contro alla sua natura determinare ad un moto circolare, non solo bisogna molta più acqua, ma dovendo altresì il macigno, e le ruote adoperare maggior forza, la macchina assai più presto si logora. Che se in luogo del cilindro LG fosse posto in pratica un tronco cono $Kg\dot{e}S$ portato in cerchio sul piano orizzontale LS dal braccio AC, che si piega nel vertice C di detto cono, e per l'asse del medesimo trappassa (perchè il cono sospinto naturalmente movesi in circolo) incontrando perciò la macchina minor resistenza, le parti sue sarebbero men tosto consonte, ed un minor volume d'acqua basterebbe.

ta la figura del cono, e del piano, la quale interviene a produrre un tale effetto. Secondariamente, non è altro il cono (*Fig. 6. Tav. 5.*) che un settore SCz (*Fig. 5.*) di un circolo, che è a tutta l'area SCyz, come (*Fig. 6.*) il raggio RS della base del cono al lato CS di detto cono. Imperciocchè si concepisca (*Fig. 5.*) il settore SCz ombreggiato essere una carta mancante dell' intiera area di un circolo, la porzione Syz, onde approssimati, e fatti combaciare i due lati Cs, Cz in uno, venga formato (*Fig. 6.*) il cono SCR. Quindi tosto si scorge, che il raggio CS ovvero Cz (*Fig. 5.*) diventa il lato Cs del cono SCR della *Fig. 6.* Di più la porzione di periferia ombreggiata Sz (*Fig. 5.*) pareggia (*Fig. 6.*) tutta la periferia della base del cono. E però essendo le periferie come i diametri, sarà (*Fig. 5.*) tutta la periferia Syz alla porzione Sz, come (*Fig. 6.*) CS ad SR. E perchè i settori di un medesimo circolo sono in ragione delle loro porzioni di periferia, tutta l'area del circolo (*Fig. 5.*) sarà alla parte ombreggiata, come (*Fig. 6.*) CS ad SR.

Queste cose premesse, ingegniamoci ora di mostrare per qual causa un regolo messo a traverso, e ad angoli retti di un cono, se lo si fà muovere sopra la superficie di esso cono, anzi che persistere sopra quel circolo parallelo alla base, su cui fu posto, naturalmente per una spirale verso detta base inclini. Proposizione verissima (1), ma che per

(1) Dalla proposizione, e da quanto il Testo contiene in appresso si rileva

1. Che il regolo Im (*Fig. 4. Tav. 5.*) tracciarà sopra un cono o più di una spira, o meno di una spira, o una intiera per lo appunto, secondo che il *settore conico* nCd sarà più o meno prossimo ad un quadrante nCy, e secondo che il regolo Im sarà situato più o meno vicino a Cy.

2. La spirale tracciata sul cono sarà sempre eguale alla retta Im; perchè è la medesima retta, dirò così, che sulla superficie del cono si avvolge.

3. Questa *spirale conica* impressa sulla superficie del cono rovesciato, rotolando esso descriverà vicendevolmente sul piano la retta Im.

4. Si potrebbe meccanicamente descriver questa spirale sulle superficie del cono, tagliando prima in carta il triangolo rettangolo CIm, di cui l'ipote-

per comprenderla, ben sarebbe, che prima se ne facesse in fatti una prova meccanica sopra una piramide, e poi sopra

tenusa *Cm* fosse eguale al lato del dato cono, ed applicando il lato CI di detto triangolo al lato di detto cono in modo che l'angolo C stasse nel vertice; perchè piegando poi detta carta d'intorno alla superficie conica il lato I*m* indicarebbe la proposta spirale. Ma non essendo questa tale descrizione per essere molto utile ai Meccanici, ne proporrò un'altra; non già perchè creda che ella sia loro necessaria, sapendo benissimo, che già non mancano altri metodi, ma perchè questa è tale, che ha direttamente relazione a quanto si è detto, e può avere un amplissimo uso.

Sia dunque, per il modo che si accennarà nell' *Istromento IX. P. III. Art. X.* descritta (*Fig.* 5.) sul piano una spirale qualunque S*ab* ec. (che sarà quella di Archimede nel caso, che si propongano eguali li spazj tra una spira, e l'altra) e postovi sopra un cono rovesciato, che col vertice occorra nel centro C di essa, si faccia rotolare, che sarà dalla *spirale del piano* tracciata sulla superficie del cono una spirale (*conica* da me detta) di un numero di spire eguale al numero delle spire della *spirale del piano*, moltiplicato per il numero delle volte, che il *settore conico* SC*z* entrarà nell' area di un circolo, di cui il raggio sia eguale al lato del dato cono. Onde nel caso della Figura, essendo 2 il numero delle spire della *spirale del piano*, e 3. il numero delle volte che il *settor conico* SC*z* entra nell' area del circolo; moltiplicato 2 per 3 verrà 6 numero delle spire della *spirale conica*. E la ragione è perchè quante sono le spire della *spirale del piano*, tante sono le porzioni di essa in ciaschedun *settore conico* impresse, e queste porzioni diventano spire intiere nella superficie del cono.

Quindi dato un cono, di cui il *settor conico* sia parte aliquota dell' area di un circolo, ben si vede, che si potrà scolpire di qual spirale più piace, e di un numero di spire qualunque; perchè sta nel voler nostro descrivere sul piano quella spirale che più faccia mestiere, e poi applicare sul dato cono i settori di carta SC*z*, *z*C*y*, *y*CS, e le porzioni spirali di ciascheduno di mano in mano nella superficie di quello riportare e scolpire. Onde seguita che anche in questo caso la *spirale conica* sarà eguale alla *spirale del piano*; e che o rotolando il cono sul fermo piano, o facendo volgere il piano sul fermo cono, traccierassi sulla superficie o dell' uno o dell' altro rispettivamente la già impressa spirale.

5. Già si è detto che un cilindro I*n* (*Fig.* 8. *Tav.* 5.) rovesciato sul piano, ed urtato nel centro della sua gravità rotolando naturalmente movesi per una retta. Conciossiacchè abbiam visto, che un cono rovesciato sul piano ed urtato nel centro della sua gravità, rotolando naturalmente si muove nella periferia di un circolo. Onde supposto che il centro suo fosse andato all' infinito, si moverebbe nella periferia di un circolo infinito. Ma un cilindro non è altro che un cono, di cui appunto il vertice sia andato all' infinito, e la periferia di un circolo infinito non è più che una retta. Dunque un cilindro rovesciato sul piano rotolando movesi per una retta. Inoltre a similitudine del cono per ciascheduna revoluzione spiega e distende la sua superficie sul piano in un settore, per così dire, infinito, cioè in un rettangolo (*Fig* 8. *Tav.* 5.) supponiamo *n*IA*d*, che

pra un cono; giacchè il cono non è altro, che una piramide d'infinite faccie. Nonostante immaginiamoci, che (*Fig.* 4. *Tav.* 5.) un cono rotolando sul piano, dopo un'intiera conversione fatta d'intorno al proprio asse, abbia spiegata la superficie in un settore, supponiam per esempio nCd, (che sarà a tutta l'area del circolo Syz, come CS lato del cono al raggio Sn della sua base) indi dopo un'altra conversione in un altro egual settore dCb, poi in un altro ec. passando il lato del cono Cn, che tocca il pia-

che dovendo perciò pareggiare la superficie di esso, lo chiamo *rettangolo cilindrico*.

Siccome poi per incidere una spirale nella superficie di un cono con una retta Im (*Fig.* 4.) fu prima detta Im supposta verticale al lato di esso cono, che aveva i lati obliqui e convergenti. Ora perchè essendo il cilindro un cono prodotto all'infinito, ha i lati retti e paralleli, si adoprarà (*Fig.* 8.) quì pure la retta Im, non però verticale, ma anzi all'opposto messa obliqua al lato di esso, per la quale dico, che rotolando il cilindro verrà appunto tracciata una spirale sulla sua superficie. Perchè dopo la sua prima rivoluzione, ed il lato In passato in Ad, la retta Im toccarà il lato del cilindro in t punto vicino alla base d più che non è il punto I dopo la seconda revoluzione detta retta Im toccarà il lato del cilindro In passato in Fb in b punto più vicino alla base anche più di t. Onde risultarà primieramente che quanto maggior sarà l'angolo nIm (pur che sia minor di un retto) molte più saranno le spine, che verran sul rotolante cilindro tracciate dalla retta Im. 2. Il numero delle spire sarà eguale al numero dei *rettangoli cilindrici* segnati dalla retta Im, come era anche nel caso dei *settori conici* della *Fig.* 4. 3. Essendo impossibile definire sul piano un *rettangolo cilindrico* nI Ad, perchè non si può giustamente rilevare la periferia della base del cilindro, si piegarà d'intorno ad esso una carta, che lo capisca, e circondi per l'appunto, quale distesa indi sul piano, supporremo ora che pareggi detto rettangolo nIAd; onde volendo poi segnare il cilindro di un numero di spire qualunque dato (in *Figura* sono 3) si ordinino per dritto altrettanti *rettangoli cilindrici*, e si tiri la retta Im, che detta spirale si conseguirà, o avvolgendo d'intorno al dato cilindro tutti i (3) *rettangoli cilindrici*, e le porzioni della retta Im di ciascheduno nella superficie di essi incidendo, o come comunemente si fa, piegandovi d'intorno un solo rettangolo, anzi i soli triangoli Iet, tob, bhm in esso riportati. Imperciocchè le rette It, tb, bm formaranno le tre spire, e tutte insieme la spirale. 4. Ancor quì risulta assai più leggiadramente che altrove, che scolpita in sulla superficie di un cilindro una spirale qualunque, ma che gli spazj tra una spira e l'altra siano eguali, rotolando il cilindro, sempre si spiegarà essa sul piano in una retta eguale anche in questo caso alla *spirale cilindrica*; e quando essa spirale non si distenda in una retta, certo è che non sono eguali gli spazj tra l'una e l'altra spira; e spiegarà sul piano rotolando una Curva.

piano nella prima ſtazione, paſſando, dico, da C*n* in C*d* poi ec. Ora ſe foſſe ſuppoſto che prima di muoverſi il cono, foſſe ad angoli retti del lato C*n* deſignato ſul piano un regolo I*m*, qual Curva tracciarebbe detto regolo ſulla ſuperficie del cono rotante, toccandolo di mano in mano in diverſi punti ſucceſſivi? Una ſpirale certamente che verſo la baſe del cono inclina, e gli ſpazj fra una ſpira e l'altra intercetti ſaranno eguali alle differenze, che ſono da CI a C*t*; da *ct* a *cb*; da *cb* a ec. Concioſſiacchè il lato C*n* paſſato in C*d* è dal regolo I*m* toccato in *t* punto alla baſe tanto più vicino, che non è il punto I, quanto *dt* è minore di *n*I. Il che ſe non foſſe, non ſolo *dt* ſarebbe o eguale, o maggiore di *n*I, ma anche l'angolo *dtm* ſarebbe o eguale, o maggiore dell'angolo *n*I*m*, che non può eſſere, perchè *d*C, *n*C ſono per la coſtruzione convergenti ſempre dalla medeſima parte di C. Finita poi la ſeconda revoluzione, ed il medeſimo lato C*n* (dopo eſſer ſtato in C*d*) trasferito in C*b*, ſarà da detto regolo I*m* toccato in *b*, punto alla baſe vicino anche più di *t* ec. perchè non ſolo *bb* è minore di *dt*, ma anche l'angolo *bbm* deve eſſer minore dell'angolo *dtm*, e molto più minore di *n*I*m*. Onde in ſomma il regolo I*m* deſcriverà ſulla ſuperficie del cono rotante l'accennata ſpirale. Ma ſe in vece che il cono volgaſi ſul piano immobile S*yz* affetto del regolo I*m*, s'immaginaſſe, come pur ora dicevamo, che diveniſſe mobile il piano, e giraſſe d'intorno al fermo cono; tanto ancora ne ſeguirebbe, e nè più, nè meno avrebbe il regolo I*m* a tracciar ſulla ſuperficie di quello la data ſpirale. Se per fine, preſcindendo poi col penſiero da tutta l'area del piano, come ſe non vi foſſe, ſi figuraſſimo che non altro, che quella parte bianca, che forma il regolo I*m*, rotaſſe intorno al fermo cono; nulladimeno quella traccia, che ſulla ſuperficie di eſſo tiene la parte I*m*, quando vien moſſa unita al ſuo tutto, è la medeſima che terrebbe disgiunta. Conciossiacchè non perciò il cono resti di non un essere cono; ed il regolo un piano; condizioni che, come si è detto, sole concorrono ad un tal fatto produrre. E quindi finalmente concludo, che la devoluta *e b* (*Fig.* 2. *Tav.* 6.) non insistendo esattamente col margine *e* nella periferia del dato circolo generatore *e g*, non è nè meno ordinato l'Istromento a quei movimenti supposti necessarj alla descrizione della proposta Cicloide.

RISOLUZIONE.

Ora per quanto sembri grave questa obbiezione, pure risolvendola di leggiero, forse avverrà che la presente costruzione acquisti maggior riputazione e chiarezza; e perciò, oltre che la forma del cilindro *b d* trattiene sufficientemente il regolo *e b* della *devoluta* nel suo conveniente sito, e che quand' uopo fosse, nè meno mancarebbero altri ripieghi, è poi stato anche un opportuno avvedimento il far sì, che il detto regolo *e b* non toccasse la superficie del tronco cono, se non con un angolo *e*, il quale formando però per il lungo di esso regolo non già un piano, ma una linea, questo non fosse in fatti stato atto a creare l'accennata difficoltà, e rendere almen per questo capo imperfetto l'Istromento. Alla dichiarazione del quale sia quì posto fine.

ISTRO-

ISTROMENTO VII.

PER LE OVALI DI CARTESIO APPLICATE ALLE REFRAZIONI.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione organica di dette Ovali.

PAre in certo modo, che mal si convenga il nome d'Istromento ad un filo, che solo (1) adopera nella descrizione delle Curve proposte; ma io stimo all'opposto, che tanto più le stia bene, quanto n'è più spedito l'uso, e più esatto ne risulta l'effetto. Se dunque si concepisce, che (*Fig.* 7. *Tav.* 8.) appunto un filo sia con una estremità legato ad un pivolo P fitto nel piano, e quindi condotto verso un altro pivolo F pure fitto nel piano, vi s'avvolga d'intorno, e poi in M, ovvero *m* vada a finire, dove abbia connesso uno stilo mobile così, che mentre tenuto ben teso, e con la mano guidato urta nella porzione di detto filo PF, il filo sul pivolo F sdrucciolando, tanto (*Fig.* 1, 2, 3) l'esteriore porzione PMF si aumenti, quanto scema l'interiore FM; lo stilo M tendendo verso B descriverà una Curva AMB di un tal genere, che principalmente abbraccia, oltre le *sezioni coniche*, ed altre Curve, anche le *Ovali Cartesiane*; e di cui al fine del seguente Articolo con due lettere scrittemi a questo proposito dal Chiarissimo P. Ruggiero Boscovich si darà una notizia minuta più, che non contiene il mio Testo. Per altro questa costruzione è tanto semplice, che si può ben credere, che io sia per averne fatte mille prove.

(1) Il mio metodo di descrivere codeste Ovali ha questo particolare vantaggio sopra quello del Cartesio, che per il mio basta un semplice filo, dove che egli adopera nel suo un filo applicato ad un rególo, e però la costruzione risulta più composta.

ARTICOLO SECONDO.

Per quai modi variando queste Curve diventino le Ovali Cartesiane.

Essendo pertanto (*Fig.* 1, 2, 3. *Tav.* 8.) semplice il filo in PM, e raddoppiato in MF, la essenziale proprietà della Curva sarà, che condotte dai due fochi P, F a qualunque suo punto M due rette PM, FM, l'aggregato della prima insieme col doppio dell'altra sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo. E però presa col compasso detta lunghezza, e fatto centro in P (*Figure suddette*) si descriva il circolo DHC, cui in H occorra la prodotta PM. Ora sarà MH doppia della retta MF; sarà questo caso particolare di un altro più generale, in cui sia FM ad MH in qualunque data ragione; e la periferia CHD sarà la direttrice, sulla quale dal raggio PH vien condotto il punto H. Onde se fosse il circolo infinito, la periferia direttrice diventarebbe una retta, ed avrebbero quì luogo anche le *sezioni coniche*. Ma quantunque il filo non si possa comporre ad una direttrice retta: non ostante anche nel solo supposto della direttrice circolare possono variare queste Curve assaissimo in due maniere.

Primieramente se, mantenendosi la ragion data da PM ad MF (cioè nel caso nostro di 1 a 2, perchè il filo in PM è semplice, e raddoppiato in MF) si muti la sola posizione del foco F rispetto al foco P, cosicchè accada, che la porzione del filo FM sia ora maggiore della distanza de' fochi PF, la quantità P*m* (*Fig.* 7. *e* 1. *Tav.* 8.); ora minore la quantità PM (*Fig.* 7. *e* 3.); ora eguale (*Fig.* 7. *e* 2.); e nei due primi casi, principalmente quando sia piuttosto piccola la differenza (*Fig.* 7.) di FP ad F*m*, ovvero M, verranno descritte bellissime sezioni di un Uovo da me già promesse nel luo-

luogo delle Concoidi. Nel terzo caſo poi, cioè quando (*Fig.* 7.) la porzione FM ſia eguale alla porzione FP riſulta appunto una *Concoide di baſe circolare* BMP (*Fig.* 2. *Tav.* 9.) di cui la baſe è PXZ; le intercette ſono ZB, XM ec. al raggio BZ eguali, ed il polo P è ſituato nella periferia direttrice, e queſta *Concoide* è dal Sig. di Roberual chiamata: *Le Limaçon di M.r Paſcual*. Curva ſoggetta all' Iſtromento delle Concoidi.

Secondariamente, laſciando ferma la poſizione dei fochi F, e P, variano queſte curve per lo variar della ragione di PM ad MF; onde potendoſi il filo ordinare a molte ragioni, che ſiano però di numero a numero, ſi eſtende la ſua operazione anche alle *Ovali di Carteſio*, perchè, confrontando con queſte le applicate da lui alla Diottrica e Catottrica, ſi intende, che, acciò i raggi partiti da un dato punto P vadono ad unirſi nel punto F, dopo la rifrazione nella ſuperficie generata da una Curva che ſi cerca, non ſi hà che a raddoppiare tante volte il filo in MF, quanto eſprime il numero del ſeno dato d'incidenza, ed in MP quanto eſprime il numero del dato ſeno di rifrazione. Onde acciò i raggi per eſempio dal luminoſo punto P diffuſi, e dall'aria in una ſuperficie di vetro rifratti, ſi raccolgano nel punto dato F, la ſuperficie di vetro dovrà eſſer generata da una Curva, la quale (perchè nel vetro dall'aria il ſeno d'incidenza al ſeno di rifrazione è come 3 a 2) allora ſi deſcriverà quando, come nella *Fig.* 4. *T.* 8., il filo in FM*i* ſarà triplicato, e duplicato in M*i*P.

Lette-

Lettera 16. Marzo 1748. scrittami dal Chiariss. P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù in proposito delle *Ovali Cartesiane*.

PROBLEMA.

DUe estremità di un filo (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) *sieno fisse una in* P *sul piano della carta, e l'altra sullo stilo mobile* M, *in modo che lo stesso filo più lungo si avvolga intorno allo stesso stilo* M *e passi fino a un pivoletto pur fissato nella carta in un punto* F, *intorno a cui si avvolga, tornando allo stilo* M. *Girato ora lo stilo* M *in modo, che sempre tenga teso il filo, si cerca la natura della Curva che descriverà.*

Il filo in PM *sarà semplice, ed in* MF *raddoppiato. Onde la proprietà essenziale della Curva sarà, che da due fochi* P, F *menate a qualunque suo punto* M *due rette, la somma della prima insieme col doppio della seconda sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo.*

Fatto centro in P *coll'apertura della lunghezza del filo sia il circolo* DHC, *che incontri in* D, C *la retta menata per* PF, *e prodotta la* PM *fino al medesimo circolo in* H, *dovrà essere* MH *il doppio di* MF. *Quindi si vede che questa Curva è un caso particolare di un altro assai più generale, in cui sia* FM *ad* MH *in data ragione. Si potrà questo caso generale esprimer anche così: Dato un punto* F *comunque, e un cerchio* DHC *qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque suo punto* M *una retta* MF, *al dato punto* F, *e un'altra* MH *perpendicolare alla periferia del dato circolo, sia la prima alla seconda in data ragione.*

In quest'aria si vede subito la relazione, che queste Curve hanno colle sezioni Coniche. Nelle sezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, sia la prima alla se-

seconda in data ragione, la quale se sia ragione di minore diseguaglianza si avrà l'Elisse, se di eguaglianza si avrà la Parabola, se di maggiore diseguaglianza si avrà l'Iperbola. Sicchè queste Curve differiscono dalle sezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle si avvolge in un circolo, quelle si mutano in queste, e all'opposto se il circolo di queste diviene una retta, queste divengono sezioni Coniche. Anzi di più si vede, che le sezioni Coniche sono un caso particolare di queste Curve più generali. Basta in queste far, che il centro P vada all'infinito, e questo caso particolare dà subito le sezioni Coniche; ed è cosa graziosa il vedere come in questo modo anche l'Elisse è una di queste Curve, la quale buttandosi il circolo in una retta divien Parabola. Se la ragion data sia d'eguaglianza sarà FM eguale ad MH e però la somma di PM, MF eguale alla Costante PH e la Curva verrà Elisse. Se il circolo diviene una retta, va il centro P all'infinito, e l'Elisse si muta in Parabola. Onde l'Elisse si muta in Parabola, e la Parabola in Elisse anche col solo considerare, che la direttrice divenga retta dall'essere circolare, o si avvolga in circolo dall'esser retta.

Di qui si vede, che il trattare di queste Curve porta assai più che il trattare delle sezioni Coniche, essendovi dentro tutte quelle in un sol caso particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d'innumerabili ricerche, e si vede quanto è limitata la nostra mente, quanto povera e ceca la nostra Geometria. Cosa poi sarebbe, se per direttrice si pigliasse qualunque altra Curva? Quanto più crescerebbe il numero delle Curve, e quanto più fecondo sarebbe il caso? e se qualunque funzione di MF a qualunque di MH dovesse assere un qualunque rapporto esposto comunque, quanto più in là si andarebbe?

Io qui solo mi restringerò a darne la costruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l'equazione *ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.*

Si prenda PE *a* PC *nella data ragione, e col centro* P *coll' apertura* PE *si faccia un circolo, che incontri la* DC *in* G, E. *Da qualunque punto* H *del circolo* DHC *pel centro* P *si tiri una retta indefinita, e un' altra pel punto* F. *Se questa seconda incontra il circolo* GE *in qualche punto* I, i, *si tirino le due rette* PI, Pi; *indi da* F *due parallele* FM, Fm *alle medesime, e se queste incontreranno la* HP *in* M, m, *saranno i due punti* M, m *alla Curva cercata. Imperocchè sarà* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *cioè come* PE *a* PC *in ragion data, e la stessa è la dimostrazione per* m.

E' chiaro, che rispetto al punto H *non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere* PE *a* PC, *come* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *ed essendo* PH *eguale a* PC, *sarà* PI *eguale a* PE, *e però* I *nel circolo descritto col raggio* PE. *Onde se si concepirà girare la* PH *intorno a* P, *descrivendo* H *tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti* M, m *descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta* HF *incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto* H *non vi potranno essere più di due intercezioni della retta* HP *sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dall. parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest' altra estremità. Che se la retta* HF *sarà tangente del circolo* GIE *concorrendo i due punti* I, i *in un solo; sarà ancora la* HP *tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto* F *non sia dentro al circolo* GIE, *come nelle* Figure 2. *e* 3., *e se la retta* HF *non incontrerà il circolo* GIE, *nella retta* HP *non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto* H.

Dall' essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC *affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva*

in

in due parti eguali e ſimili, e ſarà un aſſe, il quale incontrerà la Curva ne' punti AB, ab *dati. Mentre deve eſſere* FB *a* BC, FA *ad* AD, Fb *a* bc, *e* Fa *ad* aC, *come* FE *ad* FC *in ragione data.*

Ora in due maniere principalmente ſi poſſono variare queſte Curve: Prima, mantenendoſi la ragion data di PE *a* PC, *e variandoſi la poſizione del punto* F *riſpetto al circolo* GIE, *ed eſſendo or dentro detto circolo, come nella* Fig. 1., *or nella periferia, come nella ſeconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La ſeconda variandoſi la ragion ſteſſa.*

Le prime variazioni ſono delineate nelle 3. figure colla ragion di uno a due. Qualunque ſia la ragione, nel primo caſo ſempre la retta HF *incontrerà il circolo* GIE *in due punti. Onde ſempre ſi trovaranno due punti* M, m. *Anzi perchè i due punti* I, i *giaceranno di qua e di là da* F, *anche i due* M, m *giaceranno di qua e di là da* P; *e però uno de' due, come* M *verſo* H, *e l'altro come* m *dalla parte oppoſta. Quindi la ſomma di* PM *e di* MH, *che alla* MF *ſta in data ragione, ſarà eguale alla coſtante* PH, *ma delle* Pm, mH *lo ſarà ſolamente la differenza; o pur anche la ſomma, ſe la* Pm, *che va verſo la parte oppoſta di* PM, *ſi conſideri, come negativa; giacchè la ſomma di un negativo porta ſottrazione. Quindi nel girare la* PH, *e il punto* H, *i punti* M, m *deſcrivono due perimetri di Curva, ciaſcun de' quali, dopo l'intero giro di* H, *torna a ſe ſteſſo: ma il ſolo deſcritto da* M *ſarà quello, che deſcriverà lo ſtilo nel caſo propoſto.*

Solo nel caſo che la ragion data ſia ragione d'egualità, il punto i *va in* H, *e diventando* FM, HP *parallele, il punto* m *va all'infinito, e non vi è più: onde nel caſo che la Curva deſcritta dal punto* M *diventi* Eliſſe *Conica, il ramo compagno deſcritto dal punto* m *va in infinito e non vi è più: e nel caſo in cui il punto* F *vada in* P, *rimane data tanto la ragione di* PM *ad* MH, *quanto la ragione di* Pm *ad* mH, *giacchè rimangono le* FM, Fm *eguali alle*

PM, Pm. *Quindi rimangono date le* PM, Pm, *e i due rami divengono due circoli: e ſimili traſformazioni varie vi ſono ne' caſi ſeguenti ancora.*

Nel ſecondo caſo in cui il punto F *cade in* E *nella circonferenza del ſecondo circolo, tirate le* HP, HF, *la ſeconda incontrerà il circolo in* F, *e in* I *generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà ſempre in* P, *e vi ſarà generalmente un altro* M. *Se per* F *ſi tiri* VFu *perpendicolare all'aſſe. Queſta ſarà tangente del circolo* GIF, *e però tanto* VP, *quanto* uP *ſaranno tangenti della Curva in* P; *talmente che girando* H *da* C *fino ad* V, *girerà* I *per il ſemicircolo* GIE, *e il punto* M *deſcriverà un mezzo nodo* BMP, *quindi andando* H *in* h *per l'arco* VhD, *anderà* I *in* i *per il ſemicircolo* FIG, *e il punto* m *deſcriverà l'arco* bma, *e ſeguitando* h *per* Du *prima, indi per* uC, *ſi deſcriverà il reſto* aPB, *ſcorrendo* l'I *il circolo un' altra volta. Così verrà una Curva che ſegherà ſe ſteſſa in* P, *ed avrà un nodo, deſcrivendoſi il nodo nel giro di* H *per* uCV, *e in un' intera revoluzione di* I *pel circolo* GIE, *e il reſto nel giro di* h *per* VDu, *e in un altro giro di* i *per lo ſteſſo circolo.*

Nel terzo caſo tirate per F *le due tangenti* VZu, Nzn *al circolo* GIE; *tutti i punti* H2 *preſi nell' arco* Vn, *che ſta nello ſteſſo angolo* VFn, *in cui il circolo* GIE, *ſerviranno per trovare due punti per ciaſcuno al ramo* AM2 m2 aA; *altutti i punti preſi nel* NHiu *ſerviranno per trovare due altri punti per uno al ramo* BMi mi b; *giacchè le rette da eſſi tirate per* F *ſempre urteranno in due punti del circolo* GIE. *Per l'oppoſta ragione è manifeſto, che i punti degli archi* NV, nu *non ſerviranno. Le rette poi* PN, Pu *toccheranno in qualche luogo in* X, *e in* x *il ramo* BMiB, *e le rette* VP, nP *toccheranno in qualche luogo* S, ſ *il ramo* AM2 aA; *e coll' ajuto de' punti* VN, un, *e della ſoluzione generale ſi troveranno i contatti.*

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, *basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano* A, *e* B *segando* FD *ed* FC *in ragione di* AE *ad* AC, *sicchè il punto* B *starà da* F *verso* P, *e verso la parte contraria, secondo che il punto* F *starà fuori del circolo* DHC, *o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto* A *starà verso la parte contraria di* F *rispetto a* P, *o in* P, *o verso* F, *secondo che sarà il punto* F *dentro al circolo* GIE, *come nella* fig. 1.; *o nella sua circonferenza come nella* fig. 2.; *o fuora come nella* fig. 3. *Imperocchè essendo* FA *ad* AD, *come* PE *a* PD, *dovrà il punto* A *segare la* FD *in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di* FP *a* PD, *secondo che sarà* PE *maggiore, eguale, o minore di* PF, *e però giacere di là da* P, *in* P, *o più vicino a* F. *Pigliandosi* a *fuori della* FD *in modo, che sia* Fa *ad* aD *in ragione di* PE *a* PC, *se sarà* PE *minore di* PC *giacerà rispetto ad* F *dalla parte opposta di* P; *se sarà* PE *eguale a* PC, *andarà* a *all'infinito; se maggiore, dovrà cadere nella* FD *prodotta dalla parte di* D. *Dovendosi pigliare* b *in modo che stia fuori della* FC, *e sia* Fb *a* bc *nella stessa ragione; il punto* b *giacerà da* F *verso* P, *anderà all'infinito, ò caderà di là da* C, *verso dove ora nella figura cade l'*a, *secondo che sarà parimente la* PE *minore, eguale, o maggiore della* PC; *e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da* P *rispetto ad* F, *in* P, *o verso* F, *secondo che la ragione di* Fb *a* bC *sarà maggiore, eguale, o minore della raggione di* FP *a* PC, *cioè secondo che la* PE, *sarà maggiore di* PF, *come lo è nel primo caso della* fig. 1.; *o eguale come nel secondo nella* fig. 2.; *o minore come nel terzo nella* fig. 3.

Quindi nella fig. 1. *stando fermi i due circoli, e stando* F *in* P, *i due rami sono circoli anch'essi. Camminando* F *verso* E, *si muta la loro forma, e i punti* bA, *si accostano a* P, *e fra loro; e i punti* B, a *se ne scostano, e si scostano fra di se; ma* B *si accosta ad* F, *ed* a *se ne scosta. Nell'atto che* *il punto* F *arriva in* E *si muta la figura prima nella seconda. I punti* bA *vanno in* P*; e i due rami formano una curva continua, che si sega, dove quei si attaccano; dovendo a tal fine nella fig.* 1. *in* A *crescere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in* b *rientrare la Curva in dentro con flesso contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per salto in* A*, e in* b*, devono fare da ambe le parti colla tangente lo stesso angolo, e aver la tangente comune, che essendo perpendicolare all' asse quando erano circoli, si deve esser mantenuta tale; onde in* A*, e in* b *deve sempre necessariamente essere la curva perpendicolare all' asse; ma per non finire per salto nella punta* b*, nel momento in cui già ivi l' arco di un ramo si continua coll' arco dell' altro, onde già fa l' angolo obliquo coll' altro arco suo, deve essere cresciuta la curvità nella fig.* 1. *nella punta* A *assotigliata verso* b*, e nella* b *assotigliata in dentro verso* A *per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che si fa nell' arrivare il punto* F *in* E.

Passando il punto F *di là da* E *fuor del circolo, si stacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la fig.* 2. *va nella* 3.*, ma il punto* b *già ha passato l'*A*, e non appartengono più i punti* A, B *al ramo istesso quantunque in* A *si seghi la* FD*, e in* B *la* FC*, come prima, in data ragione di* PE *a* PC. *Ma in quell' attacco della fig.* 2. *si sono cambiati i vertici, essendo passato* b *nel ramo di* B*, e* A *nel ramo di* a*; come appunto anche le due intersezioni* M, m *regolate dallo stesso punto* H *appartengono ambedue allo stesso ramo, dove nella fig.* 1. *appartenevano uno per ramo. Che se così camminando* F *arriva in* C*, si uniscono all' ora i punti* FBC *insieme, anzi annullandosi l' arco* Nu*, va in* F *in un punto tutto il ramo* BMi mi bxB. *Indi passando* F *più oltre, rimane ad ogni modo il* B *fra* F*, e* C*, e però* F *di là da* B *ancora passandolo, mentre passa* C*, ed entrando* B *nello spazio* FP*, all' opposto a* C *passa dove prima era* B*, e ogni punto* M *verso la parte contra-*

traria di prima, capovoltandosi tutto il ramo, nel quale in quel caso rimane ogni Mi, mi *fuori del circolo, e le* H Mi, H mi *negative; onde la differenza di* FM, MH *viene allora eguale al filo, e non ha luogo la descrizione della Curva coi fili. Vanno di poi crescendo amendue i rami, e coll' andare* F *all' infinito si perdono anch' essi nell' infinito.*

Tornando indietro F *verso* E *nella* fig. 3., *i punti* VN, un *si vanno accostando impiccolendosi gli archi inutili* VN, un; *finchè all' arrivo di* F *in* E *si riducono le* Vu, Nn *alla sola* VFu *della* fig. 2. *e rientrando* F *nel suo circolo nella* fig. 1. *ogni tangente menata per* P *svanisce; onde* 4. *rette menate dal centro* P *toccano le Curve nel caso terzo,* 2. *nel caso secondo, e niuna nel primo.*

Tenendo ora fermo il punto F *vada mutandosi il solo punto* E. *Se esso nella* fig. 3. *si unisce a* P, *amendue i rami vanno in un punto solo in* F, *perchè annullandosi la ragione di* Fm, *a* MN, *e stringendosi l' angolo* NFu, *e* nFV *all' infinito, si annulla ogni* FM1, FM2. *Camminando* E *verso* C *crescono amendue i rami, finchè arrivando* E *in* F *si uniscono nella* fig. 2. *Passando oltre il punto* E, *si va nella* fig. 1., *dove accostandosi* E *verso* C, *e andando la ragion data verso l' egualità; vanno le rette* PA, FB *accostandosi all' eguaglianza, e la forma del ramo* AMB *alla forma di un'* elisse. *E intanto i punti* ab, *e tutto il secondo ramo si scostano alle infinito. All' arrivo di* E *in* C, *diviene il raggio interiore una vera* elisse; *svanisce l' esteriore, nè vi è più. Che si il punto* E *va fuora di là da* C, *e la ragione diviene di maggiore diseguaglianza, i vertici* a, *e* b *mutano le parti andando* a *di là da* D, *e* b *di qua da* C, *con un capovoltarsi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto* m *va dalla parte di* H *nella* PH *prodotta. Andando innanzi* E *all' infinito, si scemano la* MH, *e la* mH *(che già si trova fuor del circolo dalla parte di* H) *all' infinito; e però amendue i rami si accostano all' infinito*

al

al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio CE *diviene infinito.*

Ma se queste mutazioni della ragione si facciano collo scemare il raggio PC, *succede lo stesso, cioè nell' accostarsi* C *ad* E *va il ramo esteriore in* elisse *nell' arrivo di* C *in* E. *Indi torna il ramo esteriore dall' infinito, ma capovoltato, e all' arrivo di* C *in* F, *va in* F *anche il* B; *e scemando sempre più il raggio* PC, *si scema il ramo* AMB, *e all' arrivo di* C *in* P *vanno in* P *i punti* AB, *e tutto il ramo tanto interiore, quanto esteriore; giacchè la ragione di* FM *ad* MH, *cioè in quel caso ad* MP, *e di* FM *ad* mH, *cioè ad* mP *dovrà essere infinita, e però le* PM, Pm *nulle.*

Ora è tempo di dar un' occhiata a una elegantissima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l' angolo MFR, *o* mFr *verso* H *eguale ad* FHM, *e si tiri per* M *la retta* SMT *perpendicolare alla* FR, *che sarà la tangente, e allo stesso modo* mts *perpendicolare alla* Fr.

Per dimostrar questo metodo, e non intrigar la figura si è cavata parte di essa fig. 1. *a fianco a man dritta. Sieno* MV *due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri* FP *sieno gli archetti* VX, VY, *che taglieranno la* MY *incremento della* PM *andata in* PV, *e decremento della* MH *andata in* Vh, *e la* MX *decremento della* FM *andata in* FV; *e per essere* FV *ad* Vh, *come* FM *ad* MH, *sarà anche levando proporzionali da proporzionali* MX *ad* MY *nella stessa ragione di* FM *ad* MH. *Ora gli archetti* VX, VY *scemando all' infinito, si potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette* FM, PM; *onde se inoltre si tiri* FT *perpendicolare alla retta* MV *prodotta, la quale incontri la* PM *in* R, *sarà il quadrilineo* FXVT *per gli angoli* X, *e* T *retti in un circolo, e il quadrilineo* RYVT *parimente in un circolo per gli angoli* T, *e* Y *retti. Quindi saranno i rettangoli* FMX, RMY *eguali ciascuno a* TMV, *e però anche fra loro; onde sarà* MR *ad* MF, *come* MX *ad* MY, *cioè*

come

come FM *ad* MH; *e però i triangoli* RMF, FMH *simili*, *e l' angolo* RFM *eguale all' angolo* FHM, *la qual cosa si verificarà accuratamente*, *quando i punti* V *ed* M *coincidano*, *e la* MT *divenga una tangente*. *La dimostrazione pel punto* m *è la stessa*.

Quindi si vede, *che anche non avendo il circolo* DHC, *ma la sola Curva*, *e quella ragion data*; *basta produrre* PM *in* R *in modo*, *che sia* MR *ad* MF *in quella ragion data*, *e tirata* FR, *menare una perpendicolare alla medesima*, *che sarà la tangente cercata*.

Si vede inoltre, *che in tutti que' vertici dell' asse*, *che non saranno in* P, *come lo è il vertice della attaccatura* Ab *della* fig. 2.: *sempre le tangenti saranno perpendicolari all' asse*. *Benchè sempre la* MR *caderà sull' asse*; *e però la* FR *coinciderà coll' asse*, *e converrà che la tangente sia perpendicolare all' asse medesimo*. *L' unico caso*, *in cui la dimostrazione generale non cammina è quando il punto* M *va in* P, *il che può accadere nella* fig. 2.; *perchè allora non andando il punto* M *fuori di* P *nell' asse*, *può la* PH, *e però la* FR *avere qualunque direzione*, *e conviene trovar quella*, *in cui* PM *svanisce andando* M *in* P, *il che accade quando l'* H *vada in* V, *o in* u, *dove anche con questo metodo si troverebbe la tangente*, *che già si è trovata di sopra essere la stessa* PV, Pu; *cosa che anche di qua facilmente si ricavarebbe*.

Finalmente si noti che, *se la ragion data fusse ragion di egualità*, *sarebbe il triangolo* FMR *isoscele*, *e la tangente segarebbe per mezzo l' angolo* FMR, *come accade nella* elisse conica.

Quando la ragione di FM *ad* MH *è di unità a numero*, *che sia* n, *come lo è nel caso de' fili*; *i punti* M *si trovano più facilmente così*. *Prese* (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD *eguali alla lunghezza del filo*, *divisa la* FC, *e la* FD *in parti* n + 1, *si piglino* FB, *ed* FA *verso* C, *e* D *eguali ad una*

di

di dette parti. Indi divise le stesse in parti $n-1$, *si piglino* Fb, Fa *verso le parti opposte eguali a una di esse: così si troveranno i vertici; mentre sarà* FB *a* BC, *e* FA *ad* AD, *come pure* Fb *a* bC, *ed* Fa *ad* aD, *come* 1 *ad* n. *Poi presa* FO *eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in* F *con qualunque apertura, che stia in mezzo tra la* FA, *e la* FB, *si faccia un arco di cerchio verso* M, *indi la medesima apertura si trasporti da* F *verso* O *numero di volte* n, *finchè si arrivi a qualche punto* Q; *si prenda* OQ, *e col centro in* P *con detta apertura* OQ *si faccia l' intersezione coll' arco di prima in* M, *e così si troveranno sempre due punti* M *di qua, e di là dell' asse molto accuratamente. Lo stesso si farà per li punti* m *pigliando le aperture* Fm *medie fra* Fb, Fa, *e arrivando in* q. *La dimostrazione è tanto facile che si vede da se.*

Passando ora a determinare l' equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) *perpendicolare all' asse si ponga* $PE = n$, $PC = m$, $PF = a$, $PL = x$, $LM = y$, $PM = \sqrt{xx + yy} = z$. *Sarà per la* 13. *del lib. II. di Euclide.* $FMq. = FPq + PMq - 2\, FP \times PL = aa + zz - 2ax$. *Onde facendo come* $n . m :: FM = \sqrt{aa + zz - 2ax} . MH = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *si avrà* $PM + MH = z + \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax} = PH = m$. *Quindi* $m - z = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *e però* $mm - 2mz + zz = \frac{mmaa}{nn} + \frac{mmzz}{nn} - \frac{2mmax}{nn}$; *cioè ripulita questa equazione* $(mm - nn)\, zz - 2mmax + 2nnmz + mmaa - nnmm = 0$. *In questa sostituendo per* zz *il suo valore* $xx + yy$, *trasponendo* $2nnmz$, *indi quadrando, e risostituendo per* zz *il valor suo, viene l' equazione per* x, *e* y, *che verrà di quarto grado. Onde si vede, che queste sono Curve di terzo ordine.*

Ma

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z. *Se sia* $m = n$, *svanisce* $(mm - nn)\,zz$, *e resta il tutto divisibile per* m, *rimanendo solo* $-2max + 2nnz + m(aa - nn) = 0$. *D'onde si cava* $2mnz = m(nn - aa) + 2amx$, *e di qui, quadrando viene l'equazione all'* elisse, *dopo di avere sostituito per* zz *il suo valore* $xx + yy$.

Se sarà $a = n$, *che è il caso della* fig. 2., *svanirà l'ultimo termine* $mmaa - mmnn$, *e si avrà* $(mm - nn)\,zz - 2mmax + nnmz = 0$. *Ora di qui si cava, che questa Curva è la stessa, che la* Concoide, *in cui la base sia un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè sarà* $(mm - nn)\,zz = 2mmax - 2nnmz$. *Onde* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} - \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Posto questo si piglj* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e si faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla* PM *venga incontrato in* X. *Sarà per l'angolo* PXZ *retto,* $PM = z . PL = x :: PZ = \frac{2mmn}{mm-nn} . PX = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z}$. *Onde essendo tutta* $PX - XM = PM = z$, *sarà* $XM = \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Dunque è dato il diametro* AZ *di un circolo, e da qualunque* PX *levata una* XM *costante, si trova il punto* M, *che sarà a una concoide circolare, che avrà per base un circolo, e per polo un punto nella sua circonferenza. La dimostrazione vale anche per* m *chiamando* $Pm = -z$. *Che se essa si chiamasse* $+z$ *si avrebbe* $mb + bh = z + m = \frac{m}{n}\sqrt{nn + zz - 2nx}$, *e però rifacendo il calcolo si trovarebbe* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} + \frac{2nnm}{mm-nn}$; *e posto lo stesso diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$; *si avrebbe la linea* Xm *presa in fuora eguale al valor medesimo* $\frac{2nnm}{mm-nn}$.

 Da

Da questa riflessione nasce un modo assai più facile per trovare questo nuovo circolo, e descriver la Curva. Trovato il punto B, *ed* a, *come sopra, si seghi la* Ba *in mezzo in* Z, *e col diametro* PZ *si faccia un circolo; indi si giri una riga* PMX *attorno a* P *pigliando sempre il punto* M *da* X *verso* P, *e un altro in fuora coll' apertura* BZ, *e sarà fatto. Si noti solo, che essendo il diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e la* $ZB = \frac{2nnmm}{mm-nn}$ *sarà anche* $PZ.ZB :: m.n$. *Inoltre essendo* $PB = \frac{2mmn-2nnm}{mm-nn}$, $Pa = \frac{2mmn+2nnm}{mm-nn}$ *sarà quella* $= \frac{2mn}{m+n}$, *e questa* $= \frac{2mn}{m-n}$; *onde saranno* $AB.Aa :: m-n.m+n$, *cosa che anche direttamente si mostra con facilità.*

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=o$ *divenga* $a=o$, *indi* $a=m$, *a infinito, o se* m, *o* n *si mutino dal zero all' infinito; si avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di sopra. Dall' equazione* $(mm-nn)zz-2mmax+annmz+mmaa-mmnn=o$ *generale, si ricavano facilmente i vertici degli assi. Si ponga prima* $x=z$, *indi* $x=-z$, *e si avranno i casi ne' quali le* AL, AM *si eguagliano, cioè in cui il punto* M *va nell' asse. Si avranno due equazioni* $(mm-nn)zz-2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=o$, *ed* $(mm-nn)zz+2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=o$, *e dividendo per* $mm-nn$ *si avrà* $zz+\frac{2nnm \mp 2mma}{mm-nn}z+\frac{mm}{mm-nn}(aa-nn)=o$; *dalle quali si possono ricavare i quattro valori cercati di* z, *che colla geometria semplice più facilmente si sono ricavati.*

Prima di pulire l' equazione generale si avverta, che se si cerchi la curva, in cui dati due numeri h i *qualunque interi o rotti, razionali o irrazionali sia* $h\times PM+i\times MF$ *eguale* *le a una costante; dividendo per* h *si avrà* $PM + \frac{i}{h} MF = \frac{e}{h}$. *Onde fatto* $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$, $\frac{e}{h} = m$, *sarà* $PM + \frac{m}{n} MF = m$; *onde torna lo stesso caso.*

Per pulire poi l'equazione dai z, *si dica* $mm - nn = rr$, $aa - nn = cc$, *e in cambio di* $(mm - nn)zz - 2mmax + 2nnmz + mm(aa - nn) = o$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + 2nnmz + mmcc = o$, *e trasponendo* $2nnmz$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + mmcc = -2nnmz$, *e però quadrando.* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + 2m^2r^2c^2z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 4n^4m^2z^2$, *e quindi trasponendo* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + (2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2)z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Si faccia* $2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2 = t^6$, *e verrà* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + t^6z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Sostituendo ora* $x^2 + y^2$ *per* z^2, *si avrà* $r^4x^4 + 2r^4x^2y^2 + r^4y^4 - 4m^2r^2ax^3 - 4m^2r^2axy^2 + t^6x^2 + t^6y^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4a^2cx + m^4c^4 = o$, *e dividendo per* r^4 *verrà finalmente l'equazione pulita come segue:* $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{4m^2a}{r^2}x^3 - \frac{4m^2a}{r^2}xy^2 + \frac{t^6}{r^4}x^2 + \frac{t^6}{r^4}y^2 + \frac{4m^4a^2}{r^4}x^2 - \frac{4m^2c^2a}{r^4}x + \frac{m^4c^4}{r^4} = o$.

Da questa col fare $y = o$ *si troverebbero i vertici degli assi in un' equazione di quarto grado, che sarebbe divisibile in quattro di primo. Da questa le tangenti; cose che si sono trovate più facilmente colla Geometria. Da questa finalmente i flessi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma basta sin qui di questa ricerca.*

Aggiunta sulla moltiplicità de' casi.

Se si cerca il numero di tutti i casi principali di queste Curve quando il PC *non va all' infinito, essi sono* 35, *che si riducono propriamente a* 29 *per la totale coincidenza di* 6 *con altri tre; e per vedere queste variazioni, vi vorrebbero almeno* 29 *figure diverse.*

Non considerato ancora il punto F, *e stando fermo* C, *può il punto* E *stare primo in* P; *secondo tra* P *e* C; *terzo in* C; *quarto dopo* C; *quinto all' infinito. Intanto il punto* F *può stare primo in* P; *secondo tra* P *ed* E; *terzo tra* E *e* C; *quarto in* E; *quinto in* C; *sesto dopo* C; *settimo all' infinito. Questi sono sette casi per ogni caso delli primi cinque, onde sarebbero* 35. *Ma nel primo caso di* E, *i primi tre di* F *sono gl' istessi, trovandosi in esso sempre* F *in* P. *Nel terzo caso di* E, *il terzo, quarto, quinto di* F *sono gli stessi, trovandosi in essi* F *in* C; *nel quinto caso di* E *gli ultimi tre casi di* F *sono gl' istessi, trovandosi in essi* F *sempre all' infinito. Così rimangono* 6 *di meno, e però* 29.

Se va all' infinito P, *e non* C, *vi sono tutti i casi delle sezioni coniche. Se va all' infinito* C, *e non* P, *vi sono tre casi di* E, *che può essere in* P, *in una distanza finita, e all' infinito. Per questi tre casi, vi sono nel primo: tre di* F *in* P, *in una distanza finita, e all' infinito; nel secondo cinque, cioè in* P, *prima di* E, *in* E, *dopo* E, *all' infinito; nel terzo caso tre, cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E però altri* 11.

Se C *stia in* P, *vi sono altri tre casi di* E, *cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E per essi altri* 11 *di* F.

Dunque tutti i casi insieme si riducono a $29+11+11=51$. *Oltre a tutti quelli che appartengono alle sezioni coniche riportate alla direttrice.*

Ognuno di questi casi ha qualche cosa di notabile, e in tutti vi sono delle suddivisioni d' innumerabili casi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, *non contenendosi negli esposti, che il solo eccedersi, annullarsi, infinitarsi, senza considerare le infinite diverse ragioni nel caso degli eccessi finiti.*

Let-

Altra Lettera 27. Aprile 1748. scrittami dal Medesimo sullo stesso soggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le scrissi intorno alla Curva da Lei propostami considerata nella sua generalità, hanno avuto dell' incontro presso V. S. Illma non voglio lasciare di avanzarle un' altra notizia intorno alle medesime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono questa volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve considerate dal Cartesio nella sua Geometria sul fine del lib. 2., per le refrazioni, e la costruzione delle quali il Nevvton generalmente abbraccia nella proposizione 97. del libro primo de' suoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la costruzione generale del Nevvton coincide a diritura colla nozion generale della Curva, che ho data, e si può facilmente ridurre a quella costruzione, che ho messa immediatamente avanti all' equazione.

Il Nevvton trova (Fig. 5. Tav. 8.) *che acciò i raggi partiti dal punto* A *vadano ad unirsi nel punto* B *dopo la refrazione nella superficie generata da una Curva* CDE, *che si cerca, si può prendere il punto* C *ad arbitrio, indi presa pure* CN *verso* B *ad arbitrio, e* CM, *che deve essere incremento della* AC *a* CN *decremento della* BC *nella ragion data del seno d' incidenza al seno di refrazione, co' centri* A *e* B, *cogli intervalli* AM, BN *si determinarà il punto* D, *che sarà alla Curva cercata.*

Ora se si prende CH *verso* B, *a* CB *nella stessa ragion data, e col centro* A *coll' apertura* AH *si faccia un circolo* HI, *che incontri in* D *la* AD *prodotta, sarà ancora* BD *a* DI *in ragion data, cioè in quella di* BC *a* BH, *o del seno di refrazione al seno d' incidenza. Giacchè essendo* BC *a* CH, *e* CN *a* CM *in detta ragione, col togliere proporzionali resterà*

anche

anche BN *ad* MH *nella stessa ragione. Onde essendo* BD *eguale a* BN, *e per le* AH, AI, *ed* AM, AD *eguali, anche la* DI *eguale a* MH. *Sarà nella stessa ragion data anche* BD *a* DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A, C, B, D, H, I *di questa figura gli stessi, che nella* fig. 3. Tav. 9. *delle trasmesse a Lei nella mia ultima lettera i punti* P, b, F, mi, C, Hi. *Vede inoltre che ogni volta che il seno d'incidenza al seno di refrazione starà come numero a numero, si potrà la Curva descriver co' fili. Così nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di refrazione, è come* 3 *a* 2. *Se una estremità del filo* (1) *si ferma in* F (Fig. 4. T. 8.), *indi si piega presso allo stilo* Mi, *e poi si avvolge d'intorno ad un pivolo* P, *quindi vada in* V, *e poi si avvolga d'intorno al pivolo* F, *e poi finalmente coll'altra estremità vada a metter capo in* Mi, *con lo stilo* M *si descriverà la Curva* Mb *cercata.*

Perchè si vede chiaro, che posta $PMi = z$, $MiF = u$, *tutto il filo* $= a$, *sarà* $2z + 3u = a$; *e però* $2dz + 3du = 0$, *onde* $2dz = -3du$; *e* $dz. - du :: 3.2.$ *Onde* (Fig. 5.) *essendo nata la* CM *da tutti i* dz *incrementi della* AD (*che è* PM *della* fig. 4.), *e* CN *da tutti i* $-du$ *decrementi della* BD (*che è* MF fig. 4.) *sarà ancora* (Fig. 5.) CM. CH :: 3. 2, *come il seno d'incidenza al seno dell'angolo rifratto.*

Generalmente basterà fare, che il filo in MF *sia radoppiato tante volte, quanto esprime il numero del seno d'incidenza, e in* MP *quanto esprime il numero del seno di refrazione, e sempre si avrà la Curva cercata.*

Qui non si vede, che uso abbiano le altre Curve della costruzione generale, che le mandai; ma basterà accennare questo solo, che si avranno in esse tutti i casi, ne' quali i raggi porta-

(1) Si avverte, che questa tale disposizione di filo (*Fig.* 4. *T.* 8.) non è del P. Boscovich, ma è quella medesima, che propongo io nel mio testo, e che non per altro ho qui sostituita alla sua, se non perchè parmi, che il filo ordinato così riesca più agile, e libero a muoversi.

portati con direzioni, che passano per un punto, o sia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una superficie generata dalla revoluzione di una Curva intorno a un asse, e ivi o passando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo refratto, e dell' angolo di riflessione sia in data ragione, debbano avere direzioni che passano per un punto, o andando verso quello, o fugendone. Ed ogni volta che la normale segherà l' angolo, che le rette PM, MF *delle* Figure 1. 2. 3. T. 9. *della mia ultima formano verso la* PF, *e che è l' interno del triangolo* PMF, *sempre si avrà il caso della riflessione; quando poi detto angolo sarà segato dalla tangente, si avrà il caso della refrazione. Benchè il caso di una riflessione fatta con quella legge non esiste in natura; essendo nella riflessione della luce il seno dell' incidenza eguale al seno di riflessione, e negli altri corpi non perfettamente elastici, le tangenti di detti angoli sono in data ragione, e non i seni.*

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali descritte col filo in altra maniera.

Quanto più fuori delle menti degli uomini fu la descrizione organica di Curve, che rassomigliassero ad una sezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, suggerendo nuove vie, onde detta descrizione si conseguisca. Mettendo adunque soltanto (*Fig.* 8. *Tav.* 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già messi in P, ed F, secondo la situazione che sortisce rispetto a quelli, nascono nuove Curve. E quando la distanza EF sia eguale ad una quinta parte incirca della distanza FP, ed il filo fisso in P movendosi, sdruccioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo stilo M, ovvero *m* descritte altre Ovali, purche la porzione FM non eguaglj la porzione FP, o la porzione FE due volte presa; perchè nel primo caso la Curva fa un angolo curvilineo in P, e nel secondo in F. Per altro quante mai Curve risultino dalla situazione dei detti tre pivoli fitti nel piano l'uno per dritto all' altro, l'asse loro generalmente è (se la porzione FM è eguale, o minore di FP) è dico l' asse $= ME + \frac{ME + 2EF}{3}$, cioè (*Fig.* 9.) $= AE + EB$. Se poi la porzione F*m* è maggiore della porzione FP (*Fig.* 8.) l' asse sarà $= \frac{mP}{3} + PE + \frac{mE + 2EF}{3}$. Espressione, che per addattare la Curva alla data lunghezza della tavola, o cornici, a' Meccanici basterà, giacchè non sarebbe poi facile definire senza calcolo anche la massima larghezza.

Ma se il pivolo E dall' uno o dall' altro pivolo F, o P recedendo, all' uno o all' altro si accostasse tanto, che venisse ad essere tutt' uno, questo caso tornarebbe lo stesso della *Fig.* 1., 2., e 3.

Se poi disposti i fochi per dritto, come nella 8., ed il filo composto come nella 6., e lo stile posto in M, si concepisce il pivolo E accostarsi, e coincidere nell' uno o nell' altro pivolo P, ovvero F; allora verrebbe certo il caso della *Fig.* 1., 2., 3.; ma la ragione di HM ad MF, che ivi era come 2 ad 1, seguirebbe qui (*Fig.* 6.) come 3 ad 1, e nientedimeno si avrebbero sezioni belle di vovo.

Ma se finalmente i pivoli non più si mettessero per dritto, ma tra essi un qualsisia angolo costituissero, nessun altro più fecondo soggetto potrebbesi immaginare in questa materia, ma non voglio più inoltrarmi in tali ricerche, che troppo longi mi condurrebbero. E basti per ora aver indicato di quanti preclarissimi usi sia capace un semplice filo.

ISTRO-

ISTROMENTO VIII.

PER LA DESCRIZIONE DI UNA CURVA INCOGNITA.

BEnchè essendo l'equazione (1) di questa Curva (inutile forse così come incognita) troppo alta e composta, avrei potuto dispensarmi di descriverla organicamente, l'ho nonostante descritta; sì perchè somministra Curve somiglianti a sezioni di frutta, o a foglie d'erbe, d'alberi, e fiori, le quali diedero occasione a questa mia bagatella, sì perchè l'immortale Nevvton a ciò fare m'induce con queste precise parole (2): *Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat; nam æquatio ad parabolam simplicior est, quam æquatio ad circulum, & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur*. Laonde per esser facile la *descrizione* così *per punti*, che *organica* di questa Curva, vengono per lo meno avvertiti i Filosofi, ch'essa non è affatto indegna delle loro applicazioni. E però principiarò dalla sua *descrizione per punti*.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione di detta Curva per punti.

COndotti pertanto (*Fig.* 1. 2. 3. *Tav.* 10.) dal centro C alla periferia i raggi CV, C1, C2 ec. equidistanti; e

poi

(1) Presi (*Fig.* 2. o piuttosto 8., *Tav.* 10.) due archi eguali VD, GB, si conduca il raggio CB; e la BP, DI normali ad MV. Poichè per la costruzione l'angolo VCD = all'angolo GCB; sarà anche l'angolo DCG = BCM; e però CI seno dell' angolo DCG = BP seno dell' angolo BCM. Ciò posto sia il raggio CV = a, ed abbassata dal punto Q della Curva la QH normale a CV, si chiami CH = x. HQ = y. E seguendo l'operazione risultarà questa equazione $y = \pm \sqrt{\dfrac{x^3 - 2axx + aax}{2a - x}}$.

(2) *Arith. univers.* pag. 286.

poi dal vertice V altrettante rette VG, V1, V2 ec. che comprendano alla periferia archi eguali a quelli de' raggi, la linea, che scorrerà per i punti d'intersezione delle rette CV con VG; C1 con V1; C2 con V2 ec. sarà la incognita Curva proposta.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica di detta Curva.

SI concepisca (*Fig.* 4.) stare fisso ed immobile al piano orizzontale per mezzo di due viti introdotte nei forami A, B un anello pur orizzontale ABD, nella di cui costa, o margine interiore abbiasi a muovere in cerchio un altro anello *Vndm* diviso per diametro da una fessura *nm*, e nella solidità della sua circonferenza scolpito di una scannellatura circolare, in cui si muova il prisma della *fig.* 6. coll' annesso uncino *d*, qual prisma si fermi per di sotto con una vite in qualunque dato punto di detta circonferenza; cosicchè l'anello interiore, il prisma, l'uncino costituiscano, per dir così, un medesimo pezzo. Un regolo poi VD quinci riceva nella fessura, onde pel lungo è aperto, riceva, dico, l'uncino *d* connesso al prisma suddetto, e quindi in un buco V un altro uncino *z*V afferrato all' anello esteriore ABD. Dove poi le fessure *nm*, VD s'intersecano in S, trapassa giù, e giunge nel piano della carta uno stilo S congiunto ad una guida scorrente pel lungo del fesso regolo VD, onde si descrive la proposta Curva.

Perchè la sola fessura *nm* fa per tutti i raggi (*Fig.* 1, 2, e 3.) CV, C1, C2, ec. e la fessura VD per tutte le rette VG, V1, V2 ec. E la *fig.* 5. rappresenta per la sezione *eb* la grossezza, e forma dell' anello esteriore ABD della *fig.* 4. fermato al piano con la vite N, che nella *fig.* 4. andarebbe posta nei forami A, e B. Per *ca* s'indica la grossezza, e forma dell' anello interiore *Vndm*; e per il bianco interposto s'intende il vuoto ſpazio, in cui deeſi introdurre il priſma coll' uncino *d* della *fig.* 6. che per di ſotto ſi ferma con l'opportuna vite C.

Ora per la piena intelligenza, e prova di queſta coſtruzione, ſi concepiſca l'Iſtromento eſſere per eſempio ordinato alla *fig.* 2. nella quale è da conſiderare: Primo, che il raggio CV, e la retta VG ſono le prime linee, le quali interſeccanteſi in V formano il principio, e vertice della Curva nel punto V, e rappreſentano l'Iſtromento nella ſituazione dovutagli prima di eſſer moſſo, cioè ſignificano la ſituazione riſpettiva della feſſura *nm* (*Fig.* 4.) col regolo VD. Secondariamente, che il punto G è diſcoſto una quarta di cerchio dal punto V, ed *n* alla prima coinciderà in V, e *d* in G. Terzo, quanto ſarà per eſſere l'arco V*n* percorſo dal raggio C*n* da V verſo G, altrettanto dovrà eſſer l'arco G*d* percorſo dalla retta V*d* da G verſo M.

Alle quali coſe riguardando ſi farà (*Fig.* 4.) primieramente che l'uncino *d* col priſma anneſſo ſia fermato con la vite per di ſotto, come prima ſia condotto lontano da *n* una quarta di cerchio; onde avverrà che nella primiera ſituazione dell' Iſtromento la feſſura C*n* coinciderà con CV ſuppoſto immobile; il punto *d* col punto G; il regolo V*d* ſtarà come corda dell' arco *nd*, e lo ſtilo S coinciderà ne' punti V, ed *n* pure coincidenti.

Dopo queſta diſpoſizione fatto muovere a deſtra l'anello interiore *ndm* intorno al centro C, perchè i puntì *n*, e *d* ſono fiſſi in un medeſimo anello, quanto ſarà receſſo *n* dal punto V, altrettanto il punto *d* ſarà rimoſſo dal punto G, e però l'arco V*n* dal raggio *cn* percorſo ſarà eguale all' arco G*d* percorſo dal regolo V*d*; e trattanto dallo ſtilo S, che ſcorre inſieme colla ſua guida lungo detto regolo VD, verrà deſcritta ſul piano della carta la Curva della *Fig.* 2. Onde ſi raccoglie, che tutte le Curve generate dal movimenmento di questo Istromento mutano faccia, secondo che l'uncino *d* è situato più o meno lontano dal punto estremo *n* della fessura *mn*. E la simetria loro partecipa dell' una delle tre Curve, che le *figure* 1, 2, e 3 rappresentano. Cosicchè secondo che l'arco *nd* del circolo interiore sarà eguale all'arco VG della *fig.* 1, 2, 3, o qualunque altra; o la prima, o la seconda, o la terza, o qualunque altra ne verrà.

Si potrebbe ancora coll' uso di alcune molli, o ruote dentate, o altro argomento eccitare nello stilo S certi tremiti regolari, delle quali partecipando la Curva venisse a produrre un parametro rotto, o compartito in spesse, e ben ordinate punte, quali elegantemente spiccano nella *fig.* 7. e 9. Benchè è d'avvertire, che in ogni modo tutte queste Curve saranno per ragione inseparabile del meccanismo diffettive sempre de' primi punti nel vertice V. Ma che vo io ricercando queste piccole cose, se più rara e bella materia nel seguente ragionamento mi si prepara innanzi?

ISTRO-

ISTROMENTO IX.

PER LE CURVE GENERATE DAL MOTO COMPOSTO DI DUE CIRCOLI.

CIOE

Per la Linea retta, Elisse, Circolo, Fiori geometrici, Cicloidi di base circolare, Spirali, *e particolarmente la* Spirale d'Archimede.

PEr gli usi amplissimi, che porta in fronte questa macchinetta, ho giudicato non disconvenirle il nome di *Penna Geometrica*, e spero che chiunque prenderà in grado di leggere questo scritto, resterà facilmente persuaso, che se gli debba meritamente adattare un simil titolo. Ma affine di dare alla molta materia un certo ordine, l'ho divisa in quattro parti, e distinta ciascuna parte in articoli. La prima delle quali comprenderà la *descrizione per punti* delle proposte linee. La seconda, la *costruzione organica*. La terza, gl'usi dell'Istromento. La quarta, essendo che questo Istromento agisce per il moto composto di due cerchj, conterà gli usi di un Istromento simile nel supposto, che fosse stato concepito come adoperante con tre.

PARTE PRIMA.

ARTICOLO UNICO.

Descrizione per punti delle predette Linee.

IN quella maniera, che per dare ad intendere le stazioni, direzioni, e regressi de' Pianeti Tolomeo s'immaginò, che questi fossero posti nella periferia di un mobile *Epiciclo*, il di cui centro fosse nel medesimo tempo

rapi-

rapito lungo la circonferenza di un altro *primo Mobile*, e quindi nelli ſpazj del Cielo veniſſero a tracciare una Curva ſimile per eſempio alla *Fig.* 5. *Tav.* 15. Così figuriamſi ora, che (*Fig.* 2. *Tav.* 15.) di due dati cerchj (il primo *nop* ec. chiamato *primo Mobile*, ed un altto *a*, 1, 2, 6 chiamato *Epiciclo*) il raggio *na* di detto *Epiciclo* volgaſi d'intorno al proprio centro *n* nello ſteſſo tempo, che queſto centro *n* dal raggio *cn* del *primo Mobile* ſia portato per tutti i punti *n*, *o*, *p*, *q* ec. della circonferenza di detto *primo Mobile*. Perchè quindi verranno dal punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* generate delle Curve, che il Celebre P. Abate Guido Grandi, ſotto il nome di *Rodonee* generalmente comprende, e ſpecialmente deſcrive (1) col farle paſſare per infiniti rami tirati da un medeſimo centro, ed eguali ai ſeni di angoli corriſpondenti in data ragione, ad altri angoli formati da detti rami con una poſizione coſtante data. Ma con un eſempio, che ſervirà per tutt' altre Curve, che foſſero propoſte di queſta ſchiera, produrrò quella *deſcrizione per punti*, che ſiccome diede animo all' invenzione del preſente Iſtromento, così a quello ha grandiſſimo rapporto. Prima però è da conſiderare, che tre cauſe coſpirano alla modificazione, o ſia generazione di queſte tali Curve.

Prima, perchè la lunghezza de' raggi *cn*, ed *na* dei due *Mobili primo*, ed *Epiciclo*, può eſſer in data ragione diverſa.

Seconda, perchè le velocità angolari de' *Mobili* poſſono parimenti eſſere in data diverſa ragione, che riduceſi a tre caſi: Primo, perchè la velocità dell' *Epiciclo* può eſſer maggiore di quella del *primo Mobile*; ſecondo, perchè può eſſer minore; terzo, perchè può eſer eguale. E qui notate, che ſempre che ſi diran *velocità*, ſi vogliono intendere *angolari*.

Terza, perchè un *Mobile* può muoverſi, o in conſeguenza

(1) *Flores Geomet.* Par. I. Definit. 1.

za dell' altro, o in verso contrario. Ora dunque sia data la *descrizione per punti* di una di queste linee proveniente. 1. da due cerchj, de' quali siano i raggi qualunque dati. 2. mobili con velocità date eguali. 3. l'uno dell' altro movventesi in senso contrario.

Onde primo fatto centro in C coll' apertura C*n* raggio dato del *primo Mobile* si descriva il circolo *nop* ec. di detto *primo Mobile*. Così fatto centro in *n* coll' apertura *na* raggio del dato *Epiciclo* si descriva detto *Epiciclo a*, 1, 2, 6, ed i raggi C*n*, *na* posti siano per dritto in una medesima linea, figurandosi che così stessero prima che fossero posti in moto, e che la Curva abbia a principiare, e a descriversi dal punto *a*.

2. Le periferie di detti due Mobili si dividano in numero di parti, che sia in ragion data inversa della velocità. Come se la velocità del *primo Mobile* fosse alla velocità dell' *Epiciclo* come 1 a 2, la periferia del *primo Mobile* si potrebbe comodamente dividere in parti 8, e quella dell' *Epiciclo* in 4. Ma essendo nel nostro caso le velocità date eguali, ciascuna periferia si divida in 8 parti, ed a quelle del *primo Mobile* dal centro *c* siano condotti i raggi *co*, *cp* ec., ed oltre a detta periferia anche prodotti. Poi fatto centro in *o*, in *p* ec. con l'apertura *na* si descrivano cerchj eguali all' *Epiciclo*.

3. Supponendo, che il raggio del *primo Mobile* della primiera situazione *cn* si muova a sinistra verso *o*, *p* ec. e seco porti l'*Epiciclo*, quando il raggio C*n* volgendosi sarà pervenuto in *co*, il raggio *na* coinciderebbe con *o*V, se anch' egli non si fosse mosso o verso 3, se i moti fosser dati in conseguenza, o verso *b*, se i moti, come nel presente caso, dati fossero contrarj. Inoltre perchè, quando il raggio *cn* è giunto a coincidere con *co* ha già percorso uno spazio *no*, così presa col compasso una parte *a*1 della periferia dell' *Epiciclo*, da V verso *b* si segni; e se il

raggio

raggio C*n* s'intenda già trascorso due spazj sino a *cp*; presi parimente due spazj *a* 2 nella periferia dell' *Epiciclo* da X si segnino verso *d*, e così andate dicendo. Onde i punti *a*, *b*, *d* saranno elementi della Curva, e di questa maniera si otterranno anche gli altri, e si legaranno poi con una linea, che sarà la proposta, sarà dico un *circolo*, come (1) a suo luogo si dimostrarà.

Qui per fine è generalmente da notare, che procedendo con questo metodo l'arco V*b* dell' *Epiciclo* sarà al corrispondente arco *no*, che si suppone nel medesimo tempo percorso dal *primo Mobile* (o sia l'angolo V*ob* sarà all'angolo *n*C*o*) in ragion data della velocità; la quale, per esser qui stata data eguale, così gli angoli V*ob*, *n*C*o* sono eguali. Esposta pertanto la *descrizione per punti* si passerà all' *organica* nella seguente parte.

PARTE SECONDA.

Della costruzione dell' Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Piano orizzontale di detta costruzione.

BEnchè altri s'immaginarono (2) delle Curve provenienti dal moto composto di due cerchj applicati l'uno all' altro, come sopra s'è detto, nissuno però le ridusse per anco alle leggi di meccanica. Laonde questa parte addossandomi io, si supponga che (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) un *cilindro* TQZ stia fermo ed immobile nel centro di un *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6, quantunque il raggio Q*r* (di cui fa le veci

(1) Part. 3. Art. 5.

(2) Il P. Castel *Traité* 50.^me *de Mathematique: Des Especes des Courbes Liv. primier des divers Ordres.*

veci l'asta MN) di detto *primo Mobile* si volga d'intorno al centro Q, e si supponga un altro cilindrino *mrd* stare nel centro *r* di un *Epiciclo* 2, 3, 4; cosicchè movendosi detto cilindrino *mrd* in un si muova anche il raggio *rs* dell' *Epiciclo*, che con detto cilindrino costituisce un medesimo pezzo.

Inoltre nel punto T della periferia del cilindro TQZ sia fissato un filo, che d' indi condotto al punto *m* della periferia del cilindrino *mrd*, ed intorno ad esso prima più volte rivolto, pur finalmente vi si fissi. Dico ormai, che dal rotante raggio Q*r* del *primo Mobile* per i punti di detto *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6 portato il centro *r* dell' *Epiciclo*, nel medesimo istante sarà costretto a girare il cilindrino *mrd*, in un col raggio *r*S dell' *Epiciclo* d'intorno al proprio centro *r*. Perchè, stando fermi li due centri Q, ed *r* nella già determinata distanza, non può una parte qualunque del filo T*m* piegarsi sulla circonferenza del cilindro TQZ, che altrettanta parte non si spieghi giù dalla circonferenza del cilindrino *mrd*; nè spiegar puossi, se il cilindrino cedendo all' attrazione del filo, non si volge d'intorno al proprio centro *r*, ed intanto da uno stilo posto nel punto S non venga sul piano della carta delineata una Curva, a modificar la quale le tre suddette cagioni cospirano, che si dovranno da quì innanzi aver ben fisse nella memoria, e che nel seguente articolo si richiameranno alla presente costruzione.

ARTICOLO SECONDO.

Cagioni moderatrici delle Curve soggette a questo Istromento richiamate alla presente costruzione.

TRe sono le cagioni, come già dissi, onde queste Curve pigliar possono nuove sembianze, e talvolta nemmeno parer più desse. Alla prima delle quali si vedrà quanto prima nel piano verticale come l'Istromento si componga, e ſi determini la lunghezza de' raggi Qr, rS in data ragione.

Per la ſeconda cagione eſſendo tre i caſi, come ſi è detto, delle velocità, a tutti tre per ordine ſi applicherà l'Iſtromento. Onde primo è da ſapere che le velocità (dico ſempre angolari) dei *mobili* ſono in ragion inverſa dei diametri de' cilindri. Il che per render chiaro con un eſempio, ſupponiamo, che il diametro del cilindrino *mrd* ſia al diametro del cilindro TQZ, come 1 a 3; e perchè ſono le periferie come i diametri, ſaranno eſſe ancora nella ſteſſa ragione di 1, a 3. Supponiamo inoltre eſſere ſtato il centro *r* dell' *Epiciclo* traſportato dal raggio Qr del *primo Mobile* ſino al numero 3., cioè ſino alla terza parte della periferia del *primo Mobile*. Onde il filo T*m* avrà acquiſtata la ſituazione Z3, e nello ſteſſo tempo, eſſendoſi piegato d' intorno al cilindro TQZ, avrà occupata una terza parte di eſſo, o ſia tutto l' arco TZ; alla quale eſſendo per ſuppoſto eguale l' intiera periferia del cilindrino *mrd*, ſegue indubitatamente, che il cilindrino *mrd* inſieme col congiunto raggio *r*S abbia compita un' intiera revoluzione intorno al proprio centro *r*, e però due altre rimangono da farſi, mentre una ſola ne compie d' intorno al proprio centro Q il raggio Qr, o ſia QR del *primo Mobile*. Dunque la velocità dell' *Epiciclo* è alla velocità del *primo Mobile*, come 3 a 1. Dico in ragion inverſa del diametro del cilindrino *mrd* al diametro del cilindro TQZ, che era, come 1 a 3. Quì pertanto non reſta, che per le date velocità applicare all' Iſtromento cilindri, che ſiano in data ragione. Ma per non andare all' infinito l' ho provveduto di ſoli 12.; il primo de' quali ſia di diametro eguale ad una delle parti eguali della figura ſeconda; il ſecondo a due; il terzo a tre ec. Coſicchè il diametro del minimo cilindro ſarà eguale ad una parte, ed a tutte dodici il diametro del maſſimo.

Finora però abbiam ſuppoſto la velocità dell' *Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ma per il ſecondo

caſo

caſo potrebbe darſi ancora minore, e quindi traſmutandoſi la ſituazione dei termini della ragione delle velocità, doverſi traſmutare anche il luogo a' cilindri. I termini della ragione delle velocità furono nell' eſempio adotto 3, e 1: vale a dire (poichè le velocità ſono in ragione inverſa del diametro de' cilindri) il cilindrino *mrd*, ed il cilindro TQZ; però ſe ſi traſmutaſſe reciprocamente il luogo de' due cilindri, di maniera che il cilindrino *mrd* foſſe poſto nel centro Q del *primo Mobile*; ed il cilindro TQZ nel centro *r* dell' *Epiciclo*, quindi all' oppoſto del primo caſo, ſeguirebbe la velocità dell' *Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*.

Potrebbe darſi per fine il terzo caſo, cioè la velocità de' *Mobili* eguale; ~~onde biſogna aver~~ preſto un altro cilindro eguale ad uno di detti dodici, perchè meſſo uno nel centro del *primo Mobile*, ed un altro nel centro dell' *Epiciclo* vengono detti *Mobili* determinati appunto ad eguali velocità. Ricordando che in ciaſcun cilindro ſia ſcolpito il numero delle parti eguali preſe nella figura ſeconda, che eſſo contiene.

Per la terza cagione (nel ſuppoſto che il centro *r* dell' *Epiciclo* ſia condotto dal raggio Q*r* del *primo Mobile* ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6.) ſe il filo toccherà i due cilindri alle parti alterne come T*m*, chiaro è che l' *Epiciclo* ſi moverà in conſeguenza di detto *primo Mobile*, cioè e l' un, e l' altro *Mobile* ſi moverà ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4 ec. 2, 3, 4 ec.; ma ſe il filo toccherà i due cilindri alle medeſime parti, come Td (ſtando ancora il ſuppoſto predetto, che il raggio Q*r* del *primo Mobile*, ſi muova ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6) l' *Epiciclo* girerà contro l' ordine de' proprj numeri 4, 3, 2 ec., cioè i moti de' *Mobiti*, in queſto caſo ſeguiranno l' un dell' altro inverſo contrario. Onde ſi raccoglie, come queſta coſtruzione regge fin' ora aſſai bene all' azione di tutte tre le cauſe producenti le molte trasformazioni di queſte illuſtri Curve, per poter ſenz' altro paſſare al *piano verticale* di detto Iſtromento.

ARTICOLO TERZO.

Piano verticale del preſente Iſtromento.

FOrſe altrui ſembrerà, che confrontando il ſopra eſpoſto *piano orizzontale* con queſto *verticale*, ſi abbiano in queſto tralaſciate troppo più parti, che non doveaſi. Conciossiacchè di queſto in quello non ſi riſcontrino altro che il filo, i due cilindri, l'aſta MN (che ſta pel raggio del *primo Mobile*) ed il raggio *rS* dell' *Epiciclo*. Ma anzi io affermo, che operando altrimenti, e quindi diventando la figura troppo confuſa e impedita, nè quanto ſi è ſpiegato così, ſpiegato ſi avrebbe, nè le parti perciò ſarebbero ſtate meglio indicate, come forſe riuſciranno in queſto *piano verticale*.

In quella guiſa pertanto, che gli Architetti dai fondamenti principiano gli edificj loro, cominciarò io (*Fig.* 3.) dal piedeſtallo d'acciajo AEDX, che come quello, che il rimanente della macchina ſoſtenta, è con due valide viti I, I fermato, e congiunto ad una tavola orizzontale immobile AX. Nel ſito poi DE è trapaſſato per il mezzo da un buco quadrangolare, in cui entra il palicello QG pur d'acciajo indicato con puntini, e che prima paſſa in un forame rotondo dell' aſta MN, indi in un cilindro ZT, ed appreſſo nel prefato buco DE del piedeſtallo, a cui ſtretto per fine da una vite G ſta attaccato, ed inſieme con detto piedeſtallo e cilindro ZT, e tavola orizzontale AX rimane affatto immobile; ancorchè d'intorno ad eſſo ruoti l'aſta di metallo MN. Dal piano orizzontale di queſt' aſta ſi ſcorge come (*Fig.* 1.) eſſa deve avere un buco circolare in Q (che

è

è coperto dal cilindro ZT), nel qual appunto riceve il palicello QG della *figura* 3. Poi si fende per il mezzo da Q verso N, e vien cinta da un anello o sia guida *nn* pur di metallo forata con un buco (che è pur coperto dal cilindrino *r*) rotondo, e verticale all'orizzonte in *r*, e di due buchi quadrangolari aperta nel fianco *nn* (*Fig.* 4.), nei quali introdotta detta asta MN, a quella in qual punto più si vuole con la vite C si stringe, e ferma.

Il detto palicello (*Fig.* 3.) QG, (che d'ora in poi *Asse del primo Mobile* chiamaremo) quadrangolare, e dilatato alquanto è presso Q, acciò vaglia a ritenere sospesa in alto la suddetta asta MN; e rotondo seguita dove l'asta MN lo circonda introdotto nel forame suo orizzontale; ed è quadrangolare di nuovo, e più sottile, dove per il cilindro ZT, e per DE, fino in G trapassa.

Un altro palicello RP (chiamato *Asse dell' Epiciclo*), entra prima nel buco rotondo orizzontale della guida *n* (o sia *nn* della *figura* 1.), d'indi nel cilindrino *m d*, ed in fine con una vite P si ferma così, che però volger si possa dentro il buco di detta guida *n*. Questo parimenti è assai dilatato presso R, e trapassato da un forame transversale, in cui s'introduce il raggio QS al suo stilo o penna S annesso, e dovunque si vuole con una vite laterale si ferma. Inoltre detto palicello RP è fornito di un piatello circolare *pz* (indicato dalle perpendicolari morte cadenti da questo piano verticale in quello orizzontale per l'area circolare ombreggiata *nn*); e poi quadrangolare procede, sinchè entra nella guida *n* dove è rotondo; d'indi quadrangolare tornato di nuovo per mezzo del cilindrino *dm* sino in P perviene, ed ivi si stringe con la sua vite P. Due molli poi dal perito Artefice applicate comunque nel sito (come in *figura* 1.) *nn*, premano tanto il sottoposto piatello *pz*, che l'*asse* RP dell' *Epiciclo* a quello annesso non così di leggieri volger si possa.

Que-

Questa costruzione spedita esser dovrebbe, avvisando che il cilindro TQZ del *primo Mobile* della *figura* 1. sia in questa 3. il cilindro ZT; per il cilindrino *mrd* dell' *Epiciclo* in quella, in questa il cilindrino *md*; per i centri Q del *primo Mobile*, ed *r* dell' *Epiciclo* in detta figura 1., in questa 3. l'*asse* QG, e l'*asse* RP; e per il raggio qualunque Q*r* del *primo Mobile*, che in quella seco porta il centro *r* dell' *Epiciclo*, in un col cilindrino *mrd*, in questa *figura* 3., ed in quella prima supplisce l' asta MN, quale rotando intorno all' *asse* QG del *primo Mobile*, seco mena, e sostiene l' *asse* RP dell' *Epiciclo*, e l' annesso cilindrino *md*, e per l' opportuno filo T*m*, (che per il movimento di detta asta rotante intorno all' *asse* QG, altrettanto si avvolge d' intorno al cilindro ZT, quanto si svolge dal cilindrino *md*) vien messo in moto anche il raggio QS, che sta per qualunque dato raggio *r*S dell' *Epiciclo* della *figura* 1., perchè si può sospingere, e respingere pel buco presso R, e con la vite laterale fermare, quando si trova nella data lunghezza.

Ma per non mancare a detta asta MN de' necessarj ajuri, e stabilirla così, che sia costretta a rimanere sempre parallela all' orizzonte, e ad angoli retti degli *assi* dei *Mobili* QG, RP, con una vite N si connette a quella un forbice V, che si unisce per di sopra con un' altra vite ad un vette VE mobile pur insieme con detta asta MN d' intorno all' asse QG. Mi piacque in oltre metter sopra la tavola AX un altro piano di cartone FS fornito per di sotto di due molle *ee*, *ee* in modo arrendevoli, che nè del tutto resistano, nè cedano troppo alla pressione dello stilo S. Egli è appunto sopra questo piano di cartone FS, che hassi poi a distendere, e fermare la carta, su cui si pensa descrivere la Curva.

Finalmente per non lasciar cosa, che, ad intendere la fabbrica, ed i movimenti di questo Istromento potesse contribuibuire, debbo avvertire, che le parti tratteggiate AXGDTZQ formano, dirò così, un sol pezzo, che deve concepirsi permanente in una costante quiete. Le parti M*n* NVE, che sono ombreggiate a puntini si vogliono supporre un altro pezzo, che sospinto con la mano muovasi d' intorno all' *asse* del *primo Mobile* QG; le altre restanti pur tratteggiate parti QSR*pzdm*P rappresentano parimenti un altro pezzo, che tutto insieme gira nel buco della guida *n* d' intorno alla insieme rotante *asse* dell' *Epiciclo* RP; mentre detto asse RP dal riferito pezzo ombreggiato a puntini viene portato per la circonferenza di un cerchio, che è il *primo Mobile*, e di cui il centro di rotazione è l' *asse* QG. Finalmente il piano di cartone FS, e le connesse molle *ee*, *ee*, formano un altro pezzo con puntini leggiermente distinto, e che si muove, come si disse, secondo che per alcuna inegualità di esso piano di cartone, accadesse in esso maggiore, o minore lo sfregamento dello stilo S.

ARTICOLO QUARTO.

Disegno Scenografico del presente Istromento.

LA tavola duodecima dimostra così al vivo la forma, e situazione delle parti di questo Istromento, che per essa sola avrebbesi forse potuto dimostrare l' artifizio della sua costruzione. Nonostante soffrite, che almen di volo accenni con quale analogia le parti descritte nelli andati piani si riferiscano alle rispettive parti scenografiche di questa figura. La tavola dunque orizzontale AX della *Figura* 3. *Tav.* 11. è in questo disegno; la tavola *&y*OT; il piano di cartone FS di quella figura, in questa è il piano HCDK; gli *assi* QG, RP sono quì gli stessi QG, RP; così di quella le parti EV, NM sono le medesime in questa, e dell' altre andate via dicendo così, giacchè trovarete che per non ingomgombrare la figura, si è tralasciato di riportar quì il solo piatello *pz*, e le molle ad esso spettanti; mentre frattanto io preparo detto Istromento a' dati supposti.

Sia però proposto di descrivere una Curva, che provenga 1. dall'eguaglianza de' raggi dei due *Mobili primo ed Epiciclo*; 2. dalla velocità del *primo Mobile* data a quella dell' *Epiciclo*, come 1 a 3; 3. dai moti de' *Mobili* in contrario verso.

Onde primieramente fermata con la vite laterale la guida *n*, fermo in appresso anche il raggio dell' *Epiciclo* FS (*Tav.* 12.) qualora la parte di detto raggio presa sul piano da S fino all' incontro della prodotta PR in 2. è eguale alla distanza presa da 2. fino all' incontro della prodotta GQ in 3.; cioè qualora S, 2 = 2, 3; ovvero (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) qualora Q*r* è fatto eguale ad *r*S. Secondo, allentate le viti G, e P, e fuori tirati gli *assi* GQ, PR sostituisco ai quai si sieno presenti cilindri il cilindro segnato 3. per l' *asse* QG del *primo Mobile*, ed il cilindro segnato 1. per l' *asse* PR dell' *Epiciclo*, e ritorno poi l' Istromento nel primiero suo stato. Terzo avvolto il filo sul cilindrino dell' *Epiciclo*, e messa la mano in V muovo l' asta MN all' opposto di chi legge, avvertendo di abbassar con l' altra mano il piano di cartone HCDK, finchè del tutto sia teso il filo, e tangente la periferia d' amendue i cilindri alle medesime parti, che rilasciato poi detto piano di cartone, e seguitando a muover l' asta in giro si conseguirà la Curva proposta, quale sarà la 11. della *Tav.* 16. Quando però due ostacoli non s' incontrino, che si accusaranno in questo prossimo Articolo.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Risoluzioni delle seguenti obbiezioni.

Avvegnacchè non abbia fatta pruova di questa costruzione, parmi tuttavia, che sia soggetta a due gravissime difficoltà. La prima delle quali è, che forse il filo non si mantenga sempre egualmente teso, ma si raccorci o si stenda non solo per la causa intrinseca della sua incostante flessibilità; ma molto più perchè talvolta (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) per qualche inegualità o contranitenza del piano di cartone FS, dovendo lo stilo S vincere una maggiore o minore resistenza, il filo patisca una diversa tensione. Secondariamente perchè nel supposto dell' Istromento mosso come sopra, quando la punta dello stilo S accaderà che sia, dove in figura appunto è, si combinaranno così ad un medesimo verso la resistenza del piano, e l'azione dello traente filo, che potrà per avventura, muovendosi nella sua guida l'*asse* RP per la sola resistenza del piano, l'azione del filo ridursi a zero; e perciò molta più parte di filo svolgersi dal cilindrino *md*, che non si avvolgerà d' intorno al cilindro ZT.

La seconda difficoltà è, che si possano costruire cilindri tanto esatti, che tutti vengono in ragion data per lo appunto; principalmente perchè a me pare, che il diametro loro debba mancare dalla data ragione di tutta la grossezza del filo: cioè, che volendo per esempio fare, che il diametro di un cilindro sia eguale a cinque parti eguali della *Fig.* 2. non abbia veramente ad esserlo, ma il diametro del cilindro più la grossezza del filo debba esser eguale alle dette cinque parti.

Ora in quanto alla prima obbiezione, per correggere lo specifico rilassamento, e reccorciamento del filo, basta in ſuo luogo ſoſtituire una catenella d'acciajo, o un groſſo filo d'ottone ſimile a quelli, che s'adoprano ne' clavicembali. Ma per ciò che riſguarda alla cauſa eſtrinſeca, cioè per fare, che in qualunque ſituazione dello ſtilo S mai la reſiſtenza del piano riduca a zero l'azione del filo, ſi avrà cura, che le molle prementi il piatello *pz* ſiano aſſai più valide, che non ſono le molle *ee*, *ee* del piano di cartone; concioſſiacchè la reſiſtenza (trattane qualche inconſiderabile inegualità del piano) ſia cagionata dalla ſola forza di dette molle *ee*, *ee*.

Per la ſeconda obbiezione ſi oſſervi nella *Fig.* 2., che per ciaſcuna parte eguale è ſegnata una particola, che ſignifica la groſſezza del filo. Onde qualunque volta ſi prenderanno quante ſi vogliono di dette parti per riportarle ſul diametro de' cilindri da coſtruirſi, ſi reſterà indietro dal giuſto numero una di quelle particole. Ma ſe a queſta neceſſaria preciſione qualunque, la perizia degli Artefici non poteſſe arrivare, ai cilindri, al filo, o catenella, ſoſtituirò le ruote dentate nel ſeguente Articolo.

ARTICOLO SESTO.

Ruote dentate ſoſtituite al filo, e cilindri.

VOlendo dunque, per agevolare l'eſecuzione di queſto Iſtromento in luogo del filo e cilindri, far uſo delle ruote dentate, ſe ne avranno a preparare dodici, il numero dei denti delle quali ſia in quella proporzione, che prima furono determinate le periferie, o ſia diametri de' cilindri. Onde ſiccome la ſerie di quelli era diſpoſta in progreſſion aritmetica; perchè il primo era eguale (*Fig.* 2. *Tav.* 11.) ad una delle parti eguali di detta *Fig.* 2.; il ſecondo eguale a due di dette parti; il terzo a tre ec. così la prima ruota, ſuppoſto che ſia di otto denti, la ſeconda da ſarà di 16., la terza di 24. ec., fino all'ultima, che ſarà di 96.; oltre un'altra ruota di ſopra più, eguale ad una di dette dodici, per ſervire alle velocità date eguali.

Inoltre, per rapporto anche alla ſituazione delle ruote, deve eſſer lo ſteſſo, che ſe foſſero cilindri; perchè la ruota, che ſarà poſta nell' *aſſe* QG del *primo Mobile* in luogo del cilindro TZ (*Tav.* 13.) ſtarà quaſi afferrata a detto *aſſe*, come detto cilindro coſtantemente immobile; e quella che ſi metterà nell' *aſſe* RP dell' *Epiciclo* in luogo del cilindrino *md* agirà parimenti come ſe foſſe detto cilindro *md*. E ſe nell' *aſſe* GQ del *primo Mobile* veniſſe meſſa una ruota di 24. denti, ed un' altra di 8. nell' *aſſe* PR dell' *Epiciclo*, e (fermata la guida *n*, che porta l' *aſſe* RP dell' *Epiciclo* predetto, ſubito che accoſtandola all' *aſſe* del *primo Mobile*, una ruota giunge ad ingranar con l' altra) ſi faceſſe poi muover l' Iſtromento, le velocità dei mobili ſeguirebbero pur anche, come nel caſo che fu (1) già addotto de' cilindri: cioè l'*Epiciclo* farebbe tre revoluzioni, mentre il *primo Mobile* ne compiſce una ſola; perchè anche nel caſo delle ruote le velocità ſono in ragione inverſa dei numeri dei denti, o vogliam dire delle periferie.

Una coſa ſola è però da riflettere nel caſo preſente delle ruote dentate, che (*Tav.* 13.) quando la ruota *dm* dell'*Epiciclo* ſia immediatamente intralciata colla ruota ZT del *primo Mobile*, i moti dei due mobili ſeguiranno ſempre ad un medeſimo verſo; e che per cauſare i moti dei mobili in verſo contrario, ſarà d'uopo frammettere alle due ruote ſuddette un' altra ruota, numero di denti qualunque, e ferma ad un ſuo aſſe *a* mobile nella ſua guida *x*.

Queſto Iſtromento delle ruote ſta preſſo di me, e per lo ſperimento più volte fatto nella preſenza di Perſonaggi in queſta materia, e nelle matematiche verſatiſimi poſſo aſſerire, che rieſce a maraviglia, principalmente quando ſi met-

(1) Part. II. Artic. II.

mettono in opera due ſole ruote, acciò i mobili l'un muovaſi in conſeguenza dell' altro. Che ſe ſi hanno a volgere in ſenſo contrario, e però uſo ſi faccia anche della 3. ruota interpoſta a quelle, quantunque le Curve, che ne riſultano ſiano leggiadriſſime, declinano però tanto o quanto dalla dovuta traccia. Perchè una volta per ciaſcuna revoluzione dell' *Epiciclo* ha luogo anche quì la prima obbiezione accennata nell' antecedente Articolo. Concioſſiacchè aguzzato l'ingegno e adoprando qualche penetrazione ſi trova, che quando la reſiſtenza dello ſtilo incontrata ſul piano ſi accoppia coll' azione delle ruote, lo ſtilo in vece di obbedire alle ruote, cede al piano reſiſtente, e con eſſo le ruote pur cedendo, tornano indietro quel minimo ſpazio, che reſta vuoto tra il dente di una ruota, ed il dente di un' altra. E perchè queſto ſpazio è un ſolo nel caſo di due ruote, non produce alcun ſenſibile divario; ma nel caſo di tre, perchè ſono due i punti ove ſi toccano le circonferenze di eſſe ruote, raddoppiandoſi detto ſpazio, tanto o quanto ſi da, come diſſi, a conoſcere. Pure io credo, che a queſto difetto ſi poſſa occorrere, o inveſtigando alcuna ſorta di denti meglio addattati, o piuttoſto applicando ſotto alla ruota *a* di mezzo una molla, la quale per ciaſcun dente che di eſſa ruota *a* paſſa, cada in un incaſtrino di quei tanti, che ſcolpiti foſſero nel piano ſuperiore della guida *x*, quanti ſono i denti di eſſa ruota *a*; e che perciò non poteſſe più tornar indietro. Oltre di che ſi ſcema queſto difetto anche da ſe più che le ruote ſono grandi; perchè così tanto più ſi diminuiſce quel picciolo ſpazio vuoto, e quindi le Curve molto più ſi approſſimano al vero loro parametro; il numero, e qualità delle quali eſaminaremo nella ſeguente Parte.

PAR-

PARTE TERZA

Degl' usi dell' Istromento,

CIOE'

Quante, e quali Linee ad esso appartengono.

ARTICOLO PRIMO.

Quante siano dette Linee.

NOn è mai stato, nè credo sia per essere un Istromento di Linee all' occhio tutte diverse così fecondo, come è questa mia PENNA GEOMETRICA. Perchè (lasciando andare, che con poche parti aggiunte, o detratte potrebbesi adattare a tutte le Concoidi, che han per direttrice una *retta*, un *elisse*, un *circolo*, o qualunque altre Curve da essa descritte; e non meno alle inventate del (1) Sig. di Reaumur, eccettuate quelle che han per base l'*Iperbola*, o *Parabola*; e non contando nè meno le spirali, che realmente ad essa appartengono) quelle sole che produce detta *Penna*, stante nella sua essenziale semplicità montano ad un numero prodigioso di ben quasi 1273.

Ed acciò non paja che si voglia altrui imporre, o spacciare a ventura le cose mal intraprese; veniamo al calcolo; nell' instituzione del quale s' introduranno quelle tre cause moderatrici, che furono enunciate nel (2) principio di questo ragionamento.

Cominciando adunque dalla prima, cioè dalla lunghezza de' raggi dei *Mobili*, che può essere in data ragione, la *Tav.* 16. mostra sei figure, quasi dirò di tre lati, la simetria delle quali non varia appunto per altro, se non perchè (le altre cose stando le medesime) la sola ragione de'

(1) *Memoires de l' Academie.* An. 1708. p. 197.

(2) Part. I. Artic. Unico.

de' raggi ſia mutata. E ſtante che queſta varietà proveniente dalla ſola mutazione de' raggi, quaſi che in tutte l'altre figure ſempre avviene, perciò il numero 6. comincia ad aver luogo nel calcolo.

Ora avuto riguardo alla ſeconda cauſa, che era la ragion data delle velocità ridotte a tre caſi; perchè per ciaſcuna Curva adoprano due ruote, o cilindri, che ſtanno per i termini della data ragione, e da 12. che eſſi ſono, 66. binarj riſultano; rigettatine però 21., che come oſſervaremo (1) nella tavola delle combinazioni, ſi trovano nella medeſima proporzione, reſtano 45. d'adoperarſi per eccitare la velocità dell' *Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ai quali altri 45. ſi hanno da aggiungere per il ſecondo caſo della velocità dell' *Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*, ciò che riſulta, come già ſi diſſe dalla ſola traſmutazione del ſito dei termini dei detti binarj; ed un altro binario di eguaglianza ſi deve aggiungere per il terzo caſo delle velocità date eguali; onde ſommati rilevano tutti inſieme 91. binarj, o ſiano combinazioni, altro numero per detto calcolo.

Finalmente per la terza cauſa, che i moti ponno ſeguire, o in conſeguenza, o in ſenſo oppoſto, entra nel calcolo anche il numero 2.

Moltiplicato pertanto il 6. per 91. viene 546., che altresì moltiplicato per 2. riſulta 1092.; che ſommato poi con 181. Cicloidi di baſe circolare derivanti, come poi (2) ſi dirà, dalle combinazioni predette rileva 1273., numemero cercato delle Curve ſpettanti a queſto Iſtromento, il quale nei ſeguenti Articoli ſi comporrà a tenore di quelle leggi di moto, cui dette Curve ſoggiacciono.

ARTI-

(1) Figura 1. Tav. 18. (2) Part. III. Artic. 9.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Linea retta.

LA prima Linea, che fra gli usi di questo Istromento promisi già fin da principio, fu la *Retta*; e però dico, che (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) se: primo il raggio *cn* del *primo Mobile onQ*, ed il raggio *nd* dell'*Epiciclo rcd* saranno eguali; secondo la velocità di quello a quella di questo, come 1 a 2; terzo i moti in verso contrario; l'ultimo punto *d* del raggio dell'*Epiciclo nd* descriverà la *retta* DR.

Si concepisca perciò, che i due raggi *cn*, *nd* prima di esser messi in moto coincidessero con *co* perpendicolare a DCR; e che d'indi il raggio *cn* del *primo Mobile* si sia mosso d'intorno al proprio centro *c* da *o* verso *n* nel medesimo tempo, che il raggio *nd* dell'*Epiciclo* a quello annesso in *n* abbia girato d'intorno al proprio centro *n* da *c* verso *d*, cioè in verso contrario; cosicchè però l'ultimo punto *d* del raggio *nd* siasi sempre trovato in alcun punto della retta CR. L'angolo *cnd* sarà sempre stato doppio dell'angolo *ocn*, o sia, che viene lo stesso, la velocità angolare dell'*Epiciclo*, sarà doppia di quella del *primo Mobile*.

Calata però da *n* la retta *ne* perpendicolare a DR, e parallela alla retta *oc* perchè insistente alla medesima retta DR. Gli angoli alterni *ocn*, *cne* saranno eguali. Ma l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *cne*; perchè essendo per la costruzione i lati *cn*, *nd* eguali, la perpendicolare *ne* divide per metà l'angolo *cnd*. Dunque l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *ocn*. Il che è vero in qualunque punto della retta DR si ritrovi il punto *d*. Si può dunque vincendevolmente inferire: se l'angolo *cnd* sarà doppio dell'angolo *ocn*, il pun-

to *d*

to *d* sempre persisterà nella *retta* DR. Ciò che era da dimostrare.

Non altrimenti si dimostrarebbe il punto *r* dall'altra parte permanere nella *retta ab*, e tutti i punti della periferia dell'*Epiciclo* in *rette* eguali fra se, ed alla somma de' diametri di amendue i *Mobili primo*, ed *Epiciclo*; perchè quando *d* coincide col punto R, i due raggi *cn*, *nd* sono distesi, e s'eguagliano alla *retta* CR, e così dall'altra parte distesi s'eguagliano a CD.

Quindi viene come si abbia a componere l'Istromento alla descrizione della *Linea retta*; perchè primo si caccierà innanzi, o indietro il raggio dell'*Epiciclo*, e si fermerà poi con la vite, quando (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) sarà Q*r* = *r*S; secondo perchè le circonferenze de' cilindri sono in ragione inversa delle velocità, si collocherà il cilindro segnato 2. nel centro del *primo Mobile*, e l'altro cilindro 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo prima di muover l'Istromento si farà, che il filo, o catenella tocchi i due cilindri alle medesime parti, acciò i moti dei mobili ne seguano contrarj.

Se poi l'Istromento fosse colle ruote dentate; primo come nel caso de' cilindri sarà fatto Q*r* = *r*S; secondo la ruota di 16. denti segnata 2. sarà messa nel centro del *primo Mobile*, e la ruota di denti 8. segnata 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo acciò i moti risultino in parti opposte si metterà tramezzo a dette ruote (*Tav.* 13.) la ruota portata dall'*asse a* nella sua guida *x*. Onde per l'uno, e l'altro caso nella prima rivoluzione dell'*Epiciclo* (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) lo stilo posto supponiamo in *r* descriverà la *retta ab*, e nella seconda rivoluzione, non declinando punto dalla primiera traccia, tornerà indietro da *b* ad *a*.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Linea retta *proveniente dal moto di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile.*

UNa leggiadra coſa, e degna in vero che altrui venga a notizia, naſce da quanto ſi è detto nel precedente Articolo, qual è, che dato il diametro *ac* (*Fig.* 2.) dell' *Epiciclo adc* ſudduplo del diametro *ab* di un altro cerchio maſſimo *a*D*b*R ruotando detto *Epiciclo* nella concava circonferenza di detto cerchio maſſimo, come ſe per deſcriver una Cicloide ruotaſſe ſopra una *retna*. Un punto qualunque *a* della periferia di detto *Epiciclo* deſcrive la *retta ab*, il punto C la *retta* DR ec.

Conciosſiacchè, primo il centro *n* del rotante *Epiciclo* deſcriverà un circolo *no*, che fingo eſſere il *primo Mobile* eguale appunto per la coſtruzione a detto *Epiciclo*, come nel caſo della *Fig.* 1.; ſecondo poichè eſſendo le periferie come i diametri, la periferia dell' *Epiciclo* viene ad eſſere alla periferia del cerchio maſſimo come 1. a 2.; ſarà la periferia dell' *Epiciclo* eguale all' arco, o ſemi-periferia *a*R*b* di detto cerchio maſſimo; onde l' *Epiciclo* partito dal punto *a* volgendoſi in detto cerchio maſſimo, a detto punto *a* non arriva, ſe non dopo aver compite due rivoluzioni, una ſopra la ſemi-periferia concava *a*R*b*, e l' altra ſopra la reſtante ſemi-periferia *b*D*a*; mentre il proprio centro *n* una ſola ne ha finita intorno a *c*, centro comune del cerchio maſſimo, ed inſieme del finto *primo Mobile noc*. E però la velocità di queſto *primo Mobile* immaginario è alla velocità dell' *Epiciclo*, come 1. a 2.: val a dire nella ragion preſcritta per la deſcrizione della Linea *retta* nella *Fig.* 1.; terzo ſe ben ſi riflette il moto del ſuppoſto *primo Mobile noc* deſcritto, come diſſi, dal centro *n* del rotante *Epici-*

clo, ed il moto del medeſimo *Epiciclo* occorrono inverſo contrario. Dunque giacchè quanto era d'uopo alla generazione della *retta* nella *Fig.* 1. in queſta ſeconda riſcontra per lo appunto, ſeguita neceſſariamente che il punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* deſcriva la *retta ab*, ed il punto C la *retta* DR ec. Il che era da dimoſtrarſi.

ARTICOLO QUARTO.

Eliſſe *generata così dal moto compoſto di due circoli, che dal moto ſemplice di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile.*

POichè abbiamo facilmente dimoſtrato da quai principj riconoſca il ſuo eſſere la *Linea retta*, moſtraremo ora come dai medeſimi dipenda anche l'*Eliſſe*, e che però la deſcrizione di ciaſcheduna appartiene egualmente a queſta macchinetta. Imperciocchè traſportata parte della *Figura* 1. nella 2., e 3. ſi dimoſtra facilmente, che (*Fig.* 2. e 3.) qualunque punto *b*, ovvero H, preſo dentro o fuori dell'area del rotante *Epiciclo*, deſcrive un'*Eliſſe*.

Sia però dal centro *n* dell'*Epiciclo* condotta una *retta nd* che paſſi per il punto *b*, ovvero H preſo dentro, o fuori dell'*Epiciclo*, ed un'altra *retta* GP che paſſi per il centro C del *primo Mobile*, e per il punto *d*. Ora io non credo, che ſia di biſogno di dimoſtrare, che il punto *d* deſcriva la *retta* PG, giacchè quel medeſimo argomento, che già valſe nella *Fig.* 1., ſuppliſce qui tanto per il punto *d*, quanto per il punto *a* che deſcrive la *retta ab*; perchè il punto *d* era coſtituito come *a*, quando prima coincideva col punto P. Ordinati dunque i raggi de' mobili C*n*, *nd* nella *Fig.* 4., e 5. come ſtanno nella 2., e 3., dico che detto punto *b*, ovvero H, deſcrive un'*Eliſſe*, di cui

l'*aſſe*

l'*asse* minore è eguale al doppio della *retta* bd, e l'*asse* maggiore è eguale al doppio di una *retta* composta di Cn, ed nb, ovvero H.

Descritti pertanto i circoli ApB, IGP per i punti p, ed I da n così distanti, come il punto b, ovvero H, si conduca alla *retta* GP una perpendicolare ACB, che sarà l'*asse* minore, perchè eguale al doppio di bd, e l'*asse* maggiore sarà GP eguale al doppio della *retta* CI composta di Cn, ed $nb = n\mathrm{I}$.

Ora per provare, che il punto b, ovvero H si ritrovi nella circonferenza di un *Elisse* (prima dai punti p, ed I tirate alla *retta* GP due altre perpendicolari po, ed $\mathrm{I}m$, che passano per il punto b, ovvero H) dimostrarò una semplicissima, ma essenziale proprietà di detta *Elisse*: cioè che sia GP . AB ; ovvero PC . AC :: $\mathrm{I}m$. bm.

Imperciocchè essendo simili i triangoli Cpo, $C\mathrm{I}m$, sarà IC . $\mathrm{I}m$ :: pC . po. Permutando IC . pC :: $\mathrm{I}m$. po; cioè bm, perchè eguale a po. Ma IC eguale a PC, e $p\mathrm{C} = \mathrm{AC}$; dunque PC . AC :: $\mathrm{I}m$. bm. E però la doppia IC, che è GP alla doppia pC, che è AB :: $\mathrm{I}m$. bm. Il che era da dimostrarsi. Ma acciocchè niuna parte di questa dimostrazione possa rivocarsi in dubbio, proverò anche che la *retta* $\mathrm{I}m$ sia perpendicolare alla *retta* GP, quantunque passi per il punto b, ovvero H. Perchè l'angolo esterno Cnd è eguale ai due interni insieme $n\mathrm{I}b$, $nb\mathrm{I}$, i quali essendo eguali per essere per la costruzione opposti ad eguali lati $n\mathrm{I}$, nb; l'angolo Cnd viene ad esser doppio dell'angolo $nb\mathrm{I}$. Ora calata giù la perpendicolare ne, questa dividerà per metà l'angolo Cnd, perchè per la costruzione $Cn = nd$. E però gli angoli alterni enb, $nb\mathrm{I}$ saranno eguali. Dunque en, $b\mathrm{I}$ parallele, se dunque per la costruzione ne è perpendicolare a GP, alla stessa del pari sarà perpendicolare la *retta* $\mathrm{I}bm$ parallela ad ne.

Conseguenze dedotte dai tre precedenti Articoli.

1. Tutti i punti della circonferenza dell' *Epiciclo* (*Fig.* 1. 2. 3.) descrivano delle *rette* eguali, ciascuna fra loro, al diametro del cerchio massimo *a*D*b*R, ed alla somma dei diametri de' *Mobili primo*, ed *Epiciclo*.

2. Dagl' infiniti punti della periferia del ruotante *Epiciclo* viene in un tratto delineata tutta l' area del cerchio massimo *a*D*b*R, ed essendo i *Mobili primo*, ed *Epiciclo* eguali le *rette* descritte da detti infiniti punti, tutte s' intersecano nel centro C del cerchio massimo, tagliando l' una l' altra se stesse per metà, e diventando ogni metà raggio di detto cerchio massimo, come nella *Fig. 6*.

3. Queste *rette* dividono il circolo massimo in due volte tanti suddupli archi, quanti sono gli archi dell' *Epiciclo* intercetti fra i punti presi della sua periferia. Perchè (*Fig.* 2., e 3.) quando il punto *a* dell' *Epiciclo* descrive la linea *ab*, il cerchio massimo vien diviso in due archi eguali *a*D*b*, *a*R*b*; quando il punto C di detto *Epiciclo* descrive la linea DR, di nuovo il circolo massimo si divide in due altri eguali archi D*a*R, D*b*R. E però ecco l' *Epiciclo* diviso in due archi, ed il massimo in due volte tanti: cioè quattro, e ciò avviene perchè la periferia del circolo massimo è doppio di quello dell' *Epiciclo*. Di più per la medesima ragione l' arco *a*PR del cerchio massimo contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*C dell' *Epiciclo*, quantunque l' arco *a*PR sia di grandezza eguale all' arco *ad*C; e così l' arco *a*P contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*, quantunque detti archi siano di grandezza eguali.

4. Tutti i punti presi dentro, o fuori dell' area dell' *Epiciclo*, eccettuato il punto *n*, centro di detto *Epiciclo*, descrivano delle *Elissi*, che parimenti l' una l' altra s' interseca-

ecano, come nella *Fig.* 7., ma non mai nel centro C comune al *primo Mobile*, ed al cerchio massimo; perchè allora sono *Elissi* trasformate in *linee rette*, e soggette alla seconda Conseguenza.

Ma gli *assi* delle *Elissi*, che chiamo *Esteriori*, perchè descritte dal punto H preso fuori dell' area dell' *Epiciclo*, quindi ponno andare all' infinito rimovendo il punto H sempre più da *n*; e quinci terminano in una *retta*, quando detto punto H sempre più accostandosi a detto punto *n* (*Fig.* 2., e 3.), vada in passando a cadere nel punto *d*. Gli *assi* delle *Elissi Interiori* descritte dal punto *b* preso dentro l' area dell' *Epiciclo* hanno alternativamente i suoi termini, cioè quindi il circolo, e quinci una *retta*. Perchè quando *b* giunge a coincidere con *d*, la *retta* GP è l' *asse maggiore* massimo possibile, e l' *asse minore* è il minimo possibile, perchè ridotto a zero; quando poi *b* va a cadere nel centro *n* l' *asse maggiore* è il minimo possibile, perchè diventa zero; e l' *asse minore* è il massimo possibile, perchè eguale a tutto il raggio *nd*, ovvero *cn* due volte preso.

ANNOTAZIONE I.

Si può dire che la *retta ab* sia un vero Proteo geometrico; perchè ora è diametro del circolo massimo, ora mezza Cicloide eguale al diametro due volte preso del suo circolo generatore, ora un *Elisse* senz' *asse minore*, cosicchè (se mi è permesso scherzare in questa parte) si potrebbe ancor prendere per l' orbita di una Cometa. Imperciocchè quantunque *ab* sia un *Elisse*, di cui l' *asse maggiore ab* non è quasicchè infinitamente grande, come si suppongono esser quelli dell' orbite delle Comete; l' *asse minore* però è infinitamente piccolo, cioè eguale a zero; e però l' *asse maggiore ab* paragonato almeno al suo minore, cioè a zero, può considerarsi come infinito.

ANNOTAZIONE II.

Seguita ancor che per applicare l'Istromento alla descrizione dell' *Elisse*, basta comporlo come si è fatto per la *linea retta*, avvertendo solamente, che i raggi dei mobili non siano eguali.

ANNOTAZIONE III.

Si possono descrivere anche delle *Elissi*, di cui gli *assi* siano dati, e quindi secondo la loro distanza relativa descriver tutte le orbite de' Pianeti, o Comete, data che sia la ragion de' loro *assi*. Conciossiacchè (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) dati essendo gli *assi* maggiore *ab*, e minore *ed*; dove s'intersecano nel punto C fatto centro con l'apertura C*e* si descriva il circolo *edf*; indi divisa per metà la differenza *fa* dei due *semi-assi* in *n*; C*n* sarà il raggio del *primo Mobile noz*; *na* il raggio dell' *Epiciclo aqf*; a tenore dei quai raggi si avrà a regolare l'Istromento. Ma perchè potrebbe avvenire che i diametri delle ruote, o cilindri impedissero di poter precisamente aggiustar detto Istromento al raggio C*n* del *primo Mobile*; se non altro si potrà conseguir un' *Elisse*, se non precisamente quella *abed*, almeno una simile, cioè nella medesima proporzione dei detti dati *assi*: Come C*n* ad *na* :: così l'altro raggio del *primo Mobile* determinato dei diametri dalle ruote, o cilindri; al quarto termine che si cerca, e che sarà il raggio dell' *Epiciclo*. Onde ordinando l'Istromento a questi due ultimi termini, verrà un' *Elisse* a quella della *Fig.* 4. simile, o proporzionale.

ANNOTAZIONE IV.

Dalla passata Teoria facilmente si prova ancora la costruſtruzione di un altro Iſtromento aſſai noto ſotto il nome di *Compaſſo elittico*, e ſi ſcorge che manca di tutte le *Eliſſi interne* compreſe tra i due ultimi confini *circolo*, e *linea retta*. Queſto per altro gentiliſſimo Iſtromento conſiſte (*Fig.* 8. *Tav.* 14.) in una lamina circolare *a*D*b*R ſcavata ad angoli retti di due canalini *ab*, DR, che ai lati più ſi allargano più che s'affondano; nei quali ſcorrono due priſmi di ſimil forma, coſtrutti ciaſcuno con un pivolo *d*, ed *r*, quali pivoli entrano nei buchi di un'aſta ZQ fornita di una guida anneſſa ad uno ſtilo H. Meſſa però queſt'aſta in moto, dal pivolo *r* viene determinata nella direzione *ab*, e nel medeſimo tempo dal pivolo *d* nella direzione DR. E intanto avviene, che per queſto moto implicato lo ſtilo H deſcriva ſul piano della carta un'*Eliſſe*.

Imperciocchè diviſo per metà lo ſpazio *rd* in *n*, ed in detto *n* fatto centro coll'apertura *nr*, ſi deſcriva il circolo *r*C*d*, che ſtia per un ſuppoſto *Epiciclo*, quale in qualunque poſizione dell'aſta ZQ paſſerà per il punto C d'interſezione dei due canalini; perchè per la coſtruzione l'ipotenuſa *rd* non può mutarſi, e l'angolo *r*C*d* alla periferia è ſempre retto. Ora fatto centro ancora in C, colla medeſima apertura di ſopra, ſi deſcriva un altro cerchio, che rappreſenti il *primo Mobile*. Ormai qui ſpicca la *Fig.* 1. per appunto, quale, ſenza che io entri in molte più parole, ſomminiſtra la dimoſtrazione da ſe. Ma perchè (*Fig.* 8.) tutta l'area dell'*Epiciclo* *r*C*d* cade dentro il margine della lamina orizzontale *a*D*b*R; perciò lo ſtilo H impedito da detta lamina, non può eſſer condotto fin nell'area di detto *Epiciclo*. E per queſto l'Iſtromento può deſcriver le ſole *Eliſſi eſterne*, ma non già l'*interne*, come la mia *Penna geometrica* e l'une, e l'altre deſcrive.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica del Circolo.

ENnunciando io fra gli usi di questo Istromento la descrizione del *circolo*, ciascuno che sia provveduto non che di un eletto, ma del più vil compasso non potrà sedare le risa, e acchettarsi, se prima non sa che io intendo di un *circolo* risultante dal moto composto di due circoli. Laonde se (*Fig.* 2. *Tav.* 15.) saran dati: primo i raggi C*n* del *primo Mobile*, ed *na* dell' *Epiciclo* in qualunque ragione; secondo mobili con eguali velocità; terzo in verso contrario. Dico che il punto *a* descrivera un *circolo* eguale al *primo Mobile*.

Ma ritorniamoci prima in memoria quanto si è detto di questa *Fig.* 2., quando nella prima parte di questo ragionamento servi per esempio della descrizione organica. Cioè che i raggi C*n*, *na* posti fossero per dritto, immaginando che così stassero prima di esser mossi, e che mossi poi il raggio C*n* a sinistra, e a destra il raggio *na* accadeva, che per le velocità date eguali, l'arco V*b* percorso dal raggio *ob* dell' *Epiciclo* era simile all'arco *no* percorso nel medesimo tempo dal raggio C*o* del *primo Mobile nop* ec. Cioè l'angolo V*ob* era eguale all'angolo *o*C*n*. Onde seguita che il raggio *ob* dell' *Epiciclo*, in qualunque punto *o* della perrferia *nop* del *primo Mobile* si ritrovi, sia alla retta C*n*, ed anche a se stesso *na* mai sempre parallelo. Perchè *bo*, *an*C formano un angolo eguale alla medesima retta C*o*V. Ciò posto, sarà *ob*, *qe*; *na*, K*f*; *tm*, *rg*; *pd*, S*b* sempre a se stesso eguale. Perchè poi è anche a se stesso parallelo sarà $bo + oe = oe + eq$; $an + nf = nf + fK$; $mt + tg = tg + gr$, e finalmente perchè *pd*, S *b* sono parallele, ed eguali sarà anche $pS = db$. Voglio dire

che

che le ordinate al *primo Mobile nop* ec. ſono egualmente diſtanti, ed eguali a quelle della Curva deſcritta, la quale ſarà un *circolo*, giacchè anche il *primo Mobile* è un *circolo*. Quindi i punti *abd* ec. ſi ritrovaranno, diſſi, nella periferia di un *circolo* eguale al *primo Mobile nop* ec. E perchè vale queſta dimoſtrazione, qualunque ſia la ragione di C*n* ad *na*, la propoſizione ſi verifica in tutte le ſue parti.

Ora quantunque abbia per fermo, che ſi ſappia ormai applicare l'Iſtromento non ſolo alla deſcrizione del preſente *circolo*, ma eziandio di qualunque altra Curva, di cui ſiano note le tre cauſe moderatrici; non oſtante anche per queſta volta pigliando io queſta parte, dico che primo li raggi Q*r*, *r*S (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) ponno eſſere in qualunque ragione; ſecondo i due cilindri, o ruote dentate debbono eſſere eguali; terzo nel caſo dell'Iſtromento col filo, il filo toccherà i cilindri alle medeſime parti; nel caſo delle ruote, ſi dovranno ſeparare le due ruote dei *mobili* con la roticella intermedia. E tanto baſti di queſto, perchè i *Fiori Geometrici* porgano più bella occaſione di ragionare nel ſeguente

ARTICOLO SESTO.

Deſcrizione organica dei Fiori Geometrici.

IO ſtimarei che la *Penna* delineatrice di queſti *Fiori* doveſſe ſtar ſolamente nelle mani di preclare, e dotte Donne; come quelle che non ſi curano de' frali, e caduchi, ma vogliono eſſere *ben d'altro ornate, che di perle, ed oſtro*. Ne ha per vero dire, queſto ſecolo d'uopo, onde per tali prodigj di quel ſeſſo, porti invidia alli andati tempi, mentre fra i molti, onde abbonda, vanti una Laura Maria Cattarina Baſſi, una Conteſſa Maria Agneſi, una Marchesa (1) del Castelletto, quali e per le Matematiche, e per ogni sorta di Letteraria disciplina, sono ben altro, che non erano le tredici Liriche Donne, o altre celebrate dalle passate età.

Ma acciocchè facendo più a lungo menzione di questi nomi illustri, non sembri che io voglia quindi significare, che la mia *Penna Geometrica* meriti di entrare in considerazione di così fatte Donne, ripigliando un poco più a dietro il mio istituto, ben vi ricorda che il nostro Istromento fu accompagnato da dodici cilindri, o ruote dentate, i diametri delle quali crescevano di mano in mano, come 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; e che per eccitare per qualunque data descrizione le occorrenti velocità, sempre adoperavano due di detti cilindri, o ruote dentate. Come però la varietà, e leggiadria de' *Fiori Geometrici* appunto viene per causa delle cangiate velocità; così mi è parso bene

(1) Su la morte di questa Donna valorosa il Sig. di Voltaire fece questi leggiadri versi:

L'Univers a perdu la sublime Emilie:
Elle aimoit les plaisirs, les arts, la verité
Les Dieux en lui donnant leur esprit, leur genie,
Ils ne garderent pour eux, que l'immortalité.

Versione elegantissima del Sig. Conte Durante Durante.

Lasciato ha Emilia questo carcer frale,
Le grazie, le bell'arti, e il ver le piacque;
Per virtude, ed ingegno a Dei fu eguale,
Dissimil solo che immortal non nacque.

Altra Versione del Medesimo.

Tristes Emilia has sedes, noctemque reliquit,
Quæ verum atque artes, & Charites coluit.
Par genio superis, animo, virtute, decore;
Impar quod mortem vincere non potuit.

bene produrre in queſto luogo (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) tutti i binarj, o ſiano combinazioni a due a due, che riſultano da 12. numeri, cioè dai dodici cilindri, o ruote dentate predette. E prendendo in detta *Fig.* 1. per eſempio il binario $\frac{1}{7}$, vuol dire, che poſto nel centro di un *mobile* il cilindro, o ruota 1, e nel centro dell' altro *mobile* il cilindro, o ruota 7, la velocità dei *mobili* ſarà come 1 a 7. Onde per eſſere le velocità in ragion inverſa del diametro de' cilindri, ſe ſarà poſto (*Fig.* 5. *Tav.* 15.) nel centro C del *primo Mobile nm* il cilindro, o ruota 7, e nel centro dell' *Epiciclo*, il cilindro, o ruota 1, mentre il *primo Mobile* percorrerà una ſola ſettima parte della ſua periferia, cioè l' arco *nm*, l' *Epiciclo* compirà un' intiera rivoluzione, e deſcriverà non pertanto una ſola ſettima parte *aed* di tutta la Curva, che ſarà un *Ettafoglio*.

A dilucidare maggiormente queſta materia, fa molto a propoſito il ricordare un piccol problema aritmetico, di cui con molto ſpirito, e acume d' ingegno è ſtato già (1) fatto uſo nella fabbrica di un anello (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) conſiſtente in un filo di metallo ripiegato in ſedici ben compartite ſpire, e diſpoſte in forma di un cerchio. Queſto lavoro, che deveſi concepire non già piano, come in figura appare, ma tale che co' ſuoi giri un ſolido rappreſenti, riuſciva invero preſtigioſo, e mirabile, perchè il filo pareva ſtare da ſe equilibrato, e ſoſpeſo. L' artificio tutto conſiſteva nel ſuddetto problema, qual è: unire con ſole linee rette ſucceſſive, o una ſola linea curva, e che ritornino in ſe ſteſſe al primo punto di partenza, un numero qualunque di punti dati nella periferia di un circolo.

Il che in due modi ſi riſolve: o (*Fig.* 2. *Tav.* 18.) conducendo la linea dal primo punto *a* ſempre al più proſſimo *b*, poi Q ec., che chiamo *modo comune* per eſſere aſſai

(1) Cardano citato dal Weckero nel *Lib.* 17. *de Secretis*.

ſai più tritto, e volgare, e per cui detta linea non fa più di un giro d'intorno al centro C; o tirando detta linea (e chiamo queſto *modo elegante*) dal punto *a* (*Fig.* 3.) ad un altro *d* diſtante da *a* un tal numero di ſpazj, che non ſia parte aliquota del numero dato; come il 3 numero de' ſpazj trapaſſati, che non è parte aliquota del numero dato 8. Perchè chi non vede che adoperando il 2 aliquota dell' 8, cioè tralaſciando due ſpazj, in vece di un ottogono che ſi cerca, ſarebbene venuto un quadrato? Conciosſiacchè dividendo 8 per 2 il quoto ſia 4? Nel caſo dunque che ſi tralaſcino tre ſpazj, la linea gira intorno al centro, o punto C tre volte, avanti di ritornare al punto *a* d'onde ebbe principio.

Ma per lo più nella ſerie naturale de' numeri, il numero che proſſimamente ſeguita o precede il numero dato, per eſempio 8, dà nelle proprie aliquote il numero dei ſpazj, che hanſi a tralaſciare. Così nell' addotto eſempio il 9, che proſſimamente ſeguita 8, ha l'aliquota 3, che non eſſendo aliquota del numero dato 8., accenna il numero di detti ſpazj. Così pure quando per la coſtruzione dell' anello preſtigioſo (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) furono dati 16 punti da unire, il precedente numero 15 ſomminiſtrò nelle proprie aliquote 3, 5 il numero dei ſpazj da ommetterſi; e in detta *Fig.* 9. fu ſcielto il 3, giacchè ſi vede che ciaſcuna ſpira di mano in mano tre ſpazj abbraccia. Coll' uſo dell' aliquota 5, cioè con ommettere cinque ſpazj, l'anello ſarebbe riuſcito anche più bello, ed aſſai più intrecciato; e perchè nel primo caſo il filo gira d'intorno al centro C tre volte, e cinque nel ſecondo caſo, prima di riunirſi ad un punto qualunque *a*, d'onde incomincia; così non ſolo all' occhio, ma anche all'immaginazione, sfuggendo queſto primo punto qualunque, e non apparendo in detto filo nè principio, nè fine, pare più toſto, che da ſe ſolo in alto ſtia ſoſpeſo.

Le

Le aliquote de' numeri, vietano anche che per ſtabilire le velocità de' *mobili*, ſi poſſa far uſo di tutti i binarj, o combinazioni; perchè il numero che ha un' aliquota inchiude ſempre quattro termini proporzionali. Il primo de' quali è il numero dato (per eſempio 10), cioè il numero da dividerſi. Il ſecondo l'aliquota, o ſia diviſore (ſia 2). Il terzo il quoto (ſarà 5), perchè un numero che ha un diviſore non può mancar di quoto. Il quarto l'unità (dico 1), che è miſura di tutti i numeri. Perciò, ſe uſo ſi faccia del binario compoſto del dividendo, e diviſore (cioè $\frac{10}{2}$), inutile diventa il binario compoſto del quoto, ed unità (dico $\frac{5}{1}$; eſſendo il dividendo al diviſore, come il quoto all' unità; eſſendo dico 10. 2. :: 5. 1. Laonde nell' iſtituzione del calcolo, e tavola delle combinazioni (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) da ciaſcun di queſti ordini $\frac{1}{2}.\frac{2}{4}.\frac{3}{6}.\frac{4}{8}.\frac{5}{10}.\frac{6}{12}$; $\frac{1}{3}.\frac{2}{6}.\frac{3}{9}.\frac{4}{12}$; $\frac{1}{4}.\frac{2}{8}.\frac{3}{12}$; $\frac{1}{5}.\frac{2}{10}$; $\frac{1}{6}.\frac{2}{12}$; $\frac{2}{3}.\frac{4}{6}.\frac{6}{9}.\frac{8}{12}$; $\frac{2}{5}.\frac{4}{10}$; $\frac{3}{4}.\frac{6}{8}.\frac{9}{12}$; $\frac{3}{5}.\frac{6}{10}$; $\frac{4}{5}.\frac{8}{10}$; $\frac{5}{6}.\frac{10}{12}$; conſervato un binario, ho cancellato gli altri, che ſi trovavano nella medeſima proporzione. Perchè egli è evidente, che, trattandoſi della deſcrizione di un *Trifoglio*, ſi potrebbe far uſo di due cilindri, o ruote ſegnate con li numeri 1, e 3 del primo binario $\frac{1}{3}$; 2, e 6 del ſecondo $\frac{2}{6}$; 3, e 9 del terzo $\frac{3}{9}$ ec., e nulladimeno, il reſto pari, non verrebbe mai più che un *Trifoglio*, eſſendo ſempre per eſſere eccitata nei *mobili* la medeſima ragione di velocità, come 1 a 3.

Per altro tutti i *Fiori*, eccettuato il *Trifoglio*, *Quadrifoglio*, e l'*Eſafoglio*, che con linee rette non permettono d'eſſer deſcritti, che pel ſolo modo *comune*, ſono capaci della deſcrizione *comune* ed *elegante*; ma meglio avviene a quelli, de' quali il numero denominatore è privo di parti aliquote, come l'*Endecafoglio*, *casoglio*, il di cui denominatore 11, essendo numero primo, prodigiosamente varia, potendosi in cinque modi descrivere con una linea retta, e in dieci con una curva; cioè nel primo caso adoperando ciascuna delle cinque aliquote 1, 2, 3, 4, 5 dei due prossimi numeri 12 e 10, restando soverchia l'aliquota 6 del 12, come complimento all' 11 della già usata aliquota 5; e l'aliquota 2 del 10, come comune anche al numero 12. Nel secondo caso si fa uso poi non solo delle suddette aliquote; ma ancora di tutti i complimenti all' 11, che sono il 10, 9, 8, 7, 6; facendo però, che il raggio dell' *Epiciclo* sia nel caso delle aliquote minore del raggio del *primo Mobile*; e nel caso de' complimenti, maggiore. Non altrimenti il *Decatrifoglio* per la medesima ragione può delinearsi in sei modi con linea retta, e con linea curva in dodici ec.

ARTICOLO SETTIMO.

Descrizione organica di Poligoni *quasi* rettilinei.

INtanto per alleviare il fastidio, che mi reca l'impossibilità di descrivere *Poligoni rettilinei* simili a quelli della *Fig.* 2. e 3. (*Tav.* 18.) e quali sono dagli empj Negromanti abusati nei stolti loro riti, voglio far vedere, che tre punti per lo meno *e*, G, *b* si può fare che vengano situati per dritto in una medesima linea; e che gli altri punti declinino talvolta quasi insensibilmente; essendo la via della retta così poco distante dalla via della curva, ch' egli è poco men che non coincidano, come dimostra la *Fig.* 8. *Tav.* 16.

Sia dunque dal centro C (*Fig.* 4. *e* 5. *Tav.* 18.) condotta C*a* perpendicolare ad *e*G*b*, corda di un arco qualunque *bae*, e l' assissa G*a* sia divisa per metà in *m*. E dipoi sia primo il raggio C*n* del *primo Mobile* eguale a C*m*, ed il raggio *nd* dell' *Epiciclo* eguale ad *ma*, ovvero *m*G. Secondo, la velocità

locità del raggio C*n* del *primo Mobile* sia alla velocità del raggio *n d* dell' *Epiciclo*, come l' arco *b a e* a tutta una periferia. Terzo, i moti in verso contrario. Dico ora, che la Curva descritta dall' ultimo punto *d* del raggio *nd* dell' *Epiciclo* avrà per lo meno tre punti *e* G *b* situati in una medesima retta *e*G*b*.

Laonde si supponga, che, prima che i *mobili* fossero messi in moto, C*n* coincidesse con C*u*; ed *nd* con *ue*, ed *nz*. Cosicchè amendue costituissero una medesima retta C*e*. Indi partiti da questa prima posizione, ed in quella giunti, che la figura mostra, figuriamoci che il raggio C*n*, avendo percorso tutto l' angolo *u*C*n*, abbia fatta una quarta parte del suo viaggio: val a dire, una quarta parte di tutto l' angolo *e c b*; onde anche il raggio *nd* avrà fatta una quarta parte del suo, che è un quarto di circolo *z n d*. Allora il punto *d*, quantunque parer possa di trovarsi nella retta *e*G*b*, pure non vi sarà; ma quando C*n* giunto a coincidere con C*m* avrà fatto la metà del suo corso, cioè la metà dell' angolo *e*C*b*, anche il raggio *n d* avrà percorso la metà di un circolo, ed il punto *d* si troverà in G, perchè per la costruzione *n d* = *m*G; si troverà, dico, lontano da *z*, ovvero *a*, in cui ora s'intende che *z* coincida, due angoli retti. E così quando C*n*, arrivando per fine a coincidere con C*f*, avrà compito tutto il suo viaggio, che è tutto l' angolo *e*C*b*; anche *nd* sarà venuto a fin del suo, cioè avrà compita un' intiera rivoluzione, e *d* coinciderà con *b*. E perchè finalmente questi tre punti *e*G*b* sono dati per la costruzione in una retta, in quella appunto saranno dal punto *d* descritti. Ciò che era da dimostrarsi.

ARTI-

ARTICOLO OTTAVO.

Dettaglio delle cause moderatrici di ciascuna Curva posta per esemplare delle molte spettanti a questo Istromento.

SArebbe forse stato non ingiocondo spettacolo mostrare, oltre altre Curve, una serie seguita di tutti i *Fiori*, che descrive l'Istromento, principiando dall'*Unifoglio*, sino al *Dodecafoglio*; se non fosse, che io ho giudicato, che da que' pochi messi qui per esemplare dei molti che mancano, si avesse facilmente potuto prender idea anche degli altri; e che se non altro per mezzo della *descrizione per punti* suggerita nella prima parte di questo discorso, ciascun potesse farne nascere da se quanti vuole; avvisando per altro, che nè per l'ardente Sole dell'Estate, nè per le nevi, e ghiacci dello squallido Verno siano mai per diventare riarsi, o smonti.

Mi restringerò dunque a suggerire le cause moderatrici di questi pocchi *Fiori*, e Curve, e prima

Figura 1. *Tav.* 15. *Unifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile* sta al raggio dell' *Epiciclo*, come 10 a 5 in circa.
2. Velocità del I. *Mobile* = a quella dell' *Epiciclo*.
3. Moto del I. *Mobile* in conseguenza del moto dell'*Epiciclo*.

* La punta *m* della Curva è moltiplice; onde se il raggio dell' *Epiciclo* fosse stato più lungo, detta punta si sarebbe aperta in un ceno, o nodo simile a quelli della *Fig.* 5. Questa nota vale per le punte di altre Curve soggette a questo Istromento, come la 3, 9 ec.

Figura 2. *Unifoglio*, *o Circolo*.

1. Raggio qualunque.
2. Velocità eguali.
3. Moti l' un dell' altro in verso contrario.

Fig. 3.

Figura 3. *Bifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 10. $3 \frac{1}{2}$ in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.

3. Moti in conseguenza.

Figura 4. *Bifoglio*, *Elisse*, o *Linea retta*.

1. Raggi qualunque, purchè non siano eguali, perchè in tal caso diventa una *retta*.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.

3. Moti contrarj.

Figura 5. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 7. 2. in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 7.

3. Moti in conseguenza.

Figura 6. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 3. in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 4. 7.

3. Moti in verso contrario.

Figura 7, 8, 9, 10, 11, 12, *Trifoglio*.

1. Sono queste quelle 6. figure citate nel calcolo delle Curve, le quali variano per il solo cangiamento della proporzione de' raggi, le altre cose rimanendo le stesse. Perchè il raggio del I. *Mobile*, che era maggiore di quello dell' *Epiciclo* nella *figura* 7, a poco a poco si è diminuito sempre più nella *figura* 8, 9, 10; finchè nella *figura* 11 detto raggio del I. *Mobile* è eguale a quello dell' *Epiciclo*;

anzi nella *fig.* 12. il raggio dell' *Epiciclo* è diventato maggiore del raggio del I. *Mobile*; e quindi per questo solo la Curva si trasforma nelle sei figure contenute nella *Tavola* 16.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 3.
3. Moti contrarj.

Figura 13. *Ottofoglio*.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 5. 8.
3. Moti in conseguenza. Se contrarj, nasce la *figura* 14.

Figura 15. *Decafoglio*.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 10.
3. Moti contrarj.

* Sino a questa *figura* 15. la velocità dell' *Epiciclo* è stata maggiore della velocità del I. *Mobile*. Le figure poi che seguono 16, 17, 18 sono tre esempj di Curve provenienti dalla velocità di quello minore di quella di questo.

Figura 16.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 1.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 2.
3. Moti in conseguenza.

Figura 17.

1. Raggio del I. *Mobile* minore alquanto del diametro dell' *Epiciclo*.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti contrarj.

Figura 18.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti in conseguenza.

Sup-

Supponendo io ora che ciascuno che sia arrivato sin qui sia capace di comporre da se l'Istromento alle date cause moderatrici, mi basterà chiuder quest' Articolo coll'accennare, che per questo si divide il circolo in tante date parti, ma che non siano più di 12; primieramente usando per lo meglio binarj, che abbiano per un termine l'unità; come per esempio, volendolo dividere in sette parti, di questi binarj $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}$, che si potrebbero adoperare, usando, dissi, piuttosto il binario $\frac{1}{7}$. Secondo, pongasi attenzione, che il raggio dell' *Epiciclo* sia piuttosto corto rispetto a quello del I. *Mobile*. Terzo, che i moti siano eccitati in verso contrario, onde veranno figure simili alle *Fig.* 7, 8, 9 della *Tav.* 16.; e per le punte di dette figure, e più precisamente delle simili alla 9, verrà diviso un circolo di diametro eguale al diametro del I. *Mobile*, più il diametro dell' *Epiciclo*, secondo l'addotto esempio, in parti sette. Cosicchè unendo poi dette punte con altrettante rette avrebbesi la descrizione finita di un *ettagono* rettilineo. Il che sia detto di qualunque altro *poligono*, mutando solo i binarj a tenore delle date velocità.

ARTICOLO NONO.

Descrizione organica delle Cicloidi *di base circolare*.

PEr dimostrare come appartengono a questa *Penna* le *Cicloidi* nascenti per lo volger di un cerchio su la periferia *convessa*, o *concava* di un altro cerchio, consideraremo prima attentamente in qual disposizione di circostanze si ritrovi (*Fig.* 6. *Tav.* 18.) l'*Epiciclo* afd, che per descrivere una *Cicloide* cammina sulla immobile periferia *convessa* doK.

Primieramente osservo, che nel medesimo tempo che l'*Epiciclo* percorre tutta l'immobile periferia, anche il punto di contatto *d* compiendo sulla medesima il suo giro ritorna al punto *d* d'onde era partito; e perchè tanto avviene nel medesimo tempo, anche del centro *b* di detto *Epiciclo*, che al punto *b*, d'onde partì per la periferia *hgb*, ritorna (conciossiacchè il centro *b* si ritrovi (1) mai sempre nella direzione del raggio C*db*, che congiunge il punto di contatto *d* col centro C del cerchio immobile *do*K); perciò in tempi eguali il punto *d*, ed il punto *b* amendue formano eguali angoli al centro comune C. Onde io ne tiro questa conseguenza, che si potrebbe prendere il circolo *bhg* per *primo Mobile*, il di cui raggio C*b* sarà eguale al raggio C*d* del cerchio immobile più il raggio *bd* dell'*Epiciclo*.

2. Tante rivoluzioni fa l'*Epiciclo* sopra l'immobile *convessa* periferia *do*K, mentre il punto di contatto *d* al punto *d* d'onde partì ritorna, quante volte la periferia *do*K contiene la periferia dell'*Epiciclo*. Cioè a dire (giacchè le periferie sono in ragion de' diametri), quante volte il diametro *d*K contiene il diametro *ad*. E quindi sta il numero delle revoluzioni dell'*Epiciclo* ad una revoluzione del punto di contatto *d*, come il diametro *d*K del cerchio immobile *do*K al diametro *ad* dell'*Epiciclo*. Ma ho già detto che il punto di contatto *d*, ed il centro *b* dell'*Epiciclo* formano sempre eguali angoli al comune centro C. Dunque io concludo che la velocità angolare dell'*Epiciclo* è alla velocità angolare del suo centro *b* (cioè del *primo Mobile* *bgb*), come il diametro *d*K del cerchio immobile al diametro *ad* dell'*Epiciclo*.

3. A quel medesimo verso, che procede il punto di contatto *d*, non che il centro *b* dell'*Epiciclo*, per esempio a sinistra verso *o*, ed *b*, procede ancora qualunque punto *a* della

(1) Eucl. lib. III. prop. 14.

della periferia dell' *Epiciclo* a ſiniſtra verſo *f*.

Poichè abbiam eſaminato coſa accada, quando l' *Epiciclo* ruota ſopra la periferia *conveſſa* di un altro cerchio immobile, vediam coſa ſucceda quando gira in una *concava*, cioè quando l' *Epiciclo dmx* ruoti nella *concava* periferia del cerchio immobile *do*K.

1. In primo luogo avviene, che il raggio C*e* del circolo *enp* (che ſarà il *primo Mobile*) formato dal centro *e* del ruotante *Epiciclo dmx* è eguale al raggio C*d* del cerchio immobilè, meno il raggio *de* dell' *Epiciclo*.

2. Le velocità angolari del centro *e* dell' *Epiciclo*, e del punto di contatto *d* ſono le medeſime, perchè il centro *e* dell' *Epiciclo interiore* ſi ritrova puntualmente in quella medeſima direzione, in cui già abbiam detto, che ſi ritrova il centro *b* dell' *Epiciclo eſteriore*, cioè (1) nella direzione del raggio C*d*, che uniſce il centro C col punto di contatto *d*.

3. In vece che i moti ſeguano come ſopra in conſeguenza, qui riflettendo attentamente ſi oſſerva, che occorrono in verſo contrario.

Ora dato il raggio così dell' *Epiciclo*, come del cerchio immobile, ſu cui haſſi a volger l' *Epiciclo*; dato di più ſe le revoluzioni di detto *Epiciclo* abbiano ad eſſere in una periferia *conveſſa*, o *concava*, chiaramente riſulta, come ad una tal *Cicloide* debbaſi componere l' Iſtromento. Supponiamo dunque che e l' uno, e l' altro ſia dato. Sia dato C*d* raggio del cerchio immobile, al raggio *db* dell' *Epiciclo*, come 3, e 1; e s' intenda l' *Epiciclo* dover ruotare ſopra la periferia *conveſſa do*K.

1. Primieramente dovendo eſſere il raggio C*b* del *primo Mobile* al raggio *ba* dell' *Epiciclo*, come la ſomma de' raggi del cerchio immobile, e dell' *Epiciclo*, al raggio dell' *Epiciclo*. ſarà C*b*, *ba* :: 4. 1. Dove ſe nel determinare così nell' Iſtromento la lunghezza de' raggi s' incontraſſe la difficol-

(1) Eucl. lib. III. prop. 13.

ficoltà (1) avvertita in proposito degli *assi* dati per la descrizione di un' *Elisse*, si operarà come ivi si disse.

2. Dovendo essere la velocità del *primo Mobile* bbg alla velocità dell' *Epiciclo* afd in ragione inversa de' diametri Cd, db; la velocità di quello sarà alla velocità di questo, come 1 a 3.

3. Il *primo Mobile*, ed *Epiciclo* si hanno a volgere al medesimo verso. E però ordinato l'Istromento a queste leggi, o cause moderatrici, il punto a della periferia dell' *Epiciclo* descriverà la *Semi-Cicloide* $u\,o$, ovvero l'intiera proposta zao; l'istessa appunto, che verrebbe descritta nel supposto dell' *Epiciclo* afd ruotante sulla periferia *convessa* doK.

Ma se stante ancora la medesima ragione di Cd ad ed diametri de' cerchj dati, come 3. 1., l'*Epiciclo* non più sopra una periferia *convessa*, ma in una *concava* doK si volgesse.

1. Primieramente dovendo essere il raggio ce del *primo Mobile* al raggio ed dell' *Epiciclo*, come il raggio cd del cerchio immobile, meno il raggio ed dell' *Epiciclo* al raggio dell' *Epiciclo*; sarà Ce. ed :: 2. 1.

2. La velocità del *primo Mobile* a quella dell' *Epiciclo* sarà ancora la medesima: voglio dire, come 1. 3.

3. In questo caso i moti dovran seguire in verso contrario. A tenore di queste leggi regolato l'Istromento, dal punto x della periferia dell' *Epiciclo* xmd verrà descritta la *Semi-Cicloide* xo, ovvero l'intiera zxo.

Per questi esempj si potranno richiamare all'Istromento tutte quelle *Cicloidi*, le quali siano generate da' *mobili* commensurabili, anzi de' quali le velocità siano comprese in quelle, che per la combinazione de' 12. cilindri, o ruote dentate risultano, che sono 181. per lo appunto; cioè 45. per il caso di un *Epiciclo* volgentesi sulla periferia *convessa*

di

(1) Part. III. Artic. IV. Annot. 7.

di un maggior cerchio immobile. Altre 45 per il caso, che l'*Epiciclo* si volga nella periferia *concava* di un maggior cerchio; sono pure 45 dove un *Epiciclo* cammina sulla periferia *convessa* di un minor cerchio immobile; indi altre 45 per il caso nel quale una periferia *concava* *do*K può camminare sopra la periferia *convessa* di un minor cerchio supposto immobile *dmx*; e finalmente una per il caso di un *Epiciclo* rotante sulla periferia *convessa* di un egual cerchio, restando due soli casi impossibili per questo genere di *Cicloidi*; cioè che un cerchio camminar possa nella periferia *concava* di un minor cerchio, o di un cerchio eguale.

ARTICOLO DECIMO.

Descrizione organica delle Spirali.

NOi ci troviam finalmente arrivati a quel genere di Curve, che furono le ultime nominate fra gli usi di questo Istromento, ma che per l'eccellenza loro furono in considerazione degli antichi, e lo sono ancora de' moderni Filosofi; perchè da quelli furono applicate alla quadratura del cerchio, e da questi ad altri usi. Ed in quanto alla loro generazione, per essere dipendente dal moto composto di retto, e circolare, se saranno (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) descritti molti circoli concentrici, e dal loro comune centro C condotti molti raggi equidistanti, ed intersecantesi con le periferie di detti circoli, la linea condotta dal primo punto *a* d'intersezione al prossimo *g*, indi al vicino *b*, e così via via alli restanti punti K*mnoz*C, sarà una *Spirale*, che io chiamo *Circolare*; ma se in luogo dei circoli fossero date (*Fig.* 8.) tante *Elissi* parallele, e concentriche, sarebbero riuscite *Spirali* da me dette *Elittiche*. Tutte però nascenti da un punto *a* qualunque per la retta *a*C tendente al centro C, mentre detta *a*C si volge in giro. Il moto di questa

sta retta *a*C si suppone qui circolare; ed il moto del punto *a* per detta *a*C può essere equabile, ed inequabile; e sempre gli spazj *am*, *m*C fra una spira *agb*K*m*, e l'altra prossima *mnoz*C si trova in ragion composta della velocità del punto *a* per detta *a*C, e della velocità della medesima retta intorno al centro C. E quando la velocità della retta *a*C intorno a C sia equabile, e costante, li spazj *am*, *m*C saranno in ragione della velocità del punto *a* per detta *retta a*C. Qui pertanto si suppone che la *Fig.* 7. mostri una *Spirale* nata dal moto del punto *a* composto di di due movimenti uniformi, uno circolare d'intorno *aC*, e l'altro retto per la *retta a*C; cosicchè mentre per causa del primo la *retta a*C compie d'intorno *a*C una parte qualunque di un'intiera revoluzione, il punto *a* lungo detta *retta a*C proporzionalmente percorra una simil parte; e però questa è la *Spirale di Archimede*. La *Fig.* 8. poi è composta dal moto retto, ed elittico.

Si dovrebbero aspettare simili, e proporzionati effetti, secondo che il moto del punto *a* per la *retta a*C fosse accelerato equabilmente; o pure accelerato, o ritardato con qualunque variazione di velocità; dovendosi perciò la spira restringere, o allargare secondo la maggiore, o minore velocità, che sia in data ragione, si potranno immaginare *Spirali* innumerabili.

Ora per preparar l'Istromento (quello però de' fili) a queste Curve niente v'è di più facile. Perchè prima (*Figura* 3. *Tav.* 11.) condotta la punta S del raggio QS tra i due assi QG, RP, e fatto per modo che detto raggio soggiaccia per il lungo esattamente all'asta MN, si restringa poi validamente la vite P, onde tutto il corpo ombreggiato QRS*dm*P resti fermo, ed immobile nella sua guida *n*; ma la vite laterale *n* affatto si rallenti, acciò essa guida *n* diventi labile, e scorrente per il lungo della rotante asta MN verso M, portando seco tutto il corpo ombreg-

breg-

breggiato. Siano indi preparati quattro pezzi (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) per la forma loro nominati il primo cilindro circolare, il ſecondo cilindro elittico, il terzo cono circolare, il quarto cono elittico; perchè meſſo nell'aſſe QG il primo di detti pezzi in vece del cilindro ZT (*Fig.* 3.), e facendo poi girare l'aſta MN ſi avvolgerà ſu detto pezzo il filo, che perciò tira tutto l'aſſe PR, in un con lo ſtilo S, verſo all'aſſe QG; e dallo ſtilo S verrà deſcritta ſul piano della carta la *Spirale* della *Fig.* 7. *Tav.* 18.; che ſe foſſe ſtato adoperato il ſecondo pezzo avrebbeſi conſeguita la *Spirale* della *Fig.* 8.; ſe il terzo, la *Spirale* aſſomigliarebbe alla ſettima, ſe il quarto all'ottava. Ma in queſti due ultimi caſi, li ſpazj fra una ſpira, e l'altra andarebbero decreſcendo, o creſcendo verſo il centro, ſecondochè il filo cominciaſſe ad avvolgerſi ſu detti pezzi terzo, e quarto dalla parte del vertice *m*, o della baſe *o*.

Qui poi è d'avvertire che il numero delle ſpire di queſte curve, ſarà ſempre eguale al numero delle rivoluzioni dell'aſta MN; ſecondo, che gli ſpazj *am*, *m*C (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) fra una ſpira, e l'altra intercetti ſaranno eguali alle porzioni del filo, che ſi avvolgeranno d'intorno a detti pezzi per ciaſcuna rivoluzione relativa a detti ſpazj. E queſte porzioni di filo ſono eguali alle ſpire, che il filo avvolgendoſi forma ſulla ſuperficie dei ſopraddetti pezzi. Ma ſi è detto che gli ſpazj *am*, *m*C ſono in ragione della velocità del punto *a* per la retta *a*C; dunque le ſpire ſulla ſuperficie dei pezzi formate dal filo ſono in ragione di detta velocità. Onde ſegue, che per ottenere qualunque *Spirale* ſarebbe neceſſario ſapere la ragione di detti ſpazj per incidere (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) ſulla ſuperficie dei ſolidi terzo, e quarto un incaſtro a ſpira in detta ragione, in cui vada il filo come ad innicchiarſi; perchè poi ſvilluppandoſi ſi generaſſe la *Spirale* propoſta. Ben è vero però, che così ſarebbe lo ſteſſo che far naſcere una *Spirale* da un'altra.

Per conseguire la sopraríferita *Spirale d' Archimede* concepita da esso per (1) la quadratura del circolo, si carichino i due assi (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) QG, RP di due cilindri eguali, e si faccia che il filo sia ben teso, e tangente detti cilindri alla medesima parte, perchè indi mosso l' Istromento verrà descritta la *Spirale* suddetta.

Suggerisco inoltre, che con il medesimo Istromento dette *Spirali*, quasi per rappresentare la forza centripeta, cominciando lungi dal centro ponno procedere verso il centro; e per contrario volendo fingere la forza centrifuga, possono esser descritte cominciando dal centro, come ha fatto il Sig. Abate (2) Nollet nelle sue sperienze.

Ma finalmente essendo esposti anche gli usi di questa *Penna Geometrica*, e spedito quant' era d' uopo nel supposto di un Istromento consistente in due mobili cerchj, parmi che dover sia passare alla seguente ultima Parte, per esaminare a quali usi sarebbe atto un Istromento simile, ma che di tre, o più di detti cerchj mobili fosse composto.

PARTE QUARTA.

Degli usi d' un Istromento simile alla suddetta Penna Geometrica. *Ma composto di un numero di* Mobili *qualunque dato.*

Avvegnacchè la maggior parte degli Uomini curi, ed ambisca quelle cose, che possono condurre a più alto stato di fortuna, o tal' altra cosa fornire, che più piaccia a questo nostro, cheche siasi, incomprensibile umano composto; pure quella parte di noi, che mente, e spirito si appella, talvol-

(1) Archimede dimostra nella prop. 18. delle *Spirali*, che (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) dal punto *m*, termine della prima rivoluzione, menata nella Prodotta C*b* una tangente alla *Spirale*; lo spazio preso su detta retta C*b* da C fino all' incontro della tangente è eguale alla circonferenza del circolo che passa per *m*.

(2) Lezion. V. esper. 6.

volta ſchiva, o ſatolla di queſte comuni cupidità, ſollevaſi a più nobili occupazioni, e guſta anche tali coſe, che non poſſono a vil guadagno, nè a volgar diletto tornare. Così ora a me avviene, e molto più avverrà ad alcun altro, che ſia per le geometriche verità di ben diſpoſta mente. Perchè l'animo nella conſiderazione delle coſe, che ſi trattano in queſta Parte, benchè foſſero anche per eſſere inutili, ſi eſtolle, e ricrea; e intanto per un tale trattenimento ſi dimentica delle ingiurie de' tempi, nè bada alle pur troppo ſpeſſe noje, e faſtidj che ci ſtanno d'intorno.

Acciocchè dunque non ſi tardi ad entrar meco a parte di queſto vero piacere, cominciarò in queſto primo Articolo a favellare della quantità delle linee provenienti dal moto di un Iſtromento, che a ſimilitudine della *Penna Geometrica* foſſe compoſto di un numero di *Mobili* qualunque dato. Negli altri Articoli poi la qualità di eſſe linee ſi dimoſtrarà; ma per non andare all'infinito ſi reſtringeremo alla *linea retta*, al *circolo*, alla *eliſſe*, ed alle *curve planetarie*.

ARTICOLO PRIMO.

Numero delle Curve provenienti da un Iſtromento compoſto di un numero de' Mobili *qualunque dato*.

QUeſto numero ſi determina aſſai preſtamente, dopo che in altro (1) luogo fu trovato il numero conveniente nel ſuppoſto dell' Iſtromento compoſto di due mobili; perchè allora il *ſecondo Mobile*, o ſia *Epiciclo* relativamente al *primo*, che perpetuamente deſcriveva un circolo, deſcriſſe 1273 Curve. Ma poichè quelle tre cauſe moderatrici, che ivi valſero nel *ſecondo Mobile* riſpetto al *primo* a produr tanta varietà, ſi ſuppone che qui vagliano le medeſime nel *terzo* riſpetto al *ſecondo*, perchè queſto Iſtromen-

(1) Part. III. Artic. I.

mento deve esser simile a quello. Perciò il *terzo Mobile* per ciascuna Curva descritta dal *secondo* descriverà parimenti 1273 Curve. Dunque moltiplicato in se stesso il numero 1273 risulterà 1616529 numero delle Curve spettanti al *terzo Mobile*. Un simil discorso prova, che per determinare il numero delle Curve per il *quarto Mobile*, non si ha che moltiplicar in se stesso questo ultimo numero, e così per il 5, 6 ec. Onde se il primo numero 1273 derivante dal numero dei mobili dato 2 si chiama *a*, secondo che i mobili dell' Istromento saranno 2, 3, 4, 5 ec. il numero delle Curve verrà a. a^2 a^4 a^8 a^{16} ec.

ARTICOLO SECONDO.

Linea retta, *ed* Elisse, *che nascono dal moto composto di tre cerchj*.

Il primo Problema, che in questa quarta Parte ci viene innanzi, parmi nel vero assai grazioso, ed è la descrizione di una *retta* per il moto composto di tre cerchj, per risolvere il quale, ricorrendo alle tre cause moderatrici, suppongasi (*Fig.* 1. *Tav.* 19.)

1. Che i raggi *dn* del *primo Mobile*, *ng* del secondo, *gb* del terzo siano eguali.

2. Che siano mobili con eguali velocità: Il primo *dn* d'intorno all'immobile centro *d* fisso nel piano: Il secondo *ng* intorno al proprio centro *n* fisso nella periferia del *primo Mobile*: Il terzo *gb* mobile intorno al suo centro *g* fisso nella mobile periferia del 2. *Mobile*.

3. Finalmente il raggio *ng* del 2. *Mobile*, ed il raggio *gb* del 3. si muovano in verso contrario del raggio *dn* del *primo Mobile*, che certamente il punto *b* descriverà la retta *ae*.

Laonde supponiamo che nella primiera situazione de' mobili, prima che fossero al dovuto lor moto eccittati, il raggio

gio *dn* del *primo Mobile* coincidesse con *dc*; il raggio *ng* del 2. *Mobile* con *cb*; ed il raggio *gb* del 3. *Mobile* con *ba*; cosicchè tutti costituissero una medesima retta. Indi mossi con le prefate leggi, *dn*, che coincideva con *dc*, da *dc* s'intenda receduto tutto l'arco *cn*; *ng*; che se anch'egli non si fosse mosso intorno al proprio centro *n* coinciderebbe con *nf*, perchè ha corso inverso contrario un egual spazio, si trova da *nf* lontano tutto l'arco *fg*; e così *gb*, che se non avesse girato intorno al proprio centro *g*, coinciderebbe con *gm*, lungi da questo è andato tutto l'arco *mb*. E però questi tre archi *cn*, *fg*, *mb* saranno eguali, perchè le velocità sono date eguali.

Richiamando ora alla memoria ciò che si è detto (1) per la descrizione del circolo, si troverà che qui concorrono tutte le cause moderatrici ivi addotte, perchè nel caso di due soli mobili, il raggio *ng* del *secondo Mobile*, mantenendosi sempre a se stesso parallelo, descriva il circolo *bgnd*. Onde si potrebbe fingere, che detto circolo fosse piuttosto descritto dal raggio *cg*, come rotante intorno al centro *c*; e prescindere per ora dai raggi *dn*, *ng*, come se non vi fossero, e come se non si trattasse d'altro, che dei due raggi *cg*, *gb*. Nel qual caso dico, che rispetto a questi due mobili si rincontrano qui tutte le cose, che (2) furon d'uopo, acciò il punto *b* descrivesse una *retta ae*; perchè per la costruzione i raggi *cg*, *gb* sono eguali; i moti accadono in verso contrario, mentre nel supposto che *cg* muovasi a sinistra verso *n*, *gb* per la costruzione volgesi a destra da *m* verso *b*. Resta ora da provare, che la velocità di *gb*, che sta ora per un *Epiciclo* immaginario, sia alla velocità di *cg*, che sta per un supposto *primo Mobile*, come 2 a 1. Ora quando *dn* con *dc*, *ng* con *cb*, *gb* con *ba* coincidevano; *cg* coincideva con *cb*, *gb* con *ba*. Ma poichè *cg* ha percorso l'arco *bbg*; *gb*

(1) Part. III. Artic. V.

(2) Part. II. Artic. III.

gb avrebbe dovuto coincidere con *gz*; ma per le ſtabilite velocità ſi trova ben lungi tutto l'angolo *zgb*, il quale eſſendo eſteriore è doppio dell'angolo interiore *gcb*, e però riſulta la velocità angolare del raggio *gb* riſpetto alla velocità del raggio *cg*, come 2 a 1. Dunque il punto *b* deſcriverà la *retta ae*. Anzi per fortificar queſta concluſione con un di più, prodotto *cg* in *z*, dico che l'angolo *zgb* è doppio dell'angolo *mgb* percorſo dal raggio *gb* nel ſolo ſuppoſto della figura. Imperciocchè gli angoli al vertice *mgz*, *ngc* ſono eguali; così gli angoli alterni *ngc*, *gcb* ſono parimenti eguali. Dunque *mgz* = *gcb*; e perciò *zgb*, eſſendo doppio di *gcb*, ſarà anche doppio di *zgm*. Dunque *mgz* = *mgb*; e però *zgb* doppio anche di *mgb*. Il che era da dimoſtrarſi. Ora ſenza frammettere alcun indugio all' altra Parte di queſto Articolo, conchiudo, che il punto *b*, ovvero H, preſo dentro o fuori dell' area del *terzo Mobile gb*, deſcriverà un' *Eliſſe*. Conſeguenza, che ritenendo ancora il ſuppoſto de' due mobili *cg*, *gb* chiaramente riſulta per la dimoſtrazione dell' *Eliſſe* addotta a ſuo luogo (1). Anzi quaſi tutti i corollarj colà ſpettanti alla *linea retta*, ed *Eliſſe*, qui poſſono egualmente aver luogo.

ARTICOLO TERZO.

Circolo derivante dal moto compoſto di tre, o più cerchj.

SI è detto di ſopra (*Fig.* 1.), che quando i due raggi de' mobili *dn*, *ng* muovendoſi ebbero ſortita la ſituazione, che la figura dimoſtra, il terzo raggio *gb* avrebbe coinciſo con *gm*, ſe non ſi foſſe moſſo a deſtra da *m* verſo *b* intorno al proprio centro *g*. Supponiamo pertanto (le altre coſe tutte rimanendo), che piuttoſto ſi ſia moſſo a ſiniſtra da *m* verſo *z*: val a dire in conſeguenza del *primo Mobile*

dn,

(1) Part. III. Artic. IV.

dn, allora il punto *b*, cioè *z* (*Fig.* 2.) si ritroverà nella periferia di un *circolo*, il cui diametro sarà la *retta ae* descritta (*Fig.* 1.) dal punto *b*.

Essendo perciò *ng* (prodotto pur anche in *m*) sempre a se stesso parallelo, sarà parallelo sempre anche a *cb*, con cui prima di muoversi coincideva. Onde in grazia della dimostrazione sostituito anche qui *cg* al raggio *ng*, gli angoli *bcg*, *mgz* saranno eguali per causa delle supposte velocità. Ma le parallele *bc*, *mg* non potrebbero costituire alla linea *cgz* detti angoli eguali, se non fosse una medesima *retta*. Dunque *cgz* è appunto una medesima *retta*, che perpetuamente rotando intorno a *c* descrive il *circolo aze*. Il diametro del quale sarà eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, perchè il semi-diametro *cgz* è eguale a due; ma la *retta ae* della *Fig.* 1. è parimenti eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, imperciocchè nel massimo dilungamento o snodamento de' raggi $dn + ng + gb = da$, e nel massimo accorciamento di detti eguali raggi *dn*, *ng*, *gb* formano un sol raggio $= de$ ressidua porzione di detta *linea ae*; perchè per causa delle velocità si rannicchiano di modo, che *g* coincide con *d*; *b*, ed *n* col punto *e*. Dunque il diametro del circolo *aze* si eguaglia alla *retta ae*; e perciò s' intende verificata l' una, e l' altra parte di questa proposizione.

Ma per non menare in lungo una dimostrazione, cui potrebbe supplire una sola nuova figura, ricordarò che da' eguali mobili in numero qualunque dato, affetti di eguali velocità, rotanti l' un dell' altro alternativamente in verso contrario, si descriveranno dei *circoli* di diametri crescenti a due a due; cosicchè i diametri dei *circoli*, che verranno dal *Mobile* 1. 2. 3. 4. 5. 6., ec. cresceranno come 1. 1. 2. 2. 3. 3. ec. Inoltre la periferia del 1. 3. 5., e degli altri tutti che siano nella serie naturale de' numeri impari, coincideranno nel punto *e*; e le periferie del 2. 4. 6., e degli altri di numero pari in detta serie, coincideranno nel punto *d*.

to *d*. Si conturba questa legge, se i mobili sono dati ineguali, quantunque (ferme però che restino le altre cose) sempre risulti la descrizion di un *circolo*. E viene in via di corollario un'altra verità, che tutti i punti presi nella periferia, nell'area, e nel centro di tutti i *mobili* descrivono parimenti *circoli* concentrici rispettivamente al *circolo*, di quel tal *mobile* descrivente.

ARTICOLO QUARTO.

Linea retta, *ed* Elisse *vegnenti da tre mobili in altra maniera.*

PRimo, sia il raggio *dn* del *primo Mobile* (*Fig.* 3.) eguale al raggio *ng* del *secondo Mobile*, ed il raggio *gb* del *terzo Mobile* qualunque dato.

2. Siano le velocità del *primo*, *secondo*, *terzo* espresse dai numeri 1. 2. 1.

3. Il *primo Mobile*, ed il *terzo* si muovano in verso opposto del *secondo*. Dico che il punto *b* del *terzo Mobile* descriverà la *retta aq*.

Lo che per dimostrare suppongasi prima, come da me si suole, che *dn* con *dc*; *ng* con *cu*; *gb* con *ua* coincidessero. Quando in un tratto messi i *mobili* in moto il raggio *dn* del *primo Mobile* abbia già percorso l'arco da *c* ad *n*; *ng* l'arco da *f* a *g*; *gb* l'arco da H a *b*. Ora poichè l'angolo *fng* è doppio dell'angolo *ndg* (non solo per causa delle date velocità, ma anche perchè l'angolo *fng* al centro è doppio dell'angolo *ndg* alla periferia) sarà anche doppio dell'angolo *ngd*, cui è eguale detto angolo *ndg*, perchè opposto per la costruzione ad un lato eguale; e doppio del pari sarà dell'angolo *bg*H, perchè la velocità data del *secondo Mobile* è alla velocità del *terzo* come 2. a 1. Dunque l'angolo *bg*H deve essere all'angolo *ngd* eguale.

eguale. Essendo stato pertanto altre volte detto (1), che in simili circostanze dei due mobili *dn*, *ng*, il punto *g* si trovi costantemente nella *retta ue*; il raggio *gb* del *terzo Mobile*, recedendo dalla prodotta *ng* in H, verso *gb*, non può constituire l'angolo *bg*H eguale all' angolo al vertice opposto *ngd*, se non si mantiene sempre nella direzione *gd* coincidente con la detta *ue*; ma pure detti angoli sono constituiti eguali per causa delle date velocità. Dunque *gb* si mantiene in detta direzione *gd*, ovvero *ue*. Anzi di tal maniera in detta *linea ue* persiste, che egli è sempre a se stesso parallelo, e coincidente. Onde il punto *b* ultimo di detto raggio *gb* descrive tutta la *retta aq* = all'aggregato dei diametri di tutt'i mobili $aK - \overline{Kq}$ diametro del *terzo Mobile*; e così dite di tutti gli altri punti dell' area, o periferia di detto *terzo Mobile*, che descriveranno delle *rette* parallele fra loro, e parallele alla *retta aq* coincidente con la suddetta *ue*.

Ma se intanto (le altre cose restando come sopra) la sola velocità del *terzo Mobile*, invece di esser suddupla di quella del *secondo*, fosse a quella eguale, cioè invece di esser l'angolo *bg*H eguale alla metà dell'angolo *fng*, *gb* si trovasse a coincidere con *gz*, e l'angolo *zg*H fosse eguale all'angolo *fng*; allora il punto *b* (dite *z* dove ora si suppone che stia il punto *b*), sarebbe nella periferia di un' *Elisse*, di cui l'*asse* maggiore sarebbe eguale all'aggregato de' diametri de' *mobili*; l'*asse* minore sarebbe $= + 2dn - 2ng + 2gb$; cioè che è lo stesso, $= + 2dl - 2ld + 2dm = + 2dm$.

Perchè trovandosi il punto H per le prove addotte nel luogo sopraccitato (2) nella circonferenza di un' *Elisse*; se il raggio *gb* faccia un altro arco da *b* a *z* eguale all'arco già fatto da H a *b* nel primo supposto; cosicchè gli angoli *fng*, *zg*H siano fra essi eguali, e ciascuno doppio dell'angolo *ndg*, il punto *z* si troverà da una parte in

(1) Part. III. Artic. III.

(2) Part. III. Artic. IV.

quella precisa situazione, che si trova H dall'altra. Onde benchè si trovi in parte a quella opposta, con tutto ciò sarà nella circonferenza della medesima *Elisse*. Perchè poi i raggi de' *mobili* in due opposte parti *a*, *e*K si dilungano in una *retta* $ad + d$K, l'*asse* maggiore viene ad esser eguale alla somma dei detti raggi due volte presa, cioè alla somma dei diametri. E perchè in due altre parti opposte verso *l*, ed *o* detti raggi si rannicchiano tutti tre in uno, cosicchè *n* coincide con *l*, *g* con *d*, *b* con *m*, l'*asse* minore risulta $= + 2dn - 2ng + 2gb$, cioè eguale $+ 2dl - 2ld + 2dm$; onde distrutte per li opposti segni le due eguali quantità $+ 2dl - 2ld$, resta di positivo solo $+ 2dm$ eguale al diametro del *terzo Mobile*. Tuttavia quanto si è detto (*Fig.* 3.) in proposito della generazione di questa *Elisse*, e quanto è vero anche nel caso della *Fig.* 4. (nel caso dico, che le altre cose stanti come sopra, i raggi *dn* del *primo Mobile*, ed *ng* del *secondo* non siano eguali, ma siano tutti tre qualunque dati) è bene che si confermi con una dimostrazione generale, che è la seguente.

ARTICOLO QUINTO.

Linea retta, *ed* Elisse *generate per il moto composto di un numero di cerchj qualunque dato.*

PRimo, dunque siano dati quanti, e quali si siano raggi de' *mobili* (*Fig.* 5.) *Cn*, *nb*, *hb* ec., l'un all'altro insieme connessi.

2. La velocità del *primo Mobile* sia suddupla di quella di ciascun altro.

3. Tutti muovansi alternatamente l'uno dell'altro in verso contrario.

Dico che il punto *b* della periferia d'un qualunque ultimo dato *mobile*, si troverà nella circonferenza di un'

Elisse

Eliſſe, di cui l'*aſſe* maggiore pareggierà la ſomma dei diametri di tutti i *mobili* dati, e l'*aſſe* minore ſarà $=$ al raggio due volte preſo C*n* del *primo Mobile* $-$ il due volte preſo raggio *nb* del *ſecondo Mobile* $+$ il due volte preſo raggio *bb* del *terzo* $-$ ec. (alternando ſempre così la ſituazione de' ſegni oppoſti.

La linea GP eguale alla ſomma dei diametri dei *mobili* dati, ſia tagliata per metà in C, e ad angoli retti dalla perpendicolare RC. Poi fatto centro in C ſi deſcriva il circolo PKG; indi nella perpendicolare CR ſia traſportata la quantità C*e* eguale al raggio C*n* del *primo Mobile*; ed appreſſo fatto centro in *e*, ſi ſegni la quantità *ef* eguale al raggio *nb* del *ſecondo Mobile*; poi fatto centro in *f* ſia *f*A eguale al raggio *bb* del *terzo Mobile*; e così via via ſin che ſiano ſtati traſportati tutti i raggi de' *mobili* dati. Perchè per ultimo fatto di nuovo centro in C, e deſcritto un altro circolo A*p*B coll' apertura CA. AB ſarà l'*aſſe* minore $= + 2Ce - 2ef + 2fA = 2CA$. E l'*aſſe* maggiore ſarà $GP = 2Cn + 2nb + 2bb = 2CP$.

Per provare ora che il punto *b* della periferia di un qualunque dato *mobile* ſia nella circonferenza di un'*Eliſſe*. Sempre nella prodotta del raggio C*n* del *primo Mobile* ſi traſportino tutti i raggi, che nella ſerie de' *mobili* dati ſono ne' luoghi impari. Qui ven' ha un ſolo *bb* raggio del *terzo Mobile*, e però ſi faccia *nu* eguale a detto *bb*. Poi dal punto *u*, che verrà qualunque per il punto *b* ſi tiri *uz* che occorra nella prodotta GP. Ora per cauſa delle date velocità, ſi può preſcindere da tutti i *mobili* C*n*, *nb*, *bb* ec., come ſe non vi foſſero, e come ſe la queſtione verſaſſe ſul ſolo raggio C*u* di un *primo Mobile* immaginario, e ſul raggio *uz* pure di un ſuppoſto *Epiciclo*. I quali primo, ſono eguali perchè oppoſti ad angoli eguali per cauſa delle velocità; ſecondo, la velocità del *primo Mobile* immaginario C*u* è ſuddupla di quella del ſuppoſto *Epi-*

ciclo uz, non solo a cagione delle date velocità, ma anche perchè l'angolo interno KC*z*, è sudduplo dell'esterno K*uz*; terzo, usando attenzione verremo fatti accorti, che i moti procedono in verso contrario. Onde per la dimostrazione veduta nel sopraccitato luogo (1) risulta, che il punto *b* del *terzo Mobile bb*, o sia anche S di un qualunque altro *quarto Mobile b*S a quello annesso, o qual altro punto che si trovi nell'area del supposto *Epiciclo uz*, sta certamente nella circonferenza di un' *Elisse*.

Ma se il *quarto Mobile* invece di esser eguale a *b*S fosse più tosto eguale a *bz*, il punto *z* come punto della periferia del supposto *Epiciclo uz*, si trovarebbe assolutamente nella *retta z*PG. Simili esempj somministra anche la *Figura 6.*, perchè dato che sia, per esempio, da dimostrare che il punto *f* sia nella circonferenza di un' *Elisse*, nella prodotta del raggio *ab* del *primo Mobile* si trasportino come sopra i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono in luogo impari, quali qui sono due C*d*, ed *ef*. Si faccia dunque *bn* = C*d*. *nl* = *ef*. Poi dal punto *l* che verrà si tiri per il dato *f* in *g* la *retta lg*, che sarà eguale ad *la*; e si fingano distrutti tutti i *mobili* dati, e non altri rimanere, che *al* raggio di un *primo Mobile* immaginario, ed *lg* raggio di un supposto *Epiciclo*. E poi si provi, come sopra, essere il punto *f*, come preso nell' area dell' *Epiciclo lg*, costituito nella circonferenza di un' *Elisse*. Inoltre se il punto dato fosse *g*, perchè questo *g* sta nella periferia di detto supposto *Epiciclo lg*, si troverà costantemente nella *retta ao*.

Quindi si può primieramente raccogliere, che tutte le *Elissi* descritte (*Fig. 5.*) o dal punto *b*, o dal punto *b*, o dal punto S (così *Fig. 6.* dal punto *d*, dal punto *f* ec.) siano tutte concentriche; e di più anche parallele, ovvero simili quelle che saranno descritte da' punti presi su

(1) Part. III. Artic. IV.

ſu d'un medeſimo raggio di un *mobile* nella ſerie numero impari, come quelle che ſarebbero deſcritte dal punto *b*, e punto *b*; perchè quantunque il punto *b* ſia ſtato conſiderato come ultimo del raggio *nb*, non reſta che inſieme non ſia anche primo del raggio *bb*; onde le *Eliſſi* deſcritte da queſti due punti, oltre l'eſſere concentriche, ſaranno anche parallele, perchè le loro periferie ſaranno continuamente diſtanti lo ſpazio *bb*, voglio dire, che ſaranno ſimili.

2. Che ſe i *mobili* ſono eguali, le *Eliſſi* non poſſono venir deſcritte che dai *mobili*, che nella data ſerie ſono ne' luoghi impari, come dal 3. 5. *Fig*. 6. Se poi non ſono eguali (*Fig*. 5.) ponno deſcriverſi da un *mobile* qualunque *nb*, *bb*, *bS* ec. eccettuato il *primo Mobile* C*n*, che deſcrive ſempre un circolo. La *linea retta* poi non viene deſcritta, che dai *mobili* che nella data ſerie ſono ne' luoghi pari, come dal *quarto Mobile b*z (*Fig*. 5.), e dal *ſecondo*, *quarto*, *ſeſto* (*Fig*. 6.).

3. Per ſapere (*Fig*. 5.) ſe un *mobile b*z che nella data ſerie ſia in luogo pari, deſcriverà una *retta* o no, ſi farà come poc'anzi ſi è fatto, per determinare l'*aſſe* minore dell'*Eliſſe* deſcritta dal punto *b*, e che qui giova ripetere. Tirata prima una *retta* GPz che ſtia per l'*aſſe* maggiore, e dal centro C del *primo Mobile* eretta una perpendicolare CR, ſi farà centro in C, e coll'apertura C*n* raggio del *primo Mobile* ſi ſegnerà in detta CR la quantità C*e*; poi fatto centro in *e* coll'apertura *nb* ſi noterà *ef*. Indi fatto centro in *f* coll'apertura *bb* ſi noterà *f*A; e per fine fatto centro in A coll'apertura *b*z, ſe z viene a coincidere nel centro C del *primo Mobile*, z ſi muoverà in una *retta*; ſe non coinciderà, il punto z non potrà fornire che un' *Eliſſe*.

ARTI-

ARTICOLO SESTO.

Cause moderatrici delle Linee messe per esemplari delle innumerabili derivanti dal moto composto di tre circoli.

NOn si può abbastanza ridire quanto nitide e leggiadre Curve nascano dal moto composto di tre circoli, e benchè n'avessi già preparate di bellissime descritte col metodo per punti; non ostante soppresse le migliori, ho ritenute queste poche più semplici; perchè dalla maggior parte di esse prendo occasione di fare a luogo qualche necessaria osservazione. Sono dunque:

Figura 1. *Tav.* 19.

1. Raggi de' *mobili* eguali.
2. Velocità eguali.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al 1.°

Figura 2.

Mobile 1.°, e 3.° contro il 2.°: Il resto come sopra.

Figura 3.

1. Raggi del 1.° *Mobile*, e 2.° eguali. Raggio del 3.° *Mobile* qualunque.

2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2. * Siami per brevità permessa, sempre che occorra questa espressione, la quale significa che le velocità del 1.°, 2.°, 3.° *Mobile* sono in proporzione ordinata, come li tre numeri 1. 2. 2.

3. *Mobile* 1.°, 3.° contro il 2.°

Figura 4. *e* 5.

1. Raggi qualunque.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2.
3. L'uno dell'altro alternatamente in verso contrario.

Fig. 6.

Figura 6.

1. Raggi sei eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° :: 1. 2. 2. 2. 2. 2.
3. L'un dell'altro alternatamente in contraria parte.

Figura 7. *Tav.* 20.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 9.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al primo.

Figura 8.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 5. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 9.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 4. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 10.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 3. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 11.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 2. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 12.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 1. Il resto come nella *figura* 7.

* Qui è da notare come dal solo raccorciamento del raggio del 3.° *Mobile*, risulti quasi per gradi la trasformazione della *Fig.* 7 in quella dell' 8, 9, 10, 11, 12, che sono 6; numero che però con ragione anche nel calcolo delle Curve provenienti dal moto composto di tre *mobili* si è adoperato, come pure si fece nel calcolo instituito per quelle generate per il moto composto di due soli *mobili*.

Secon-

Secondariamente è d'avvertire che il 3.° *Mobile* descrive le sei figure suddette, mentre il suo centro è portato per la circonferenza di un'*Elisse*.

Figura 13. *Tav.* 21.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 14.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 3.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 15.

Il 2.°, e 3.° *Mobile* contro il 1.° Il resto come nella *figura* 13.

Figura 16.

1. Raggi eguali.
2. Velocità eguali.
3. Tutti in conseguenza. Se fosse il 1.°, e 2.° contro il 3.°, verrebbe la *Fig.* 1. *Tav.* 15.

Figura 17.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 1. 1. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 18.

Mobile 2.°, e 3.° contro il 1.° Il resto come nella *fig.* 14.

Figura 19. *Tav.* 22.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 2. 2. 3.
2. Velocità 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 4. 4.
3. Il 2.°, e 3.° contro il 1.°

* Notate, che nelle *figure* 13., 14., 15., 18., mentre il 3.° *Mobile* descrive la Curva, il suo centro è portato dal 2.° *Mobile* per una *retta*. Li archi però percorsi dal raggio del 3.° *Mobile* non sono nella medesima ragione delli spazj percorsi dal suo centro per detta *linea retta*. Ma ciò che è mi-

mirabile, questa *linea retta* descritta dal 2.° *Mobile* ritiene di maniera la natura di un' *Elisse*, che il resto pari, niente differiscono le Curve descritte da detto 3.° *Mobile*, o il suo centro sia portato nella periferia di un' *Elisse*, o nella direzione di detta *linea retta*.

Notate per ultimo, cosa maravigliosa, che per il moto composto di tre, o più *mobili*, si possono conseguire anche quelle figure regolari delle quali i lati siano quasi retti, come la *Fig.* 8. *Tav.* 16. E ciò che è molto più osservabile si possono combinare le cause moderatrici in diverse maniere, e nulla di meno fare, che venghi a risultare la medesima Curva proposta.

ARTICOLO SETTIMO.

Curve Planetarie del Signor di Varignon comprese negli usi di un Istromento di tre cerchj simile alla Penna Geometrica.

LA Curva determinata dal Sig. di Varignon (1), e che s'immagina essere descritta in un piano dal centro di un Pianeta, viene dal moto composto del centro di detto Pianeta progrediente nell' elittica speciale sua orbita, mentre detta orbita è portata dalla linea degli Absidi intorno a un foco. Onde l' Istromento dovrebbe esser composto di 3. *mobili*: due destinati a generar l'orbita elittica, ed uno a far, in luogo della linea degli Absidi, girare detta orbita. Conciossiacchè (2) altrove si sia rimarcato, come (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) agli *assi* *ab*, *ed* di un' *Elisse* si determinino i raggi C*n*, *na* dei *mobili generatori*, muovendosi i quali con le dovute velocità, si conseguisca la proposta (sia per esempio di Mercurio ☿) orbita *aebd*. Ma qui si pre-

(1) *Memoires de l'Academie*. An. 1703. p. 348.

(2) Part. III. Artic. IV. Annotaz. III.

pretende inoltre, che mentre detta orbita si descrive intorno al centro C, l'*asse* suo maggiore, o sia la linea degli Absidi *ab* volgasi d'intorno al foco F; cioè (che torna lo stesso) sia il centro C di detta orbita dal raggio FC di un altro *mobile* CR portato per la periferia CR d'intorno all' *immobile* centro F.

Per lo che primo, sono necessarj tre *mobili*: Il *primo* CR, di cui è raggio FC; il *secondo* *zno*, di cui è raggio C*n*; il *terzo* *aqf*, del quale è raggio *na*.

2. La velocità del *primo Mobile* sarà alla velocità del *secondo*, come il moto dell' Affalio del Pianeta dato ♃ ad una intiera rivoluzione di detto Pianeta nella sua orbita; cioè a gradi 360. Imperciocchè mentre il *mobile* *zno* compie una rivoluzione, il punto *a* del *Mobile* *aqf* descrive l'intiera orbita *acbd*. La velocità poi del *secondo* a quella del *terzo* sarà come detta intiera rivoluzione, cioè gradi 360. ad una rivoluzione raddoppiata, che è 720. Perchè acciocchè i *Mobili* *aqf*, *zno* siano disposti ad un' *Elisse*, la velocità del *terzo Mobile* *aqf* deve essere doppia di quella del *secondo* *zno*.

3. I moti del *primo*, e del *terzo Mobile* saranno ad un medesimo verso, perchè così procede ad un medesimo verso tanto il moto dell' Affelio, come la direzione del Pianeta nella sua orbita: Voglio dire, che a quella medesima parte che l' Affelio avanza da C verso R, anche il Pianeta cammina sulla sua orbita da *a* verso *e*. Il moto poi del *secondo Mobile* *zno* sarà in verso contrario dell' uno, e dell' altro, cioè il raggio C*n* si muoverà verso *z*. Conciossiacchè non si possa dal *terzo Mobile* descrivere un' orbita elittica, se non cammina in verso contrario del *secondo Mobile*.

Per altro si vuole qui aver detto, come alla descrizione di queste Curve planetarie un Istromento compor si dovrebbe, ma non come si possa; anzi ella è per mio giudicio

dicio impossibile. Perchè essendo, secondo Keplero, il moto annuo dell' Affelio di Mercurio $= 1'.\ 45''.$, e compiendo detto ☿ la sua rivoluzione in giorni 87., il moto angolare dell' Affelio di ☿ corrispondente a detti giorni 87. risulta in circa $= 25''$. Perchè 365. (moto annuo dell' Affelio) 87. giorni (rivoluzione di detto ☿) :: $105''.\ \frac{9135}{365}'' = 25''\ \frac{2}{73}$.

Laonde lasciando il rotto $\frac{2}{73}$, li secondi 25 staranno per la velocità del *primo Mobile*, che rappresenta il circolo dell' Affelio. Li gradi 360. per la velocità del *secondo Mobile*, che sta per l' intiera rivoluzione di ☿ intorno al Sole, ed una doppia rivoluzione, cioè gradi 720. per la velocità del *terzo Mobile* ordinato a causare un' *Elisse*. Dunque le velocità del *Mobile primo*, *secondo*, *terzo* saranno in proporzione ordinata, come li tre numeri :: 1. 51840. 103680.

Ma perchè per eccittare i *mobili* alle dovute velocità, uso da noi si fa de' cilindri, o ruote dentate che siano in data ragione; se il diametro di una ruota si determini di sole tre linee del piede di Parigi, il diametro dell' altra verrebbe piedi 12960., il diametro della 3. ruota piedi 25920. E quantunque io sappia, che si potrebbero diminuire i diametri di queste ruote coll' accrescere il numero di esse; nulladimeno i moti poi ne verrebbero assai più implicati, e l' effetto di questi movimenti riuscirebbe sempre più difficile. Onde seguita che se si lusingasse taluno di comporre una Macchina precisamente ordinata al presente sistema del Mondo, andrebbe molto errato, come si accennerà anche nel seguente Articolo.

ARTICOLO OTTAVO.

Difficoltà annesse al progetto di una Macchina rigorosamente ordinata al presente sistema del Mondo.

BEnchè non sia per anco nota agli Astronomi la distanza, e grandezza assoluta de' Pianeti, che si spera di poter determinare l'anno 1761. per il passaggio di Venere sotto il Disco Solare; nonostante ad ordinare una Macchina che rappresentasse il presente sistema del Mondo, certo è che bastano le distanze, e grandezze relative, su le quali, conforme il sistema di Copernico (1), non lasciarono altri di proporne una ingegnosissima, ed un' altra a spiegare i fenomeni de' corpi celesti, è stata, non a molto, inventata dal Chiarissimo Sig. Gasparo Charlton (2). Ma una trovarne nel supposto delle orbite elittiche, e che regga anche al moto degli Affelj, parmi per ogni modo assai difficile. Conciossiacchè nella Macchina ordinata al sistema di Copernico, invece delle orbite elittiche erano, per quanto ho inteso dire, circoli eccentrici, nei quali apparivano i Pianeti progredire con velocità proporzionate ai tempi. Così ivi non erano i moti degli Affelj, nè di vertigine (se non quello della Terra, e del Sole); ma due soli moti: un principale che traeva la Macchina, dirò così, dalla sua immobilità, ed un altro da quello dipendente, onde ciascun Pianeta camminava nella sua orbita. Ma nel caso nostro occorrebbe un principal movente, che nella data ragione promovesse i centri di ciascun Affelio. Da questi dipendono due altri *mobili* affetti per mezzo di molte ruote delle dovute velocità per formare le orbite elittiche. Indi i globi

(1) Una ven' ha a Firenze fra le macchine di S. M. Imper.; un' altra ven' è in Padova del Sig. Dott. Masi. Intendo dire che una pur stupenda sia in Vienna, ed un' altra a Leiden.

(2) In Londra l'anno 1735.

i globi rappresentanti ciascun Pianeta, di cui sia noto il moto proprio di vertigine, dovrebbero con una certa legge volgersi d'intorno ai proprj *assi*. Facendo questi col piano delle orbite rispettive quell'angolo, che fosse altresì noto. Poichè già si sa che peranche non si è dagli Astronomi rilevato nè il moto di vertigine di Mercurio, e Saturno, nè l'angolo che probabilmente anch'essi fanno con la loro orbita; perchè o il troppo splendore del Sole vicino, o la enorme lontananza vietò fin'ora, che gli osservatori del Cielo discernessero le macchie, onde giudicarono detto angolo, e moto di vertigine degli altri Pianeti. Se poi dovessero in questa Macchina aver luogo anche i Pianeti secondarj, la Luna, i satelliti di Giove, e di Saturno, ed il suo stupendo anello, la cosa andrebbe tanto innanzi, che ingegno umano non vi potrebbe per niente. Pure quando non si badasse al moto degli Affelj, che a se soli obbligano tante ruote, il progetto prenderebbe nel resto qualche probabilità; e si potrebbe forse sperare che in Città, dove si trovassero grandi Matematici, ed insigni Artefici si potesse in alcuni anni ben condurre una tal opera; costruendola appunto Pianeta per Pianeta a similitudine della mia *Penna Geometrica*. Ma chi sa?

Forse un dì fia che la presaga Penna
Osi scriver di ciò, *quel ch' or n' accenna*.

ISTRO-

ISTROMENTO X.

ARTICOLO PRIMO.

Per la descrizione organica della Loxodromia, *e de' Poligoni rettilinei regolari*.

DOvendosi nel genere de' circoli non senza ragione comprendere anche le spirali, e la linea retta, quelle come periferie di un circolo, che attualmente s' incammina all' infinito, questa come periferia di un circolo già arrivato all' infinito. Ben si scorge, che il compasso comune, come mancante di dette linee, è (ciò che nissuno avrebbe mai creduto) in un certo modo imperfetto. Al quale però per tal cagione, parmi che sia preferibile il seguente, il quale, mentre da me vien ordinato alla *Loxodromia*, non può non descrivere le tre suddette linee *circolo*, *spirali*, e *linea retta*. Imperciocchè supposto che la *Fig.* 2. (*Tav.* 23.) sia parte della superficie di un Globo terraqueo, quando viaggia un Bastimento sempre cammina o sopra un dato parallelo QE, BA ec., o sopra un dato meridiano PQ, PG ec., o sopra una linea curva LE detta *Loxodromia*, di cui una semplice proprietà è, che la sua tangente forma con tutti i meridiani un dato angolo PLE, PCE, PHE ec. sempre il medesimo. Però devesi aver cura, che la fabbrica del presente Istromento abbia rapporto a tutte queste differenti direzioni per descriverle, quando che sia, sopra il suddetto Globo.

Compasso Loxodromico adunque chiamo propriamente il proposto Istromento (*Fig.* 1. *Tav.* 23.) come quello che, quantunque da me s' impieghi a descrivere anche alcuni *Poligoni regolari*, specialmente però è stato concepito per la suddetta *Loxodromia*. Egli è nel vero un *compasso*, di cui l' un piede MC sempre sta fisso in un punto C, l' altro MV termina in una ruota R mobile intorno ad un piccol ganghero, che occupa il suo centro, e che indi si piega, e con una cannetta V abbraccia, e poi con una viterella sta fermo a detto piede MV. Ma girando la cannetta V intorno a detto piede, prima di stringer la vite, si può fare, che il piano della ruota rappresentato per xz costituisca sul piano della carta col raggio RC, ovvero rc, un angolo crz, ovvero crx eguale ad un qualunque dato. La noce poi, o nodo M deve esser assai più labile, e presto che negli altri compassi non è.

Da questa semplicissima costruzione seguita: Primo, che se il piano della ruota xz faccia col raggio RC un angolo retto, risulti la descrizione di un *circolo*, il quale è maggiore, o minore, secondo che da prima il compasso aveva maggiore, o minore apertura; la quale apertura volgendo l'Istromento non può alterarsi, perchè non essendo la ruota inclinata più da una parte, che dall'altra, non può nemmeno mordere la carta o più in fuori, o più in dentro, onde si allarghi, o si stringa il compasso. Secondo, se il piano della ruota xz non fa verun angolo con detto raggio RC, aprendo sempre più l' Istromento, ma non già muovendolo in giro, si descrive una *retta*, da cui per la medesima ragione addotta, non può mai declinare. Terzo, se il piano suddetto forma con detto raggio un angolo qualunque che non sia retto, e muovasi poi in giro l'Istromento o dalla parte dell'angolo ottuso crx, o da quella dell'acuto crz, perchè e nell'uno, e nell'altro caso la ruota inclinata può mordere o più in fuori, o più in dentro la carta, o nel primo caso dilungasi sempre più dal centro C, o nel secondo s'accosta, e seco trae il piede MR, e lo determina a formar con l'altro piede MC l'angolo RMC o sempre più, o sempre meno aperto; e quindi intanto dal margine dentato di essa ruota descrivesi sul piano della carta una *spirale*, la quale viene appunto

ad

ad essere la proposta *Loxodromia*, perchè il piano della ruota, cioè la sua tangenre (giacchè il piano della ruota è sempre per la costruzione tangente alla curva) in qualunque posizione forma col raggio CR un angolo costante.

L' Istromento da me perciò messo in prova somministra gentilmente queste tre linee, che sono un' immagine in piano delle curve, che un Bastimento descrive sulla superficie sferica del Mare. Perchè il centro C (*Fig.* 1.) si può prendere (*Fig.* 2.) per il Polo P.; il raggio CR mobile intorno a C per un meridiano, che come rotante intorno a detto Polo P, serve per tutti gli altri meridiani PQ, PG ec. Il piano *xz* della ruota R, costituente con detto raggio *rc* un angolo qualunque, può tutti i rombi della rosa nautica rappresentare. Onde quando di questo compasso l'un piede MC fosse posto nel Polo P (*Fig.* 2.) di un globo terrestre artefatto, l'altro, secondo che il piano della ruota diversamente inclinasse a detto raggio CR (*Fig.* 1.); ovvero PQ, PG ec. (*Fig.* 2.) descriverebbe sulla superficie di esso globo, o qualunque parallelo QE, BA ec., o un qualunque meridiano PQ, PG ec., o la *Loxodromia* LE conveniente ad un rombo, o sia angolo *Loxodromico* qualunque dato.

Ma quantunque io stia sicuro, che la prefata costruzione non possa mancare del divisato effetto, tuttavia mi parrebbe ben fatto (ciò che però non è precisamente possibile) che la ruota R (*Fig.* 1.), invece di cangiar quell'angolo d'inclinazione verticale, che fa col piano orizzontale, cioè l'angolo MRC, stasse piuttosto del tutto verticale a detto piano, qualunque fosse l'apertura RMC. Onde volendo che, per quanto meccanicamente è permesso, l'Istromento supplisca anche a ciò, dovrà esser concepito di maniera che (sia sopra una superficie *piana*, sia sopra una *convessa*) la ruota sempre appunto si mantenga verticale a detta superficie.

Per

Per la *superficie piana* potrebbesi ideare l'Istromento come nella *Fg.* 3., facendo che un regolo RH si unisse nel sito inferiore all'estremità R di una verghetta MR mobile d'intorno al punto M dell'asta CH; e nel sito superiore ricevesse in una fessura l'estremità H di detta asta CH. Perchè per le dottrine altrove (1) esposte, quando MC, MH, MR saranno eguali, muovendo l'Istromento intorno al centro C, e qualunque apertura CMR acquistando sempre il punto H, caderà perpendicolarmente sul punto R; e però il regolo RH sarà sempre verticale al piano RC; e conseguentemente anche la ruota, che per mezzo della cannetta, e vite V devesi connettere col suo pivolo parallelo a detto regolo RH, procurando che la sola ruota, e non già il regolo RH giunga a toccare il piano della carta.

Nel caso poi della *superficie sferica* RP (*Fig.* 4.) fermisi la ruota R con la vite ad un gambo R*d*, che sia parte d'un parallelogrammo, snodato, e composto di quattro regoli, delli quali li R*d*, RM, *dq* siano eguali al semidiametro del dato globo; e il regolo P*q* eguale a tutto detto diametro PA. Imperciocchè avverà, che quando con il regolo *q*P fatto centro in P, e la mano posta in M si faccia muover in giro l'Istromento, qualunque sito R i denti della ruota acquistaranno rispetto al Polo P, nulladimeno il piano del gambo *d*R parallelo al piano di essa ruota, si conserverà sempre verticale a detto globo, e prodotto passerà per mezzo del suo centro. Il che è evidente, perchè dai punti P, ed R condotti al centro C i raggi RC, PC; essendo CR, RM, MP, PC per la costruzione eguali, le rette CR, PM saranno parallele; ma PM è per la costruzione parallela anche a *d*R. Dunque giacchè ambidue *d*R, RC sono parallele ad una medesima retta MP, sono anche poste indiretto verso il centro C.

(1) Istrom. IX. Part. III. Artic. II.

Val a dire che *d*R non inclinerà verso A, o verso P punti presi su quel medesimo meridiano, che passa per i due punti P ad R. Quindi quel diametro della ruota, che passa per il punto di contatto R, sarà per ogni verso verticale alla superficie del detto globo, e per conseguenza prodotto passerà sempre per il suo centro C.

Per altro l'Istromento della *Fig.* 3. può servire anche a quello della 4. con l'aggiunta d'un solo regolo *qd*. Ma ciò che manca nell' una, e nell' altra costruzione è, che l'estremità R del regolo MR, e il margine della ruota non ponno, come dovrebbesi, e come abbiamo detto pure in principio, giungere a toccare esattamente nel medesimo piano.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica de' Poligoni rettilinei regolari.

QUantunque la *Penna Geometrica* supplisca, siccome abbiam accennato, facilmente a quest' uopo, non ostante perchè questo Istromento meno importa di spesa, ed è sì nell' uso, che nella costruzione più spedito, sembrami perciò preferibile a quella. E' dunque da considerare in questa organica descrizione de' Poligoni, che ella si potrebbe concepire in due differenti, ed egualmente facili maniere; cioè o supponendo costante un medesimo circolo che debba circoscriversi a' detti Poligoni, e modificando la lunghezza de' lati far sì, che un medesimo circolo venisse a circoscrivere diversi di detti Poligoni: o tenendo fermo, e costante un medesimo lato, modificando il circolo circoscrivente, far che un medesimo lato divenghi lato di diversi Poligoni. Un esempio del primo caso sarebbe, se fosse descritto un circolo per i punti *a*, *c*, *d* della *Fig.* 2. *Tav.* 18., perchè detto medesimo circolo verrebbe circoscritto ad un Pentagono di cui sarebbe lato *ad*, ed insieme da un decagono di cui sarebbero *ac*, *cd* due lati.

La

La medesima figura somministra un esempio anche del secondo caso, in cui *qd* lato di un Pentagono descritto nel circolo *abQ*, sarebbe anche lato di un decagono descritto in un circolo, di cui fosse *a* il centro, e raggio la retta *ad*. Queste cose sono evidenti, ed è superfluo il trattenervisi di più, e lasciando per ora di produrre un Istromento relativo al primo caso, applicarò solo al secondo il presente Istromento della *Loxodromia*.

Laonde suppongasi primieramente, che nell'area della ruota R (*Fig.* 1. *Tav.* 23.) sia dal centro verso alla periferia R scolpita una cavità, in cui, come in quella delle penne de' compassi, messovi dell'inchiostro, possa detta ruota lasciare per ogni sua rivoluzione segnato un punto sul piano della carta, secondo sia il compasso correduto di un quadrante NQ fisso al piede CM in Q, e labile nell'altro piede MR, se non si stringe con la vite, terzo si fermi con la vitarella V la cannetta, che porta la ruota R, qualora il piano di essa ruota sia ad angoli retti del raggio CR.

Ora poichè le periferie sono come i diametri, suppoponendo che il raggio della ruota R fosse al raggio CR, come 1 a 3, la periferia della ruota sarebbe alla periferia del circolo descritto sul raggio CR, come 1 a 3. Sicchè (relativamente al già detto anche in proposito (1) delle Cicloidi di base circolare) farebbe la ruota R tre rivoluzioni, mentre una ne facesse il raggio CR intorno a C; e quindi sulla periferia generata da detto raggio CR, verrebbero marcati tre punti, i quali fornirebbero un triangolo, quando fossero uniti con altrettante rette. Perciò quando il raggio della ruota è al raggio CR precisamente come 1 a 3, facciasi sul piano laterale del quadrante NQ un segno, con insieme affisso il numero 3., nel punto in cui la gamba MR, stante tale apertura, traversa detto quadrante. Indi aprendo l'Istromento finchè il raggio della ruota sia al

(1) Istròm. IX. Part. III. Artic. IX.

raggio CR, come 1 a 4, s'incida poi ſu detto piano un altro ſegno con il numero 4 anneſſo ec., finchè per qualunque altra diviſione ſi giunga a ſegnare ſu detto quadrante il ſegno corriſpondente alla proporzione di 1 a 5, di 1 a 6, di 1 a 7, di 1 a 8, fin'a quella di 1 a 12, e più ancora ſe piaceſſe di portar l'affare anche più oltre.

Ora quando occorreſſe, per eſempio, la deſcrizione organica del Ettagono, apraſi da prima l'Iſtromento preparato così con la maggiore eſattezza, ſinchè la gamba MR arrivi, traverſando il quadrante, a collimare, e coincidere nel ſegno appuntino che accompagna il 7 numero ſcolpito, come ſopra, nel piano laterale del ſuddetto quadrante, ed ivi con la vite ſi arreſti; perchè facendo indi muovere in giro l'Iſtromento, la ruota R farà 7. rivoluzioni intanto che il compaſſo n'avrà compita una intorno al centro C; e quindi reſteranno ſul piano della carta ſegnati dalla ruota 7. punti diſtribuiti in eguali diſtanze ſulla periferia del circolo deſcritto con il raggio CR intorno a detto centro C; i quali uniti poi con altrettante rette verranno a fornire l'Ettagono propoſto.

E' ſuperfluo l'avvertire: Primo, che ſe dato foſſe qualunque altro Poligono da deſcriverſi, avrebbeſi ad aprire l'Iſtromento fino al numero corriſpondente a quel tal'altro Poligono dato. Secondo che volendo un dato Poligono, o più grande, o più piccolo, dopo ſegnati nel piano i punti del Poligono dato, e prima d'unirli con altrettante rette, baſta condurre de' raggi indefiniti dal centro C a detti punti, e fatto centro nel medeſimo C, tagliar detti raggi con un qual altro maggiore, o minore circolo che più piace; giacchè è evidente, che le rette congiungenti i nuovi punti d'interſezione ſarebbero tuttavia lati del medeſimo propoſto Poligono. Terzo ſi potrebbe penſare, e di leggiero riuſcire nella fabbrica di una tal ruota R, la quale laſciaſſe ſegno ſulla carta, quando di tutta la ſua periferia, e quando di un ſol punto, acciò la medeſima poteſſe agevolmente, e comodamente ſervire tanto per la deſcrizione della *Loxodromia*, quanto per quella de' Poligoni.

FINE DEGL' ISTROMENTI.