OSSERVAZIONI
SOPRA
ALCUNI POLIGONI RETTILINEI REGOLARI.

PREFAZIONE.

IO tengo fermissima opinione, che in ogni secolo valentissimi Matematici avranno trattata la materia de' Poligoni rettilinei regolari, e saranno in essa iti tant' oltre, che per quanto può la penetrazione degli uomini troppo angusta, e limitata avranno discoperte le loro proprietà e natura; sicchè a quelli, che sono successi dappoi, non altro più rimanga che fare in questa parte. Ma non ostante lusingandomi, che in affare geometrico queste figure non siano forse state per lo addietro costrutte così, come ora da me si fa; e che talvolta si possa se non per arte, almen per caso incontrare in qualche verità non ancora intesa, o avvertita dagli altri; quindi mi parve ben fatto di estendere queste poche Osservazioni, le quali abbenchè la maggior parte siano nuove per me, che non sono molto esperto in questa sorta di scienze, non intendo però di sostenere che lo siano per altri; massime ancora perchè, per chiunque siasi, l' asserir cosa nuova sarebbe troppo temeraria impresa; non potendosi ragionevolmente supporre, che un sol uomo sappia quanto siasi scritto per le innanzi, e molto meno quanto oggidì da tanti in tante parti si scriva.

Era poi a dir vero la mia prima intenzione di cominciare dal Pentagono, come quello, che è il primo, nel quale dopo zero principia coll' unità la serie delle differenze, che (num. 156.) passano tra l' angolo retto, e gli angoli al centro ed alla periferia di qualunque Poligono; ed è pure il primo, di cui mentre prodotti i lati s' incrocciano, non può non presentarsi qualche proprietà da osservare. Ma il Triangolo, e il Quadrato mi trattennero intorno a certe bagatelle, che dopo le seguenti Definizioni tosto espongo.

DEFINIZIONI.

1. CHiamo primo *asse* di un Poligono (*Fig.* 8. *Tav.* 29.) la retta BQ, che coincide col diametro del circolo circoscritto ad esso Poligono.

2. Le *ordinate* sono le rette YZ, GM, PN, RT condotte normali all' *asse* suddetto.

Le GM, PN situate dentro all' area del Poligono si dicono *ordinate interiori*; ed *esteriori* sono le YZ, RT, perchè poste al di fuori di detta area.

3. Le porzioni del suddetto *asse* intercette tra un' *ordinata* e l'altra, e determinate comunque, le chiamo *assisse*, quali sono Qc, cn, nm, ed anche nB &c. Delle due *assisse* appartenenti ad un' *ordinata* Pn, chiamo Qn *assissa maggiore*, ed nB *minore*.

4. Io appello *suttensa* una retta condotta da angolo ad angolo per l'area di un Poligono, quando la considero come opposta ad un qualche numero di lati di esso Poligono. Perciò PN sarà una *suttensa* a due lati; NG *suttensa* a 3; GM a 4 &c. anzi qualche volta chiamo il medesimo lato *suttensa* ad un lato, come impropriamente, ma con ragione mi sono espresso al n. 158. nel titolo di quella Proposizione.

5. *Poste in simili siti* chiamo alcune linee, o angoli, o piani, che sono nel medesimo modo ordinate, e disposte intorno al centro della Figura. Avvertendo, che ciò che in qualunque Poligono si asserisce rispetto ad una linea, angolo, o piano, tanto si deve intendere di qualunque altra linea, o angolo, o piano *posto in simili siti* della Figura. Tuttociò per esempio che (*Fig.* 4. *Tav.* 29.) si dirà della retta ZB, s'intende che sia vero dell' altre tutte BE, EH &c. *poste in simili siti*. Ciò che ivi si asserisce per esempio dell' angolo GZA sarà pur vero dell' angolo AEM, MFQ &c.

ARTI-

ARTICOLO PRIMO.

Del Triangolo.

PROPOSIZIONE I.

Alla terza parte di ciaſcun lato del Triangolo equilatero nop (*Fig.* 1. *Tav.* 29.) *guidati i lati di un Eſagono* bqe *&c.* , *e di un altro Triangolo* eGb, *ſaranno i due Triangoli preſi inſieme eguali a due Eſagoni . Dico* eGb + nop = 2 bqe *&c.*

2. E' dovere, che preceda il valore degli angoli di queſto Poligono, non ſolo perchè ſerve alla propoſta dimoſtrazione; ma anche per non interrompere l'ordine già prefiſſo negli altri. E però

$$\text{Ang. } bce = \text{Gr. } 120 = \frac{360}{3}$$

$$beG = \text{Gr. } 60 = \frac{360}{6}$$

$$\text{Onde } beG = \frac{bce}{2}.$$

Nei quali valori v'è d'oſſervabile, che l'angolo al centro di un Triangolo è eguale all' angolo alla periferia di un Eſagono; e reciprocamente l'angolo al centro di un Eſagono è eguale all' angolo alla periferia di un Triangolo. Quindi (coſtrutta la Figura come abbiamo propoſto) naſce, che eſſendo il Triangolo *b q e* = *b c e*, l'area di un Triangolo ſta all' area di un Eſagono inſcritto nel medeſimo circolo, come 1 a 2. L'area poi di un eſagono ſta all' aria di un triangolo circoſcritto al medeſimo circolo, come 2 a 3; ciò che ſpicca da ſe nella Figura, e ſi deduce anche

che dal primo Teorema pubblicato (1) dal Chiarissimo Francesco Maria Zanotti. Onde essendo l'Esagono *bqe* &c. inscritto nel medesimo circolo rispetto al Triangolo *eGb*, ed essendo anche circoscritto al medesimo circolo rispetto al triangolo *nop*, succede che il Triangolo *eGb*, l'Esagono *bqe* &c. il triangolo *nop* si ritrovano ordinati in progressione aritmetica, come li tre numeri 1. 2. 3; onde siccome $1 + 3 = 2 + 2$; così il Triangolo eGb + trian. $nop =$ 2 Esagoni *bqe* &c. Come era da dimostrare.

PROPOSIZIONE II.

Il quadrato eretto sul diametro di un Circolo circoscritto ad un Triangolo è al quadrato eretto sul lato di esso Triangolo, come 4 a 3. Dico $\overline{qG}^2 . \overline{Ge}^2 :: 4 . 3$.

3. Benchè questa Proposizione sia già dimostrata dal P. Tacquet (2), non ostante in grazia delle conseguenze che ne deduco, sia lecito anche a me di dimostrarla così. Poichè dall' estremità del diametro Gq guidate qb, qe, che saranno lati di un Esagono, risultano bc, bq eguali tra di loro, ed alle due ec, eq, avviene che la be taglia in d per metà il raggio cq; e quindi $Gd = 3dq$; $Gq = 4dq$; $cq = 2dq$.

Onde $\overline{bd}^2 = \overline{bq}^2 - \overline{dq}^2 = \overline{cq}^2 - \overline{dq}^2 = 4\overline{dq}^2 - \overline{dq}^2 = 3\overline{dq}^2$ e però essendo be doppia di bd, sarà

$\overline{be}^2 = 4\overline{bd}^2 = 12\overline{dq}^2$. Ma $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$. Sarà dunque

$\overline{Gq}^2 . \overline{be}^2 :: 16\overline{dq}^2 . 12\overline{dq}^2 :: 4 . 3$. Ciò che era &c.

CON-

(1) Lettera del suddetto stampata in Firenze l'anno 1749.
(2) *Elem. Geom.* Lib. IV. Prop. 15. nello Scoglio.

CONSEGUENZA I.

4. Poichè $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$, $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$, ed $\overline{eq}^2 = 4\overline{dq}^2$, li tre quadrati $\overline{Gq}^2$, $\overline{be}^2$, ovvero $\overline{Ge}^2$, $\overline{eq}^2$ saranno come i tre numeri 16, 12, 4, o sia 12, 9, 3.

E perchè $\overline{me}^2 = \frac{1}{4}\overline{Ge}^2 = \frac{1}{4}\overline{be}^2 = 3\overline{dq}^2$. e perciò $\overline{bm}^2 = \overline{be}^2 - \overline{me}^2 = 12\overline{dq}^2 - 3\overline{dq}^2 = 9\overline{dq}^2$; li tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ saranno essi pure, come i tre numeri 12. 9. 3.

CONSEGUENZA II.

5. Poichè la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato dell' Esagono $= 2dq$ è $= 6\times 4\overline{dq}^2 = 24\overline{dq}^2$; ed i tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ presi insieme fanno $24\overline{dq}^2$, ne siegue che la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato di un Esagono è eguale alla somma di detti tre quadrati $\overline{be}^2$, $\overline{bm}^2$, $\overline{me}^2$.

CONSEGUENZA III.

6. Perchè primieramente la superficie della sfera sta alla superficie curva del cilindro quadrato inscritto nella medesi-

ma sfera (1) come 2 a 1, o come 24 a 12 e la ſudetta ſomma de' quadrati $\overline{24dq}^2$ ſta a $\overline{be}^2 = \overline{12dq}^2$ pure come 24 a 12, ne ſiegue che la ſuperficie della sfera ſta alla ſuperficie curva di detto cilindro, come la ſomma de' quadrati formati ſu i lati di un Eſagono al quadrato del lato *be* del Triangolo regolare inſcritto.

7. Secondo. Che ſe alla ſuperficie curva di eſſo cilindro inſcritto aggiungeremo la ſuperficie delle due baſi, allora la ſuperficie della sfera ſta a tutta la ſuperficie del cilindro (2) come 4 a 3; ma $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$ ſta come 4 a 3. Dunque la ſuperficie della sfera ſta a tutta la ſuperficie del cilindro inſcritto, come $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$.

8. Terzo. Inoltre $\overline{Gq}^2 = \overline{16dq}^2$ ſta ad $\overline{mb}^2 = \overline{9dq}^2$ come 16 a 9; ma la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima (3) come 16. a 9. Dunque la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima, come $\overline{Gq}^2$ ad $\overline{mb}^2$.

9. Quarto. Abbiamo ancora $\overline{Gc}^2 = \overline{4dq}^2$, che ſta a $\overline{Gd}^2 = \overline{9dq}^2$, come 4 a 9. Ma la ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero ſta alla ſuperficie o ſolidità della Sfera (4) inſcritta nel medeſimo Cono, come 4 a 9. Dunque

(1) Tacquet prop. 33. nell' aggiunta al *Trattato della Sfera, e Cilindro d'Archimede.*

(2) Tacquet prop. 34. nel luogo ſopracitato.

(3) Tacquet prop. 39. nel luogo ſopracitato.

(4) Tacquet prop. 40. nel luogo ſopracitato.

que la superficie o solidità di detto Cono sta alla superficie o solidità di detta Sfera, come $\overline{Gc}^2$ a $\overline{Gd}^2$.

10. Quinto. Finalmente $\overline{cq}^2$ sta a $\overline{dq}^2$, come 4 a 1; e la superficie di un Cono equilatero circoscritto ad una Sfera è alla superficie di un Cono equilatero inscritto (1) come 4 a 1. Dunque la superficie &c. sta come $\overline{cq}^2$ a $\overline{dq}^2$. Lo stesso si deve dire rispetto alla proporzione che è tra il Triangolo equilatero circoscritto, ed inscritto nel medesimo Circolo; e riguardo pure ad un Tetraedro circoscritto, ed inscritto nella medesima Sfera.

ARTICOLO SECONDO.

Del Quadrato.

PROPOSIZIONE I.

Tirate dagli angoli a, d *di un quadrato* (*Fig.* 2.) *le* aQ, dp *suttense a tre lati di un ottagono inscritto nel medesimo Circolo. Poi dal punto d'intersezione* f *alla periferia condotta la* fe *normale al diametro* bK, *dico* 1. *Che* $\overline{fe}^2$ *è eguale all'eccesso dell'ottogono sopra il quadrato.* 2. *Che* $\overline{Ke}^2$ *è eguale all'area di detto ottogono.*

11. Essendo aQ parallela a bd, e dp parallela ad ab, risulta l'angolo afd = ang. abd, e li triangoli afd, abd, che hanno comune la base ad, parimenti eguali. Guidata

(1) Tacquet prop. 41. nel luogo sopracitato.

poi nm ai punti, dove le rette aQ, dp segano i lati ab, dg, sono eguali anche i triangoli afd, dfm, mfn, nfa, perchè insistono sopra basi eguali af, fm, ed hanno la medesima altezza. Onde tutto il rettangolo $nadm$ eguale a detti quattro triangoli sarà pure eguale ai quattro triangoli hpa, abd &c. che sono tutti insieme la differenza, o l'eccesso dell'ottogono sopra il quadrato $adgb$.

12. Ora poichè (essendo i triangoli sopraddetti afd, abd simili, ed eguali) risulta $bo = of = fc$, e che $bo = uK$, sarà $bo + uK = bf = oc = an$; e sarà $bK - bf = fK = ba = ad$. Perciò il quadrato eretto sopra la media proporzionale tra bf, ed fK, cioè tra an, ed ad, sarà eguale al suddetto rettangolo $nadm$, eguale, dissi, all' eccesso dell' ottogono sopra il quadrato $adgb$. Il che era in primo luogo da dimostrare.

13. Finalmente per essere $\overline{Ke}^2 = \overline{fK}^2 + \overline{fe}^2$, ed essendo $\overline{fK}^2$ eguale al quadrato $adgb$, ed $\overline{fe}^2$ eguale al suddetto eccesso, viene detto $\overline{Ke}^2$ eguale al quadrato $adgb$ più il rettangolo $nadm$ eccesso predetto, e per conseguenza eguale a tutta l' area dell' ottogono $pabd$ &c. Ciò che restava da &c.

PROPOSIZIONE II.

Le diagonali ab, gK; cb, Kf; af, cg *dividono il quadrato (Fig. 3.)* agbK *in tre parti eguali; una marcata a puntini, tratteggiata l' altra, e bianca l' ultima.*

14. Si guidi Qn per i punti d'intersezione Q ed m, onde essendo le rette cQ, Kn parallele ed eguali, risultano i trian-

triangoli cQm, KQm eguali, perchè hanno la medesima altezza, e la medesima base Qm; dai quali perciò se si leva la parte comune Qdm, resta la parte bianca Qcd eguale alla bianca dKm; ma il triangolo QcK è pure eguale al triangolo QnK, dai quali togliendo via parti eguali: cioè Qcd dal triangolo QcK, e dKm dal triangolo QnK, il residuo cdK marcato a puntini risulta eguale al residuo tratteggiato $mKn + mdQ$.

15. Secondariamente perchè Qm, cK sono parallele comprese nel medesimo angolo cfK, e che per esser cf diviso per metà in Q, viene $fQ . fc :: 1 . 2$; perciò abbiamo ancora $Qm . cK :: 1 . 2$. Ora essendo, come dissi, Qm, cK parallele, risultano simili i triangoli Qdm, Kdc; e quindi nasce ancora che $dm . mQ :: dc . cK$; ed invertendo $mQ . dm :: cK . dc$, ed alternando $mQ . cK :: dm . dc$. Ma $mQ . cK :: 1 . 2$. Dunque $dm . dc :: 1 . 2$. Pertanto i triangoli cdK, dKm, poichè hanno la medesima altezza, saranno fra essi come le basi dm, dc: cioè saranno come $1 . 2$. Onde il triangolo cdK sarà doppio del triangolo dKm. Sarà dunque eguale alli due triangoli bianchi $Qcd + dKm$, che sono stati mostrati eguali. E perchè detto cdK è anche eguale ad $mKn + mdQ$ viene anche $Qcd + dKm = mKn + mdQ$. Dunque finalmente concludo, che cdK; $Qcd + dKm$; $mKn + mdQ$ sono tre piani tra essi eguali, e tutti insieme eguali a $QcKn$ quarta parte del proposto quadrato $agbK$. Quindi moltiplicando per 4 ciascuna di dette parti tre, verrà il quadrato $agbK$ dalle sopraddette diagonali diviso in tre eguali parti. Ciò che era &c.

Conseguenza I.

16. E' rimarcabile che se fosse per d tirata una retta parallela ed eguale a cQ questa mostrarebbe le altezze dei triangoli mdQ, cdK, le quali sarebbero come $1 . 2$; giacchè

chè $md . cd :: 1 . 2$. E perchè i triangoli tra essi sono in ragion composta delle altezze e delle basi; essendo pure le basi $mQ . cK :: 1 . 2$; verrebbe il triangolo mdQ al triangolo cdK, come 1 a 4. Ma cdK è $\frac{1}{3}$ del quadrato $QcKn$. Dunque mdQ verrebbe ad essere $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{12}$ parte di detto quadrato $QcKn$.

Conseguenza II.

17. Per la medesima ragione addotta il triangolo mdQ sta al triangolo Qcd, come 1 a 2; al triangolo mKn, come 1 a 3; ed abbiamo osservato che sta al triangolo cdK come 1 a 4. Dunque li triangoli $mdQ . Qcd . mKn . cdK$ sono ordinati in progressione aritmetica, come li quattro numeri 1 . 2 . 3 . 4. Da quali ben si scorge, quali eguaglianze de' piani l'addizione produrrebbe. Che se dalla progressione aritmetica si levi via il terzo termine, cioè il triangolo mKn, che corrisponde al num. 3, in tal caso restano gli altri tre triangoli ordinati in progressione geometrica crescente in ragion dupla, come li tre numeri 1. 2. 4. E quindi risultano altre eguaglianze de' piani per la moltiplicazione.

Annotazione I.

18. Ciò che si è asserito in queste due Conseguenze relativamente alle parti del quadrato $QcKn$ è vero anche rispetto a tutto il quadrato $agbK$, quando si moltiplichino per 4 quelle di dette parti, che entrano in questione.

Annotazione II.

19. Questa Proposizione non è particolarmente vera nel solo Quadrato, ma generalmente si estende a qualunque parallelogrammo, o rettangolo dato.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Del Pentagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

20. Si prolunghino da prima i lati del proposto, o di qualunque altro Poligono (*Fig.* 4.) finchè arrivino a quell' ultimo punto d'intersezione, oltre al quale procedendo anche all' infinito, mai più indi s'incrocciano. Ora essendo la somma di tutti gli angoli AGP, GPQ &c. alla periferia di qualunque figura rettilinea eguale a due volte tanti angoli retti, meno quattro (i quali pareggiano la somma di tutti gli angoli esterni HGP, BPQ &c.) quanti sono i lati della Figura, ed essendo pure gli angoli di un triangolo presi insieme eguali a Gr. 180, perciò quando aggiungendo, e quando sottraendo angoli gli uni dagli altri, quelli di questa Figura vengono a risultare, come siegue:

Ang. GPQ = Gr. 108

QPB = Gr. $72 = \frac{360}{5}$ = MCQ ang. al centro del 5gono.

QBP = Gr. $36 = \frac{360}{10}$ = MGQ ang. al centro del 10gono.

Onde QBP $= \frac{QPB}{2} = \frac{GPQ}{3}$.

Essendo vero pertanto, che sottraendo 36 da 60 angolo al centro di un esagono, il residuo 24 è eguale ad $\frac{1}{3}$ dell' angolo al centro di un 5gono, eguale dico a $\frac{72}{3}$. Perciò se fatto centro in B con qualunque apertura BQ descrivasi (il

(il che geometricamente si può fare) un arco QY = gr. 60, l' angolo QBY sarà $= \frac{McQ}{3}$, cioè $= \frac{72}{3} = 24$ angolo al centro di un 15gono.

Annotazione.

21. Se mai fosse utile anche la trisezione dell' angolo AGP alla periferia del proposto 5gono, è facile il conseguirla. Imperciocchè tirate le MG, QG, l' angolo per esempio AGM viene ad essere $\frac{1}{3}$ dell' angolo AGP. Perchè sottratto l' angolo MAG da due retti, cioè gr. 108 da gr. 180, la metà 36 del residuo 72 è appunto il valore dell' angolo AGM = AMG = QBP; sicchè dalle due rette MG, QG detto angolo AGP viene diviso in tre eguali parti.

PROPOSIZIONE II.

Il lato di un 5gono sta alla maggior ordinata, come essa maggior ordinata a tutti due. Voglio dire che ∺ PQ. GM. PQ + GM.

22. Opportuna a questo fatto trovasi nella Figura questa proporzione BQ. QP :: BQ + QM. MG; ovvero QP. BQ :: MG. BQ + QM; ma essendo stato provato (n. 21.) l' angolo AGM, ovvero AMG = QBP = AZG, sarà anche il lato GZ, ovvero BQ eguale al lato GM. Il lato poi MQ è eguale a PQ. Sostituendo dunque PQ a QM, ed MG a BQ avremo QP. MG :: MG. MG + QP. Cioè ∺ PQ. GM. PQ + GM, che è lo stesso, ed è ciò che era da dimostrarsi.

CON-

CONSEGUENZA I.

23. Perchè PQ. GM :: GM . PQ + GM, ne ſiegue che ſe ſi prenda una linea PQ + GM compoſta del lato PQ del 5gono, e GM ordinata maggiore, PQ ſarà il ſegmento minore, GM il ſegmento maggiore; e che nel punto dove queſte linee uniſconſi a formarne una ſola, la retta reſta diviſa *media & extrema ratione*.

CONSEGUENZA II.

24. Eſſendo ZE, PQ parallele, ſaranno gli angoli alla medeſima parte QPB, EZG eguali; ma AGZ è per la coſtruzione eguale a QPB; dunque eguale anche ad EZG; e però EZ = EG. Ora EG = GB poſta in ſimile ſito = PQ + GM. Dunque EZ = PQ + GM. Sicchè ∻ PQ. GM. EZ; ovvero anche le ſole metà ∻ *n*Q. *m*M. *x*E.

CONSEGUENZA III.

25. Per la ſimilitudine de' triangoli PGQ, PZF ſuccede, che PG. GQ :: PZ. ZF; ed eſſendo i primi tre termini continui proporzionali, il quarto termine ZF ſarà pure continuo proporzionale a quelli. Onde ∻ PG. GQ. PZ. ZF; ma GQ = BP; ZF = ZB. Dunque facendo la ſoſtituzione riſulta anche ∻ PG. PB. PZ. ZB.

Annotazione.

26. E' ſuperfluo il ricordare, che $PQ \times EZ = \overline{GM}^2$; e così che $PG \times ZB = PB \times PZ$. Sono coſe che vengono da ſe, e perciò ſaranno tralaſciate anche in progreſſo.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

La qual serve d' apparecchio alla seguente.

Dato un primo termine, trovarne un secondo, al quale così stia il primo, come il secondo a tutti due.

27. Si divida (*Fig. 5.*) *media & extrema ratione* la retta GP primo termine dato, su la quale prodotta si segni P*e* eguale al segmento maggiore, ed *e*B posta in dirittura eguale a tutta la data GP. Dico che ÷ GP . PB . GB.

Però con una medesima apertura PG descrivansi due archi, uno col centro in P, l' altro col centro in *e*; ed al punto d'intersezione Q si guidino le rette PQ, *e*Q, che saranno ambedue eguali alla data GP, e si uniscano i punti Q, B con una retta. La *e*Q = GP sia come GP similmente divisa in *r*, cosicchè *r*Q sia il segmento maggiore; onde condotta P*r*, risultino *r*Q, *r*P, P*e* eguali. Ora per la decima d'Eucl. Lib. 4. li tre triangoli *re*P, *e*PQ, PQB verranno isosceli simili, e co' gli angoli alla base doppj ciascuno degli angoli al vertice; onde siccome per la costruzione ÷ *er* . *r*Q . Q*e*, così pure saranno le basi di detti tre triangoli ÷ *re* . *e*P . PQ.

28. Si produca ora QP per la quantità PH = PB, e si congiungono i punti B, H, dai quali siano condotte per G, e Q sino al punto di concorso E le rette BE, HE. Dico primieramente, che li triangoli PQB, QBH, HEB sono simili. Imperocchè l'angolo *e*PQ alla base del triangolo isoscele *e*PQ essendo doppio dell' angolo al vertice *e*PQ, viene = gr. 72, il qual valore sottratto da gr. 180, resta l'angolo BPH = gr. 108. Questo sottratto dal valor totale degli angoli del triangolo BPH, resta ancora per tutti due insieme gli angoli alla base gr. 72; metà de' quali, cioè gr. 36, sono il valore dell' angolo PBH, il qual' aggiunto all' angolo QBP

pure

pure $=$ gr. 36, risulta tutto l'angolo QBH $=$ gr. 72. Nel medesimo modo provasi che è $=$ gr. 72 anche l'angolo BQH, e non altrimenti l'angolo BHG. Onde li tre triangoli PQB, QBH, HEB sono simili.

29. Secondariamente dico, che detti tre simili triangoli sono ordinati nella medesima progressione; perchè siccome il lato eP del triangolo reP fu base del triangolo ePQ, ed il lato PQ di detto triangolo ePQ fu base del triangolo PQB; così ora il lato QB del triangolo PQB diventa base del triangolo QBH; il lato BH di detto triangolo QBH diventa base del triangolo HEB; onde per la ragione addotta di sopra (notando specialmente che il triangolo PQB è stato replicato, ed è stato l'ultimo delli tre triangoli reP, ePQ, PQB, e quì è il primo delli tre PQB, QBH, HEB) verranno le basi $\div$ PQ. QB. BH. Ma PQ $=$ GP; QB $=$ PB; BH $=$ GB. Sostituendo dunque questi valori avremo $\div$ GP. PB. GB. Ciò che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE IV.

Descrizione geometrica del Pentagono.

30. Pongasi mente, che in qualunque Poligono, di cui il denominatore sia numero disparo, havvi sempre (*Fig.* 4.) un punto M, che perpendicolarmente sovrasta alla meta D di un lato opposto PG; e che continuando due lati fra essi massimamente distanti MQ, GP dalla parte a cui convengono, havvi un punto d'intersezione B, in cui le linee concorrenti MB, GB sono eguali; delle quali due linee, le parti QM, PG sono appunto due lati del proposto Poligono massimamente convergenti verso B, se si paragonino a due altri lati QP, GP convergenti verso P.

31. Ciò posto, volendo descrivere un Pentagono arbitrario, cioè di cui non sia determinato il lato, sia primiera-

mente una data BG divisa *media & extrema ratione* in P; e se non fosse arbitrario, ma che fosse dato e determinato il lato per esempio PG, si cerchi per mezzo della terza Proposizione il secondo termine PB, a cui stia il primo dato PG, come il secondo PB a tutti due GP + PB. Indi da G verso Z si produca la BG per una quantità GZ = PB parte maggiore; poi dalla metà PG parte minore sia eretta una perpendicolare DM. Finalmente col centro in B, e con l'apertura BG descritto un arco GM, dal punto B per M, dove l'arco s'interseca con la perpendicolare, si meni un'altra BE = BZ, e similmente divisa. Imperocchè replicando così la medesima operazione su detta retta BE, si menarà poi da E un' altra EH &c. sino al fine della proposta descrizione.

32. Nel supposto della retta BZ divisa in P, e G, come si disse, si potrebbe operare anche in altra maniera, cioè tirando da B al punto E d'intersezione di due archi descritti uno col centro in Z, l'altro col centro in G, e con una medesima apertura eguale a PZ, tirando, dissi, la retta BE; indi coi centri in Q, e B, e con l'apertura suddetta, menando EH al punto d'intersezione H &c. sino al fine. Perchè risultando così li triangoli EZG, HBQ, ovvero EZB, BHE sempre con gli angoli alla base doppj dell' angolo al vertice, la descrizione si dimostra cavata da quella affezione, che è propria ed essenziale di questo Poligono. Ma o nell' una o nell' altra maniera, che questa descrizione si pratichi, benchè tragga l'origine da quella proprietà che è comune anche alla descrizione d'Euclide, o di Tolomeo, cioè dalla suddetta divisione di una linea *media & extrema ratione*, non però si può dire che sia d'essa. Ella è bensì egualmente geometrica, perchè precisamente conforme a quanto si è dimostrato nelle due Proposizioni antecedenti.

PROPOSIZIONE V.

La più piccola ordinata sta alla maggior assissa posta a lati della ordinata maggiore, come l'assissa minore di detta ordinata maggiore, sta all'aggregato di tutte due le ordinate. Cioè voglio dimostrare, che $nQ . mr :: Am . mM + nQ$.

33. Laonde si rifletta, che dal numero 22. seguita che $\div\!\!:\, nQ . mM . mM + nQ$. Ma per la ottava d'Eucl. Lib. 6. si ha pure $\div\!\!:\, Am . mM . mr$. Dunque $nQ \times mM + nQ = Am \times mr$. E però ricaviamo $nQ . Am :: mr . mM + nQ$; ed alternando $nQ . mr :: Am . mM + nQ$. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo formato su le due assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo formato su le due spettanti alla maggiore, come la minore ordinata a tutte due. Voglio dire, che $Anr . Amr :: nQ . nQ + mM$.

34. Poichè per la ottava d'Eucl. Lib. 6. $\div\!\!:\, An . nQ . nr$; ed anche che $\div\!\!:\, Am . mM . mr$; ed inoltre essendo i quadrati in ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{nQ}^2$ ad $\overline{mM}^2$ in ragion duplicata di nQ ad mM. Ma nella seconda Proposizione abbiam visto, che nQ sta ad $nQ + mM$ in ragion duplicata di nQ ad mM. Dunque $\overline{nQ}^2 . \overline{mM}^2 :: nQ . nQ + mM$. Ora perchè $\overline{nQ}^2 =$ rettang. Anr; ed $\overline{mM}^2 =$ rettang. Amr; perciò saranno parimenti li rettangoli $Anr . Amr :: nQ . nQ + mM$. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

35. L' angolo QrP alla periferia di un 10gono essendo $=$ gr. 144, la meta 72 sarà il valore dell' angolo QrA; ma questo è pur valore dell' angolo McA al centro di un pentagono. Dunque le rette Qr, Mc, perchè egualmente inclinate alla medesima retta rA, saranno parallele. Le rette poi Mm, Qn sono parallele per la costruzione; onde risultano simili i triangoli mMc, nQr. Sicchè $nQ . mM :: rQ . cM$; e perciò $Anr . Amr :: rQ . rQ + cm$. Val' a dire, che il primo rettangolo sta al secondo, come il lato di un 10gono sta all' aggregato di esso lato più il raggio del circolo circoscritto al 10gono e 5gono ora proposto.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettangolo di tutto il diametro nella minor assissa appartenente alla maggior ordinata mM sta al rettangolo fatto su tutte due le assisse laterali a detta ordinata, come il lato del 5gono sta alla somma di $\frac{1}{4}$ di esso lato, più $\frac{1}{2}$ dell' ordinata medesima.

In una parola $rAm . rmA :: AM \; \frac{nQ + mM}{2}$.

36. Abbiamo esposto (n. 33.) che $\div nQ . mM . nQ + mM$. Ma per l'undecima del Tacquet in Archimede si ha ancora $\div nQ \times 2 . mM . \frac{nQ + mM}{2}$. Ora perchè il lato AM essendo doppio dell' ordinata nQ, risulta lo stesso, che se fosse detto nQ moltiplicato per 2; perciò sostituendo AM ad $nQ \times 2$ verrà $\div AM . mM . \frac{nQ + mM}{2}$. E perchè li quadrati sono in

ragion

ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{AM}^2 . \overline{mM}^2 :: AM . \frac{nQ + mM}{2}$.

Ma il rettangolo $rAm = \overline{AM}^2$; ed il rettangolo $rmA = \overline{mM}^2$.

Dunque $rAm . rmA :: AM . \frac{nQ + mM}{2}$. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VIII.

Il rettangolo fatto dalle assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo fatto di tutto il diametro nella minore assissa spettante alla maggiore ordinata, come 1 a 4. Stanno, dissi, così: $Anr . rAm :: 1 . 4$.

37. Essendo, come tante volte si è detto, i quadrati in ragion duplicata de' loro lati, $\overline{nQ}^2$ sarà ad $\overline{AM}^2$ in ragion duplicata di nQ ad AM; ma nQ ad $AM = PQ$ sta per la costruzione, come 1 a 2. Dunque saranno $\overline{nQ}^2 . \overline{AM}^2 :: 1 . 4$; ma $\overline{nQ}^2 = Anr$; ed $\overline{AM}^2 = rAm$. Dunque $Anr . rAm :: 1 . 4$. Ciò che era &c.

Annotazione.

38. Queste tre ultime Proposizioni sono state appostatamente esposte, perchè contengono certe eguaglianze superficiali, delle quali dobbiamo aver motivo di favellare (n. 146.) in altro luogo.

PROPOSIZIONE IX.

Il rettangolo della minor assissa, spettante alla minor ordinata, nell' intiero diametro sta al rettangolo fatto delle due metà di esso diametro (cioè al quadrato del raggio) come la minore ordinata sta all' aggregato della maggiore, e minore. In breve. $Arn . Acr :: nQ . nQ + mM$.

39. Poichè dal n.22. abbiamo $\div\!\div\ PQ . GM . PQ + GM$, saranno anche le metà $\div\!\div\ nQ . mM . nQ + mM$. Indi dal n. 35 rilevasi $nQ . mM :: rQ . cM$; e però siccome $\div\!\div\ nQ . mM . nQ + mM$; così è $\div\!\div\ rQ . cM . rQ + cM$; d'onde seguita, che $\overline{rQ}^2 . \overline{cM}^2 :: rQ . rQ + cM$. Ma $\overline{rQ}^2 = Arn$; $\overline{cM}^2 = Acr$; e giacchè $rQ . rQ + cM :: nQ . nQ + mM$. Dunque pure avviene che $Arn . Acr :: nQ . nQ + mM$. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

40. Essendo $\overline{rQ}^2 . \overline{cM}^2 :: rQ . rQ + cM$. Dunque il quadrato del lato rQ di un 10gono sta al quadrato del raggio cM del circolo, in cui è inscritto, come esso lato alla somma del lato, e raggio suddetto.

CONSEGUENZA II.

41. Giacchè (num. 33.) $nQ . mM :: mM . mM + nQ$, perciò il seno nQ dell' angolo Qcr al centro di un 10gono sta al seno mM dell' angolo AcM al centro di un 5gono, come detto seno mM alla somma di detti due seni, cioè come mM ad $mM + nQ$.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Due raggi cQ, cG condotti dal centro c a due angoli Q, G massimamente distanti di un Poligono, comprendono l'angolo QcG, angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato.

42. Essendo il Poligono dato per esempio un 5gono, sarà dico, QcG l'angolo alla periferia di un 10gono. Imperocchè l'angolo McQ al centro del 5gono è doppio dell'angolo del 10gono al medesimo centro; ma l'angolo McQ è doppio dell'angolo MGQ, perchè l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla periferia. Dunque facendo centro in G, l'angolo MGQ metà dell'angolo McQ al centro di un 5gono sarà l'angolo di un 10gono al centro G di esso 10gono.

43. Ora quando dall'estremità del lato MQ al centro G di un Poligono si conducono due raggi MG, QG, la somma degli angoli eguali MQG, QMG è eguale all'angolo intiero alla periferia di detto Poligono; onde se di tutto il triangolo MQG, cioè da gr. 180 si sottrae l'angolo al centro MGQ, il residuo è il valore della suddetta somma. Ma gli angoli cGQ, cQG essendo eguali fra essi, e ciascuno eguale alla metà di MGQ, insieme uniti sono eguali all'angolo al centro MGQ. Dunque sottratti questi dal triangolo intiero GQc, cioè da gr. 180, rimane QcG = ang. GMQ + ang. MQG. Eguale, dico, all'angolo alla periferia di un 10gono, il di cui denominatore è doppio del denominat. del Poligono proposto.

Annotazione.

44. La dimostrazione è la stessa, e la proposizione è vera in qualunque Poligono, e perciò avrebbesi dovuto rimetterla ad altro luogo. Ma è stato necessario riporla quì in servigio della seguente

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

Primo. Le rette FM, MG, GH *sono tre lati di un* 10*gono ordinati in un circolo, che ha il centro in* B, *cioè nella periferia di un circolo circoscritto ad un* 5*gono* Z, H, B *&c. Secondo. Le rette poi* BQ. QG. GH *sono tre lati di un* 5*gono. Terzo. di un* 5*gono inscritto entro di un circolo, che passa pel centro* c *del* 5*gono dato* A, G, P *&c., e di cui il raggio sta al raggio del circolo circoscritto al* 10*gono suddetto* F, M, G, H, *come* cM *ad* MG.

45. Primo. Le rette FM, MG, GH sono primieramente eguali, perchè (n. 22.) GZ, ovvero BQ = MG. Ma FM, GH ciascuna = GZ ovvero BQ, giacchè sono poste in simili siti, dunque FM, MG, GH sono eguali. Secondo, gli angoli da esse rette compresi valgono gr. 144 angolo alla periferia di un 10gono; perchè essendo il triangolo FMQ simile al triangolo BMG, l'angolo FMQ = QPB è eguale all'angolo BMG, e ciascuno (num. 20) = gr. 72; gli angoli dunque FMQ + BMG = gr. 144. In terzo luogo i raggi HB, GB, MB, FB sono pure eguali; perchè (n. 24) EZ = EG (= BG = BM); ed EZ = BH = BF poste in simile sito. De' quali raggi poi perchè il punto di concorso B cade nella periferia di un circolo circoscritto al Poligono Z, H, B &c. perciò il loro centro trovasi nella suddetta periferia. Dunque le rette FM, MG, GH sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

46. Secondo. Le rette poi BQ, QG, GH sono primieramente eguali, per la ragion medesima addotta di sopra. Secondariamente gli angoli da esse formati valgono gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; imperocchè l'angolo BQP = QPB è (n. 20) = gr. 72. L'angolo PQG = gr. 36; tutto l'angolo dunque BQG, che comprende detti angoli BQP, PQG sarà = 72 + 36 = 108. Le rette dunque BQ, QG, GH so-

no

no tre lati di un 5gono. Ciò che era l'altra parte.

47. Terzo. Giacchè abbiamo trovato che QcG (n. 42) è l'angolo alla periferia di un 10gono, quel circolo, che circoscrive il 5gono, di cui è un lato QG, deve circoscrivere anche il 10gono, di cui sono due lati Qc, cG. Onde passando per gli angoli di esso 10gono, passa anche per un angolo c, che è centro del 5gono A, G, P &c.

48. Da ciò poi che si è detto (n. 42) nel principio della medesima antecedente Proposizione seguita, che i raggi di due circoli circoscritti a due Poligoni di un medesimo lato, e l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, siano, come cM ad MG. Imperocchè essendo McQ angolo al centro di un 5gono, risulta cM raggio di un circolo circoscritto a detto 5gono, di cui è lato MQ. E perchè MGQ è poi l'angolo al centro di un 10gono, la retta MG viene ad esser raggio di un circolo circoscritto a detto 10gono, e di cui è lato il medesimo lato MQ. Ora non altrimenti questi due altri Poligoni BQ, QG, GH &c. ed FM, MG, GH &c. sono eretti su i lati eguali, e sono l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, dunque i raggi de' circoli ad essi circoscritti saranno parimenti come cM ad MG. Ciò che in ultimo luogo restava &c.

Annotazione.

49. Questa Proposizione ha luogo in tutti i Poligoni di denominatore disparo, e se non fosse, che si cangiano certe circostanze che hanno bisogno di nuova prova, sarebbe soverchio il ripeterla, e molto più soverchio, perchè circa all' essenziale se ne darà altrove (n. 150) una dimostrazione generale.

ARTICOLO QUARTO.

Dell' Esagono.

PROPOSIZIONE.

Un Esagono inscritto entro un circolo sta all' Esagono circoscritto il medesimo circolo, come 3 a 4.

50. Dalla costruzione della Figura 6. ben si vede, che *d*hc è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esagono inscritto *d*h*n*, &c.; e che il trapezio *dm*hc è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esag. circoscritto *fmg* &c. e rileviamo ancora, che il triangolo *dm*h è la loro differenza; sicchè devesi provare, che *d*hc stia a *dm*hc, come 3 a 4.

Perciò essendo *d*h, *fg* parallele, avviene che *md*.*mf*::*mq*.*me*; ma *md*.*mf*:: 1.2 per la costruzione; dunque *mq*.*me*:: 1.2. Dunque *mq* = *qe*. Ora già (n. 2) si disse, che l'angolo *dm*h alla periferia di un Esagono è eguale all'angolo *de*h al centro di un triangolo equilatero *d*hc; onde i triangoli *dm*h, *de*h saranno eguali, perchè hanno la base *d*h comune, ed opposta ad un medesimo angolo. Ma il triangolo *d*hc è eguale a tre triangoli *de*h, e perciò eguale a tre triangoli *dm*h. Il trapezio poi *dm*hc quindi risulta eguale a 3 + 1 = 4*dm*h. Dunque il triangolo *d*hc sta al trapezio *dm*hc, cioè la sesta parte dell' Esagono inscritto sta alla sesta parte dell' Esagono circoscritto, come 3 a 4. E perchè in tutti stanno come le loro parti simili; dunque anche un Esagono inscritto &c. Ciò che era da dimostrare.

Con-

CONSEGUENZA I.

51. Quindi poichè $dhc = 3dmh$, sarà tutta l'area dell' Esagono inscritto, cioè $6dhc = 18dmh$. Così essendo $dmhc = 4dmh$, sarà tutta l'area dell' Esagono circoscritto, cioè $6dmhc = 24dmh$. Possiamo inoltre considerare, che il triangolo fmg è eguale a 4 triangoli dmh; ed il triangolo fgP è eguale a 3 triangoli fmg. Dunque il triangolo fgP è eguale a 12 triangoli dmh; e per una simil ragione è il triang. $cdh = dnh$, ed il triang. $dan = 3$ triang. dnh. Dunque il triangolo $dan = 3$ triangoli cdh; ma il triangolo cdh è $= 3$ triangoli dmh. Dunque il triangolo $dan = 9dmh$. Sicchè il triangolo dan sta all' Esagono dhn &c. come il triangolo fgP all' Esagono fmg &c. cioè stanno in questa proporzione geomet. $9 . 18 :: 12 . 24$.

CONSEGUENZA II.

52. Li due triangoli presi insieme sono ai due esagoni presi insieme nella medesima ragione, che un triangolo sta all' esagono inscritto nel medesimo circolo, cioè come 1 a 2. In fatti $\overline{9 + 12} = 21 . \overline{18 + 24} = 42 :: 1 . 2$. Perchè poi tanto l' esagono, quanto il triangolo inscritto sta all' esagono ed al triangolo circoscritto, come 3 a 4. Starà anche l'esagono più il triangolo inscritto, all' esagono più il triangolo circoscritto, come 3 a 4; onde

$\overline{9 + 18} = 27 . \overline{12 + 24} = 36 :: 3 . 4$.

ARTICOLO QUINTO.

Dell' Ettagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

53. Prolungati i lati dell' Ettagono (*Fig.* 7.) come si fece quelli del 5gono, il valore degli angoli di questa Figura risulta.

Ang. $qpo =$ Gr. $128 \frac{4}{7}$

$opD =$ Gr. $51 \frac{3}{7} = \frac{360}{7}$

$oDp =$ Gr. $77 \frac{1}{7}$

$oDE =$ Gr. $102 \frac{6}{7}$

$DEZ =$ Gr. $25 \frac{5}{7}$

Onde $DEZ = \frac{opD}{2} = \frac{oDp}{3} = \frac{oDE}{4} = \frac{qpo}{5}$

E però volendo tripartire l'angolo al centro dell' Ettagono si osservi, che l' angolo $oDp =$ gr. $77 \frac{1}{7}$. Col centro dunque in D, e con qualunque apertura Dp fatto un arco di gr. 60 (che geometricamente può farsi) e questo levato dall' angolo oDp, cioè da gr. $77 \frac{1}{7}$, restano gr. $17 \frac{1}{7} = \frac{51 \frac{3}{7}}{3}$, che viene ad essere l'angolo al centro di un 21gono.

Anno-

Annotazione.

54. Se per avventura fosse mestieri di dividere in tre parti eguali l'angolo alla periferia di questo Poligono, si noti che l'angolo DEZ è $= 25 \frac{5}{7}$, e la sua metà eEZ $= 12 \frac{6}{7}$, a cui se si aggiunge un angolo di gr. 30, che è pure geometricamente possibile, sarà $30 + 12 \frac{6}{7} = 42 \frac{6}{7}$ valore ricercato nella proposta trisezione.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore ZD (*che unisce i punti di concorso dei due lati* bh, po; *e delli due* qp, ho *prodotti*) *e due interiori* hp . bq *sono cont. geom. propor.* *Dico* $\div$ ZD . hp . bq.

55. Esaminata la disposizione della figura troviamo, che

$$\begin{matrix} Eb . bp :: Eh . hD \\ Qb . bp :: QT . To \end{matrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{matrix} Eb . Eh :: bp . hD \\ Qb . QT :: bp . To \end{matrix}$$

Ma To $=$ hD posta in simile sito.

E però $\left.\begin{matrix} Eb . Eh \\ Qb . QT \end{matrix}\right\} :: bp . hD$. Dunque (giacchè passa una medesima ragione, tra quelle quantità, che hanno con un' altra un medesimo rapporto) saranno Eb. Eh :: Qb. QT; Dunque Qb $=$ Eh; QT $=$ EZ, perchè poste in simili siti. Dunque Eb. Eh :: Eh . EZ. E però $\div$ Eb . Eh . EZ. Ovvero giovandomi piuttosto di disponere i termini. Così $\div$ EZ . Eh . Eb. Dunque saranno anche $\div$ ZD . hp . bq, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH. Ciò che era da dimostrarsi.

CON-

CONSEGUENZA I.

56. Le rette Dh, *pb*, *q*Y condotta per *d* saranno pure tre contin. geom. propor. perchè e sono fra esse parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH, e cominciano dai punti D, *p*, *q* estremi delle suddette cont. geom. propor. ZD, h*p*, *bq*.

CONSEGUENZA II.

57. Si potrebbero conseguire infinite altre proporzionali continue alle suddette guidando delle altre rette intercette nel medesimo angolo KEH, e alternatamente parallele quando alla *bp*, e quando alla *bq*.

PROPOSIZIONE III.

Tirata bx *parallela ad* ho, *sino all' incontro della retta* GE, *le rette* oZ, oh (*ovvero* xh), xb *saranno contin. geom. propor.*, *dico* ∺ oZ . oh (= xh) . xb.

58. Per preambolo a questa Proposizione bisogna prima crederne un' altra, qual' è, che dati tre termini continui pròporzionali, per esempio, EZ, Eh, E*b*, il primo sta al secondo (ovvero il secondo al terzo), come la prima differenza tra il primo e secondo, sta alla seconda differenza tra il secondo e il terzo. Sta, dissi, EZ . Eh (ovvero Eh . E*b*) :: Zh . h*b*. Il che parmi non solo per se stessa cosa vera, ma risulta anche dalla Figura; perchè essendo li triangoli h*op*, Z*o*D simili abbiamo ZD . h*p* :: *o*Z . *o*h; dunque perchè poi EZ . Eh :: ZD . h*p*. Seguita pure che EZ . Eh :: *o*Z . *o*h; ma *o*Z = Zh posta in simile sito; e per la medesima ragione *o*h = h*b*. Dunque EZ . Eh (ovvero Eh . E*b*) :: Zh . h*b*.

59. Sic-

59. Siccome però ZD.hp :: oZ.oh; così pure hp.bq :: xh (parallela ad oZ) . xb (parallela ad oh). E perchè poi ZD.hp :: hp.bq, saranno altresì oZ.oh :: xh.xb; onde essendo oh, xh per la costruzione eguali, perchè parallele alle px, po rispettivamente, saranno ∺ oZ.oh (ovvero xh).xb. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

60. Per la similitudine de' triangoli eZo, ohm (ovvero mhx), xbn, de' quali i lati omologhi oz, oh (ovvero xh), xb, ed anche eZ, mh, nb si ritrovano contin. geom. proporzionali, risultano tali anche le assisse, o sia le basi ∺ eo.om (ovvero mx).xn.

CONSEGUENZA II.

61. Dati tre termini continui proporzionali per esempio

$$\overset{2}{} \quad \overset{6}{} \quad \overset{18}{}$$

∺ 1. 3. 9. se si trova una quantità 18, che sia terza proporzionale alle due differenze 2, 6 di detti termini, l'aggregato di questa quantità 18 col terzo termine 9 sarà un quarto termine proporzionale alli tre dati 1.3.9; perchè le differenze di una serie qualunque di termini contin. proporzionali sono pure continue proporzionali; e però siccome determinate le due prime differenze sappiamo qual debba risultare la terza, così determinati i primi tre termini conseguiamo il quarto, coll' aggiungere la terza differenza al terzo termine. Quindi nella Figura essendo delli tre termini ∺ EZ.Eh.Eb le differenze Zh, hb, ovvero Zo, oh; ed essendo pure per questa Proposizione ∺ Zo.oh.xb; perciò sarà ∺ EZ.Eh.Eb.Eb + xb. Ma la retta condotta da q per d in Y essendo terza proporzionale delle due hD, bp, fissa pure nella retta HE una terza proporzionale EY alle due

ante-

antecedenti Eh, Eb; onde $\div\!\!\div$ EZ.Eh.Eb.EY; e quindi determina nel medesimo tempo la bY eguale ad xb.

CONSEGUENZA III.

62. Perchè poi hD, hp sono eguali, perchè opposte ad angoli eguali del triangolo isoscele Dhp, perciò Zh + hb, cioè Zb, che per esser in simile sito è eguale ad hD, sarà anche eguale ad hp; come non altrimenti sarà hb + bY = bq, cioè che di due ordinate condotte nell' area di un 7gono da angolo ad angolo, la minore è eguale all' aggregato della prima più la seconda differenza. La maggiore è eguale all' aggregato della seconda più la terza differenza delle quattro proporzionali suddette.

PROPOSIZIONE IV.

Delle tre proporzionali EZ, Eh, Eb, *la prima differenza sta alla seconda, come tutte due le differenze alla maggior ordinata. Stanno* Zh.hb :: Zb.bq.

63. Essendo le ho, bp parall. sarà zh.ho = hb :: Zb.bp = bq.

Annotazione.

64. E perchè hb + bY (num. 62) = bq seguita che la prima differenza sta alla seconda, come la somma della prima e seconda sta alla somma della seconda e terza, la qual somma è hb + bY.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Le tre proporzionali EZ, Eh, Eb *sono tali, che il primo termine è a tutte due le differenze, come tutte due dette differenze alla seconda differenza. Dico che* $\div$ EZ. Zb. hb. *Secondo. Il primo termine è a tutte due le differenze, come la somma del secondo e terzo termine a detto terzo termine. Cioè* EZ. Zb :: $\overline{\text{Eb} + \text{Eh}}$ (= EH). Eb.

65. Per disporsi a ricevere la presente Proposizione, bisogna prima provare, che una retta menata da T ad M sia eguale a TQ. Il che è certissimo; perchè sottratto l'angolo ToM (= gr. 128 $\frac{4}{7}$) da gr. 180, valore totale degli angoli del triangolo ToM, restano gr. 51 $\frac{3}{7}$, metà de' quali, cioè gr. 25 $\frac{5}{7}$ è il valore dell' angolo TM*o*. Ma questo per la prima Proposizione è pur valore dell' angolo TQ*o*, ovvero DEZ, che è lo stesso; dunque i lati MT, TQ del triangolo MTQ, perchè opposti ad angoli eguali, saranno parimenti eguali.

66. Ciò premesso ecco una nuova analogia oh. h*p* :: *o*T. TM; ma oh = h*b*; ed h*p* (n. 62) = Z*b* = *o*T, perchè poste in simili siti; come anche TM = EZ. Dunque sostituendo questi valori a quelli, risulta $\div$ h*b*. Z*b*. EZ; ovvero $\div$ EZ. Z*b*. h*b*. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Inoltre *o*T. TM :: *o*F. FV; e perchè *o*T = *b*Z; TM = ZE; E*b* = *o*F; FV = EH, avviene che *b*Z. ZE :: E*b*. EH. Ovvero EZ. Z*b* :: EH. E*b*. E per essere EH = E*b* + Eh risulta per fine EZ. Z*b* :: E*b* + Eh. E*b*. Ciò che era l'altra parte.

Anno-

Annotazione.

67. Ben si scorge, che quando fosse possibile la precisa divisione geometrica di una data retta EH in *b*, ed h, come esige la figura, sarebbe risolto il problema della descrizione geometrica dell' 7gono; giacchè avressimo poi due differenti maniere di stabilire la giusta posizione della retta KE rispetto ad EH, per formare un triangolo isoscele *q*E*b*, ovvero KEH, del quale gli angoli alla base fossero ciascuno tripli dell' angolo al vertice, in che consiste appunto tutta la difficoltà di questa descrizione. Imperocchè data che fosse la EH divisa in *b* ed h, come si è detto, e (relativamente alle due differenti maniere, che si tennero (n. 31, 32) per la descrizione del 5gono) fosse dalla metà di *b*h tirata verso *q* una perpendicolare indeterminata; la retta poi condotta da E per il punto *q*, dove la perpendicolare s' intersecasse con un arco fatto col centro in E, ed apertura E*b*, definirebbe il triangolo *b*E*q*, che sarebbe il proposto. O pure data la medesima retta EH divisa, come si disse, in *b* ed h, bastarebbe (per essere *b*H = HK, ed E*b* = bK) tirare una retta da E al punto K d'intersezione di due archi: uno col centro in H, ed apertura H*b*; l'altro col centro in *b*, ed apertura *b*E; perchè KEH sarebbe pur anche il proposto triangolo. Dunque se si potessero trovare geometricamente tre termini proporzionali tali ÷ EZ. Eh. E*b*, che parimenti risultasse ÷ EZ. Z*b*. h*b*; ed anche $EZ.Zb::\overline{Eb+Eh}$ (= EH). E*b*. E che perciò il problema ristretto da queste condizioni diventasse determinato, cioè che li tre termini proporzionali non potessero accadere in niun' altra ragione differente di quella che concerne alla figura, sarebbe data la divisione della retta EH in *b* ed h, come si richiede, e la descrizione dell' Ettagono risolta.

Ma

Ma questo è un affare, che non dobbiamo forse aspettarsi, che sia così presto spedito, e che lusinga tuttavia alcuni, perchè non è ancora stato dimostrato impossibile. Ragione per vero dire, che prova abbastanza quanto a torto si biasimino anche quelli, che procurano la quadratura del circolo, o la trisezione dell' angolo, pur che lo facciano in modo, che non perdano troppo di vista le altre più accessibili speculazioni. In fatti avrebbesi mai in Geometria fatta la scoperta di due Teoremi così importanti, come quelli che in un tratto di penna ha dimostrato il Chiarissimo Francesco Zanotti (1) circa alle figure circoscritte al Circolo, ed alla Sfera, se sgomentato dalle difficoltà, onde parevano circonvallati, non ci avesse pensato? Da Archimede sino a noi un sol Geometra entrato in questo campo aveva messo la falce ad una spica, ma era al Zanotti riservato di mieterlo. Così sogliono andare le cose, e le belle si ritrovano di raro, non perchè siano rare, ma perchè per lo più si cercano per le vie difficili, quando di raro furono trovate belle, che non fossero anche facili. Un celebre Francese (2) egualmente dotto e faceto non dubita, che non s' abbiano un dì a veder gli uomini a volare per l'aria, come gli uccelli. Ciò che io siccome non ardirei di affermarlo, così non sarei tanto avverso a questo fatto, che condannassi colui, che tentasse di rendere alla società un così importante servigio; massime quando con felicissimo successo furono già visti come Cigni (3) a nuotare ne' siti più difficili del Danubio. Ma torniamo a proposito.

 PRO-

(1) Lettera stampata in Firenze l' anno 1729.

(2) M.r de Fontanelle. *Entr. sur la pluralité des Mondes. Second. soire. On commence deja a voler un peu; plusieurs personnes differentes ont trouvé le secret de s'ajuster des aîles, qui les soutiennent en l'air, de leur donner du mouvement, & de passer par dessus des rivieres, ou de voler d'un clocher a un autre. A la verité ce n'a pas été un vol d'aigle, & il en a quelque fois coûté a ces nouveaux oysseaux un bras, ou une jambe; mais enfin cela ne represente encore, que les primieres planches, que l'on a mises sur l'eau, & qui ont été le commencement de la navigation.... L'art de voler ne fait encore, que de naître, il se perfectionnera, & quelque jour on ira jusque a la Lune.*

(3) Atti di Lipsia 1691. pag. 37.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo del lato del 7gono nella suttensa a due lati è eguale al rettang. della suttensa a tre moltiplicata in Zh, *ovvero* bS *differenza del primo termine* EZ *al secondo* Eh. *Diciam breve* bhp = Sbq.

68. Abbiamo già (n. 63) dimostrato, che Zh.h*b*::Z*b*.*bq*. Ma Zh = S*b*; Z*b* = h*p*; onde S*b*. h*b* :: h*p*. *bq*. Dunque *b*h*p* = S*bq*. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

69. Dunque anche le sole metà *b*hm = S*bn*. Ora essendo G*d*. *dt* :: G*b*. *bn*, segue che *dt* × G*b* = G*d* × *bn*; ma *dt* × G*b* = *b*h*m*, perchè siccome nel rettangolo *b*h*m* tutto il lato *b*h è stato moltiplicato per la metà di h*p*; così per contrario nel rettangolo *dt* × G*b* è moltiplicato tutto h*p* = hD = G*b* per la metà del lato *b*h = *dt*. Una simil cosa dite del rettangolo G*d* × *bn* rispetto al rettangolo S*bn*. Sono dunque *dt* × G*b*, ovvero G*d* × *bn* = *b*h*m*, ovvero S*bn*. Dunque tutto il rettangolo *b*h*p*, ovvero S*bq* a quello eguale sta al rettangolo *dt* × G*b*, ovvero G*d* × *bn* ad esso eguale, come 2 a 1.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettang. delle assisse spettanti alla minima ordinata td *sta al rettang. della terza differenza nella prima differenza delle quattro proporzionali* EZ, Eh, Eb, EY, *come* 1 *a* 4. *Dirò più chiaro così*: rto. YbS :: 1.4.

70. Essendo ∻ Y*b*.*b*h.hZ; come pure ∻ *r*o.*o*h (= *b*h).*om*.

saran-

ſaranno $ro.Yb :: hZ.om$; e però il rettangolo $rom = YbS$, perchè $bS = hZ$. Ma il rettang. rto ſta al rettang. rom, come $\overline{td}^2$ ad $\overline{oh}^2$; e $\overline{td}^2$ ſta ad $\overline{oh}^2$ in ragion duplicata delle radici td ad oh; ed inoltre $td.oh :: 1.2$. Dunque $\overline{td}^2.\overline{oh}^2 :: 1.4$. Sicchè $rto.rom :: 1.4$; e ſoſtituendo YbS ad rom riſulta finalmente $rto.YbS :: 1.4$. Ciò che era &c.

Conseguenza.

71. Perchè (n. 61) $bx = bY$; $oZ = bS$; ſarà il rettangolo $bx \times oZ = YbS$. Dunque $rto.bx \times oZ :: 1.4$. Per la medeſima ragione eſſendo anche $Yb \times hZ = YbS$ ſarà ancora $rto.Yb \times hZ :: 1.4$.

PROPOSIZIONE VIII.

Primo. Le rette QT, TN, NV ſono tre lati di un 14gono.
Secondo. Le rette QT, TM, MA ſono tre lati di un 7gono.
Terzo. Ma di un 7gono inſcritto entro un circolo, che paſſa &c. come ſi propoſe anche nel 5gono.

72. Le rette QT, TN, NV ſono eguali, perchè ſi è già (n. 65) dimoſtrato, che $TM = TQ$. Onde anche TN poſta in ſimile ſito è eguale a TQ, ad NV &c. In ſecondo luogo eſſendo gli angoli di qualunque trapezio QTNV preſi inſieme eguali a quattro retti; ed eſſendo pure gli angoli TQV, NVQ eguali, come anche QTN eguale TNV; l'angolo QTN ſarà complimento dell' angolo TQV ad un ſemicircolo. Ma l'angolo TQV ($=$ DEZ) è (n. 53) $=$ gr. $25\frac{5}{7}$, quali però ſottratti da gr. 180, reſtano gr. $154\frac{2}{7}$ valore

dell'

dell' angolo QTN. Ma gr. $154\frac{2}{7}$ è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 14gono. Dunque QTN, ovvero TNV sono angoli alla periferia di un 14gono; e quindi le rette QT, TN, NV sono tre lati di esso Poligono. Ciò che era la prima parte &c.

73. II. Le rette poi QT, TM, MA primieramente sono, come già dissi, (n. 65) eguali. Secondariamente essendo il triangolo QTM, ovvero TMA isoscele coi lati QT, TM, ovvero TM, MA eguali, gli angoli a detti lati opposti saranno parimenti eguali. Sottratti dunque TQM + QMT dalla somma di tutti gli angoli del triangolo QTM; cioè sottratto gr. $25\frac{5}{7} + 25\frac{5}{7} = $ gr. $51\frac{3}{7}$ da gr. 180, il residuo gr. $128\frac{4}{7}$ sarà il valore dell' angolo QTM, ovvero TMA. Ma per la prima di questo Articolo questo è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 7gono. Dunque gli angoli QTM, TMA sono angoli alla periferia di un 7gono; e perciò le rette QT, TM, MA sono &c. Ciò che era la seconda parte da dimostrare.

74. III. La prova poi dell' ultima parte, siccome è la medesima, che fu addotta (n. 47.) per il 5gono, così a quella mi rimetto.

ARTICOLO SESTO.

Dell' Ottogono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

75. Prodotti i lati dell' 8gono (*Fig.* 8.) fino all' interse-

zione

zione ultima possibile, gli angoli della Figura risultano, come siegue:

$$\text{Ang. } MNB = \text{Gr. } 135$$

$$\left.\begin{matrix} BNT \\ PEN \end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 45 = \frac{360}{8}$$

$$\left.\begin{matrix} BTN \\ BTE \end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 90$$

$$\text{Onde } PEN = = \frac{BNT}{1} = \frac{BTN\,;\,BTE}{2} = \frac{MNB}{3}$$

Volendo perciò tripartire il 45 angolo al centro di detto Poligono si sottragga dell' angolo PEN = gr. 45 un angolo di gr. 30, possibile geometricamente, che il residuo gr. 15 sarà l' angolo ricercato, angolo, che si otterrebbe anche per altra maniera, cioè dividendo detti gr. 30 per metà.

Annotazione I.

76. Brilla in un tratto la trisezione dell' angolo MNB, ovvero FGP alla periferia dell' 8gono; perchè guidate le rette GN, GD, queste dividerebbero l' angolo FGP in tre parti ciascuna eguale a gr. $45 = \frac{135}{3}$. Cioè gli angoli PGN, NGD, DGF sarebbero eguali ciascuno a gr. 45. Il che è manifesto, perchè sono tutti angoli, che avendo il vertice nel punto G della circonferenza, insistono su archi eguali PBN, NMD, DQF; ed essendo ciascuno di questi archi sotteso da due lati dell' 8gono, ciascun arco è di gr. $\overline{45 + 45} = 90$; e quindi, poichè gli angoli al centro sono doppj degli angoli alla periferia, detti angoli alla periferia PGN, NGD, DGF sono ciascuno di gr. 45.

Anno-

Annotazione II.

77. E' quì degno d'osservazione, che l'angolo al centro di questo Poligono è una terza parte dell'angolo alla sua periferia; e però l'angolo al centro di un 8gono è medio proporzionale tra un terzo di detto angolo al centro, e l'angolo intiero alla periferia. Cosicchè 15 . 45 :: 45 . 135; ovvero ∺ 15 . 45 . 135.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore RT (*che unisce i punti di concorso dei due lati* GP, NB; *e delli due* MN, PB *prodotti*), *e due interiori* PN, GM *sono cont. geom. propor. Dico* ∺ RT . PN . GM.

78. Menata la retta GN abbiamo EG . EP :: GN . PT; ma perchè (n. 76) si fece vedere, che l'angolo PGN = gr. 45, e però (n. 75) eguale all'angolo PEN, quindi anche i lati NE, GN a quelli opposti saranno eguali. Inoltre è NE = PE posta in simile sito. Dunque anche GN = PE. Ora sostituendo questo PE ad NG risulta EG . EP :: EP . PT. Ma per quella medesima ragione che è PE = NG, è anche PT = RE. E perciò sostituendo RE a PT, viene poi EG . EP :: EP . ER, cioè ∺ EG . EP . ER. Ovvero convertendo ∺ ER . EP . EG.

79. Ma le ordinate RT, PN, GM, perchè cadono dai punti medesimi R, P, G delle proporzionali medesime; e sono chiuse nel medesimo angolo HEK saranno nella medesima propor. che sono anche quelle. Onde ∺ RT . PN . GM. Ciò che era da dimostrarsi; e che fatta la costruzione d'intorno a quattro lati, abbiamo similmente dimostrato nel 7gono.

CON-

CONSEGUENZA I.

80. Hanno quì luogo le conseguenze appartenenti alla seconda Proposizione dell' 7gono. Imperocchè le parallele TP, NG, ed MY, che passa per F, sono pure contin. geom. proporzionali; e siccome ivi la qY, così quì la MY definisce nella EH un punto Y tale, che saranno ∺ ER. EP. EG. EY.

CONSEGUENZA II.

81. Menata Gx parallela a PB sino all' incontro dell' asse EQ, che passa per il centro C, accade che ∺ BR. BP. xG; verificandosi in appresso in questa figura, quanto si espose nella terza Proposizione del suddetto 7gono, con tutte tre le Conseguenze ivi dedotte.

CONSEGUENZA III.

82. Restringendomi solo a ricordare. 1. Che nel caso dell' 8gono, RG in vece di esser eguale all' ordinata PN, come succede nell'7gono, si ritrova solo eguale a PT; e così PY, in vece di esser eguale alla maggior ordinata GM, come ivi accade, quì si ritrova eguale ad NG. Secondo, è da osservare, che una retta YZ menata da Y parallela a GM passarà per il punto Q, e sarà quarta proporzionale alle altre tre. Mentre benchè passi YZ per Q, nonostante resta parallela ad MG, cioè l' angolo GYZ si mantiene tuttavia eguale all' angolo EGM = gr. $67\frac{1}{2}$; perchè essendo YM parallela ad NG, l' angolo GYF sarà = EGN = gr. 45; ma nel triangolo YGF anche l' angolo FGY è = gr. 45. Dunque anche i lati FG, FY opposti ad angoli eguali saranno eguali, ed il triangolo isoscele. Ora perchè FY = FG, perciò sarà

ſarà anche = FQ; ed il triangolo YFQ ſarà pure iſoſcele; di cui l'angolo YFQ ſarà per la coſtruzione compoſto di un retto YFA (= gr. 90) + AFQ (= LFG al vertice oppoſto = gr. 45) ſarà, diſſi, = gr. 90 + 45 = gr. 135; quali detratti da gr. 180, che è l'importare di tutti gli angoli del triangolo ſuddetto YFQ, ſarà gr. $22\frac{1}{2}$ metà del reſiduo 45, valore dell'angolo FYQ; quale aggiunto all'angolo GYF eguale, come ſi è detto, e gr. 45, riſultarà l'angolo intiero GYQ = $22\frac{1}{2} + 45 = 67\frac{1}{2}$ valore dell'angolo EGM. Siccome poi la YZ è menata dal punto Y, e che TP, NG, MY ſono tre contin. geom. proporzionali; così eſſa YZ ſarà pure terza proporz. alle NP, MG; e ſarà quarta a tutte tre TR, NP, MG, giacchè ſono anche compreſe tutte nel medeſimo angolo HEK. Onde ∺ TR.NP.MG.ZY.

CONSEGUENZA IV.

83. Una retta *ga* menata per A parallela alla ſuddetta MG, e compreſa nel medeſimo angolo HEK ſarà un'altra contin. proporzionale alle ſuddette. Perchè eſſendo (n. 78) PT = ER, indi perchè PT = RG poſta in ſimile ſito, ſarà ER = RG, e però ER. EG :: 1 . 2; ed eſſendo pure ER . EG :: RT . GM; quindi RT . GM :: 1 . 2. E però così ſarà anche EG . E*a* :: 1 . 2; imperocchè eſſendo per il ſuppoſto *a*A parallela ad MG, ed MA parallela a G*a* per la coſtruzione, viene G*a* = MA = GA; ma GA = EG poſta in ſimile ſito. Onde ſiccome EG. EG + GA :: 1 . 2; così del pari ſarà EG . EG + G*a* :: 1 . 2. Dunque anche GM . *ag* :: 1 . 2; dunque ∺ RT . GM . *ag*. Laonde eſſendo PN media proporzionale tra RT, ed MG, ed eſſendo poi YZ quarta proporzionale alle tre TR, NP, MG, anche detta YZ ſarà media proporzionale tra GM, ed *ag*; e però ∺ TR . NP . MG . ZY . *ga*.

Anno-

Annotazione.

84. Benchè nella prova di questa seconda Proposizione non mi sia servito del metodo praticato nella dimostrazione della seconda Proposizione dell' Articolo antecedente, che è precisamente l' istessa, avrei nonostante potuto farlo rettamente, senza nè meno introdurre nella costruzione una linea di più. Di che ciascuno, come vuole, può farne da se l' esperimento.

PROPOSIZIONE III.

La differenza, che passa tra il quadrato di una suttensa a due lati, e quello della suttensa a quattro (che è diametro del circolo circoscritto all' 8gono) è eguale a due quadrati del lato GP *più due rettangoli* GPR.

Dico $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. *Secondariamente dico, che* $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2 :: 1 . 2$.

85. Essendo l' angolo PRN retto, troviamo per la 47. d' Euclide Lib. I., che $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NR}^2$. Ed essendo, per la quarta Lib. II., $\overline{NR}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$; quindi $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$.

E perchè $\overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{GP}^2$; ed $NB = GP$; ed $NBR = GPR$, perciò risulta * $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$.

86. Andiamo adesso in cerca del valore di $\overline{GM}^2$. Laonde

de essendo l'angolo GNM retto per la costruzione, sarà $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NG}^2$; ma perchè è parimenti retto l'angolo GNE, e che (n. 78) GN = NE, il prodotto di tutta la GE nella sua metà definita dalla perpendicolare NR, cioè, per la 2. lib. II. Eucl., il rettangolo GER risulta eguale ad $\overline{NG}^2$. E perciò $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + GER$. Secondariamente avviene che $GER = \overline{GR}^2 + \overline{RE}^2$, cioè (perchè GR = RE) $GER = 2\overline{GR}^2$. E per questo $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GR}^2$. Ora, per la 4. lib. II. Eucl., $\overline{GR}^2 = \overline{GP}^2 + \overline{PR}^2 + 2GPR$. Dunque $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GP}^2 + 2\overline{PR}^2 + 4GPR$. Ed essendo poi $\overline{MN}^2 = \overline{GP}^2$; ed anche $2\overline{PR}^2 = \overline{GP}^2$ finalmente risulta

$$* \ \overline{GM}^2 = 4\overline{GP}^2 + 4\ GPR$$

; dal qual valore sottraendo ora

$$* \ \overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$$

resta la differ. tra detti due quadrati

$$\ldots + 2\overline{GP}^2 + 2GPR.$$

Onde concludo per ultimo, che $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. Ciò che era da dimostrarsi nella prima parte, e che sarebbe risultato in un tratto per altra via più spedita, se avessi aggiunto alla figura due rette, tralasciate per non confonderla.

87. Come che poi la seconda parte di questa Proposizione risulti dal solo valore de' quadrati suddetti, tuttavia la si può prestamente dimostrare anche così. Poichè (n. 83) ER . EG :: 1 . 2, abbiamo anche RT . GM :: 1 . 2; ma $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: RT . GM. Dunque $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: 1 . 2. Che era l'altra parte.

CON-

CONSEGUENZA.

88. Quindi seguita, che $RT \times GM \,.\, PN \times YZ :: 1 \,.\, 2$
Come parimenti QnB ($= \overline{Pn}^2$). QcB ($= \overline{Gc}^2$) :: 1.2. &c.

PROPOSIZIONE IV.

Il rettangolo della differenza YG *nella suttensa a quattro lati* GM *è doppio del rettang. della differenza* GP (*lato del poligono*) *nella suttensa* PN *a due lati. Dico* YGM = 2GPN.

89. Poichè (num. 80) ER . EP :: EG . EY sono anche le differenze RP . PG :: PG . GY; e componendo abbiamo RP . RP + PG :: PG . PG + GY; cioè RP . RG :: PG . PY; ed essendo pure per il luogo citato RP = LG. RG = PT; PY = GN; viene quest' altra analogia LG . PT :: PG . GN. E però il rettang. GPT = rettang. LGN. Perchè poi PN, GM sono nella medesima ragione di PT ad NG; sostituendo perciò da una parte dell' equazione PN in vece di PT, e dall' altra parte GM in vece di NG, sarà pure GPN = LGM.

Essendo ora siccome ∺ ER . EP . EG; così le differenze ∺ RP . PG . GY. E perchè il terzo termine EG è per la costruzione doppio del primo termine ER, così la terza differenza GY è doppia della prima differenza RP, ovvero LG, cui è eguale. Sarà perciò rettang. YGM = 2LGM; e perchè GPN = LGM, sarà per fine YGM = 2GPN. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

90, Perchè sono ∺ ER . EP . EG . EY . E*a*. ordinate nella me-

medeſima proporzione, che $\div\!\!\div$ RT. PN. GM. YZ. *ag*; perciò ſiccome il rettang. YGM accade che ſia eguale a due rettangoli GPN. Così ſarà GPN $=$ 2PRT; *a*YZ $=$ 2YGM. Onde in ſomma ſuppoſto il primo rettangolo PRT $=$ 1, ſarà GPN $=$ 2; YGM $=$ 4; *a*YZ $=$ 8 &c.

CONSEGUENZA II.

91. Eſſendo per la coſtruzione diviſa la HP per metà in L, ſiccome moſtrammo (n. 83) che la EG poſta in ſimile ſito è diviſa per metà in R, e riſultando dal n. 75 che LY $=$ LG, quindi anche HY $=$ GP; e perciò tutta la retta EH $= 3GP + 4PR$. Onde $\overline{HE}^2 = 17\overline{GP}^2 + 24GPR$. Queſta eſpreſſione ſomminiſtra il mezzo di comparare degli altri piani ſpettanti alla Figura.

PROPOSIZIONE V.

Le rette HG, GN, NV *ſono tre lati di un* 8*gono ordinato in un circolo, di cui il raggio è* $= \frac{cGH}{GP}$.

92. Le rette HG, GN, NV ſono in primo luogo eguali per la coſtruzione, e per il n. 78. L' angolo poi HGN, ovvero GNV è eguale all' angolo HGF + FGN, cioè all' angolo PEN ($=$ gr. 45) + BTN ($=$ 90) in tutto $=$ gr. 135 valore appunto dell' angolo alla periferia di un 8gono. Secondariamente ſiccome ſta il lato GP al raggio cG, così ſta il lato HG ad una quarta proporzionale, raggio del circolo circoſcritto a detto 8gono HGNV &c. Onde detto raggio riſulta, quale ſi propoſe $= \frac{cGH}{GP}$. Ciò che era il tutto, che dovevaſi dimoſtrare.

ARTI-

ARTICOLO SETTIMO.

Dell' Enneagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli dell' Enneagono.

93. Il valore degli angoli (*Fig.* 10. *Tav.* 30.) formati dai lati di un 9gono, che prodotti s'interſeccano reciprocamente riſulta così:

Ang. $De o = $ gr. 140

$q e o = $ gr. $40 = \frac{360}{9}$

$e q o = $ gr. 100

$e q N = $ gr. 80

$q NQ = $ gr. 60

$q NE = $ gr. 120

$NEA = $ gr. 20

$$\text{Onde } NEA = \frac{qeo}{2} = \frac{qNQ}{3} = \frac{eqN}{4} = \frac{eqo}{5} = \frac{qNE}{6} = \frac{Deo}{7}.$$

E quindi troviamo, che nei ſuddetti valori queſto Poligono non ammette la triſezione geometrica dell' angolo, nè al centro, nè alla periferia.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate una eſteriore mQ (*che uniſce i punti di concorſo di un lato* nD, *e di una ſuttenſa a due lati* Be; *poi di un altro lato* GB, *ed un' altra ſuttenſa a due lati* Do), *e due interiori* BD, G*n ſono contin. geom. proporzionali. Dico* ⩨ *m*Q. BD. Gn.

94. Coſtrutta la Figura come le antecedenti, rilevaſi che EG.

EG . GD :: EB . BQ ovvero EG . EB :: GD . BQ.
RG . GD :: R*d* . *de* RG . R*d* :: GD . *de*

Ma essendo BQ = *de* posta in simile sito, quindi
EG . EB }
RG . R*d* } :: GD . BQ; e però EG . EB :: RG . R*d*

Ma EB = RG per la costruzione; ed R*d* = E*m*, supposto il punto *m* determinato da una retta menata per D*o*, siccome il punto *d* è determinato da una retta menata per *e*B posta in simile sito. Dunque sostituendo queste a quelle nasce ∺ EG . EB . E*m*. Dunque senz' altro ∺ G*n* . BD . *m*Q. Ovvero ∺ *m*Q . BD . GN. perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

95. Quindi sono continue geom. proporzionali anche le ∺ QB . DG . *ny*, ed anche le ∺ *m*Q . BD . G*n* . *yt*. Come altrove si è notato in simili circostanze.

CONSEGUENZA II.

96. Se fosse condotta una retta da N ad I, in simil modo provarebbesi, che questa taglia la EV in un tal punto per esempio *x*, che EA . E*x* :: E*m* . EB. ovvero EB . EG. Onde calando da detto punto *x* una parallela alle sopraddette ordinate G*n* . BD &c. la qual fosse compresa nel medesimo angolo VEK, verrebbe parimenti G*n* . BD :: detta parallela condotta per *x*. AN.

PROPOSIZIONE III.

GB *sta ad* AB, *come* GA *ad* AE, *come* EG *ad* EV, *cioè* GB . AB :: GA . AE :: EG . EV.

97. Anche questa Proposizione si deduce facilmente dalla

costru-

costruzione della Figura, perchè primo EG. Gn :: EV. VK; ma Gn = GD posta in simile sito, e questa GD = GA, perchè l'angolo GAD essendo eguale all'angolo qnQ = gr. 60, è esso pure = gr. 60, angolo alla periferia di un triangolo equilatero. Onde essendo poi anche AG, AD eguali, viene GD = GA, e però anche Gn eguale al medesimo GA. Così VK essendo eguale ad RE posta in simile sito, ed essendo l'angolo RAE = gr. 60, sono i lati AR, RE, EA eguali, onde è VK = AE; e perciò la suddetta proporzione si trasmuta in questa EG. GA :: EV. EA; ovvero
* GA. AE :: EG. EV.

98. Secondariamente abbiamo oB. Be :: oF. FZ; ma oB = GB; Be = BA, perchè BA = Ae, e l'ang. BAe = gr. 60. Così oF = GA posta in simile sito; ed FZ = AE, imperocchè da gr. 180 somma di tutti gli angoli del triangolo FoZ tolto via l'angolo FoZ = gr. 140 angolo alla periferia di un 9gono, resta gr. 40, metà de' quali gr. 20 viene ad essere il valore dell' angolo FZo; ma questo è pur valore dell' angolo FTZ, ovvero AEN posto in simile sito, e per la prima Proposizione = gr. 20. Essendo perciò in quest' altro triangolo FTZ gli angoli FTZ, TZF eguali, anche i lati TF, FZ ad essi opposti saranno eguali. E perchè AE è posto in simile sito di FT sarà anche ad esso eguale, sarà dunque eguale anche ad FZ. Sostituendo dunque nella proporzione questi valori risulta * GB. BA :: GA. AE. Onde poichè avemmo poco fa * GA. AE :: EG. EV. Ora finalmente troviamo GB. BA :: GA. AE :: EG. EV. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE IV.

Così sta aG *a* GB, *come* aB *a* BD, *come* aA *ad* AE.
Cioè aG . GB : : aB . BD : : aA . AE.

99. A prima vista la Figura ci dà *qo*.*oe* :: *q*B.BD :: *q*F . FH. Ma incontriamo queste eguaglianze *qo* = *a*G ; *oe* = GB ; *q*B = *a*B ; *q*F = *a*A ; perchè poste ciascuna in simili siti della Figura ; ed è pure FH = AE, perchè FH = FZ posta in simile sito, e che per la ragione addotta nell' antecedente è eguale ad AE. Dunque presi in iscambio questi valori *a*G . GB :: *a*B . BD :: *a*A . AE. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

100. Menata una retta da A ad F, potrebbesi questa sostituire in vece del termine *a*A, perchè sono eguali. Sono poi eguali, perchè dal triangolo ABF sottratto l'angolo ABF = D*eo* = (n. 93) gr. 140, la metà 20 del residuo 40 (giacchè FB, BA sono eguali) sarà il valore dell'angolo AFB, a cui se si aggiunge l'angolo BF*a* = QN*q* posto in simile sito, e per il num. suddetto = gr. 60, sarà la somma di detti angoli AFB + BF*a*, cioè AF*a* = 20 + 60 = 80 ; ma F*a*A = *eq*N posto in simile sito, e per il luogo sopracitato = gr. 80. Dunque giacchè AF*a*, A*a*F sono eguali, anche i lati A*a*, AF a detti angoli opposti saranno eguali, com'era proposto.

PROPOSIZIONE V.

Così sta SB *ad* SA, *come* BG *ad* AB.

101. Dalla costruzione della Figura si ricava, che guidata

data AN ſiano *qo . oe* :: *q*A . AN; ovvero *qo . q*A :: *oe* . AN. Ma *qo* = SB; *q*A = SA; *oe* = BG, per eſſere poſte ciaſcuna in ſiti ſimili; ed AN = BA, perchè eſſendo AN parallela ad S*o*, ed oppoſta al medeſimo angolo ABN, ſiccome S*o* è per la coſtruzione eguale ad SB, così AN è eguale ad AB. Fatta dunque la ſoſtituzione di queſte quantità a quelle, la ſuddetta proporz. ſi traſmuta così SB . SA :: BG . BA. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Primo. Le rette TF, FH, HM *ſono tre lati di un* 18*gono.*

Secondo. Le rette TF, FZ, ZY *ſono tre lati di un* 9*gono.*
inſcritto entro un circolo, che paſſa pel centro C *del* 9*gono interiore* oBG *&c.*

Terzo. e tiene il proprio nella periferia dell'eſter. T,R,E *&c.*

102. La prova della prima e ſeconda parte di queſta Propoſizione è la medeſima che ſi usò negli Articoli antecedenti. Circa poi alla terza parte baſta oſſervare, che i lati di quel 9gono TR, RE, EY &c. ſono eguali ai lati TF. FZ, ZY di queſto. Onde dobbiamo pure aſſerire, che riſultino eguali anche i raggi de' circoli circoſcritti a detti 9goni; e quindi ſiccome queſto paſſa con la ſua circonferenza pel centro di quello, così quello reciprocamente deve con la ſua paſſare pel centro di queſto. E tanto baſti per la intiera prova di quanto era propoſto.

ARTICOLO OTTAVO.

Del Decagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di esso Poligono.

103. Prodotti i lati di questo Poligono sarebbero ancora un' intersezione, come (*Fig.* 12. *Tav.* 30.) la fanno i due lati AF, MB in S, e li due TA, BD in V, ma ne verrebbe poi un 10gono interrotto, e solo risultante da due differenti 5goni intrecciati insieme ad eguali distanze. Inoltre non sarebbero nè men nuovi nella Figura gli angoli, che ne verrebbero di più; perchè uno LSX, ovvero LVI è = gr. 36 = DBQ, che già abbiamo anche lasciando la Figura così; l' altro *a*XS, ovvero *m*LV = gr. 108. è pure eguale all' angolo BQD, come or ora osserviamo.

Ang. MBD = gr. 144

$$\left.\begin{matrix}DBQ\\XSL\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 36 = \frac{360}{10}$$

$$\left.\begin{matrix}aXS\\BQD\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 108$$

$$\left.\begin{matrix}EQX\\QXE\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 72$$

$$\text{Onde } XSL = \frac{DBQ}{1} = \frac{EQX \,;\, QXE}{2} = \frac{BQD \,;\, aXS}{3} = \frac{MBD}{4}.$$

E perchè abbiamo già (n. 20) veduto, come si conseguisca geometricamente l'angolo = gr. 24, la sua metà 12 sarà = $\frac{36}{3}$ eguale ad un terzo dell' angolo al centro del 10gono, cioè eguale all' angolo al centro di un 30gono.

Anno-

Annotazione.

104. E' da notare che 48. il doppio del ſuddetto n. 24. ſarà eguale a $\frac{144}{3}$, eguale perciò ad un terzo dell' angolo alla periferia del propoſto Poligono.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una eſteriore xf *(che uniſce i punti di concorſo di un lato* AF, *e di una ſuttenſa a due lati* BE; *poi di un altro lato* MB, *ed un' altra ſuttenſa a due lati* FD), *e due interiori* FB, AM *ſono contin. geom. propor. Dico* $\div$ xf. FB. AM.

105. Prodotta quinci e quindi in Y ed f la DF ſuttenſa a due lati, e prodotta anche in x la BE pur ſuttenſa a due lati; e menata poi la xf, FB, AB, AM abbiamo

SA . AB :: SF . Ff ovvero SA . SF :: AB . Ff
VA . AB :: VY . YD ovvero VA . VY :: AB . YD.

ma YD = Ff perchè poſta in ſimile ſito. Onde

SA . SF }
VA . VY } :: AB . Ff; e però SA . SF :: VA . VY.

Ma VA = SF poſta in ſimile ſito; ed VY = Sx, ſupposto il punto x determinato da una retta guidata per BE, ſiccome il punto Y è determinato da una retta menata per DF poſta in ſimile ſito. Dunque ſoſtituendo queſti termini a quelli riſulta SA . SF :: SF . Sx; ovvero $\div$ SA. SF. Sx. E quindi $\div$ AM . FB. xf, ovvero $\div$ xf. FB. AM, perchè ſono parallele, e compreſe nel medeſimo angolo MSA. Ciò che era da dimoſtrarſi, e che (ſuppoſta la coſtruzione d' intorno a cinque lati) è quanto ſi è pur dimoſtrato nella ſeconda del Poligono antecedente.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Primo. Le tre ordinate LX, FB, KN *sono contin. geom. propor. sono* ∺ LX . FB . KN.

Secondo. LX + FB = KN; onde ∺ LX . FB . LX + FB.

106. Le ragioni che principalmente abbondano in questo Poligono sono le medesime che regnano nel 5gono. La maggior parte sono linee rette divise *media & extrema ratione*. Pertanto dobbiamo osservare anticipatamente che i lati LB, SL del triangolo SLB sono eguali, perchè opposti agli angoli DBQ XSL (n. 103) eguali; ed anche FB essendo per la medesima ragione eguale ad LB viene ad esser eguale a detto lato SL, che è eguale ad LA = FK, perchè per la simetrìa della figura LA, LB, FK sono eguali. Non altrimenti FN è eguale ad SF; ed NK (perchè per l'eguaglianza degli angoli opposti è eguale ad FN) risulta pure eguale ad SF; siccome per tale eguaglianza è anche LX = LF = FC &c.

107. Essendo pertanto SF . FB :: SK . KN; ovvero FB . SF :: KN . SK; ed essendosi trovato di sopra (n. 106.) FB = SL; KN = SF; perciò SL . SF :: SF . SK; cioè ∺ SL . SF . SK. Quindi anche le ordinate cadenti dai punti L, F, K comprese nel medesimo angolo KSN saranno contin. geom. propor. cioè saranno ∺ LX . FB. KN. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

108. Ma LX = LF, come sopra si disse; KN = SF. Dunque avremo ∺ LF. SL. SF; e la retta SF divisa *media & extrema ratione* in L, ed eguale ad LF + SL. Perciò non altrimenti sarà LX + FB = KN. In fatti si dimostrarebbe anche per altra via, che essa retta è così divisa in P, che KP = LX; PN = FB. Dunque per fine ∺ LX. FB. LX + FB. Ciò che era l'altra parte.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

L'ordinata FB *taglia l'asse* eq (*cioè la* EP *suttensa a quattro lati del* 10*gono*) *così, che* ∺ en. nc. $\overline{en + nc}$ = cq.

109. Essendo primieramente gli angoli EQX, EXQ alla base del triangolo XEQ (n. 103) = gr. 72., e l'angolo al vertice QEX = gr. 36 risultano gli angoli alla base di detto triangolo XEQ doppj ciascuno dell'angolo al vertice. Ma perchè si scorge dalla Figura, che a questo è simile anche l'altro triangolo XGM, perchè hanno due lati XE, XG, ed anche XQ, XM coincidenti, ed i lati EQ, GM paralleli, quindi del pari ambidue avranno gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice.

110. Ora quando si meni una retta da X per D al centro C, perchè questa forma l'angolo XcM eguale agli angoli di detti due triangoli, cioè eguale a gr. 72. (giacchè XcM doppio dell'angolo DcB al centro di un 10gono è a gr. 72. eguale) perciò taglia (n. 27) il lato GM del triang. XGM *media & extrema ratione* in c. Taglierà dunque così anche il lato EQ in D del triang. XEQ. E quindi avremo ordinati in progression continua geometrica li triangoli XDQ, EQX, MXE, ovvero BLF; e non altrimenti le basi ∺ DQ. QX. LF; ma DQ = *m*F posto in simile sito; QX = XD = DE per l'eguaglianza degli angoli opposti, ed anche eguale ad FA posto in simile sito. E per questa medesima ragione LF = *m*A = AK. Dunque ∺ *m*F. FA. *m*A, ovvero AK. Onde le ordinate tirate da detti punti nell'asse *eq* lo divideranno nella medesima proporzione, ed avremo ∺ *en. nc.* $\overline{en + nc}$ = *cq*. Ciò che era &c.

CON-

CONSEGUENZA I.

111. Essendo mK, DP per la costruzione parallele e chiuse tra le mD, KP parallele parimenti per la costruzione, le mK, DP risultano eguali. Onde calata giù un' ordinata da F, il diametro DP del circolo circoscritto al 10gono sarà da essa segato così ∺ $Do . oc . \overline{Do + oc} = cP$.

CONSEGUENZA II.

112. Conciossiacchè abbiamo avuto di sopra (n. 107) ∺ SL (= LA). SF (= LK). SK. e quivi (n. 110) abbiamo ∺ mF. FA. AK; ed anche ∺ DQ. QX. LF. alla qual progressione si potrebbe aggiungere il quarto termine LA, siccome nella progressione de' triangoli XDQ, EQX, MXE si potrebbe aggiungere il triangolo MXG, ovvero LAZ, che ha per base LA, onde verrebbero ∺ DQ. QX. LF. LA; quindi poi sarebbero tutti li termini contin. propor. schierati su d'una medesima retta così ∺ mF. FA (= QX). LF. LA. LK. SK.

CONSEGUENZA III.

113. Essendo simili i triangoli aEe, aFn, aGc, ed inoltre (n. 110) ∺ mF. FA. AK, cioè ∺ aE. EF. FG. poste in simili siti, saranno ancora ∺ $ae . en . \overline{nc} = an$.

PROPOSIZIONE V.

Il quadrato del raggio del circolo circoscritto ad un 10gono è eguale al rettang. del suo lato nella suttensa a tre di essi lati. Dico $\overline{Ac}^2 = AFB$.

114. Abbiamo trovato (n. 112') ∺ AF. FL (= LX). LA; ma FL, ovvero LX = Ac, prima perchè LX, AC sono

per

per la costruzione parallele, e poi sono anche intercette fra due altre LA, Xc parallele pure per la costruzione; onde debbono essere anche eguali. La retta poi LA è (n. 106) = FB. Sostituendo pertanto Ac ad FL, ovvero LX, ed FB ad LA, la proporzione si trasforma così ÷ AF. AC. FB. Onde viene $\overline{Ac}^2 = AFB$. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

115. Poichè A*m*, *m*D, Dc sono ciascuna eguale al raggio Ac, e che l'angolo A*m*D è eguale all'angolo AFB, potrebbesi al quadrato $\overline{Ac}^2$ sostituire il rombo A*m*Dc, ed al supposto rettangolo AFB il romboide AFB; onde verrebbe il rombo A*m*Dc = AFB romboide; e levando a tutti due la parte comune AF*o*c restarebbe c*o*B = F*m*D*o*.

116. Ora deriva dal n. 110, che FB è divisa *media & extrema ratione* in *o*; sarà dunque per la 30. Lib. 6. Euclide c*o* = *o*B; onde sia cD × *o*B = B*o*D + c*o*B. Ma cD × *o*B = AF*o*c; indi c*o*B = F*m*D*o*; fatta dunque la sostituzione risulta AF*o*c = $\overline{BoD + FmDo}$ = *m*FB = FB × *o*D. Quindi perchè *o*c . *o*D : : *n*c . *ne* seguita gentilmente che Ac × c*n* = FB × *ne*; onde tutta AM × c*n*. FB × *ne* : : 2. 1.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo di una retta guidata dal centro c *della Figura fino all' ultima intersezione* S *moltiplicata per* BH *suttensa a due lati del 10gono interiore è eguale al rettang. di una* NG *suttensa a 4. lati del 10gono esteriore moltiplicata per la retta condotta da detto* c *alla seconda intersezione* a. *Dico* CS × BH = NG × ca.

117. Avvegnachè questa Proposizione porti in fronte una

cert' aria recondita, non laſcia di non eſſere ſempliciſſima, per non dire ridicola. Baſtava dire che $ca = BH$; e che $cS = NG$; d'onde veniva toſto $ca . cS :: BH . NG$, e quindi $cS \times BH = NG \times ca$.

Le rette ca, BH ſono eguali, perchè ſono due parallele intercette fra due altre parallele LZ, FN, come chiaro appariſce dalla ſola ſimetrìa della Figura; dalla quale pure, e da quanto altrove (num. 106.) ſi diſſe riſultando $SF = FN$; $FB = FK$; $SB = KN$; e non altrimenti $Fc = cB$; $FG = GK$; e tutte le Fc, cB, FG, GK eguali, ſiegue che cS; GN ſiano pure eguali per eſſere diagonali di due trapezj $SFcB$, $NKGF$ ſimili ed eguali, perchè formati dalle ſuddette linee riſpettivamente eguali.

PROPOSIZIONE VII.

Primo. Le rette KF, FB, BN *ſono tre lati ordinati nella periferia di un 5gono.*

Secondo. Le rette LF, Fc, cB, BX, XL *ſono cinque lati di un 5gono perfetto.*

Terzo. Il di cui centro è ſituato nel punto d' interſezione delle due ſuttenſe BE, DF.

118. I. Primieramente le rette KF, FB, BN ſono (n. 106.) eguali. Secondariamente da gr. 360, ſomma di tutti gl'angoli del trapezio $FEDB$ ſottratti li due alla periferia di un 10gono FED, EDB, cioè gr. $\overline{144 + 144} = 288$, e diviſo per metà il reſiduo 72, ſarà gr. 36 valore dell'angolo EFB, il quale ſottratto da tutto l'angolo $EFK =$ gr. 144, reſta gr. 108. per l'angolo BFK. Ma queſto è valore dell' angolo alla periferia (n. 20) di un 5gono. Dunque per eſſere anche gli angoli KFB, FBN eguali, le rette KF, FB, BN ſono tre lati &c. Ciò che era la prima parte.

119. II. Le rette poi LF, Fc, cB, BX, XL ſono (n. 106.) egua-

eguali, e facilmente si rileva, che gli angoli da esse compresi sono ciascuno eguali a gr. 108 valore dell' ang. alla periferia di un 5gono. Dunque le rette LF, Fc &c. che era l'altra parte da dimostrarsi.

120. III. Facilmente trovasi anche che il centro di questo pentagono sia collocato nel punto d'intersezione delle due rette BE, DF senza trattenersi con disaggio in una positiva dimostrazione; onde suppongasi già soddisfatto anche a quest' ultima parte.

ARTICOLO NONO.

Del Endecagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geom. dell' angolo al centro dell' Endecagono.

121. Ecco preventivamente (*Fig.* 13., *Tav.* 31.) esposti i valori di questo Poligono.

Ang. $hba = \text{gr. } 147\frac{3}{11}$

$abQ = \text{gr. } 32\frac{8}{11} = \frac{360}{11}$

$bQa = \text{gr. } 114\frac{6}{11}$

$aQA = \text{gr. } 65\frac{5}{11}$

$QAD = \text{gr. } 81\frac{9}{11}$

$QAR = \text{gr. } 98\frac{2}{11}$

$SRA = \text{gr. } 49\frac{1}{11} = \frac{147\frac{3}{11}}{3}$

$$SRX = \text{gr. } 130\,\frac{10}{11}$$

$$RXE = \text{gr. } 16\,\frac{4}{11}$$

Onde $RXE = \frac{abQ}{2} = \frac{SRA}{3} = \frac{aQA}{4} = \frac{QAD}{5} = \frac{QAR}{6}$ $= \frac{bQa}{7} = \frac{SRX}{8} = \frac{hba}{9}$.

Quindi basta sottrarre un angolo, come geometricamente si può, di gr. 120 dell'angolo $SRX =$ gr. $130\,\frac{10}{11}$, che il residuo gr. $32\,\frac{8}{11}$ sarà la terza parte dell'angolo al centro del 11gono, e sarà l'angolo al centro di un 33gono.

Annotazione I.

122. La trisezione geometrica dell'angolo alla periferia di questo Poligono non può essere più felice, perchè l'angolo $SRA =$ gr. $49\,\frac{1}{11}$ è appunto $= \frac{147\frac{3}{11}}{3}$ cioè eguale ad un terzo dell'angolo h*ba* alla periferia del 11gono.

Annotazione II.

123. Notate che il valore degli angoli RXE, SRA, h*ba* è come 1 . 3 . 9. cioè in tripla proporzione geometrica. Così ancora gli angoli *abQ*, *aQA*, SRX sono come li tre numeri ordinati in proporzione dupla geometrica 2 . 4 . 8.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una eſteriore rq *(che uniſce i punti di concorſo di un lato* ab*, e di una ſuttenſa a tre lati* nh*; poi di un altro lato* mn*, e di un' altra ſuttenſa a 3 lati* be*), e due interiori* nb*, ma ſono contin. geom. propor. Sono dico* ∺ rq. nb. ma.

124. Coſtrutta pertanto la figura, come già ſi ſuole, rileviamo che $\begin{array}{l} Fm . mb :: Fn . nq \\ Bm . mb :: Bd . dh \end{array}$ ovvero $\begin{array}{l} Fm . Fn :: mb . nq \\ Bm . Bd :: mb . dh \end{array}$ Ma $dh = nq$. poſta in ſimile ſito della figura. Dunque $\left.\begin{array}{l} Fm . Fn \\ Bm . Bd \end{array}\right\} : mb . nq$; e però $Fm . Fn :: Bm . Bd$. Ma abbiamo $Bm = Fn$; $Bd = Fr$, ſuppoſto il punto r determinato da una retta condotta per be; ſiccome il punto d fu determinato dalla retta hn prodotta e poſta in ſimile ſito. Soſtituendo dunque queſti termini a quelli, viene $Fm . Fn :: Fn . Fr$; ovvero ∺ $Fm . Fn . Fr$. D'onde per conſeguenza riſulta ∺ $ma . nb . rq$ perchè ſono parallele, calate giù dai punti m, n, r compreſe nel medeſimo angolo mFa. Dunque poichè è lo ſteſſo ∺ $rq . nb . ma$ ciò che era da dimoſtrarſi.

CONSEGUENZA.

125. Per la medeſima ragione ∺ $nq . mb . ya$; e calata da y la yt abbiamo pure ∺ $rq . nb . ma . yt$.

Annotazione I.

126. Non d'altra maniera provarei, che Fc; FV ed un' altra compreſa tra F ed un punto ſu la FV determinato per una

una retta condotta per fN, sarebbero tre contin. geometriche proporz. siccome anche di leggiero si scorge che $Fm . Fn :: Fc . FV :: Fx$ (supposto il punto x determinato da una retta, che fosse guidata per gG). FT.

Annotazione II.

127. Le eguaglianze lineari che occorrono in questo Poligono sono $Tn = nb = nq$; $TK = KH$; $TB = TL$; $fc = pc$ condotta che fosse; $oP = PZ$; $NV = Vn$; e forse ve ne saranno dell' altre da me non avvertite, tutte risultanti dall' eguaglianza degli angoli ai quali rispettivamente sono opposte. Perciò può chi vuole sostituire queste ad altri termini, che sono nelle proporzioni regnanti in questo Poligono, il numero delle quali proferiremo a suo (n. 144) luogo, non avendo voglia presentemente d'inoltrarmi di più.

PROPOSIZIONE III.

Le rette ZM, MH, H& sono tre lati di un 22gono. Le rette ZM, MR, RX sono tre lati di un 11gono descritto in un circolo &c. come fu enunziato altrove.

128. Abbiamo detto poco fa (n. 127.) che $TB = TL$; ed è $TB = ZM = H\&$ poste in simile sito; così pure $TL = MH = MR$ poste in simile sito. Dunque le rette ZM, MH, H&, ed anche ZM, MR, RX sono eguali. Che poi gli angoli ZMH, MH& siano eguali, ed angoli alla periferia di un 22gono; e che gli angoli ZMR, MRX siano alla periferia di un 11gono, si rileva nella medesima maniera che si tenne ne' Poligoni antecedenti. E così nel medesimo modo si dimostra che questo Endecagono è inscritto entro un circolo, che passa &c.

AR-

ARTICOLO DECIMO.

Del Dodecagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli di questo Poligono.

139. Esaminato il valore degli angoli di questo Poligono (*Fig.* 14., *Tav.* 32.) lo troviamo quale segue

Ang. abd = gr. 150

$\left.\begin{matrix} bdq \\ HFD \end{matrix}\right\}$ = gr. 30 = $\frac{360}{12}$

$\left.\begin{matrix} bqd \\ BHF \end{matrix}\right\}$ = gr. 120

$\left.\begin{matrix} drB \\ BDG \end{matrix}\right\}$ = gr. 60

$\left.\begin{matrix} rGD \\ rBq \end{matrix}\right\}$ = gr. 90

Onde HFD $= \frac{bdq}{1} = \frac{drB;\,BDG}{2} = \frac{rGD;\,rBq}{3} = \frac{bqd;\,BHF}{4} = \frac{abd}{5}$

Se per questi valori fosse possibile la trisezione geometrica dell'angolo di gr. 30 al centro di questo Poligono; ovvero di gr. 150 alla periferia, sarebbe data anche la descrizione geometrica del 9gono. Perchè aggiungendo gr. $\frac{30}{3}$ cioè gr. 10 al medesimo 30, verrebbero gr. 40 valore dell' angolo al centro di detto 9gono. Così pure sottratto da gr. 90 un terzo di gr. 150, cioè gr. 50, restarebbero pur anche gr. 40 per il suddetto angolo al centro di detto 9gono. Ma non abbiamo nè l'uno nè l'altro, perchè veramente queste

queste tali descrizioni dipendono da un' arte tuttavia incognita di dividere la periferia di un circolo in parti date.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore Xp (*che unisce i punti di concorso di un lato* la, *e di una suttensa a tre lati* ob; *poi di un altro lato* go, *e di un' altra suttensa a tre lati* ae), *e due interiori* oa, gl *sono cont. geom. propor. dico* ∺ Xp . oa . gl.

130. Guidate le linee necessarie alla costruzione quali sono in figura abbiamo

$Fg . ga :: Fo . op$	ovvero	$Fg . Fo :: ga . op$.
$Kg . ga :: KN . Nb$		$Kg . KN :: ga . Nb$.

Ma $Nb = op$ posta in simile sito; onde

$\left.\begin{array}{l} Fg . Fo \\ Kg . KN \end{array}\right\} :: ga . op$; e però viene $Fg . Fo :: Kg . KN$.

Ma $Kg = Fo$ posta in simile sito della Figura. Siccome $KN = FX$, supposto il punto X determinato da una retta condotta per *a e*; come il punto N è definito da una retta menata per *b o* posta in simile sito. Onde fatta la sostituzione risulta $Fg . Fo :: Fo . FX$; ovvero ∺ $Fg . Fo . FX$; e quindi anche le parallele comprese nel medesimo angolo ∺ $Xp . oa . gl$. Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione applicata d'intorno a sei lati) abbiamo precisamente dimostrato anche nella seconda del 11gono.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Sta Fg *ad* Fo, *come* Fm *ad* FG. *Cioè* Fg . Fo :: Fm . FG.

131. La Figura ci presenta tosto da osservare, che

$$\left.\begin{array}{l} Fg . ga :: Fm . mQ \\ Kg . ga :: Kn . nq \end{array}\right. \text{ ovvero } \begin{array}{l} Fg . Fm :: ga . mQ. \\ Kg . Kn :: ga . nq. \end{array}$$

Ma $mQ = nq$ posta in simile sito; onde

$$\left.\begin{array}{l} Fg . Fm \\ Kg . Kn \end{array}\right\} :: ga . mQ \text{; e però } Fg . Fm :: Kg . Kn;$$

ma $Kg = Fo$ posta in simile sito; $Kn = FG$ per la stessa ragione. Dunque abbiamo Fg . Fm :: Fo . FG; ed alternando Fg . Fo :: Fm . FG . Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

132. Sicchè qualunque parallele cadenti dai punti *g*, *o*, *m*, G comprese nel medesimo angolo *a*F*g*, saranno pure proporzionali, come per esempio le *gl*, *oa*, una retta condotta da *m* a quelle parallela, GQ.

PROPOSIZIONE IV.

Determinato su la Fg *il punto* y *per una retta condotta da* Q *per* B. *Dico che* ∹ Fm . FG . Fy.

133. Determinato su la Kg il punto *x* da una retta guidata per BG, abbiamo

$$\left.\begin{array}{l} Fm . mQ :: FG . Gf \\ Kn . nq :: Kx . xB \end{array}\right. \text{ ovvero } \begin{array}{l} Fm . FG :: mQ . Gf. \\ Kn . Kx :: nq . xB. \end{array}$$

Ma $nq = mQ$; $xB = Gf$ perchè poste in simili siti. Dunque

$\left.\begin{array}{l} Fm\,.\,FG \\ Kn\,.\,Kx \end{array}\right\}$ $mQ\,.\,Gf$; e però $Fm\,.\,FG :: Kn\,.\,Kx$.

Ma $Kn = FG$ posta in simile sito; e $Kx = Fy$, determinato il punto y da una retta guidata per QB, siccome il punto x fu determinato da una retta guidata per BG, posta in simile sito. Dunque fatta la sostituzione $Fm\,.\,FG :: FG\,.\,Fy$. Ovvero $\div\; Fm\,.\,FG\,.\,Fy$. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA.

134. Qualunque parallele comprese nel medesimo angolo gFl cadenti dai punti m, G, y saranno pure &c.

Annotazione I.

135. Essendo (n. 129.) l'angolo $gDa = BDG =$ gr. 60; ed i lati Dg, Da eguali, il triangolo Dga è equilatero; onde $ga = gD$. Ma $gD = DF$, perchè gli angoli DaF, DFa essendo per il num. suddetto eguali, anche i lati Da, DF a quelli opposti sono eguali. E quindi risulta Fg doppia di ga; Fo doppia di op; Fm doppia di mQ &c.

Anotazione II.

136. Le eguaglianze poi lineari, che s'incontrano in questa figura sono molte. Imperocchè essendo, come ho pur ora detto, il triangolo Dga equilatero, quindi ciascuna retta parallela ad uno de' suoi lati ga, e compresa nel medesimo angolo gDa, ha le sue eguali. Onde $ob = bD$; $mq = qD$; $GB = BD$ &c. Inoltre perchè gli angoli (n. 129) rGD, ovvero rBD; ed rBq sono retti, e la metà dell'angolo GrB ($= bqd$ $=$ gr. 120); cioè l'angolo $DrB =$ gr. 60, è eguale all'angolo drB pure $=$ gr. 60, seguita che DB, Bb lati opposti ad angoli eguali siano eguali; siccome pure per la medesima

ſima ragione ſeguita, che ſia $Dr = rb$; $De = eb$; $Do = ob$; $Dh = hb$; $DS = Sb$; $DT = Tb$; ſupponendo già deſcritte le linee che mancano in figura.

Si rileva pure, che il raggio *ce* del circolo circoſcritto ad un 12gono ſia eguale ad *eb* ſuttenſa a due lati di detto 12gono, perchè eſſa diventa lato di un Eſagono.

Si ritrova ancora nell' antecedente modo, che $Dt = tc$; $De = ec$; $Dm = mc$; $Dn = nc$ &c., così non altrimenti $KV = VD = DP$. Non deve parer nè men ſtrano, che ſia $BD = \frac{Do}{2}$; giacchè il triangolo *o*BD è ſimile al triangolo F*ag*; onde ſiccome il lato di queſto F*g* l'abbiamo trovato doppio del lato *ga*, così il lato ſimile D*o* di quello viene ad eſſer doppio del ſimile lato BD.

137. Tutte queſte eguaglianze diverſe ſi ſono annoverate, acciò, volendo, ſi poſſano ſoſtituire in luogo d'altri termini compreſi nelle proporzioni ſpettanti a queſto Poligono, e delle quali ſi produrrà il numero (n. 145.) a ſuo luogo.

PROPOSIZIONE V.

Primo. Le rette FQ, QZ, ZR *ſono tre lati di un* 12*gono.*

Secondo. Le rette FQ, QM, MV *ſono tre lati di un Eſagono.*

Terzo. Inſcritto entro un circolo che paſſa &c.

138. La dimoſtrazione di queſta Propoſizione è a un di preſſo la medeſima, che le altre coſe pari, fu propoſta negli Articoli antecedenti. Perchè dette rette ſono eguali; e perciò che riguarda gli angoli fra eſſe intercetti, le prime comprendono un angolo di gr. 150 alla periferia di un 12gono; le altre di un angolo di gr. 120., angolo alla periferia di un 6gono &c.

ARTICOLO UNDECIMO.

Osservazioni sopra li Poligoni in generale.

Tratteniamoci ora alquanto d'intorno a certi rapporti, o convenienze, che occorrono ne' Poligoni in generale, e che occuparono già la mia attenzione, e non dovrebbero niente meno soddisfare la curiosità de' Filosofi. Come sarebbe o rispetto al valore degli angoli, o al numero delle intersezioni, che si generano producendo i loro lati, o pure rispetto al numero delle ordinate conducibili da angolo ad angolo; così al numero delle contin. geom. propor. e ad altre particolarità, che proporrò d'esaminare nelle seguenti Proposizioni. Onde

PROPOSIZIONE I.

Gli angoli formati dai lati prodotti di un Poligono tanto più sono acuti, quanto più sono distanti dal centro della Figura.

139. La ragion di ciò spicca da se, nè può avvenirne altrimenti, perchè nel 12gono per esempio immaginando che il lato *oc*, rispetto al lato *og* supposto immobile, muti luogo, e passi in *de*, poi in *bd*, indi in *ab* &c. gli angoli compresi tra questi due lati prodotti *eog*, *dmg*, *bGg*, *aDg* &c. si devono fare più acuti, perchè secondo che detti lati occupano su la periferia un punto più l'uno dall' altro distante, il loro punto d'intersezione s'allontana, finchè pervenuti detti lati a due situazioni diametralmente opposte, e massimamente distanti, quali sono le due *go*, *ul*, svanisce il punto d'intersezione, e detti lati prodotti sono arrivati nell' infinito, e perciò diventati paralleli; dal qual stato pro-

progredendo innanzi ritornano, e diventano anche convergenti dalla parte opposta, come *u3*, *og*, che s'intersecano nel punto R.

CONSEGUENZA.

140. Non v' ha dubbio perciò, che un lato, il quale come tangente muovasi per tutti i punti della periferia di un circolo, non formi, rispetto ad un altro latò prodotto ed immobile, tutti gli angoli appartenenti ad infiniti Poligoni.

Annotazione.

141. Per sapere poi con qual legge detti angoli scemino più che dal centro sono rimoti, notaremo principalmente che (trasportata per esempio parte della *Fig.* 10. del 9gono nella 11. *Tav.* 30.) ne' Poligoni di denominatore disparo l'angolo al centro (che è eguale all'angolo esterno QD*e*) sta all' angolo alla periferia *e*D*n* sempre come 2 al numero denominatore meno 2: nell' addotto esempio come 2 a 7 = 9 − 2. Ne' Poligoni di denominatore pari detto angolo al centro sempre sta all' angolo alla periferia, come 1 alla parte minore di due parti ineguali massime possibili del numero denominatore: nel 8gono per esempio come 1 a 3 (= 8 − 5) parte minore delle due parti ineguali massime possibili 3, e 5. Ciò che si rileva anche dalla prima Proposizione spettante a ciascun Poligono, e da una Tavola, che or ora (n. 156.) produrremo, che comprende la ragione appunto di detto angolo al centro, all'angolo, alla periferia.

142. In secondo luogo osservate ciò che è costante in tutti i Poligoni, cioè che li due angoli alla base di ciascun triangolo descritto in Figura BEN, *o*NQ, *e*QD presi

ſi inſieme, ſono eguali all' angolo *eDn* alla periferia; onde BEN + BNE = *eDn*: cioè (ſegnati i numeri, che ſono i minimi eſponenti del valore riſpettivo di ciaſcun differente angolo, che occorre in figura) 1 + 6 = 7. Così ancora ONQ + OQN = *eDn*: cioè 3 + 4 = 7. Reſta *e*QD + *e*DQ = *eDn*: cioè 5 + 2 = 7. Gli angoli poi di ciaſcun triangolo preſi inſieme ſono eguali al numero denominatore, perchè eſſendo l'angolo eſterno ſempre eguale a 2, riſulta 1 + 6 + 2 = 7 + 2 = 9; e gli altri 3 + 4 + 2 = 7 + 2 = 9; e 5 + 2 + 2 = 7 + 2 = 9.

143. Finalmente per venire a quanto appartiene in particolare a queſta Annotazione, ſi deve riflettere, che ne' Poligoni di denominatore diſparo, gli angoli più che ſono diſtanti dal centro della Figura decreſcono dalla medeſima parte a deſtra de' lati prodotti, e dalla medeſima parte a ſiniſtra creſcono per il binario; coſicchè decreſcono come 7. 5. 3. 1 a deſtra; ovvero creſcono a ſiniſtra come 2. 4. 6. Nei Poligoni poi di denominatore pari decreſcono per la medeſima parte a deſtra, e creſcono a ſiniſtra per unità.

PROPOSIZIONE II.

Le diverſe ſerie de' termini proporzionali, che troviamo nella figura di un Poligono coſtrutta come ſi è fatto, ſono tante, quante ſono le interſezioni diverſe, che in eſſa occorrono ſopra una medeſima linea.

144. Queſta Propoſizione è evidentiſſima, perchè ſe per determinare il principio ad una ſerie di termini proporzionali ſi ſiamo in fatti prefiſſi di voler prendere un punto di ſtazione in ogni diverſa interſezione che occorra ſu la medeſima retta, il numero delle dette ſerie non può non

eſſere

essere eguale al numero delle intersezioni. Quindi (*Fig.* 7. *Tav.* 29.) nell' Ettagono per esempio 3 essendo detti diversi punti d'intersezione E, Z, h, sono 3 anche le serie. La prima rispetto al punto E, cioè

EZ. ZD :: Eh. h*p* :: E*b*. *bq* :: ES. SN :: EH. HK.

La seconda rispetto al punto Z, perchè

Zh. ho :: Z*b*. *bp* :: ZS. SM :: ZH. HV :: ZQ. QE.

La terza rispetto al punto h. Onde

h*b*. *bo* :: hS. SD :: hH. HA :: hT. TZ :: hF. FE.

145. Ma ciò che molto più importa d'osservare, è che vi ha un certo numero di termini (sono 10 nell' addotto esempio) per ciascuna serie, dai quali risultano diverse eguaglianze de' pieni prodotti da detti termini proporzionali moltiplicati insieme. Supponiamo che detti termini siano

2. 1 :: 4. 2 :: 6 * 3 :: 8. 4 :: 10. 5.

Onde avremo prima queste eguaglianze

$1 \times 4 = 2 \times 2; 2 \times 6 = 4 \times 3; 3 \times 8 = 6 \times 4; 4 \times 10 = 8 \times 5.$

E poi quest' altre $2 \times 5 = 1 \times 10; 4 \times 4 = 2 \times 8$. E perciò nell' 7gono sono 6 eguaglianze per ciascuna serie, e sono 18 per tutte insieme. La Tavola annessa presenta in un tratto il numero delle intersezioni, e serie di ciascun Poligono; il numero de' termini di ciascuna serie; ed il numero delle eguaglianze prodotte dai predetti termini moltiplicati insieme.

TAVOLA

Del numero delle Interſezioni, e Serie, Termini, ed Eguaglianze de' piani compreſi in queſti Poligoni.

Nel	3gono	Interſ.ni e Serie ſono	1	Termini		Egual.	
	4gono		1				
	5gono		2		6		3 × 2 = 6
	6gono		2		6		3 × 2 = 6
	7gono		3		10		6 × 3 = 18
	8gono		3		10		6 × 3 = 18
	9gono		4		14		9 × 4 = 36
	10gono		4		14		9 × 4 = 36
	11gono		5		18		12 × 5 = 60
	12gono		5		18		12 × 5 = 60
							240

Si vede dunque che il 10gono per eſempio ha 4 interſezioni, e per conſeguenza 4 ſerie di differenti proporzioni; ciaſcuna delle quali ſerie è compoſta di 14 termini; da quali ſi creano 9 eguaglianze diverſe di differenti piani. Queſte eguaglianze eſſendo 9 per ciaſcuna ſerie, moltiplicate perciò per il numero delle ſerie 4, riſultano 36. La ſomma poi di tutte le eguaglianze di tutti i Poligoni compreſi nella Tavola preſe inſieme aſcende a 240. Delle quali negli Articoli antecedenti io non ne ho moſtrate che pochiſſime, o perchè non mi parve che aveſſero una certa aria d'eleganza, o ancora perchè io era perſuaſo, che altri poteſſe di leggiero ripaſſarle ſotto a' ſuoi occhj da ſe, ſoſtituendo anche in eſſe que' termini, i quali foſſero (come abbiamo avvertito alcuna volta) trovati in figura ad altri termini eguali.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Le ordinate condotte dai angoli di un Poligono al diametro del circolo, in cui è inscritto, producono un numero di piani comparabili eguale alla somma di una progressione crescente per unità, meno l'ultimo termine, che sempre è eguale al numero delle ordinate moltiplicato per 3.

146. E' da osservare in primo luogo, che a qualunque ordinata, perchè fa nel diametro due assisse, hanno relazione tre quadrati, o 3 rettangoli, de' quali comparandoli insieme, si potrebbe indagarne il rapporto. Nel 5gono per esempio (*Fig.* 4. *Tav.* 29) all' ordinata M*m* appartengono 3 quadrati $\overline{AM}^2$, $\overline{mM}^2$, $\overline{Mr}^2$. ovvero li 3 rettangoli equivalenti *rAm*, *rmA*, *Arm*; all' ordinata Q*n* si aspettano li 3 quadrati $\overline{rQ}^2$, $\overline{nQ}^2$, $\overline{AQ}^2$, oppure li 3 equivalenti rettangoli A*rn*, A*nr*, *r*A*n*. Ora nel pentagono, come ben si vede, le ordinate sono due M*m*, Q*n*; bisogna dunque moltiplicare questo numero 2 dell' ordinate per il 3 numero de' piani, che appartengono a ciascuna ordinata, e verrà 6, cioè 6 piani, o quantità superficiali, o termini che si vogliono comparare a due a due.

Supponiamo dunque che questi sei termini siano per esempio ed esaminiamo quanti binarj ne risultino. Ben si vede, che sono $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 =$ alla somma di una progressione crescente per unità meno 6 ultimo ter-

a.	*b*.	*c*.	*d*.	*e*.	*f*
ab.	*bc*.	*cd*.	*de*.	*ef*.	
ac.	*bd*.	*ce*.	*df*.		
ad.	*be*.	*cf*.			
ae.	*bf*.				
af.					

termine eguale, come ſi è moſtrato, al numero dell' ordinate moltiplicato per 3. Ciò che era quanto dovevaſi dimoſtrare.

Annotazione I.

147. Lo ſcopo dunque di queſta Propoſizione è di moſtrare primieramente quanti piani appartenghino per queſto ſolo riguardo ad un Poligono dato. Secondo quanti caſi di comparazione di eſſi piani contenga: cioè quanti binarj, giacchè non ſi potrebbe ſapere il rapporto di eſſi piani, ſe non ſi paragonaſſero inſieme a due a due.

Per altro non è biſogno di andare in cerca del ſopraddetto numero 15 col formare tutta la piramide; ma baſta operare ſecondo la regola per rilevare la ſomma di una progreſſione, di cui foſſe l'ultimo termine per eſempio il 5 numero diſparo, e foſſe pure 5 il numero de' termini, come nelle progreſſioni creſcenti per unità accade. Onde ſupponendo l'ultimo termine $= a$; il numero de' termini $= b$; la ſomma de' termini $=$ M; verrebbe M (nel noſtro caſo $= 15$) $= \overline{a + 1 \times \frac{b-1}{2}} + \frac{a+1}{2}$. E ſe il numero de' piani invece di eſſere 6, foſſe per eſempio 9, coſicchè l'ultimo termine della progreſſione riſultaſſe 8 numero pari, in tal caſo ſarebbe M ($= 36$ numero cercato) $= a + 1 \times \frac{a}{2}$.

Anotazione II.

248. Non mi pare coſa ſuperflua di produrre una Tavola, che contenga il numero delle Ordinate di ciaſcun Poligono; il numero delli Piani, che ſi devono comparare a due a due; ed il numero de' Binarj, che riſulta da eſſo numero de' piani.

TAVOLA,

Che contiene il numero delle Ordinate; il numero de' Piani spettanti ad esse Ordinate; il numero de' Binarj, o sia de' casi di comparazione a due a due.

Nel	Ordinate	Piani	Binarj
3gono	1	3	3
4gono	2	6	15
5gono	2	6	15
6gono	3	9	36
7gono	3	9	36
8gono	4	12	66
9gono	4	12	66
10gono	5	15	105
11gono	5	15	105
12gono	6	18	153
			584

Di tutti questi 584 Piani non ne ho esposti altri che tre nel 5gono ivi già (n. 38.) rimarcati, per non caricarmi di un esame senza fine, e perchè fors' anche sarebbe stato difficile o impossibile l'additare nella figura li esponenti del loro rapporto. Laonde basti per ora di aver conosciuto, quanto per questo riguardo, e per quanto si è mostrato nella Proposizione antecedente, quanto dissi, avrebbesi a fare in un solo Poligono qualunque, di cui venisse a taluno in animo di darne un minuto ragguaglio.

PROPOSIZIONE IV.

Descrivendosi i Poligoni nella maniera da me insegnata, intorno allo stesso centro, intorno a cui si descrive un Poligono di dato denominatore d, *se ne descrive tante volte un altro di dato denominatore* a, *quante volte* d *contiene* a; *talmente che se* d = na, *il Poligono di denominatore* a *si descrive intorno al centro dell' altro Poligono di denominatore* d *numero di volte* n.

149. Supponiamo $n = 2$; $a = 4$; quindi sarà il numero denominatore $d = n \times a = 2 \times 4 = 8$, e la Figura sarà un 8gono, il quale (*Fig.* 8. *Tav.* 29.) nell' esser descritto fa nascere appunto 2 quadrati *e*T*d*h, LR*b*I. Ma non potevamo già aspettarsi altrimenti, imperocchè trovandosi di 4 lati PB, NM, DQ, FG, due PB, DQ, e poi due altri NM, FG alternatamente disposti l'uno dirimpetto all'altro e paralleli, prodotti poi anche che sono stati, perchè perciò non si guastò la loro situazione, non poterono che formare un quadrato *e*T*d*h. Così degli altri quattro lati ancora GP, BN, MD, QF, perchè due GP, MD, indi due altri BN, QF sono pure paralleli e ordinati faccia a faccia, prodotti che siano, formano un altro quadrato LR*b*I.

Nel 10gono (per addurre un altro esempio) si trovano i lati ED, BM, HR, PT, AF vicendevolmente inclinati con un angolo eguale all'angolo DQB di gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; e perciò prodotti che siano formano un 5gono *m*Q*g* &c. Per la medesima ragione prodotti poi che siano i lati DB, MH, RP, TA, FE formano un altro 5gono *apb* &c. perchè appunto nel produr-

re

re essi lati non però si guasta la loro reciproca convergenza: discorso che, le altre cose pari, milita per qualunque altro Poligono.

PROPOSIZIONE V.

Descrivendo alla mia maniera un Poligono di denominatore disparo, si descrivono anche 3 lati di un altro di doppio denominatore, e 3 di un altro di denominatore eguale.

150. Nell' ultima Proposizione di tutti li antecedenti Poligoni di denominatore disparo abbiamo dimostrato, che la cosa si passa in fatti così, come abbiamo proposto. Ma non abbiamo addotto più precisamente il perchè così debba veramente succedere, e ciò è appunto quanto, producendo una dimostrazione non già particolare, ma generale, intendo ora di fare.

Trasportata dunque per maggior chiarezza parte della Figura 7.ª per esempio nella 9.ª torno a ridire (*Fig.* 7. e 9., *Tav.* 29.)

Primo. Che le rette QT, TN, NV, indi QT, TM, MA sono eguali.

Secondo. Che l'angolo QTN ovvero TNV compreso dalle prime è angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono *b d a* &c.

Terzo. Che l'angolo QTM, ovvero TMA compreso dalle seconde è angolo alla periferia di un Poligono simile al Poligono dato *b d,a* &c.

151. Però circa al primo capo essendo la linea TM parallela al lato *da* prodotto in V, le due TM, *d*V fanno alla medesima retta QV gli angoli TMQ, *d*VQ sempre eguali; ma l'angolo *d*VQ è eguale all' angolo MQT posto

sto in simile sito della Figura. Dunque sarà l'angolo TMQ eguale all'ang. TQM. Dunque saranno pure eguali i lati TM, TQ, e per conseguenza tutte le altre rette poste in simile sito MA, TN, NV.

152. Circa al secondo capo è da sapere, che messa una retta TN opposta all'angolo T*d*N angolo alla periferia di un Poligono dato *b d a* &c. in modo che il triangolo TN*d* sia isoscele, l'angolo esterno QTN sarà sempre angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *b d a* &c. E ciò perchè (n. 20.) essendo l'angolo T*d*N alla periferia più l'angolo al centro di un Poligono eguale alla somma di tutti gli angoli del triangolo TN*d*, ed essendo poi l'angolo T*d*N eguale per il supposto all'angolo alla periferia, li due angoli *d*TN, TN*d* presi insieme saranno eguali all'angolo al centro, ed un solo *d*TN (cioè la metà di detto angolo al centro) sarà l'intiero angolo al centro di un Poligono di denominatore doppio del denominatore di quest' altro Poligono *b d a* &c. Ora essendo l'angolo al centro più l'angolo alla periferia eguale a due retti, sarà l'angolo QTN complimento a due retti dell'angolo *d*TN; e però sarà angolo alla periferia del suddetto Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *b d a* &c.

153. Per il terzo capo basta avvertire, che per essere TM parallela ad *ad*, e però facendo ad una medesima retta Q*d* gli angoli QTM, Q*da* eguali, deve risultare il Poligono eretto su il lato QT, ovvero TM, simile al dato poligono *bda* &c. Dunque descrivendo un Poligono &c. Ciò che era in tutto da dimostrare.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

Primo. L' angolo retto sta all' angolo al centro di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al 4 numero costante.

Secondo. L' angolo retto sta all' angolo alla periferia di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al denominatore, più la differenza di esso denominatore al 4 numero costante.

154. Questa Proposizione è comunemente ricevuta, ma non so che sia dimostrata. Quando perciò io ho detto, che l'angolo retto sta all' angolo al centro di un Poligono (sia per esempio un pentagono), come sta il suo denominatore al 4 numero costante, era lo stesso che dire, che $\frac{1}{4}$ di un circolo sta ad $\frac{1}{5}$, come 5 a 4. Ma ciò è evidente perchè $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} :: \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{20} :: 5 \cdot 4$. E perchè poi qualunque sia il Poligono dato abbiamo sempre da una parte dell' analogia per primo termine di comparazione $\frac{1}{4}$, cioè un angolo retto, così dall' altra parte avremo sempre per ultimo termine un 4.

155. Per prova poi della seconda parte di questa Proposizione è da riflettere che (*Fig.* 4., *Tav.* 29.) l'angolo alla periferia GPQ più l'angolo esterno QPB (ovvero McQ al centro, cui è eguale) di qualunque Poligono essendo eguale a due retti, ed essendo pure un retto aggiunto a se stesso eguale a due retti, l'angolo retto si ritrova medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia; e quindi per la natura delle progressioni aritmetiche la diffe-

renza

renza tra l'angolo al centro, e l'angolo retto risulta la medesima che passa tra detto angolo retto, e l'angolo alla periferia.

Ciò premesso l'angolo retto, più la differenza di detto angolo all'angolo al centro, sarà eguale all'angolo alla periferia, cioè sarà = 5 + 1; giacchè nel medesimo esempio del 5gono abbiamo osservato, che l'angolo retto sta all'angolo al centro, come 5 a 4, onde la differenza risulta = 1. Ma il numero denominatore è 5. Dunque l'angolo retto (= 5) sta all'angolo alla periferia (= 5 + 1), come il denominatore 5 sta al medesimo denominatore 5 + la differenza 1 di esso denominatore 5 al 4 numero costante. Un tal discorso sussiste, le altre cose pari per qualunque altro Poligono; onde s'intende dimostrato, quanto era proposto.

Annotazione. I.

156. Una Tavola esibita (1) dal P. Andrea Tacquet mostra la ragione, che nei Poligoni passa tra l'angolo retto, e l'angolo alla periferia, acciò per essa si possa sopra un dato lato ergere un qualunque dato Poligono. Io qui inerendo a quanto contiene la presente Proposizione ne produrrò un'altra, la quale non solo rappresenti la suddetta ragione, ma anche quella del medesimo angolo retto all'angolo al centro. Perchè quindi in un circolo dato si possa descrivere un qualunque Poligono, non già tentando la divisione sopra tutta la periferia del dato circolo, ma sopra un solo quadrante. Avvertendo che i comuni divisori adoperati nel costruerla non sono sempre i massimi, acciò più chiaro apparisca quant' ho proposto.

TA-

(1) *Elem. Geom.* Lib. 4.; Prop. 16.; Prob. 2.

TAVOLA.

	Ang. al centro	Ang. retto	Ang. alla perif.ª					Diff.ª
4gono	90	90	90	::	4	4	4	0
5gono	72	90	108	::	4	5	6	1
6gono	60	90	120	::	4	6	8	2
7gono	$51\frac{3}{7}$	90	$128\frac{4}{7}$	::	4	7	10	3
Nel 8gono	45	90	135	::	4	8	12	4
9gono	40	90	140	::	4	9	14	5
10gono	36	90	144	::	4	10	16	6
11gono	$32\frac{8}{11}$	90	$147\frac{3}{11}$	::	4	11	18	7
12gono	30	90	150	::	4	12	20	8

Notate che questo segno :: significa, che li tre numeri anteposti al segno sono in proporzione ordinata, come li tre numeri posteriori. Onde trovando nel 7gono per esempio $90 . 128\frac{4}{7} :: 7 . 10 = 7 + 3$, vuol dire, che l'angolo retto 90 sta a $128\frac{4}{7}$ angolo alla periferia di un ettagono, come il denominatore 7 sta al medesimo denominatore 7 + il 3 differenza di detto 7 al 4 numero costante: sta, dissi, come 7 a 10. Onde divisa la periferia di un quadrante in parti 7, ed aggiunto un arco di 3 altre di dette parti, sarà tutto detto arco misura dell'angolo alla periferia del proposto 7gono. Se per il medesimo esempio si consideri, che nella Tavola v'è $51\frac{3}{7} . 90 :: 4 . 7 .$ significa che diviso un quadrante di un circolo dato in parti sette, l'arco eguale a 4 di esse parti sarà misura dell'angolo al centro del medesimo 7gono.

Annotazione II.

157. Nella medesima Tavola si vede ancora, che l'angolo retto è medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia, siccome abbiamo asserito di sopra; perchè nell' 11gono per esempio stando i numeri 4. 11. 18, come $32\frac{8}{11}$. 90. $147\frac{3}{11}$, dall' addizione de' piccoli esponenti $4 + 18 = 11 + 11$ si rileva molto più presto che anche $32\frac{8}{11} + 147\frac{3}{11} = 90 + 90$. Da questa Annotazione seguita poi, che noto l'angolo al centro si viene in cognizione dell'angolo alla periferia, e reciprocamente. Così nel 9gono per esempio noto l'angolo al centro 40, avremo $90 + 90 - 40 = 140$ angolo alla periferia. Siccome $90 + 90 - 140 = 40$ angolo al centro di detto 9gono.

PROPOSIZIONE VII.

Qualunque numero (maggior del 3) di lati eguali ordinati nella periferia di un circolo dato (Tav. 33.) può fornire tre contin. geom. propor. mp, bq, dg; *delle quali la prima* mp *unisce i punti di concorso di due lati prodotti* db, gq, *e di due* qa, bn *prodotte pure, e suttense ad 1 lato, se nella Figura i lati sono 4 (Fig. 15); a 2 lati, se i lati sono 5 (Fig. 16); a 3 lati, se i lati sono 6 (Fig. 17), &c. le altre due* bq, dg *uniscono le estremità di due lati nella Figura massimamente distanti.*

158. Ora non vogliate già aspettare la prova di questa elegantissima Proposizione, perchè è la medesima generalissima adoperata nelle seconde degli Articoli antecedenti. Sappia-

piate piuttosto, che essa contiene in somma non solo quanto si enunziò nelle seconde Proposizioni suddette. Ma propone inoltre che dette seconde Proposizioni siano vere in qualunque altro Poligono superiore. Cioè che la seconda per esempio del 7gono sia vera non solo nell'8gono, come si dimostrò n. 78; ma in qualunque altro Poligono superiore 9gono, 10gono &c. quando si restringa la costruzione d'intorno a tanti soli lati, quanti si adoperarono in detto Ettagono, che furono 4, cioè *bh*, *ho*, *op*, *pq* compresi nel triangolo *bEq*. Onde qualunque Poligono sia, per esempio la Fig. 15, basta che in essa si restringa la costruzione d'intorno a 4 soli lati per ottenere 3 contin. geom. propor. *mp*, *bq*, *dg* nel medesimo modo, che si ottennero per mezzo dell'7gono. Così se tutte le Figure della Tavola 33 fossero sempre un 17gono, secondo che la costruzione versasse d'intorno a' lati 4, 5, 6 &c. di esso 17gono, le proporzionali *mp*, *bq*, *dg* risultarebbero bensì di ordine differente, ma sempre come nelle Figure 15, 16, 17 &c. contin. geometriche.

159. Di più se i lati della data Fig. 15 ovvero 16 &c. non fossero nè meno parti aliquote di un qualche Poligono, e qualunque fosse grande o piccola la periferia, su la quale sono ordinate (purchè non si dilatassero oltre la metà di essa se non di un mezzo lato, come occorse in tutte le seconde proposizioni de' Poligoni di denominatore disparo) la Proposizione mai perciò sarebbe meno sicura. Laonde trovandola io sì bella e sì estesa mi duole a dir vero assai, che non sorgendo essa che pur ora da una sola arida speculazione, le sovraggiunte mie occupazioni presenti non m'abbiano permesso di recarla a qualche solida utilità, o almeno di spingerla un poco più innanzi e dilatarla insieme con l'altre poche osservazioni, che sono anzi un aborto, che un parto dello scarso mio ingegno.

ARTICOLO DUODECIMO.

Descrizione organica di detti Poligoni.

160. Avvenga che io abbia già applicato a questa descrizione due altri Istromenti, uno chiamato PENNA GEOMETRICA, l'altro COMPASSO LOXODROMICO, e benchè pure altri si usino, e che potrei proporne anche degli altri forse in pratica migliori, nonostante m'induco a produrne uno, il quale, se non altro per una tal quale sua vaghezza, merita qualche considerazione. Egli è (*Fig.* 21. *Tav.* 34.) composto di 6 volte tanti regoli, e 3 volte tanti pivoli, quanti sono i lati della Figura. Cinque di essi regoli *ad*, *de*, *en*, *ag*, *gm* debbono essere eguali, e mobili d'intorno a pivoli, coi quali stanno insieme connessi, ed un altro regolo *am* deve concepirsi mobile d'intorno ad un pivoletto *e* comune a 4 di detti eguali regoli; e nelle due fessure una da *e* verso *m* si faccia, che riceva il pivolo *m*, che può dentro per il lungo sdrucciolare da *m* sino ad *e*, e che connette due regoli; e nell'altra fessura da *e* verso *a* riceva il pivolo *a*, che ne congiunge quattro, e che può scorrere liberamente da *e* sino ad *a*. I pivoli poi *a*, *m*, *n*, *d*, e tutti gli altri posti in simil luogo della Figura si dilatino un poco in cerchio dalla parte inferiore, e per di sopra siano costrutti a spira con la sua vite, acciò possano tenere i regoli insieme uniti. I pivoli *e*, *g*, *b*, e tutti quelli che stanno alla medesima distanza dal centro della Figura siano non solo fabbricati a quest'oggetto come quelli, ma per di sotto lunghetti più di quelli terminino in una punta, acciò toccando essi soli al piano, possano marcare un punto su la carta.

161. Da una tale costruzione parmi di dover aspettare un effetto, che è grande ardimento l'asserirlo senza averne anticipatamente fatta prova. Cioè che levando via i pivoli

m, *e*, *a*, ed aprendo l'ordigno in fuori, restino tuttavia i lati *d*h, hK, KL &c. sempre ordinati nella periferia di un maggior circolo, di cui i regoli *dn*, *u*h &c. ne rappresentino i raggi. Come per contrario tolta via una parte *am*, *dn*, ovvero due *am*, h*u*, e restringendolo, i lati che restano rimanghino disposti nella periferia di un circolo minore.

162. Ciò mi par vero, perchè non posso concepire mosso per esempio un regolo *am*, che nel medesimo istante anche tutti gli altri regoli non si muovano altrettanto per causa della vicendevole loro connessione; cosicchè parmi che non possa muoversi un regolo *am*, che gli angoli *mad*, *nda* alla periferia non rimanghino tuttavia eguali. Dunque dovendosi anche gli altri regoli muovere altrettanto, anche gli angoli circa essi alla periferia rimarranno parimenti eguali; e quindi i lati *ad*, *d*h &c. sempre costituiti nella circonferenza di un circolo unica curva che, come notammo anche altrove, sempre inclini, e sempre egualmente alla medesima parte.

163. Volendo pertanto descrivere un Poligono maggiore del 12gono rappresentato in figura, bisognerebbe aggiugnere all'istromento tante parti, quante per il nuovo Poligono occorressero. E volendo descriverne un minore avrebbesi a tagliar via le superflue; perchè poi e nell'uno, e nell'altro caso premendo alquanto i pivoli *e*, *g*, *b* &c. lasciassero sul piano della carta impressi tanti punti, quanti fossero i lati del proposto Poligono. Ma si avverte che detto istromento non potrebbe essere diminuito, se non di due sole parti, e però fornire un 10gono. Perchè i punti di connessione *m*, *n*, *u* e tutti gli altri simili si troverebbero in tal caso pervenuti fino al centro c, dove gli regoli pur ivi concorsi facendo a se stessi intoppo, non potrebbero passar più oltre. Tuttavia l'istromento ordinato al 12gono somministra anche la descrizione del triangolo,

golo, del 4to, dell' 6gono, lasciando andar vani dei segnati punti, 4 nel primo caso, 3 nel secondo, 2 nel terzo alternatamente. Ed occorrendo il pentagono si ordini l'istromento al 10, o al 15gono, o ad altro Poligono di denominatore multiplo del denominatore del proposto Poligono, lasciando poi alternatamente andar vano un punto sì e l'altro no nel primo caso; due sì ed uno no nel secondo &c. E così si proceda anche per l'7gono, ed il 9gono, aggiungendo all'istromento tante parti, quante abbisognarebbero per un Poligono di denominatore multiplo del denominatore del Poligono dato.

Annotazione.

164. Da quanto si espose in proposito del 10gono facilmente si deduce, che, ordinato l'istromento a detto Poligono, *madn* diventarebbe un triangolo, di cui i lati *am*, *dn* risultarebbero divisi *media & extrema ratione* in *g* ed *e* pivoli connettenti li regoli rispettivi.

IL FINE.