ca della *Cicloide*, conformandomi appunto al piacere del ſopra celebrato Autore per le ragioni addotte. Ma ſia per ora fatto fine a queſto ragionamento.

ISTROMENTO III.

PER LA LINEA QUADRATRICE.

E' Sempre ſtato, e credo che mai ſempre ſarà un arcano profondiſſimo della Geometria l'arte di dividere colla ſola riga, e compaſſo un angolo qualunque in tante date parti, e ſpecialmente in tre; così pure la maniera di quadrare l'area di un circolo dato. Perciò ſin da più alti ſecoli ſi è inveſtigata la ragione, che paſſa tra il raggio e la periferia, come quella che avrebbe potuto condurci allo ſcoprimento dell'uno e dell'altro miſtero. Dinoſtrato fiſſando l'animo a queſto doppio ſcopo inventò la ſua linea *Quadratrice*, la quale ſe ſi poteſſe deſcrivere geometricamente, manifeſtando la ſuddetta ragione, ſciorrebbe li due (1) celebri problemi; ma

C non

(1) Per moſtrare come queſta curva ſoddisfi alla prima intenzione dell'Autore, che è la triſezione dell'angolo, ſupponiamo per eſempio (*Fig.* 3. *Tav.* 2.), che ſia propoſto l'angolo MCD da dividere in tre parti date. Onde dal punto S, in cui il raggio CD s'interſeca con la curva MSBH (che già ſi vuol ſupporre deſcritta) ſia condotta una SP perpendicolare al lato MC. Di poi ſi divida geometricamente, come far ſi può, la retta MP nelle tre date parti, dalle quali tirate altrettante parallele a PS, per li punti, dove queſte tagliano la curva, ſi menino tre raggi dal centro C, li quali divideranno l'angolo MCD nelle tre parti date.

Circa poi al ſecondo progetto, che è la quadratura del circolo, quando geometricamente ſi deſſe, come in vero non ſi dà, la preciſa ſituazione del punto eſtremo H; e che CH *baſe*, come ſi dice della *Quadratrice*, foſſe rigoroſamente data, moſtrando Apollonio, ed il P. Milliet (*Lib.* 2. *De Indiviſ. pro.* 4. *de Quadratrice linea*) che ∺ CH. CQ. QM circonferenza del quadrante, dati i primi termini CH, CQ, ſi conſeguirebbe anche il terzo QM. Onde poichè ſi ſa, che l'area d'un circolo è eguale ad un triangolo, di cui ſia baſe la circonferenza, ed altezza il raggio; ovvero eguale ad un rettangolo, del quale un lato ſia detta circonferenza, e l'altro lato la metà del raggio, l'area di un quadrato eretto ſopra una retta media proporzionale tra la circonferenza data per mezzo della *Quadratrice*, ed il raggio, ſarebbe eguale all'intiera area del circolo dato.

non potendosi ciò così conseguire, tenteremo almeno di delinearla per mezzo d'un Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Quadratrice, e sua descrizione per punti.

PEr dare ad intendere l'origine di questa curva, descritto prima il quadrante MCQ (*Fig.* 4. *Tav.* 2.) figuriamci che il semidiametro MZ conservandosi sempre ad angoli retti del lato MC si porti con un moto equabile verso il lato CQ, ed ivi giunga a coincidere nello stesso tempo, che vi perviene, anche il raggio CM, il quale ruotando equabilmente intorno al centro C, scorre tutti i punti DFQ di detto quadrante. Imperocchè allora tutti i punti d'intersezione del lato MZ col ruotante raggio CM presi insieme forniranno una curva MSBH, che è la *Quadratrice* di Dinostrato, ma in rigore mancante dell'ultimo punto H, il quale, ivi non seguendo più intersezione, si perde.

Si manifesta questa tale origine anche dalla descrizione per punti della medesima curva. Imperocchè diviso prima il lato CM in quante più si può parti eguali MP, PG, GC ec., e l'arco MDFQ in altrettante, conducendo poi ad angoli retti del lato CM le ordinate MZ, PS, GB ec. ed alla circonferenza li raggi CM, CD, CF, li punti d'intersezione MSB ec. saranno elementi della *Quadratrice*, che intraprendo ora a descrivere col seguente Istromento.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Quadratice.

IL P. Milliet (1) si lusinga, che la descrizione organica di questa curva sia facile, ma la prova mi fa accorto del contrario. Non ostante qualunque siasi, propongo la presente, e m'immagino che KAEN sia (*Fig.* 5. *Tav.* 2.) un telaro, di cui nel lato NE scorra la guida ZO connessa ad angoli retti col fesso regolo *o*P. D'intorno poi ad un pivolo C fisso nel lato AK movasi un quadrante C*ax*, di cui il raggio *x*C prolungato sia verso D, e fesso esso pure in una parte di sua lunghezza, e corredato di una guida S fermata ad uno stilo, il quale passando per le fessure del raggio *x*C prolungato, e del regolo *o*P, discenda sul piano a descrivere la curva.

Sia inoltre alla guida ZO attaccato un filo o catenella, la quale piegandosi indi d'intorno alla carrucola E vada per fine a congiungersi col quadrante suddetto nel punto *x*. Si rilevi poi la circonferenza del quadrante *ax* col farlo girare da Q verso Z, come per descrivere un quarto di *Cicloide*; e si rimova il punto O da Q verso Z uno spazio QZ eguale alla suddetta circonferenza *ax*. Cosicchè in principio di moto PO coincida con MZ; il lato *x*CD del quadrante con CM; ed il lato *ca* con CQ; e la catenella sia in questa prima situazione tangente in *x*. Perchè poi con la mano posta nella sommità D fatto volgere da M il regolo CD a destra sino in Q, avverrà che giungendo CD a coincidere con CQ, pervenga C*a* nella direzione CM, e la catenella diventi tangente a detto quadrante in *a*. Essendosi tanta quantità di essa avvolta sulla circonferenza del quadrante, quanta si è ritirata da Z fino a Q; giacchè per la costruzione QZ=*ax*; e però anche il regolo P*o* verrà tirato nel medesimo tem-

 po,

(1) Lib. II. *De indivisib.* prop. 1. *Descriptio lineæ Quadraticis.*

po, mantenendoſi ſempre verticale ad MC ſino in CQ; e lo ſtilo S dalli due regoli CD, *o*P determinato alla deſcrizione della ſuddetta curva.

Queſto Meccaniſmo (accreſciuto di una correzione omeſſa a bella poſta, ma neceſſaria per non perdere (*Fig.* 4.) i primi punti della curva in M, nè gli ultimi in C di un' altra curva M*r*C) regge ſicuramente per conſeguire una ſola *Quadratrice*, di cui il lato ZQ, cioè MC ſia eguale (*Fig.* 5.) ad *ax* circonferenza coſtante del quadrante. Ma per ſoddisfare intieramente al Problema, e molto più perchè queſta curva entrarebbe nel numero delle curve utili, ſarebbe ſtato meſtieri, che, potendo modificare a piacere la circonferenza del quadrante *ax*, l'Iſtromento deſcriveſſe una *Quadratrice* di un lato MC qualunque dato; il che non è così facile, come pare al P. Milliet. Tuttavia ſe ſi ſupponeſſe che il quadrante C*ax* fuſſe la baſe di un quarto di cono, di cui il vertice andaſſe perpendicolarmente a cadere nel centro C, ſi potrebbero ſulla ſua ſuperficie prendere anche quadranti di diverſe grandezze; ordinando poi le parti dell'Iſtromento in modo, che la carrucola E, ed il punto d'attacco *o* ſi poteſſero portare a livello delle differenti altezze de' quadranti preſi d'intorno alla ſuperficie del cono eretto ſu detta baſe C*ax*.

Un' oppoſizione ancora potrebbeſi fare a queſta macchinetta, ed è, che ſi prende la ZQ eguale al perimetro *ax* del quadrante, che ſi mette in uſo; dunque nella coſtruzione di queſto Iſtromento ſi ſuppone quel che ſi cerca col beneficio della curva da deſcriverſi. A che riſponderei, che ſi cerca nell' atto di coſtruire l' Iſtromento, come nell' atto di fabbricare un compaſſo di proporzione ſi cercano le ſue diviſioni; ma quando ſi vuole adoperarlo, ſenza altro tentare non ſi ha che portare il punto *o* nel Z già determinato.

A dir vero però io era per queſta oppoſizione in procinto di rigettare l' Iſtromento, come non ſoddisfacente al Problema in modo perfetto. Ma nonostante dappoi un nuovo animo mi suggerì di pubblicarlo, avvisando cosa onde si scemi in parte l'opposizione suddetta, e porgasi al leggitore di che pascere l'avida sua mente con nuova scoperta. Trovo adunque (*Fig.* 4. *e* 5.) che la ragione di ZQ comparato ad ax si riduce a tre casi: cioè ZQ eguale ad ax; ZQ maggiore di ax; ZQ minore di ax. Quando $ZQ = ax$, il raggio percorre la periferia di tutto il quadrante MDFQ, mentre l'ordinata scorre per tutti i punti del lato MC, e nasce la MSBH *Quadratrice* di Dinostrato, che ha per base CH. Quando $ZQ > ax$, mentre il raggio CM percorrerebbe tutto il quadrante NDFQ, l'ordinata compisce per esempio $\frac{2}{3}$ soli del lato MC, e nasce la curva MmF, la quale non può mai giungere a toccare il lato CQ, appunto perchè, non compiendo l'ordinata tutti tre i terzi del lato MC, non arriva nemmeno essa a coincidere con CQ; ma più che sarà maggiore lo spazio percorso da detta ordinata su detto lato MC, la piegatura della curva in F si farà maggiore e più vicina al punto H, dove così a poco a poco disponendosi, anderà a cadere, quando detta ordinata percorra tutto il detto lato MC, e la curva si trasformarà nella *Quadratrice* MSBH, mentre svanisce una parte di se confondendosi con la porzione HQ del lato CQ. Quando $ZQ < ax$, allora mentre il raggio CM percorre per esempio $\frac{2}{3}$ soli del quadrante MDFQ, l'ordinata compie intanto tutto lo spazio MC, e giunge a coincidere con CQ, e quindi deriva la curva MrC, la quale sempre tiene un' estremità nel centro C, e con una piegatura tanto più vicina al punto H, quant' è maggiore l'angolo MCF, si dispone a rimanere finalmente in H, trasformandosi essa pure nella *Quadratrice* suddetta MSBH, mentre svanisce una parte di se, perchè si combina, e si confonde colla porzione CG del medesimo lato CQ.

Ora

Ora questi due ultimi casi soggetti alla macchinetta sono casi particolari di un altro, che comprende anche quello della *Quadratrice* di Dinostrato, ed altri nove ancora, come qui appresso osservaremo, e che potrebbe in termini generali esser esposto così: Descrivere una curva formata dai punti d'intersezione del raggio CM moventesi equabilmente in un quadrante MDFQ intorno al centro C, e dell' ordinata MZ pure moventesi nel medesimo quadrante equabilmente, e sempre verticale ad alcuno dei quattro lati di esso quadrante. Quindi nel caso che tanto l'ordinata MZ, quanto il raggio CM si avvanzino verso la medesima metà CQ, si ponno immaginare, secondo la ragione delli spazj rispettivi percorsi equabilmante, moltissime curve; tutte però simili ad una delle tre MSBH, M*m*F, M*r*C, per mezzo delle quali si potrà sempre dividere in parti date un angolo dato, che non sia però maggior di quello, a cui sono opposte. La curva per esempio MSBH è opposta all'angolo retto MCH, e perciò vale a dividere in parti date qualunque angolo, che non sia maggiore di un retto. La Curva M*m*F ed anche la curva M*r*C essendo per supposizione opposte al medesimo angolo MCF vagliono a poter dividere in parti date un angolo, che non sia maggior del detto angolo MCF. In fatti supponiamo che sia proposto l'angolo MCF da dividere in due date parti per mezzo di ciascheduna delle tre curve suddette. Onde volendo primieramente adoprare la curva MSBH, si conduca dal punto B d' intersezione di detta curva, e del raggio CBF, che determina l'angolo MCF, si conduca, dissi, BG ad angoli retti del lato CM, indi dalla metà di GM si meni la perpendicolare PS, che il raggio CD condotto per S dividerà l' angolo MCF nelle due date parti. Secondo, così volendo far uso della curva M*m*F, tirata F*b* perpendicolare al lato MC, e dalla metà di *b*M condotta la verticale *dm*, avverrà che il medesimo raggio CD condotto per *m* dividerà l'angolo MCF in due date parti. Terzo, presa pure

alle

alle mani la curva M*r*C, e dalla metà del lato CM condotta la perpendicolare *yr*, ancor qui l'iſteſſo raggio C*b*, che paſſa per *r*, dividerà l'angolo propoſto MCF in due parti date. Onde tutti i punti d'interſezione S, *m*, *r* dell'ordinate PS, *dm*, *yr* col perimetro delle curve corriſpondenti MSBH, M*m*F, M*r*C cadono nel medeſimo raggio CD, e il dato angolo MCF viene diviſo nelle due date parti per mezzo di qualunque delle tre curve propoſte.

Non ſo veramente ſe queſte due ultime curve abbiano una proprietà ſimile a quella, che tanto brilla nella *Quadratrice* di Dinoſtrato, cioè ſe, ſiccome in detta *Quadratrice* è ∺ CH. CQ. QM, così in quelle ſi poſſano fiſſare tre termini continui proporzionali, l'ultimo de' quali ſia una porzione della periferia di un circolo; ma io credo di no, perchè nella *Quadratrice* un termine della proporzione è la baſe CH, e abbiamo già oſſervato, che la curva M*m*F non ha baſe, perchè non giunge mai a toccare il lato CQ, così M*r*C non ha baſe, perchè va ſempre a reſtringerſi nel centro C. Nonoſtante io concludo in favore del mio Iſtromento, che quand'anche le curve nate dal non eſſere QZ eguale ad *ax* non ſerviſſero a rilevare la circonferenza del quadrante MDFQ per quindi definire la quadratura del circolo, almeno però ſoddisfano alla triſezione dell'angolo, che fu uno dei progetti, cui Dinoſtrato preteſe di applicar la ſua celebre *Quadratrice*.

Finora, ſuppoſto il raggio CM ruotante da CM verſo CQ, mentre l'ordinata MZ ſi avanza verſo la medeſima metà CQ, abbiam diſtinti tre caſi; ma tre ſimili caſi ſi ponno immaginare nel caſo che (ſempre ruotando il raggio CM da CM verſo CQ) l'ordinata andaſſe da CQ verſo MZ; tre altri quando detta ordinata progrediſſe da CM verſo QZ; tre caſi pure quando detta ordinata partiſſe da QZ verſo CM; onde dodici curve riſultano corriſpondenti a queſti dodici caſi tutti compreſi nel caſo generale ſovra enunciato.

Di tutte queste curve almeno sei sono descritte per mezzo della mia macchinetta. Imperocchè primieramente si è visto come si faccia uso di essa nel caso che ruotando il raggio CD (che fa per tutti i raggi) da CM verso CQ, l'ordinata poi (cioè il regolo P*o*, che fa per tutte le ordinate) proceda da MZ verso CQ. Ma quando detto regolo dovesse moversi da CQ verso MZ, la catenella passata su la carrucola E facciasi passare anche sopra un' altra carrucola N prima di fermarla a detto regolo P*o*; perchè allora mentre il raggio CD da CM girerà verso CQ, il regolo P*o* da CQ procederà verso MZ. Se poi la guida *o*Z col regolo P*o* annesso si trasporti nel lato del telaro KN, e la catenella passi sopra le due carrucole E, N; allora esso regolo movendo il raggio CD da CM verso CQ, si avanzerà da CM verso QZ. Se finalmente la catenella passerà sopra tutte tre le carrucole E, N, K, prima di essere attaccata al regolo PO, che si suppone ora scorrente nel lato KN, dico che procedendo il raggio CD tuttavia da CM verso CQ, il regolo si moverà da QZ verso CM.

Pare che queste curve, essendo ambedue i mobili generatori affetti di moto equabile, siano per avere fra esse un qualche comune rapporto, e ben sarebbe stato l'indagare le proprietà di ciascuna. Ma io lascio per ora da parte tali ricerche aliene in certo modo dal mio soggetto, acciocchè se gli aggrada, ne vadino in traccia quelli, che sono in materia d'ozio e in valore d'ingegno più di me felici.

Sarebbe qui il luogo ove riporre l'accennata *Spirale* d'Archimede, come quella che è nel numero delle curve antiche; ma si trova (1) altrove esposta per essere compresa negli usi di un altro Istromento.

ISTRO-

(1) Istromento IX. P. II. Artic. X.