ISTROMENTO VII.

PER LE OVALI DI CARTESIO APPLICATE ALLE REFRAZIONI.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione organica di dette Ovali.

PAre in certo modo, che mal si convenga il nome d'Istromento ad un filo, che solo (1) adopera nella descrizione delle Curve proposte; ma io stimo all'opposto, che tanto più le stia bene, quanto n'è più spedito l'uso, e più esatto ne risulta l'effetto. Se dunque si concepisce, che (*Fig.* 7. *Tav.* 8.) appunto un filo sia con una estremità legato ad un pivolo P fitto nel piano, e quindi condotto verso un altro pivolo F pure fitto nel piano, vi s'avvolga d'intorno, e poi in M, ovvero *m* vada a finire, dove abbia connesso uno stilo mobile così, che mentre tenuto ben teso, e con la mano guidato urta nella porzione di detto filo PF, il filo sul pivolo F sdrucciolando, tanto (*Fig.* 1, 2, 3) l'esteriore porzione PMF si aumenti, quanto scema l'interiore FM; lo stilo M tendendo verso B descriverà una Curva AMB di un tal genete, che principalmente abbraccia, oltre le *sezioni coniche*, ed altre Curve, anche le *Ovali Cartesiane*; e di cui al fine del seguente Articolo con due lettere scrittemi a questo proposito dal Chiarissimo P. Ruggiero Boscovich si darà una notizia minuta più, che non contiene il mio Testo. Per altro questa costruzione è tanto semplice, che si può ben credere, che io sia per averne fatte mille prove.

(1) Il mio metodo di descrivere codeste Ovali ha questo particolare vantaggio sopra quello del Cartesio, che per il mio basta un semplice filo, dove che egli adopera nel suo un filo applicato ad un rególo, e però la costruzione risulta più composta.

ARTICOLO SECONDO.

Per quai modi variando queste Curve diventino le Ovali Cartesiane.

Essendo pertanto (*Fig.* 1, 2, 3. *Tav.* 8.) semplice il filo in PM, e raddoppiato in MF, la essenziale proprietà della Curva sarà, che condotte dai due fochi P, F a qualunque suo punto M due rette PM, FM, l'aggregato della prima insieme col doppio dell'altra sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo. E però presa col compasso detta lunghezza, e fatto centro in P (*Figure suddette*) si descriva il circolo DHC, cui in H occorra la prodotta PM. Ora sarà MH doppia della retta MF; sarà questo caso particolare di un altro più generale, in cui sia FM ad MH in qualunque data ragione; e la periferia CHD sarà la direttrice, sulla quale dal raggio PH vien condotto il punto H. Onde se fosse il circolo infinito, la periferia direttrice diventarebbe una retta, ed avrebbero quì luogo anche le *sezioni coniche*. Ma quantunque il filo non si possa comporre ad una direttrice retta: non ostante anche nel solo supposto della direttrice circolare possono variare queste Curve assaissimo in due maniere.

Primieramente se, mantenendosi la ragion data da PM ad MF (cioè nel caso nostro di 1 a 2, perchè il filo in PM è semplice, e raddoppiato in MF) si muti la sola posizione del foco F rispetto al foco P, cosicchè accada, che la porzione del filo FM sia ora maggiore della distanza de' fochi PF, la quantità P*m* (*Fig.* 7. *e* 1. *Tav.* 8.); ora minore la quantità PM (*Fig.* 7. *e* 3.); ora eguale (*Fig.* 7. *e* 2.); e nei due primi casi, principalmente quando sia piuttosto piccola la differenza (*Fig.* 7.) di FP ad F*m*, ovvero M, verranno descritte bellissime sezioni di un Uovo da me già promesse nel luo-

luogo delle Concoidi. Nel terzo caso poi, cioè quando (*Fig.* 7.) la porzione FM sia eguale alla porzione FP risulta appunto una *Concoide di base circolare* BMP (*Fig.* 2. *Tav.* 9.) di cui la base è PXZ; le intercette sono ZB, XM ec. al diraggio BZ eguali, ed il polo P è situato nella periferia dirrettrice, e questa *Concoide* è dal Sig. di Roberual chiamata: *Le Limaçon di M.r Pascual*. Curva soggetta all'Istromento delle Concoidi.

Secondariamente, lasciando ferma la posizione dei fochi F, e P, variano queste curve per lo variar della ragione di PM ad MF; onde potendosi il filo ordinare a molte ragioni, che siano però di numero a numero, si estende la sua operazione anche alle *Ovali di Cartesio*, perchè, confrontando con queste le applicate da lui alla Diottrica e Catottrica, si intende, che, acciò i raggi partiti da un dato punto P vadono ad unirsi nel punto F, dopo la rifrazione nella superficie generata da una Curva che si cerca, non si hà che a raddoppiare tante volte il filo in MF, quanto esprime il numero del seno dato d'incidenza, ed in MP quanto esprime il numero del dato seno di rifrazione. Onde acciò i raggi per esempio dal luminoso punto P diffusi, e dall'aria in una superficie di vetro rifratti, si raccolgano nel punto dato F, la superficie di vetro dovrà esser generata da una Curva, la quale (perchè nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di rifrazione è come 3 a 2) allora si descriverà quando, come nella *Fig.* 4. *T.* 8., il filo in FM*i* sarà triplicato, e duplicato in M*i*P.

Lettera 16. Marzo 1748. ſcrittami dal Chiariſs. P. Ruggiero Boſcovich della Compagnia di Gesù in propoſito delle *Ovali Carteſiane*.

PROBLEMA.

Due eſtremità di un filo (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) *ſieno fiſſe una in* P *ſul piano della carta, e l'altra ſullo ſtilo mobile* M, *in modo che lo ſteſſo filo più lungo ſi avvolga intorno allo ſteſſo ſtilo* M *e paſſi fino a un pivoletto pur fiſſato nella carta in un punto* F, *intorno a cui ſi avvolga, tornando allo ſtilo* M. *Girato ora lo ſtilo* M *in modo, che ſempre tenga teſo il filo, ſi cerca la natura della Curva che deſcriverà.*

Il filo in PM *ſarà ſemplice, ed in* MF *raddoppiato. Onde la proprietà eſſenziale della Curva ſarà, che da due fochi* P, F *menate a qualunque ſuo punto* M *due rette, la ſomma della prima inſieme col doppio della ſeconda ſia eguale ad una lunghezza coſtante, cioè alla lunghezza del filo.*

Fatto centro in P *coll'apertura della lunghezza del filo ſia il circolo* DHC, *che incontri in* D, C *la retta menata per* PF, *e prodotta la* PM *fino al medeſimo circolo in* H, *dovrà eſſere* MH *il doppio di* MF. *Quindi ſi vede che queſta Curva è un caſo particolare di un altro aſſai più generale, in cui ſia* FM *ad* MH *in data ragione. Si potrà queſto caſo generale eſprimer anche così: Dato un punto* F *comunque, e un cerchio* DHC *qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque ſuo punto* M *una retta* MF, *al dato punto* F, *e un'altra* MH *perpendicolare alla periferia del dato circolo, ſia la prima alla ſeconda in data ragione.*

In queſt'aria ſi vede ſubito la relazione, che queſte Curve hanno colle ſezioni Coniche. Nelle ſezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, ſia la prima alla

ſe-

seconda in data ragione, la quale se sia ragione di minore diseguaglianza si avrà l' Elisse *, se di eguaglianza si avrà la* Parabola*, se di maggiore diseguaglianza si avrà l'* Iperbola. *Sicchè queste Curve differiscono dalle sezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle si avvolge in un circolo, quelle si mutano in queste, e all'opposto se il circolo di queste diviene una retta, queste divengono sezioni Coniche. Anzi di più si vede, che le sezioni Coniche sono un caso particolare di queste Curve più generali. Basta in queste far, che il centro* P *vada all'infinito, e questo caso particolare dà subito le sezioni Coniche; ed è cosa graziosa il vedere come in questo modo anche l'* Elisse *è una di queste Curve, la quale buttandosi il circolo in una retta divien* Parabola. *Se la ragion data sia d'eguaglianza sarà* FM *eguale ad* MH *e però la somma di* PM, MF *eguale alla* Costante PH *e la Curva verrà* Elisse. *Se il circolo diviene una retta, va il centro* P *all'infinito, e l'* Elisse *si muta in* Parabola. *Onde l'* Elisse *si muta in* Parabola*, e la* Parabola *in* Elisse *anche col solo considerare, che la direttrice divenga retta dall'essere circolare, o si avvolga in circolo dall'esser retta.*

Di qui si vede, che il trattare di queste Curve porta assai più che il trattare delle sezioni Coniche, essendovi dentro tutte quelle in un sol caso particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d'innumerabili ricerche, e si vede quanto è limitata la nostra mente, quanto povera e ceca la nostra Geometria. Cosa poi sarebbe, se per direttrice si pigliasse qualunque altra Curva? Quanto più crescerebbe il numero delle Curve, e quanto più fecondo sarebbe il caso? e se qualunque funzione di MF *a qualunque di* MH *dovesse assere un qualunque rapporto esposto comunque, quanto più in là si andarebbe?*

Io qui solo mi restringerò a darne la costruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l'equazione *ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.*

Si prenda PE *a* PC *nella data ragione, e col centro* P *coll' apertura* PE *si faccia un circolo, che incontri la* DC *in* G, E. *Da qualunque punto* H *del circolo* DHC *pel centro* P *si tiri una retta indefinita, e un' altra pel punto* F. *Se questa seconda incontra il circolo* GE *in qualche punto* I, i, *si tirino le due rette* PI, Pi; *indi da* F *due parallele* FM, Fm *alle medesime, e se queste incontreranno la* HP *in* M, m, *saranno i due punti* M, m *alla Curva cercata. Imperocchè sarà* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *cioè come* PE *a* PC *in ragion data, e la stessa è la dimostrazione per* m.

E' chiaro, che rispetto al punto H *non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere* PE *a* PC, *come* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *ed essendo* PH *eguale a* PC, *sarà* PI *eguale a* PE, *e però* I *nel circolo descritto col raggio* PE. *Onde se si concepirà girare la* PH *intorno a* P, *descrivendo* H *tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti* M, m *descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta* HF *incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto* H *non vi potranno essere più di due intercezioni della retta* HP *sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dall parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest' altra estremità. Che se la retta* HF *sarà tangente del circolo* GIE *concorrendo i due punti* I, i *in un solo; sarà ancora la* HP *tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto* F *non sia dentro al circolo* GIE, *come nelle* Figure 2. e 3., *e se la retta* HF *non incontrerà il circolo* GIE, *nella retta* HP *non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto* H.

Dall' essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC *affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva*

in

in due parti eguali e simili, e sarà un asse, il quale incontrerà la Curva ne' punti AB, ab *dati. Mentre deve essere* FB *a* BC, FA *ad* AD, Fb *a* bc, *e* Fa *ad* aC, *come* FE *ad* FC *in ragione data.*

Ora in due maniere principalmente si possono variare queste Curve: Prima, mantenendosi la ragion data di PE *a* PC, *e variandosi la posizione del punto* F *rispetto al circolo* GIE, *ed essendo or dentro detto circolo, come nella* Fig. 1., *or nella periferia, come nella seconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La seconda variandosi la ragion stessa.*

Le prime variazioni sono delineate nelle 3. figure colla ragion di uno a due. Qualunque sia la ragione, nel primo caso sempre la retta HF *incontrerà il circolo* GIE *in due punti. Onde sempre si trovaranno due punti* M, m. *Anzi perchè i due punti* I, i *giaceranno di qua e di là da* F, *anche i due* M, m *giaceranno di qua e di là da* P; *e però uno de' due, come* M *verso* H, *e l'altro come* m *dalla parte opposta. Quindi la somma di* PM *e di* MH, *che alla* MF *sta in data ragione, sarà eguale alla costante* PH, *ma delle* Pm, mH *lo sarà solamente la differenza; o pur anche la somma, se la* Pm, *che va verso la parte opposta di* PM, *si consideri, come negativa; giacchè la somma di un negativo porta sottrazione. Quindi nel girare la* PH, *e il punto* H, *i punti* M, m *descrivono due perimetri di Curva, ciascun de' quali, dopo l'intero giro di* H, *torna a se stesso: ma il solo descritto da* M *sarà quello, che descriverà lo stilo nel caso proposto.*

Solo nel caso che la ragion data sia ragione d'egualità, il punto i *va in* H, *e diventando* FM, HP *parallele, il punto* m *va all'infinito, e non vi è più: onde nel caso che la Curva descritta dal punto* M *diventi* Elisse *Conica, il ramo compagno descritto dal punto* m *va in infinito e non vi è più: e nel caso in cui il punto* F *vada in* P, *rimane data tanto la ragione di* PM *ad* MH, *quanto la ragione di* Pm *ad* mH, *giacchè rimangono le* FM, Fm *eguali alle*

PM, Pm. *Quindi rimangono date le* PM, Pm, *e i due rami divengono due circoli: e simili trasformazioni varie vi sono ne' casi seguenti ancora.*

Nel secondo caso in cui il punto F *cade in* E *nella circonferenza del secondo circolo, tirate le* HP, HF, *la seconda incontrerà il circolo in* F, *e in* I *generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà sempre in* P, *e vi sarà generalmente un altro* M. *Se per* F *si tiri* VFu *perpendicolare all' asse. Questa sarà tangente del circolo* GIF, *e però tanto* VP, *quanto* uP *saranno tangenti della Curva in* P; *talmente che girando* H *da* C *fino ad* V, *girerà* I *per il semicircolo* GIE, *e il punto* M *descriverà un mezzo nodo* BMP, *quindi andando* H *in* h *per l'arco* VhD, *anderà* I *in* i *per il semicircolo* FIG, *e il punto* m *descriverà l'arco* bma, *e seguitando* h *per* Du *prima, indi per* uC, *si descriverà il resto* aPB, *scorrendo* l'I *il circolo un' altra volta. Così verrà una Curva che segherà se stessa in* P, *ed avrà un nodo, descrivendosi il nodo nel giro di* H *per* uCV, *e in un' intera revoluzione di* I *pel circolo* GIE, *e il resto nel giro di* h *per* VDu, *e in un altro giro di* i *per lo stesso circolo.*

Nel terzo caso tirate per F *le due tangenti* VZu, Nzn *al circolo* GIE; *tutti i punti* H2 *presi nell' arco* Vn, *che sta nello stesso angolo* VFn, *in cui il circolo* GIE, *serviranno per trovare due punti per ciascuno al ramo* A M2 m2 aA; *a tutti i punti presi nel* NHiu *serviranno per trovare due altri punti per uno al ramo* BMi mi b; *giacchè le rette da essi tirate per* F *sempre urteranno in due punti del circolo* GIE. *Per l'opposta ragione è manifesto, che i punti degli archi* NV, nu *non serviranno. Le rette poi* PN, Pu *toccheranno in qualche luogo in* X, *e in x il ramo* B Mi B, *e le rette* VP, nP *toccheranno in qualche luogo* S, s *il ramo* A M2 aA; *e coll' ajuto de' punti* VN, un, *e della soluzione generale si troveranno i contatti.*

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, *basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano* A, *e* B *segando* FD *ed* FC *in ragione di* AE *ad* AC, *sicchè il punto* B *starà da* F *verso* P, *e verso la parte contraria, secondo che il punto* F *starà fuori del circolo* DHC, *o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto* A *starà verso la parte contraria di* F *rispetto a* P, *o in* P, *o verso* F, *secondo che sarà il punto* F *dentro al circolo* GIE, *come nella* fig. 1.; *o nella sua circonferenza come nella* fig. 2.; *o fuora come nella* fig. 3. *Imperocchè essendo* FA *ad* AD, *come* PE *a* PD, *dovrà il punto* A *segare la* FD *in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di* FP *a* PD, *secondo che sarà* PE *maggiore, eguale, o minore di* PF, *e però giacere di là da* P, *in* P, *o più vicino a* F. *Pigliandosi* a *fuori della* FD *in modo, che sia* Fa *ad* aD *in ragione di* PE *a* PC, *se sarà* PE *minore di* PC *giacerà rispetto ad* F *dalla parte opposta di* P; *se sarà* PE *eguale a* PC, *andarà a all' infinito; se maggiore, dovrà cadere nella* FD *prodotta dalla parte di* D. *Dovendosi pigliare* b *in modo che stia fuori della* FC, *e sia* Fb *a* bc *nella stessa ragione; il punto* b *giacerà da* F *verso* P, *anderà all' infinito, ò caderà di-là da* C, *verso dove ora nella figura cade l'* a, *secondo che sarà parimente la* PE *minore, eguale, o maggiore della* PC; *e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da* P *rispetto ad* F, *in* P, *o verso* F, *secondo che la ragione di* Fb *a* bC *sarà maggiore, eguale, o minore della raggione di* FP *a* PC, *cioè secondo che la* PE, *sarà maggiore di* PF, *come lo è nel primo caso della* fig. 1.; *o eguale come nel secondo nella* fig. 2.; *o minore come nel terzo nella* fig. 3.

Quindi nella fig. 1. *stando fermi i due circoli, e stando* F *in* P, *i due rami sono circoli anch' essi. Camminando* F *verso* E, *si muta la loro forma, e i punti* bA, *si accostano a* P, *e fra loro; e i punti* B, a *se ne scostano, e si scostano fra di se; ma* B *si accosta ad* F, *ed a se ne scosta. Nell' atto che* *il punto F arriva in E si muta la figura prima nella seconda. I punti bA vanno in P; e i due rami formano una curva continua, che si sega, dove quei si attaccano; dovendo a tal fine nella fig. 1. in A crescere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in b rientrare la Curva in dentro con flesso contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per salto in A, e in b, devono fare da ambe le parti colla tangente lo stesso angolo, e aver la tangente comune, che essendo perpendicolare all' asse quando erano circoli, si deve esser mantenuta tale; onde in A, e in b deve sempre necessariamente essere la curva perpendicolare all' asse; ma per non finire per salto nella punta b, nel momento in cui già ivi l' arco di un ramo si continua coll' arco dell' altro, onde già fa l' angolo obliquo coll' altro arco suo, deve essere cresciuta la curvità nella fig. 1. nella punta A assotigliata verso b, e nella b assotigliata in dentro verso A per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che si fa nell' arrivare il punto F in E.*

Passando il punto F di là da E fuor del circolo, si stacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la fig. 2. va nella 3., ma il punto b già ha passato l' A, e non appartengono più i punti A, B al ramo istesso quantunque in A si seghi la FD, e in B la FC, come prima, in data ragione di PE a PC. Ma in quell' attacco della fig. 2. si sono cambiati i vertici, essendo passato b nel ramo di B, e A nel ramo di a; come appunto anche le due intersezioni M, m regolate dallo stesso punto H appartengono ambedue allo stesso ramo, dove nella fig. 1. appartenevano uno per ramo. Che se così camminando F arriva in C, si uniscono all' ora i punti FBC insieme, anzi annullandosi l' arco Nu, va in F in un punto tutto il ramo BMi mi bxB. Indi passando F più oltre, rimane ad ogni modo il B fra F, e C, e però F di là da B ancora passandolo, mentre passa C, ed entrando B nello spazio FP, all' opposto a C passa dove prima era B, e ogni punto M verso la parte con-

traria di prima, capovoltandosi tutto il ramo, nel quale in quel caso rimane ogni Mi, mi *fuori del circolo, e le* H Mi, H mi *negative; onde la differenza di* FM, MH *viene allora eguale al filo, e non ha luogo la descrizione della Curva coi fili. Vanno di poi crescendo amendue i rami, e coll' andare* F *all' infinito si perdono anch' essi nell' infinito.*

Tornando indietro F *verso* E *nella* fig. 3., *i punti* VN, un *si vanno accostando impiccolendosi gli archi inutili* VN, un; *finchè all' arrivo di* F *in* E *si riducono le* Vu, Nn *alla sola* VFu *della* fig. 2. *e rientrando* F *nel suo circolo nella* fig. 1. *ogni tangente menata per* P *svanisce; onde* 4. *rette menate dal centro* P *toccano le Curve nel caso terzo,* 2. *nel caso secondo, e niuna nel primo.*

Tenendo ora fermo il punto F *vada mutandosi il solo punto* E. *Se esso nella* fig. 3. *si unisce a* P, *amendue i rami vanno in un punto solo in* F, *perchè annullandosi la ragione di* Fm, *a* MN, *e stringendosi l' angolo* NFu, *e* nFV *all' infinito, si annulla ogni* FM1, FM2. *Camminando* E *verso* C *crescono amendue i rami, finchè arrivando* E *in* F *si uniscono nella* fig. 2. *Passando oltre il punto* E, *si va nella* fig. 1., *dove accostandosi* E *verso* C, *e andando la ragion data verso l' egualità; vanno le rette* PA, FB *accostandosi all' eguaglianza, e la forma del ramo* AMB *alla forma di un'* elisse. *E intanto i punti* ab, *e tutto il secondo ramo si scostano alle infinito. All' arrivo di* E *in* C, *diviene il raggio interiore una vera* elisse; *svanisce l' esteriore, nè vi è più. Che si il punto* E *va fuora di là da* C, *e la ragione diviene di maggiore diseguaglianza, i vertici* a, *e* b *mutano le parti andando* a *di là da* D, *e* b *di qua da* C, *con un capovoltarsi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto* m *va dalla parte di* H *nella* PH *prodotta. Andando innanzi* E *all' infinito, si scemano la* MH, *e la* mH *(che già si trova fuor del circolo dalla parte di* H) *all' infinito; e però amendue i rami si accostano all' infinito*

al

al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio CE *diviene infinito.*

Ma se queste mutazioni della ragione si facciano collo scemare il raggio PC, *succede lo stesso, cioè nell' accostarsi* C *ad* E *va il ramo esteriore in* elisse *nell' arrivo di* C *in* E. *Indi torna il ramo esteriore dall' infinito, ma capovoltato, e all' arrivo di* C *in* F, *va in* F *anche il* B; *e scemando sempre più il raggio* PC, *si scema il ramo* AMB, *e all' arrivo di* C *in* P *vanno in* P *i punti* AB, *e tutto il ramo tanto interiore, quanto esteriore; giacchè la ragione di* FM *ad* MH, *cioè in quel caso ad* MP, *e di* FM *ad* mH, *cioè ad* mP *dovrà essere infinita, e però le* PM, Pm *nulle.*

Ora è tempo di dar un' occhiata a una elegantissima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l' angolo MFR, *o* mFr *verso* H *eguale ad* FHM, *e si tiri per* M *la retta* SMT *perpendicolare alla* FR, *che sarà la tangente, e allo stesso modo* mts *perpendicolare alla* Fr.

Per dimostrar questo metodo, e non intrigar la figura si è cavata parte di essa fig. 1. *a fianco a man dritta. Sieno* MV *due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri* FP *sieno gli archetti* VX, VY, *che taglieranno la* MY *incremento della* PM *andata in* PV, *e decremento della* MH *andata in* Vh, *e la* MX *decremento della* FM *andata in* FV; *e per essere* FV *ad* Vh, *come* FM *ad* MH, *sarà anche levando proporzionali da proporzionali* MX *ad* MY *nella stessa ragione di* FM *ad* MH. *Ora gli archetti* VX, VY *scemando all' infinito, si potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette* FM, PM; *onde se inoltre si tiri* FT *perpendicolare alla retta* MV *prodotta, la quale incontri la* PM *in* R, *sarà il quadrilineo* FXVT *per gli angoli* X, *e* T *retti in un circolo, e il quadrilineo* RYVT *parimente in un circolo per gli angoli* T, *e* Y *retti. Quindi saranno i rettangoli* FMX, RMY *eguali ciascuno a* TMV, *e però anche fra loro; onde sarà* MR *ad* MF, *come* MX *ad* MY, *cioè*

come

come FM *ad* MH; *e però i triangoli* RMF, FMH *simili*, *e l'angolo* RFM *eguale all' angolo* FHM, *la qual cosa si verificarà accuratamente*, *quando i punti* V *ed* M *coincidano*, *e la* MT *divenga una tangente*. *La dimostrazione pel punto* m *è la stessa*.

Quindi si vede, *che anche non avendo il circolo* DHC, *ma la sola Curva*, *e quella ragion data*; *basta produrre* PM *in* R *in modo*, *che sia* MR *ad* MF *in quella ragion data*, *e tirata* FR, *menare una perpendicolare alla medesima*, *che sarà la tangente cercata*.

Si vede inoltre, *che in tutti que' vertici dell' asse*, *che non saranno in* P, *come lo è il vertice della attaccatura* Ab *della* fig. 2.: *sempre le tangenti saranno perpendicolari all' asse*. *Benchè sempre la* MR *caderà sull' asse*; *e però la* FR *coinciderà coll' asse*, *e converrà che la tangente sia perpendicolare all' asse medesimo*. *L' unico caso*, *in cui la dimostrazione generale non cammina è quando il punto* M *va in* P, *il che può accadere nella* fig. 2.; *perchè allora non andando il punto* M *fuori di* P *nell' asse*, *può la* PH, *e però la* FR *avere qualunque direzione*, *e conviene trovar quella*, *in cui* PM *svanisce andando* M *in* P, *il che accade quando l'* H *vada in* V, *o in* u, *dove anche con questo metodo si troverebbe la tangente*, *che già si è trovata di sopra essere la stessa* PV, Pu; *cosa che anche di qua facilmente si ricavarebbe*.

Finalmente si noti che, *se la ragion data fusse ragion di egualità*, *sarebbe il triangolo* FMR *isoscele*, *e la tangente segarebbe per mezzo l' angolo* FMR, *come accade nella* elisse conica.

Quando la ragione di FM *ad* MH *è di unità a numero*, *che sia* n, *come lo è nel caso de' fili*; *i punti* M *si trovano più facilmente così*. *Prese* (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD *eguali alla lunghezza del filo*, *divisa la* FC, *e la* FD *in parti* n + 1, *si piglino* FB, *ed* FA *verso* C, *e* D *eguali ad una*

di

di dette parti. Indi divise le stesse in parti $n-1$, *si piglino* Fb, Fa *verso le parti opposte eguali a una di esse: così si troveranno i vertici; mentre sarà* FB *a* BC, *e* FA *ad* AD, *come pure* Fb *a* bC, *ed* Fa *ad* aD, *come* 1 *ad* n. *Poi presa* FO *eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in* F *con qualunque apertura, che stia in mezzo tra la* FA, *e la* FB, *si faccia un arco di cerchio verso* M, *indi la medesima apertura si trasporti da* F *verso* O *numero di volte* n, *finchè si arrivi a qualche punto* Q; *si prenda* OQ, *e col centro in* P *con detta apertura* OQ *si faccia l' intersezione coll' arco di prima in* M, *e così si troveranno sempre due punti* M *di qua, e di là dell' asse molto accuratamente. Lo stesso si farà per li punti* m *pigliando le aperture* Fm *medie fra* Fb, Fa, *e arrivando in* q. *La dimostrazione è tanto facile che si vede da se.*

Passando ora a determinare l' equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) *perpendicolare all' asse si ponga* $PE=n$, $PC=m$, $PF=a$, $PL=x$, $LM=y$, $PM=\sqrt{xx+yy}=z$. *Sarà per la* 13. *del lib. II. di Euclide.*
$FMq.=FPq+PMq-2\,FP\times PL=aa+zz-2ax$. *Onde facendo come* $n.m :: FM=\sqrt{aa+zz-2ax}.\ MH=\frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *si avrà* $PM+MH=z+\frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}=PH=m$. *Quindi* $m-z=\frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *e però* $mm-2mz+zz=\frac{mmaa}{nn}+\frac{mmzz}{nn}-\frac{2mmax}{nn}$; *cioè ripulita questa equazione* $(mm-nn)\,zz-2mmax+2nnmz+mmaa-nnmm=0$. *In questa sostituendo per* zz *il suo valore* $xx+yy$, *trasponendo* $2nnmz$, *indi quadrando, e risostituendo per* zz *il valor suo, viene l' equazione per* x, *e* y, *che verrà di quarto grado. Onde si vede, che queste sono Curve di terzo ordine.*

Ma

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z. *Se sia* $m = n$, *svanisce* $(mm - nn)\,zz$, *e resta il tutto divisibile per* m, *rimanendo solo* $- 2max + 2nnz + m(aa - nn) = 0$. *D' onde si cava* $2mnz = m(nn - aa) + 2amx$, *e di qui, quadrando viene l' equazione all'* elisse, *dopo di avere sostituito per* zz *il suo valore* $xx + yy$.

Se sarà $a = n$, *che è il caso della* fig. 2., *svanirà l' ultimo termine* $mmaa - mmnn$, *e si avrà* $(mm - nn)\,zz - 2mmax + nnmz = 0$. *Ora di qui si cava, che questa Curva è la stessa, che la* Concoide, *in cui la base sia un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè sarà* $(mm - nn)\,zz = 2mmax - 2nnmz$. *Onde* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} - \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Posto questo si piglj* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e si faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla* PM *venga incontrato in* X. *Sarà per l' angolo* PXZ *retto*, $PM = z . PL = x :: PZ = \frac{2mmn}{mm-nn} . PX = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z}$. *Onde essendo tutta* $PX - XM = PM = z$, *sarà* $XM = \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Dunque è dato il diametro* AZ *di un circolo, e da qualunque* PX *levata una* XM *costante, si trova il punto* M, *che sarà a una concoide circolare, che avrà per base un circolo, e per polo un punto nella sua circonferenza. La dimostrazione vale anche per* m *chiamando* $Pm = - z$. *Che se essa si chiamasse* $+ z$ *si avrebbe* $mb + bh = z + m = \frac{m}{n}\sqrt{nn + zz - 2nx}$, *e però rifacendo il calcolo si trovarebbe* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} + \frac{2nnm}{mm-nn}$; *e posto lo stesso diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$; *si avrebbe la linea* Xm *presa in fuora eguale al valor medesimo* $\frac{2nnm}{mm-nn}$.

 Da

Da questa riflessione nasce un modo assai più facile per trovare questo nuovo circolo, e descriver la Curva. Trovato il punto B, *ed* a, *come sopra, si seghi la* Ba *in mezzo in* Z, *e col diametro* PZ *si faccia un circolo; indi si giri una riga* PMX *attorno a* P *pigliando sempre il punto* M *da* X *verso* P, *e un altro in fuora coll' apertura* BZ, *e sarà fatto. Si noti solo, che essendo il diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e la* $ZB = \frac{2nnmm}{mm-nn}$ *sarà anche* $PZ . ZB :: m . n$. *Inoltre essendo* $PB = \frac{2mmn-2nnm}{mm-nn}$, $Pa = \frac{2mmn+2nnm}{mm-nn}$ *sarà quella* $= \frac{2mn}{m+n}$, *e questa* $= \frac{2mn}{m-n}$; *onde saranno* $AB . Aa :: m-n . m+n$, *cosa che anche direttamente si mostra con facilità.*

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=0$ *divenga* $a=0$, *indi* $a=m$, *a infinito, o se* m, *o* n *si mutino dal zero all' infinito; si avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di sopra. Dall' equazione* $(mm-nn)zz-2mmax+annmz+mmaa-mmnn=0$ *generale, si ricavano facilmente i vertici degli assi. Si ponga prima* $x=z$, *indi* $x=-z$, *e si avranno i casi ne' quali le* AL, AM *si eguagliano, cioè in cui il punto* M *va nell' asse. Si avranno due equazioni* $(mm-nn)zz-2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=0$, *ed* $(mm-nn)zz+2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=0$, *e dividendo per* $mm-nn$ *si avrà* $zz+\frac{2nnm\mp 2mma}{mm-nn}z+\frac{mm}{mm-nn}(aa-nn)=0$; *dalle quali si possono ricavare i quattro valori cercati di* z, *che colla geometria semplice più facilmente si sono ricavati.*

Prima di pulire l' equazione generale si avverta, che se si cerchi la curva, in cui dati due numeri hi *qualunque intieri o rotti, razionali o irrazionali sia* $h\times PM+i\times MF$ *eguale* *le a una costante; dividendo per* h *si avrà* $PM + \frac{i}{h} MF = \frac{e}{h}$. *Onde fatto* $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$, $\frac{e}{h} = m$, *sarà* $PM + \frac{m}{n} MF = m$; *onde torna lo stesso caso.*

Per pulire poi l'equazione dai z, *si dica* $mm - nn = rr$, $aa - nn = cc$, *e in cambio di* $(mm - nn)zz - 2mmax + 2nnmz + mm(aa - nn) = o$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + 2nnmz + mmcc = o$, *e trasponendo* $2nnmz$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + mmcc = - 2nnmz$, *e però quadrando.* $r^4 z^4 - 4r^2 m^2 axz^2 + 2m^2 r^2 c^2 z^2 + 4m^4 a^2 x^2 - 4m^4 c^2 ax + m^4 c^4 = 4n^4 m^2 z^2$, *e quindi trasponendo* $r^4 z^4 - 4r^2 m^2 axz^2 + (2m^2 c^2 r^2 - 4n^4 m^2) z^2 + 4m^4 a^2 x^2 - 4m^4 c^2 ax + m^4 c^4 = o$. *Si faccia* $2m^2 c^2 r^2 - 4n^4 m^2 = t^6$, *e verrà* $r^4 z^4 - 4r^2 m^2 axz^2 + t^6 z^2 + 4m^4 a^2 x^2 - 4m^4 c^2 ax + m^4 c^4 = o$. *Sostituendo ora* $x^2 + y^2$ *per* z^2, *si avrà* $r^4 x^4 + 2r^4 x^2 y^2 + r^4 y^4 - 4m^2 r^2 ax^3 - 4m^2 r^2 axy^2 + t^6 x^2 + t^6 y^2 + 4m^4 a^2 x^2 - 4m^4 a^2 cx + m^4 c^4 = o$, *e dividendo per* r^4 *verrà finalmente l'equazione pulita come segue:* $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - \frac{4m^2 a}{r^2} x^3 - \frac{4m^2 a}{r^2} xy^2 + \frac{t^6}{r^4} x^2 + \frac{t^6}{r^4} y^2 + \frac{4m^4 a^2}{r^4} x^2 - \frac{4m^2 c^2 a}{r^4} x + \frac{m^4 c^4}{r^4} = o$.

Da questa col fare $y = o$ *si troverebbero i vertici degli assi in un' equazione di quarto grado, che sarebbe divisibile in quattro di primo. Da questa le tangenti; cose che si sono trovate più facilmente colla Geometria. Da questa finalmente i flessi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma basta sin qui di questa ricerca.*

Aggiunta sulla moltiplicità de' casi.

Se si cerca il numero di tutti i casi principali di queste Curve quando il PC *non va all' infinito, essi sono* 35, *che si riducono propriamente a* 29 *per la totale coincidenza di* 6 *con altri tre; e per vedere queste variazioni, vi vorrebbero almeno* 29 *figure diverse.*

Non considerato ancora il punto F, *e stando fermo* C, *può il punto* E *stare primo in* P; *secondo tra* P *e* C; *terzo in* C; *quarto dopo* C; *quinto all' infinito. Intanto il punto* F *può stare primo in* P; *secondo tra* P *ed* E; *terzo tra* E *e* C; *quarto in* E; *quinto in* C; *sesto dopo* C; *settimo all' infinito. Questi sono sette casi per ogni caso delli primi cinque, onde sarebbero* 35. *Ma nel primo caso di* E, *i primi tre di* F *sono gl' istessi, trovandosi in esso sempre* F *in* P. *Nel terzo caso di* E, *il terzo, quarto, quinto di* F *sono gli stessi, trovandosi in essi* F *in* C; *nel quinto caso di* E *gli ultimi tre casi di* F *sono gl' istessi, trovandosi in essi* F *sempre all' infinito. Così rimangono* 6 *di meno, e però* 29.

Se va all' infinito P, *e non* C, *vi sono tutti i casi delle sezioni coniche. Se va all' infinito* C, *e non* P, *vi sono tre casi di* E, *che può essere in* P, *in una distanza finita, e all' infinito. Per questi tre casi, vi sono nel primo: tre di* F *in* P, *in una distanza finita, e all' infinito; nel secondo cinque, cioè in* P, *prima di* E, *in* E, *dopo* E, *all' infinito; nel terzo caso tre, cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E però altri* 11.

Se C *stia in* P, *vi sono altri tre casi di* E, *cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E per essi altri* 11 *di* F.

Dunque tutti i casi insieme si riducono a $29+11+11=51$. *Oltre a tutti quelli che appartengono alle sezioni coniche riportate alla direttrice.*

Ognuno di questi casi ha qualche cosa di notabile, e in tutti vi sono delle suddivisioni d' innumerabili casi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, *non contenendosi negli esposti, che il solo eccedersi, annullarsi, infinitarsi, senza considerare le infinite diverse ragioni nel caso degli eccessi finiti.*

Let-

Altra Lettera 27. Aprile 1748. scrittami dal Medesimo sullo stesso soggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le scrissi intorno alla Curva da Lei propostami considerata nella sua generalità, hanno avuto dell' incontro presso V. S. Illma non voglio lasciare di avanzarle un' altra notizia intorno alle medesime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono questa volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve considerate dal Cartesio nella sua Geometria sul fine del lib. 2., per le refrazioni, e la costruzione delle quali il Nevvton generalmence abbraccia nella proposizione 97. del libro primo de' suoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la costruzione generale del Nevvton coincide a diritura colla nozion generale della Curva, che ho data, e si può facilmente ridurre a quella costruzione, che ho messa immediatamente avanti all' equazione.

Il Nevvton trova (Fig. 5. Tav. 8.) *che acciò i raggi partiti dal punto* A *vadano ad unirsi nel punto* B *dopo la refrazione nella superficie generata da una Curva* CDE, *che si cerca, si può prendere il punto* C *ad arbitrio, indi presa pure* CN *verso* B *ad arbitrio, e* CM, *che deve essere incremento della* AC *a* CN *decremento della* BC *nella ragion data del seno d' incidenza al seno di refrazione, co' centri* A *e* B, *cogli intervalli* AM, BN *si determinarà il punto* D, *che sarà alla Curva cercata.*

Ora se si prende CH *verso* B, *a* CB *nella stessa ragion data, e col centro* A *coll' apertura* AH *si faccia un circolo* HI, *che incontri in* D *la* AD *prodotta, sarà ancora* BD *a* DI *in ragion data, cioè in quella di* BC *a* BH, *o del seno di refrazione al seno d' incidenza. Giacchè essendo* BC *a* CH, *e* CN *a* CM *in detta ragione, col togliere proporzionali resterà*

anche

anche BN ad MH nella ſteſſa ragione. Onde eſſendo BD eguale a BN, e per le AH, AI, ed AM, AD eguali, anche la DI eguale a MH. Sarà nella ſteſſa ragion data anche BD a DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A, C, B, D, H, I di queſta figura gli ſteſſi, che nella fig. 3. Tav. 9. delle traſmeſſe a Lei nella mia ultima lettera i punti P, b, F, mi, C, Hi. Vede inoltre che ogni volta che il ſeno d'incidenza al ſeno di refrazione ſtarà come numero a numero, ſi potrà la Curva deſcriver co' fili. Così nel vetro dall'aria il ſeno d'incidenza al ſeno di refrazione, è come 3 a 2. Se una eſtremità del filo (1) ſi ferma in F (Fig. 4. T. 8.), indi ſi piega preſſo allo ſtilo Mi, e poi ſi avvolge d'intorno ad un pivolo P, quindi vada in V, e poi ſi avvolga d'intorno al pivolo F, e poi finalmente coll'altra eſtremità vada a metter capo in Mi, con lo ſtilo M ſi deſcriverà la Curva Mb cercata.

Perchè ſi vede chiaro, che poſta $PMi = z$, $MiF = u$, tutto il filo $= a$, ſarà $2z + 3u = a$; e però $2dz + 3du = 0$, onde $2dz = -3du$; e $dz . - du :: 3 . 2$. Onde (Fig. 5.) eſſendo nata la CM da tutti i dz incrementi della AD (che è PM della fig. 4.), e CN da tutti i $-du$ decrementi della BD (che è MF fig. 4.) ſarà ancora (Fig. 5.) $CM . CH :: 3 . 2$, come il ſeno d'incidenza al ſeno dell'angolo rifratto.

Generalmente baſterà fare, che il filo in MF ſia radoppiato tante volte, quanto eſprime il numero del ſeno d'incidenza, e in MP quanto eſprime il numero del ſeno di refrazione, e ſempre ſi avrà la Curva cercata.

Qui non ſi vede, che uſo abbiano le altre Curve della coſtruzione generale, che le mandai; ma baſterà accennare queſto ſolo, che ſi avranno in eſſe tutti i caſi, ne' quali i raggi

porta-

(1) Si avverte, che queſta tale diſpoſizione di filo (*Fig.* 4. *T.* 8.) non è del P. Boſcovich, ma è quella medeſima, che propongo io nel mio teſto, e che non per altro ho qui ſoſtituita alla ſua, ſe non perchè parmi, che il filo ordinato così rieſca più agile, e libero a muoverſi.

portati con direzioni, che passano per un punto, o sia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una superficie generata dalla revoluzione di una Curva intorno a un asse, e ivi o passando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo refratto, e dell' angolo di riflessione sia in data ragione, debbano avere direzioni che passano per un punto, o andando verso quello, o fugendone. Ed ogni volta che la normale segherà l' angolo, che le rette PM, MF *delle* Figure 1. 2. 3. T. 9. *della mia ultima formano verso la* PF, *e che è l' interno del triangolo* PMF, *sempre si avrà il caso della riflessione; quando poi detto angolo sarà segato dalla tangente, si avrà il caso della refrazione. Benchè il caso di una riflessione fatta con quella legge non esiste in natura; essendo nella riflessione della luce il seno dell' incidenza eguale al seno di riflessione, e negli altri corpi non perfettamente elastici, le tangenti di detti angoli sono in data ragione, e non i seni.*

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali descritte col filo in altra maniera.

QUanto più fuori delle menti degli uomini fu la descrizione organica di Curve, che rassomigliassero ad una sezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, suggerendo nuove vie, onde detta descrizione si conseguisca. Mettendo adunque soltanto (*Fig.* 8. *Tav.* 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già messi in P, ed F, secondo la situazione che sortisce rispetto a quelli, nascono nuove Curve. E quando la distanza EF sia eguale ad una quinta parte incirca della distanza FP, ed il filo fisso in P movendosi, sdruccioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo stilo M, ovvero *m* descritte altre Ovali, purche la porzione FM non eguaglj la porzione FP,

o

o la porzione FE due volte preſa ; perchè nel primo caſo la Curva fa un angolo curvilineo in P, e nel ſecondo in F. Per altro quante mai Curve riſultino dalla ſituazione dei detti tre pivoli fitti nel piano l'uno per dritto all' altro, l'aſſe loro generalmente è (ſe la porzione FM è eguale, o minore di FP) è dico l' aſſe $= ME + \frac{ME + 2EF}{3}$, cioè (*Fig.* 9.) $= AE + EB$. Se poi la porzione F*m* è maggiore della porzione FP (*Fig.* 8.) l' aſſe ſarà $= \frac{mP}{3} + PE + \frac{mE + 2EF}{3}$. Eſpreſſione, che per addattare la Curva alla data lunghezza della tavola, o cornici, a' Meccanici baſterà, giacchè non ſarebbe poi facile definire ſenza calcolo anche la maſſima larghezza.

Ma ſe il pivolo E dall' uno o dall' altro pivolo F, o P recedendo, all' uno o all' altro ſi accoſtaſſe tanto, che veniſſe ad eſſere tutt' uno, queſto caſo tornarebbe lo ſteſſo della *Fig.* 1., 2., e 3.

Se poi diſpoſti i fochi per dritto, come nella 8., ed il filo compoſto come nella 6., e lo ſtile poſto in M, ſi concepiſce il pivolo E accoſtarſi, e coincidere nell' uno o nell' altro pivolo P, ovvero F; allora verrebbe certo il caſo della *Fig.* 1., 2., 3.; ma la ragione di HM ad MF, che ivi era come 2 ad 1, ſeguirebbe qui (*Fig.* 6.) come 3 ad 1, e nientedimeno ſi avrebbero ſezioni belle di vovo.

Ma ſe finalmente i pivoli non più ſi metteſſero per dritto, ma tra eſſi un qualſiſia angolo coſtituiſſero, neſſun altro più fecondo ſoggetto potrebbeſi immaginare in queſta materia, ma non voglio più inoltrarmi in tali ricerche, che troppo longi mi condurrebbero. E baſti per ora aver indicato di quanti preclariſſimi uſi ſia capace un ſemplice filo.

ISTRO-