Werk

Titel: Scientia rerum universalem ex Euclide restituta

Autor: Hentschius, Joannes Jacobus

Verlag: Haered. Lankisianorum

Ort: Lipsiae

Jahr: 1756

Kollektion: digiwunschbuch; mathematica

Signatur: 8 PHIL II, 288:2

Werk Id: PPN83290273X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN83290273X|PPN83290273X

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=83290273X

PHILOSOPHIA MATHEMATICA
COMPLECTENS
SCIENTIAM
RERUM
UNIVERSALEM
EX
EUCLIDE RESTITUTAM.

CONAMINA DUO POSTERIORA.

AUCTORE
JOAN. JACOBO HENTSCHIO.

EDITIO SECUNDA EMENDATIOR.

Xenocrates:
Τα Μαθηματα λαβαι της Φιλοσοφιας.
Mathemata anſæ Philoſophiæ.

LIPSIAE
Sumtibus HAERED. LANKISIANORUM
CIↃ IↃ CCLVI.

ILLUSTRISSIMO DOMINO

DOMINO

CHRIST. GOTTLOB

DE HOLZENDORF

SACRI ROM. IMPERII COMITI,

DYNASTÆ IN BÆRENSTEIN, ET

OBERLICHTENAU &C.

SERENISSIMI AC POTENTISSIMI REGIS POLON. ET ELECTORIS SAXONIÆ A CONSILIIS SANCTIORIBUS, SUPREMI SENATUS ECCLESIASTICI PRÆSIDI &C.

COMES ILLUSTRISSIME!

DOMINE

GRATIOSISSIME!

Exercitationes hasce, Comes Illustrissime! in conspectum Tuum prodire, Tuumque judicium æquissimum non tam postulare quam potius implorare jussi; singulari Tuo, quo prosequeris ſcientias, favore commotus, nec non gratioſiſſima Tua in me voluntate.

Pro tot enim benevolentiæ mihi ſatis comprobatæ documentis, gratiſſimam meam mentem aliqua ex parte declaraturus; hæc ſcientiarum principia, Geometriæ Euclideæ ſuperſtructa, Tibi, ſumma animi mei devotione ſubmittere, convenientiſſimum eſſe cenſui.

Hoſce conatus meos, ſi Tu, qui ſupra vulgus hominum longe elatus es, Comes Illuſtriſſime! ſerena fronte adſpicere, eosque æqui bonique conſulere, dignatus fueris; maximo lætitiæ gradu perfuſus, majori Academicorum ſtudiis inſerviendi, ducar cupiditate.

Certiſſimam in Tua erga ſcientiarum cultores humanitate ſpem ponens; Tibi, Domine Gratioſiſſime! operam meam ſuſceptam non prorſus ingratam futuram eſſe, confido.

Deus, ſapientiæ omnis auctor, TE, Tuamque Gentem Illuſtriſſimam in ſumma ſervet incolumitate, Tuaque negotia, quæ ad Reipublicæ ſalutem tendunt, graviſſima, fortunata eſſe jubeat.

Patrocinio autem Tuo, quo hactenus ſum fruitus, me & in poſterum complectare, ſisque perſuaſiſſimus: me in eorum eſſe numero, qui virtutum Tuarum excellentia perculſi, ad dies vitæ usque TE venerantur & admirantur.

Lipſiæ d. 20 Jun.
Ao. 1752.

Pietas juſſit haſce literas Mæcenati meo ſuperſtiti dicatas, nuper vero ex terrena ſede erepto, memoriæ cauſa relinquere.

LECTORI

S.

Adgredior jam *notissimam illam sub* Metaphysicæ *titulo odiosam disciplinam a Restauratoribus CARTESIO, LEIBNITIO, LOCKIO, de TSCHIRNHAUSEN, L. B. de WOLFF &c. a nævis repurgatam; sed ab aliis denuo vocum abstrusissimarum caterva proh! dolor, obscuratam.*

In hoc obscuritatis Asylum, *exstructum in Religionis fideique Christianæ maximam cladem, impetum & irruptionem quandam facere visum est, ut tandem aliquando Metaphysicorum latibula, terminorum obscurissimorum farragine quasi septa, nemini non intueri liceat.*

Et spes est: institutum hoc, logomachiis *numero fere infinitis*, rixisque *in Philosophia vagis atque inutilibus viam quodammodo portamque præcludens, non prorsus ingratum fore iis, qui* simplex, naturale, sincerumque *profitentur* verum; *præsertim cum vident: rationis humanæ veritatibus in ordinem redactis; Religionis Christianæ, aliarumque disciplinarum puritatem atque simplicitatem obtineri. Qui ad res ipsas, neglecta forma externa, attendere assueti sunt, iis facile omnia probari video, nec ipsos spero, ægre laturos esse, tam* multa paucis *exponi. Vale Lector! meisque conatibus fave.*

Scribebam Lipsiæ
d. 20 Jun.
1752.

MONITUM AUCTORIS.

Obſerves, velim: numerum figurarum æri inciſarum reſpondere ubique numero Propoſitionum; unde cum in Textu Euclideo figurarum numerus non expreſſus ſit; hac in re Lector, facile ſibi ipſe conſulet.

Scribebam Lipſiæ
d. 3 Januar.
1756.

JO. JAC. HENTSCHIUS.

ARGU-

ARGUMENTUM
ELEMENTI TERTII EUCLIDIS.

Continet Liber tertius circuli proprietates: lineasque plurimas & *intra* ejusdem Peripheriam, & *extra* ad eandem ductas inter ſe comparat. Circulorum etiam ſe mutuo interſecantium, & ſic mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam, ſive ad centrum ſive ad circumferentiam poſitos inter ſe componit. Breviter prima *Geometriæ Practicæ* elementa, circulorum adminiculo potiſſimum innixa, exponit.

ARGUMENTUM
ELEMENTI QUARTI EUCLIDIS.

Eſt quartus Elementorum liber *Trigonometriæ* utiliſſimus. Circulo enim polygona

gona inſcribendo, tabulas Chordarum, Tangentium & Secantium fabricare diſcimus: quarum ope figurarum & corporum magnitudines menſuramus. Neque absque eo ſtellarum *Aſpectus*, quos vocant, Quartilem nempe, Sextilem &c. rite diſtinguimus: utpote a polygonorum in circulo inſcriptione omnino pendentes. Neque ſane Circuli aream ſive *Quadraturam* quandam aliunde, quam ex polygonorum innumerorum circulo inſcriptorum & circumſcriptorum areis ſive *Quadraturis* colligere poſſumus. Et haud aliter circulorum ad ſe invicem rationem duplicatam, e duplicata polygonorum iisdem inſcriptorum aut circumſcriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inſcriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus ſcientiis, huic libro ſolidum fere deberi videatur.

ARGUMENTUM
ELEMENTI QUINTI EUCLIDIS.

Quintus Elementorum liber demonstrandis libri sexti propositionibus omnino est necessarius. Doctrinam quam continet frequentissime usurpamus. Argumentandi vero ratio, e proportione Geometrica petita, est plane subtilissima, solidissima, brevissima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tanquam *Logica* quadam *Mathematica*, *Geometria*, *Arithmetica*, *Musica*, *Astronomia*, *Statica*, & reliquæ omnes Matheseos partes maxime utuntur, utpote quæ proportionibus quibusdam inter se connexis fere totæ nituntur; modosque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari solent. *Geometria* quidem *practica* quæ linearum, figurarum atque corporum mensuras complectitur, e proportionum doctrina plerumque derivatur. Regulæ *Arithmeticæ* ad unam omnes ex hu-

jusce

jusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum *Musicam* proportiones Geometricas Sonorum modulamini applicatas rite dixeris: quod *idem* fere de *Statica*, corporum ponderibus applicata, possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam e Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.

ARGUMENTUM

ELEMENTI SEXTI EUCLIDIS.

Incipit Liber *Sextus* egregiam illam de proportione Geometrica Doctrinam in Lib. V. expositam, usibus variis, planeque præstantissimis applicare: & a triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areas, prout ad se invicem proportione quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit: & quo easdem modo in ratione data augeamus aut minuamus, oſtendit. Regulam etiam Auream ſive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum ſed pentagonum, hexagonum, & univerſum polygonum quodcunque ab hypothenuſa deſcriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuscunque polygonis ſimilibus a duobus lateribus deſcriptis, demonſtrat. Poſtremo facillima certiſſimaque tum lineas tum ſuperficies tum corpora menſurandi principia, in omnibus Mathematicarum ſcientiarum partibus utiliſſima proponit.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. Æquales circuli ſunt, qvorum diametri ſunt æqvales, vel quorum qvæ ex centris ſunt æqvales.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, qvæ contingens circulum & producta ipſum non ſecat.
3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qvi contingentes ſe mutuo non ſecant.
4. In circulo æqvaliter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, qvando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æqvales.
5. Magis autem à centro diſtare dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.
6. Segmentum Circuli eſt figura, qvæ recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.
7. Angulus Segmenti eſt, qvi recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.
8. Angulus in ſegmento eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliqvod punctum, atqve ab ipſo ad terminos lineæ ejus, qvæ baſis eſt Segmenti, rectæ lineæ ducuntur, angulus á ductis lineis comprehenſus.
9. Qvando autem comprehendentes angulum re-

ctæ lineæ assumunt circumferentiam, illi insistere angulus dicitur.

10. Sector Circuli est, qvando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus & circumferentia ab ipsis assumpta.

11. Similia circulorum segmenta sunt, qvæ angulos capiunt æqvales; vel in qvibus anguli sunt inter se æqvales.

PROP. I. PROBL.

Dati circuli Centrum invenire.

Sit datus circulus ABC: oportet circuli ABC centrum invenire.

Constructio.

1. *Ducatur in circulo qvædam recta linea AB utcunque & in puncto D bifariam secetur (per 10. I.);*
2. *A puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ducatur DC (per 11. I.);*
3. *Recta CD producatur in E, & bifariam secetur in F. Dico punctum F esse centrum circuli ABC.*

Demonstratio.

Si F non est centrum circuli, sit aliud punctum G centrum, & ducantur rectæ GA, GD, GB: erunt rectæ GA, GB, æqvales (per 15. def. I.) rectæ vero AD, BD sunt æqvales (per construct.); recta deniqve DG & utriqve triangulo ADG, BDG, commune.

Duo

Duo igitur triangula ADG, BDG habent duo latera æqvalia, latus nempe AD = lateri DB, & DG commune, habent præterea & basin AG = basi BG; Ergo & angulus ADG erit = angulo BDG (per 8. 1.); cum autem hi anguli deinceps sint & æqvales, rectus est uterqve æqvalium angulorum; ergo angulus ADG est rectus (per 10. def. 1.); sed & angul. FDA est rectus (per construct).

Ergo angulus GDA = angulo CDA, pars scilicet toti æqvalis foret, qvod fieri neqvit (per 9. ax.). Similiter ostendetur neqve aliud esse præter ipsum F.

Ergo punctum F centrum est circuli ABC.

Qvod erat Inveniendum.

Corollarium.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta linea rectam bifariam & ad angulos rectos secet, circuli centrum esse in secante.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo qvælibet puncta sumantur, qvæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, & in circumferentia ipsius sumantur duo qvælibet puncta AB: Dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere.

Constructio.

1. Inveniatur circuli ABC centrum D (per 1. 3.);

2. Ducantur rectæ AD, BD, & ad qvodvis aliud punctum E rectæ AB ducatur recta DE.

Demonstratio.

Recta AD = BD (per 15. def. 1.): Erit igitur angulus DAB = angulo DBA (per 5. 1.);

Est autem angulus DEA major qvam ang. DBA (per 16. 1.);

Ergo etiam ang. DEA major est qvam ang. DAB, ideoqve recta DE minoribus angulis A & B subtensa minor est rectis AD, BD (per 19. 1.): Hoc est recta DE à centro circuli in qvodvis punctum, qvod in recta linea intra puncta A & B sumitur, cadens minor est qvam circuli semidiameter AD, vel BD, ac proinde recta, à puncto A ad punctum B ducta, intra circulum cadit.

Qvod erat demonstr.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta qvædam linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos eam secabit; qvod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

1. *Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CE rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F: Dico qvod etiam ad angulos rectos ipsam secet.*

2. Quod

2. *Qvod si recta CE rectam AB ad rectos angulos secet: Dico qvod etiam bifariam ipsam secet, hoc est, qvod AF ipsi FB æqvalis sit.*

Constructio.

Sumatur circuli ABC, centrum D (per 1. 3); & jungantur DA, DB.

Demonstratio.

1. Sit latus AF = lateri BF (per hypoth.), & DF commune; basis vero AD = basi BD (per 15. def. 1.): ergo angulus DFA = angulo DFB, (per 8. 1.); cum autem anguli DFA, DFB deinceps sunt & æqvales, uterque eorum rectus erit (per 10. def. 1).

Qvod Imo erat demonstr.

2. Sint anguli DFA, DFB recti (per hypoth.); cum vero rectæ DA, DB sunt æqvales, etiam anguli A & B æqvales erunt (per 5. 1.); latus præterea DF est commune utique triangulo DFA, DFB; duo igitur hæc triangula habent duos angulos duobus angulis æqvales, & unum latus uni lateri æqvale, commune scilicet DF, qvod utriqve angulorum æqvalium subtenditur:

Ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt (per 26. 1.); æqvalis igitur est AF ipsi BF.

Qvod IIdo erat demonstr.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, se invicem secent; sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC, BD, non ductæ per centrum se invicem secent in puncto E: Dico eas sese bifariam non secare.

Demonstratio.

Si enim AC, BD, sectæ essent bifariam in E, recta FE, ducta ex centro F esset perpendicularis ad utramqve, & anguli FEA, FEB essent æqvales; hoc est, pars FEA esset toti FEB æqualis; quod est absurdum (per 9. ax.). Non igitur AC, BD sese bifariam secant. *Qvod erat demonstr.*

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Secent se mutuo duo circuli ABC, CDG, in punctis B, C: Dico ipsorum idem centrum non esse.

Demonstratio.

Si fieri potest, sit punctum E, commune utriusqve circuli centrum, jungaturqve EC, & EFG ducatur utcunqve.

Qvoniam igitur E est centrum circuli ABC, erit recta EC = rectæ EF; rursus qvoniam E est centrum circuli CDG, erit recta EC = rectæ EG (per 15. def. 1.): Ergo recta EF = rectæ EG, hoc est, pars toti æqualis est, qvod est absurdum (per 9. ax.). Qvare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. *Qvod erat demonstr.*

PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

Duo circuli ABC, CDE ſeſe intra contingant in puncto C: Dico ipſorum non eſſe idem centrum.

Demonſtratio.

Sit F commune utriusque circuli centrum, ſi fieri poteſt; jungaturqve FC, & ducatur utcunqve FEB.

Qvoniam igitur F eſt centrum circuli ABC, erit recta FB = rectæ FC; & qvoniam F eſt centrum circuli CDE, erit recta FE = rectæ FC (per 15. def. 1.); ideoqve recta FB = rectæ FE (per 1. ax); hoc eſt tota FB ſuæ parti FE æqvalis erit, quod fieri non poteſt (per 9. ax.). Qvare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, non eſt ipſorum idem centrum.

Qvod erat demonſtr.

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliqvod punctum ſumatur, qvod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant qvædam rectæ lineæ; maxima quidem erit in qva centrum, reliqva vero minima; aliarum autem ſemper propinqvior ei, qvæ per centrum, major eſt remotiore; duæqve tantum æqvales ab eodem puncto in circulum cadent ex utraqve parte minimæ.

Sit circulus ADBI, ejus autem diameter ſit AB, & in ea ſumatur aliqvod punctum F, qvod non ſit cen-

centrum circuli; Sit autem circuli centrum E, & à puncto F in circulum cadant rectæ lineæ FC, FD, FG.

Dico 1. maximam esse AF, qvæ per centrum Et ransit; 2. reliqvam diametri partem FB esse minimam; 3. aliarum vero majorem esse eam, qvæ maximæ AF propior; 4. neqve plures, quam duas ex dicto puncto F ad circumferentiam duci posse æqvales.

Demonstratio.

1. Ducatur ex E centro recta EC. Qvoniam EC, EA æqvales sunt, addita communi EF, erunt EC†EF, & EA†EF (hoc est AF) æqvales; Sed EC†EF sunt majores qvam CF (per 20. 1.): Ergo etiam AF major qvam CF. Eodem modo ostendetur AF major qvavis alia FD, FG, FH, FI, & sic porro.

2. è Centro ducta EG æqvalis est rectæ EB; Sed EG minor est, qvam EF†EG.

   Ergo EB etiam minor est qvam EF†EG;
   Commune auferatur EF

   Relinqvetur FB (sive EB — EF) minor qvam EG (per 5. ax.).

   Eodem modo ostendetur FB, minor qvavis aliâ.

3. In triangulis FGE, FDE, latera DE, EF æqvantur lateribus GE, EF; angulus vero DEF major est angulo GEF; Ergo basis FD major est basi FG (per 24. 1.).

   Eadem ratione qvævis alia recta, qvæ maximæ AF proprior est, semper major erit remotiore.

4. Duæ

4. Duæ rectæ FH, FG, é puncto F ductæ sint æqvales: cum vero aliæ quævis rectæ, qvæ ab eodem puncto F in circumferentiam ducuntur, vel sint propiores maximæ AF, vel ab eadem remotiores, erunt itaqve vel majores vel minores duabus illis rectis FH, FG, ut patet ex præcedente 3tia parte hujus demonstrationis: Qvare non plures qvam duæ rectæ æqvales ab eodem puncto F in circulum cadent ex utraqve parte minimæ, *Qvod erat demonstr.*

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliqvod punctum sumatur, atqve ab eo ad circulum ducantur qvædam rectæ lineæ, qvarum una per centrum transeat, reliqvæ vero utcunqve. Earum qvidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est, qvæ per centrum transit: aliarum autem semper propinqvior ei, qvæ per centrum, major est remotiore: earum autem, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est, qvæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum autem semper qvæ propinqvior minimæ minor est remotiore, duæqve tantum æqvales a puncto in circulum cadunt ex utraqve parte minimæ.

Sit circulus ACB, & extra circulum sumatur aliqvod punctum D; ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ DA, DE; sitqve DA per centrum ducta.

Dico: 1. Earum qvidem, qvæ in AEC concavam circum-

circumferentiam cadunt, maxima est DA, quæ per centrum transit.

2. *Et quæ propinqvior est ei, quæ per centrum, semper erit major remotiore, videlicet DE quam DC;*
3. *Earum autem, quæ in convexam circumferentiam cadunt; minima est DI, quæ inter punctum D & diametrum BA interjicitur;*
4. *Qvæ minimæ DI propinqvior DF, minor est remotiore DG.*
5. *Duæqve tantum æqvales a puncto D cadunt in circulum ab utraqve parte minimæ DI.*

Demonstratio.

1. E Centro K ducta KE = KA, addita communi DK, erunt KE†DK = DA; sed KE†DK majores sunt quam DE (per 20. 1.); Ergo etiam DA major est qvam DE.

Eodem modo erit DA major qvavis alia à puncto D in concavam circumferentiam ducta.

2. E centro K ducta KC = KE; ideoqve trianguli DKC duo latera DK, KC, æqvalia sunt duobus lateribus DK, KE alterius trianguli; Angulus vero DKE major est angulo DKC: Ergo DE major est qvam DC (per 24. 1.).
3. E centro K ducta recta KF; erunt DF†KF majores qvam DI†KI, hoc est quam DK (per 20. 1.); ablatis igitur æqvalibus KF, KI, relinqvetur DI minor, qvam DF.

Eodem modo DI minor erit qvavis alia.

4. Ducta recta KG; erunt rectæ DF†FK minores rectis DG†GK (per 21. I.): Ablatis ergo æqvalibus FK, GK, relinqvitur DF minor qvam DG.

5. Si

5. Si ad punctum K constituatur angulus DKB = angulo DKF (per 23. 1.): erunt trianguli DBK, duo latera BK, DK æqvalia duobus lateribus FK, DK, alterius trianguli DFK; & qvoniam angulus DKB est æqvalis angulo DKF, erit DB = DF (per 4. 1.); omnes vero rectæ, qvæ sunt a minima DI, remotiores, qvam DB, DF, erunt eisdem majores; qvæ autem minimæ propiores, erunt minores, ut patet ex præcedenti 2da & 4ta parte demonstrationis. Non igitur plures qvam duæ rectæ ex puncto D in circuli circumferentiam, sive concavam sive convexam, duci possunt æqvales.

Quod erat demonstr.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliqvod punctum, atqve ab eo in circulum cadant plures, qvam duæ rectæ lineæ æqvales, punctum, qvod sumitur, erit centrum circuli.

Sit circulus ABC & intra ipsum sumatur punctum D; ab hoc autem puncto D in circulum cadant plures qvam duæ rectæ lineæ æqvales DA, DB, DC: Dico assumptum punctum D centrum esse circuli ABC.

Demonstratio.

Si D non sit centrum, fieri si potest sit E, & juncta DE producatur utrinqve in F, G: Ergo FG est diameter circuli ABC. Itaqve qvoniam in FG, diametro circuli ABC sumptum est aliqvod

qvod punctum D, qvod non est centrum circuli; maxima quidem erit DG, major autem DC qvam DB, & DB major quam DA (per 7. 3.): Sed DC, DB, DA æqvales sunt (per hypoth.) non est igitur E centrum circuli ABC.

Similiter ostendetur neqve aliud punctum centrum esse præter ipsum D; Erit igitur D centrum circuli ABC. *Q. e. d.*

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Demonstratio.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis qvam duobus, nempe in B, H, F; & circuli ABC centrum sumatur, qvod sit K; & KF, KG, KB jungantur.

Qvoniam igitur intra circulum DEF sumptum est punctum K, à qvo in circulum DEF incidant plures qvam duæ rectæ lineæ æqvales KB, KF, KG, punctum K erit centrum circuli DEF (per 9. 3.);

Est autem K centrum circuli ABC (ut supra): duorum igitur circulorum, qvi sese secant, erit idem centrum K, qvod fieri non potest (per 5. 3.).

Quare circulus circulum in pluribus qvam duobus punctis non secat. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra con-

conjungens, si producatur, in circulorum contactum cadet.

Duo circuli ABC, ADE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli qvidem ABC centrum, qvod sit F, circuli vero ADE centrum G: Dico rectam lineam a puncto F ad punctum G ductam, si producatur, in punctum A cadere.

Demonstratio.

Si negas, fieri si potest, cadat ut GFC, & producatur in directum CFG ad punctum H, jungantur qve AG, AF.

Qvoniam igitur AG+GF majores sunt, qvam AF (per 20. 1.), & AF = CF = FH (per 15. def. 1.); communis si auferatur FG: reliqva AG erit major reliqvâ GH; sed GD = AG (per 15. def. 1.): Ergo GD major erit qvam GH; hoc est, pars toto major, qvod fieri non potest (per 9. ax.). Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet: qvare in ipsum cadat necesse est.

Qvod erat demonstr.

PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo circuli ABC, ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli qvidem ABC centrum, qvod sit F; circuli vero ADE centrum G: Dico rectam lineam, qvæ à puncto F ad G ducitur per contactum A transire.

DE-

Demonſtratio.

Si negas, fieri ſi poteſt, cadat ut FCDG, & AF, AG jungantur.

Qvoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, erit FA = FC, rurſus qvoniam G centrum eſt ADE circuli erit AG = GD. Oſtenſa eſt autem & FA = FC; ſunt igitur FA, AC ipſis FC, DG æqvales: ergo tota FG major eſt qvam FA, AG, qvod tamen fieri non poteſt (per 20. 1.).

Qvare recta linea à puncto F ad punctum G ducta per punctum contactus A tranſeat, neceſſe eſt.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis qvam uno ſive intus ſive extra contingat.

Demonſtratio.

Si enim fieri poteſt, circulus ABDC, circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis qvam uno, videlicet in B, D.

Et ſumatur circuli qvidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H, (per 1. 3.).

Ergo recta linea, qvæ à puncto G ad H ducitur, utrinqve producta cadet in puncta B, D (per 11. 3.); & qvoniam G eſt centrum circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqvalis: Major eſt igitur DG qvam HB, & DH qvam HB multo major; Rurſus qvoniam H centrum eſt circuli EB FD, æqualis eſt DH ipſi HB. Atqvi oſtenſa eſt

ipſa

ipsa multo major: Fieri ergo non poteſt, ut circulus circulum intus contingat in pluribus punctis qvam uno.

Dico etiam ſecundo, qvod circulus circulum neqve extra in pluribus qvam uno puncto contingat: Si enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in duobus punctis, videlicet in A, C.

Qvoniam igitur in circumferentia circulorum ABDC, ACK ſumpta ſunt duo qvælibet puncta, A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit, intra utrumque ipſorum cadet (per 2. 3.); Sed qvæ intra circulum qvidem ABDC cadit, extra circulum ACD cadet, quod abſurdum: Circulus igitur circulum neqve extra contingit in pluribus punctis quam uno.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant a centro, & quæ æqualiter diſtant a centro ſunt inter ſe æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineæ AB, CD: Dico primo eas a centro æqualiter diſtare.

Conſtructio.

1. Sumatur circuli centrum, qvod ſit E;
2. A Centro E ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, & jungantur AE, EC.

Demonstratio.

1. Rectæ AB, CD per lineas perpendiculares é centro ductas EF, EG bifariam secantur (per 3. 3.); sed AB = CD (per hypoth.): Earum igitur dimidiæ sunt æquales, scil. AF = CG (per 7. ax.) ideoqve qvadr. rectæ AF = qvadr. rectæ CG. Porro recta AE = rectæ CE (per 15. def. 1.); ideoqve qvadratum rectæ AE æqvatur qvadrato rectæ CE: & qvoniam qvadratum rectæ AE = qvadr. rectæ AF † qvadr. rectæ EF; qvadratum vero rectæ CE = qvadr. rectæ CG † quadr. rectæ EG (per 47. 1): Ergo qvadr. rectæ AF † qvadr. rectæ EF = qvadr. rectæ CG † quadr. rectæ EG.

Est autem quadr. rectæ AF = qvadr. rectæ CG (ut supra); his igitur ablatis, relinqvetur quadr. rectæ EF = qvadr. rectæ EG; ac propterea recta EF æqualis est rectæ EG.

Ostensum itaqve est, quod rectæ EF, EG a centro E, ad ipsas AB, CD perpendiculares dactæ, sint æqvales, qvare rectæ AB, CD æqualiter a centro distant. (per 4. def. 3.)

2. *A centro æqualiter distent duæ rectæ AB, CD, hoc est, sit EF æqualis ipsi EG: Dico AB ipsi CD æqualem esse.*

Iisdem, ut supra, constructis, similiter ostendetur AB duplam esse ipsius AF, & CD duplam ipsius CG; & quoniam AE = ipsi EC, erit & qvadratum rectæ AE = qvadrato rectæ EC; sed quadratum rectæ AE = qvadr. rectæ EF† qvadr. rectæ FA, qvadratum autem EC = qvadrato rectæ EG † qvadr. rectæ GC (per 47. I.): Ergo qvadr. rectæ

rectæ EF † qvadr. rectæ FA = qvadr. rectæ EG † qvadr. rectæ GC.

Qvoniam vero qvadr. rectæ EF = qvadrato rectæ EG (qvia EF = EG per hypoth.); reliqvum igitur qvadratum rectæ FA = reliqvo qvadr. rectæ GC; ergo recta FA = rectæ GC; Sed recta BA est dupla ipsius FA, & CD est dupla ipsius CG: Qvare AB ipsi CD æqualis est (per 6. ax.)

Qvod erat demonstr.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero, semper propinquior centro est major remotiore.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinqvior qvidem centro E sit BC, remotior vero FG: Dico primo AD maximam esse; & secundo BC majorem quam FG.

Constructio.

1. Ducantur a centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK;
2. Ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ductæ LM producatur in N, & jungantur EM, EN, EF, EG.

Demonstratio.

1. Recta EH = EL, ideoque BC = MN (per 14. 3.).

Rursus Qvoniam AE = EM, & ED = EN: erit AE † ED, hoc est, AD = EM † EN; Sed EM † EN majores sunt qvam MN: Ergo & AD major est qvam MN; at MN = BC: est igitur AD major qvam BC.

2. Qvoniam duæ ME, EN duabus FE, EG sunt æqvales, angulusque MEN major angulo FEG; Basis igitur MN basi FG major erit (per 24. 1.):

Ostensa autem est MN = BC: ergo & BC major est qvam FG.

Quare maxima est diameter AD, & quæ centro propinqvior BC major est remotiore FG.

Quod erat demonstr.

PROP. XVI. THEOR.

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadit extra circulum: & in locum, qvi inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta non cadet: & semicirculi angulus major est quovis angulo rectilineo acuto, reliqvus autem minor.

Sit circulus ABC cujus centrum D: Dico

1. *Rectam lineam AE, quæ a puncto A ipsi AB ad angulos rectos ducitur extra circulum cadere;*
2. *In locum, qvi inter rectam lineam AE & circumferentiam interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.*
3. *Præterea angulum semicirculi, qui a recta linea BA & circumferentia CIA comprehenditur, qvovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum a circumferentia CIA & recta linea AE quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.*

Demon-

Demonſtratio.

1. Ex centro D ad qvodvis punctum F in recta AE ſi ducatur recta DF erit DF ſubtendens angulum rectum DAF major qvam DA, acuto angulo DFA ſubtenſa (per 19. 1.); Sed DA tantum pertingit ad circumferentiam: Ergo DF ultra circumferentiam porrigitur, adeoqve punctum F extra circulum eſt.

Eadem ratione oſtendetur qvodvis aliud punctum rectæ AE extra circulum eſſe Tota igitur AE extra circulum cadit.

2. Si in circumferentia præter punctum A ſumatur aliud qvodvis punctum C, recta hæc duo puncta conjungens AC intra circulum cadet (per 2. 3.) qvare in locum, qvi inter rectam lineam AE & circumferentiam CIA interjicitur, altera recta non cadet.

3. Itaque ſequitur, angulum ſemicirculi, qui a recta BA & circumferentia CIA comprehenditur, qvovis angulo acuto rectilineo BAC majorem eſſe; reliqvum vero angulum, comprehenſum a circumferentia CIA & recta linea AE, qvovis angulo acuto rectilineo eſſe minorem.

Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, quod recta linea, quæ ad rectos angulos ducitur diametro circuli, ab extremitate ejusdem circulum contingit: & quod recta linea circulum contingit in unico tantum puncto. Qvoniam qvæ circulo in duobus punctis occurrit intra ipsum cadere ostendebatur (per 2. 3.).

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, qvæ datum circulum contingat.

Sit datum punctum A, datus autem circulus BCD: oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat.

Constructio.

1. Sumatur centrum circuli E & jungatur AE;
2. Centro E, intervallo EA circulus AFG describatur; & a puncto D ipsi EA ad angulos rectos ducatur DF, junganturque EBF, AB:

Dico a puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit.

Demonstratio.

Qvoniam E est centrum circulorum BCD, AFG, erit EA = EF, & ED = EB; duæ igitur EA, EB, duabus EF, ED sunt æquales, & angulum communem continent qvi est ad E; ideoque DF est æqualis basi AB, triangulum DEF æquale triangulo EBA, & reliqvi anguli reliqvis angulis æquales (per 4. 1.): Angulus itaque EBA = angulo EDF; rectus autem est EDF, qvare & EBA est rectus. Porro recta EB ex centro ducta est, ejusque extremitati insistens recta AB rectum facit angulum ABE: Ergo circulum contingit recta AB (per coroll. 16. 3.): A dato igitur

igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit.

Quod erat faciend.

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, a centro autem ad contactum recta linea ducatur ea perpendicularis erit tangenti.

Sit recta linea DE contingens circulum ABC in puncto C, & sumatur circuli centrum F a quo ad C ducatur FC; Dico FC perpendicularem esse ad ipsam DE.

Demonstratio.

Si FC non sit perpendicularis, ducatur a puncto F alia quævis ad DE perpendicularis FG,

Qvoniam angulus FGC rectus est, erit GCF acutus (per 17. 1.), major igitur est FC qvam FG (per 19. 1.); Sed FC = FB; Ergo FB major qvam FG, hoc est, tota FG sua parte FB minor erit, qvod fieri non potest (per 9. ax.)

Similiter ostendetur neque aliam qvampiam esse præter ipsam FC: Qvare FC ad DE est perpendicularis.

Quod erat demonstr.

PROP. XIX. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, a contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem.

Sit recta linea DE circulum ABC contingens in C, & a puncto C ipsi DE ad angulos rectos ducatur CA: Dico circuli centrum esse in ipsa AC.

Demonſtratio.

Si centrum circuli non ſit in recta CA, ponatur extra, ſi fieri poteſt in puncto F & jungatur FC.

Qvoniam recta DE circulum contingit in C, a centro autem ad contactum ducta ſit FC: erit igitur FC perpendicularis tangenti DE (per 18. 3), ideoque angulus FCE rectus; eſt vero angulus ACE rectus (per hyp.): Ergo angulus FCE eſt æqvalis angulo ACE, minor majori, qvod fieri non poteſt. Non eſt igitur F centrum circuli ABC.

Similiter oſtendetur neqve aliud aliqvod eſſe præterqvam in ipſa AC.

Quod erat demonſtr.

PROP. XX. THEOR.

In circulo, angulus qvi ad centrum, duplus eſt ejus qvi ad circumferentiam, qvando circumferentiam eandem habent pro baſi.

Sit circulus ABC, ad cujus centrum ſit angulus BEC, ad circumferentiam vero angulus BAC, & eandem circumferentiam BC habeant pro baſi: dico angulum BEC anguli BAC duplum eſſe.

Demonſtratio.

Jungatur AE, & ad F producatur.

Itaqve qvoniam EA = EB, erit & angulus EAB = angulo EBA (per 5. 1.): anguli igitur EAB, EBA dupli ſunt ipſius anguli EAB. Sed angulus BEF = angulo EAB + ang. EBA: Ergo angulus BEF duplus eſt anguli EAB. Eadem ratione & angulus FEC duplus eſt ipſius EAC: totus igitur BEC totius BAC duplus erit.

Rurſus

Rursus inclinetur, & sit alter angulus BDC, junctaque DE ad G producatur. Similiter ostendetur angulum GEC anguli GDC duplum esse, e qvibus GEB duplus est ipsius GDB: Ergo reliqvus BEC reliqvi BDC est duplus.

In circulo igitur angulus qvi ad centrum duplus est ejus, qvi ad circumferentiam, qvando eidem circumferentiæ insistunt.

Quod erat demonstr.

PROP. XXI. THEOR.

Anguli in eodem circuli segmento sunt inter se æqvales.

Sit circulus ABCD, & in eodem segmento BAED anguli sint BAD, BED: Dico eos inter se esse æqvales.

Constructio.

1. Sumatur circuli ABCD centrum F (per 1. 3.);
2. Jungantur BF, FD.

Demonstratio.

Qvoniam angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & hi duo anguli circumferentiam eandem BCD habent pro basi, erit angulus BFD duplus anguli BAD.

Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED: Ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit (per 7. ax.).

Quod erat demonstr.

PROP. XXII. THEOR.

Qvadrilaterorum, quæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æqvales, *Sit circulus ABCD, & in ipso quadrilaterum ABCD: Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis esse æqvales.*

Demonstratio.

Jungatur AC, BD.

Qvoniam igitur omnis trianguli tres anguli sunt duobus rectis æqvales (per 32 1.), erunt trianguli ABC tres anguli CAB † ABC † BCA æquales duobus rectis.

Sed anguli CAB, BDC in eodem circuli segmento BADC sunt inter se æquales (per 21. 3.), & angulus ACB æqualis ipsi ADB, qvod sint in eodem ADCB segmento:

Totus igitur angulus ADC angulis BAC † ACB est æqvalis.

Communis apponatur ABC angulus: sunt igitur anguli ABC † BAC † ACB angulis ABC † ADC æquales.

Sed ABC † BAC † ACB sunt duobus rectis æquales: Ergo & anguli ABC † ADC sunt duobus rectis æquales.

Similiter ostendetur angulos qvoqve BAD, DCB duobus rectis esse æqvales.

Qvadrilaterorum igitur, quæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æquales.

Quod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inæqvalia ex eadem parte non constituentur.

Sit

Sit recta AB; super hac constitutum sit circuli segmentum ACB: Dico super eadem recta AB aliud segmentum simile & inæqvale segmento ACB ex eadem parte non constitui.

Demonstratio.

Si fieri potest, super eadem recta AB aliud qvodvis segmentum ADB ex eadem parte constituatur, qvod sit simile & inæqvale segmento alteri ACB; ducaturqve ADC & jungantur CB, DB.

Qvoniam igitur segmentum ABC simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt, qvæ angulos capiunt æqvales (per 11. def. 3.); erit angulus ACB = angulo ADB exterior interiori, qvod fieri non potest.

Non igitur super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inæqvalia ex eadem parte constituentur.

Quod erat demonstr.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqvalibus rectis lineis similia circulorum segmenta sunt inter se æqvalia.

Sint super æqvalibus rectis lineis AB, CD similia circulorum segmenta AEB, CFD: Dico segmentum AEB segmento CFD esse æquale.

Demonstratio.

Posita recta linea AB super recta linea CD, ita ut punctum A puncto C congruat, sic punctum B etiam congruet puncto D, propterea AB = CD (per hypoth.); Congruente autem recta linea

AB

AB rectæ CD, congruet & AEB segmentum segmento CFD. Si enim AB congruat ipsi CD, segmentum vero AEB segmento CDF non congruat situm mutet ut CHGD. Sed circulus circulum in pluribus qvam duobus punctis non secat: at vero circulus CHGD circulum CFD secat in pluribus punctis qvam duobus videlicet in punctis C, G, D, qvod fieri non potest. Congruente igitur recta linea AB rectæ CD, non potest non congruere AEB segmento CFD: quare congruet, & proinde ipsi æquale erit.

Quod erat demonstr.

PROP. XXV. PROBL.

Dato circuli segmento describere circulum, cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC: oportet autem circulum describere, cujus ABC est segmentum.

Constructio.

1. Secetur AC bifariam in D (per 10. 1.);
2. A puncto D ipsi AC ad angulos rectos ducatur DB (per. 11. 1.);
3. Jungatur AB:

Demonstratio.

Sit primo ABC segmentum semicirculo minus, & ad rectam BA, atqve ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqvalis angulo ABE (per 23. 1.), & BD producatur ad E, jungaturque EC.

Qvoniam

Qvoniam igitur angulus ABE = angulo BAE, erit recta BE ipsi EA æqvalis (per 6. 1.): & qvoniam AD = DC, communis autem DE, duæ AD, DE, duabus CD, DE sunt æqvales altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim est uterqve: ergo & basis AE basi EC est æqvalis (per 4. 1.).

Sed ostensa est AE = EB, qvare & EB ipsi EC est æqvalis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EC inter se sunt æqvales: Centro igitur E intervallo autem æqvali uni ipsarum AE, EB, EC circulus descriptus etiam per reliqva transibit puncta, ejusque circuli erit ABC segmentum (per 9. 3.).

Sit secundo ABC segmentum semicirculo æquale, erunt tres rectæ lineæ DA, DB, DC inter se æqvales, atqve erit D. centrum circuli, intervallo DA, vel DB, vel DC describendi (per 9. 3.).

Sit deniqve tertio segmentum ABC semicirculo majus, & constituatur ad rectam lineam BA & ad punctum in ea datum A angulus BAE æqvalis angulo ABD, intra segmentum in ipsa BD erit centrum E circuli, intervallo EA vel EB describendi.

Dato igitur circuli segmento, descriptus est circulus, cujus est segmentum.

Quod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æqvales anguli æqualibus insistunt circumferentiis sive ad centra sive ad circumferentias insistant.

Sint

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales anguli, ad centra qvidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF: Dico BKC, circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse.

Demonstratio.

Jungantur BC, EF.

Qvoniam circuli ABC, DEF sunt æqvales, erunt & rectæ e centris ductæ æqvales: duæ igitur BG, GC duabus EH, HF sunt æquales; angulus vero ad G æqvalis est angulo ad H (per hypoth.): Ergo & basis BC basi EF est æqvalis. (per 4. 1.).

Qvoniam autem angulus ad A angulo ad D æqvalis est, segmentum BAC simile erit segmento EDF (per 11. def. 3.); sed hæc similia segmenta super æqvalibus rectis BC, EF sunt constituta, itaqve inter se sunt æqvalia (per 24. 3.): Sed & totus ABC circulus æqvalis est toti DEF: auferantur vero segmenta BAC, EDF, erunt etiam reliqva segmenta BKC, ELF inter se æqvalia (per 3. ax.): circumferentia igitur BKC circumferentiæ ELF æqvalis erit.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqvalibus circulis anguli, qvi æqvalibus insistunt circumferentiis sunt inter se æqvales sive ad centra sive ad circumferentias insistant.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, eorumqve æqualibus circumferentiis BC, EF, insistant anguli ad *ad centra qvidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF: Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse.*

Demonstratio.

Si angulus BGC æqvalis sit angulo EHF manifestum est angulum qvoqve BAC angulo EDF esse æqvalem (per 20. 3. & 7. ax.). Sin minus unus ipsorum est major.

Sit angulus BGC major, & ad rectam lineam BG & ad punctum in ipsa G constituatur angulus BCK = angulo EHF (per 23. 1.); æquales autem anguli æqvalibus insistunt circumferentiis, qvando ad centra fuerint (per 26. 3.): Ergo circumferentia BK = circumferentiæ EF.

Sed circumferentia EF = BC (per hypoth.): Ergo & BK ipsi BC est æqvalis, minor majori, qvod fieri non potest.

Non est igitur inæqvalis angulus BGC angulo EHF: Ergo est æqvalis.

Est autem angulus ad A dimidius anguli BGC; anguli vero EHF dimidius qvi ad D: angulus igitur qvi ad A angulo qvi ad D est æqvalis (per 7. ax.).

In æqvalibus igitur circulis anguli qvi æqvalibus insistunt circumferentiis sunt inter se æqvales, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Qvod erat demonstrandum.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqvalibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æqvales auferunt, majorem qvidem majori, minorem vero minori.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales rectæ lineæ BC, EF, quæ circumferentias qvidem auferant majores BAC, EDF, minores vero BGC, EHF: Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqvales esse.

Conſtructio.

1. Sumantur centra circulorum K, L, (per 1. 3.)
2. Jungantur BK, KC, EL, LF.

Demonſtratio.

Qvoniam circuli ſunt æqvales erunt & rectæ a centris ad peripheriam ductæ æqvales: ſcilicet duæ rectæ BK, KC æqvales duabus rectis EL, LF (per 1. Def. 3.)

Baſis vero BC æqvalis eſt baſi EF (per hypotheſin);

Ergo angulus BKC = angulo ELF (per 8. 1.)

Æqvales autem anguli ad centra conſtituti æqvalibus inſiſtunt circumferentiis, ideoqve circumferentia BGC = circumferentiæ EHF (per 26. 3.);

Sed & totus circulus ABC = toti circulo DEF, per hypoth.):

Reliqva igitur circumferentia BAC reliqvæ EDF æqvalis erit (per 3. ax.)

Ergo

Ergo in æqvalibus circulis æqvales rectæ lineæ circumferentias æqvales auferunt.

Quod erat demonstrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqvalibus circulis æqvales circumferentias æqvales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales circumferentias BGC, EHF subtendant rectæ BC, FE: Dico rectam lineam BC rectæ EF æqvalem esse.

Constructio.

1. Sumantur centra circulorum K, L (per 1. 3.)
2. Jungantur BK, KC, EL, LF.

Demonstratio.

Qvoniam circumferentia BGC æqvalis est circumferentiæ EHF (per hypoth.): Erit & angulus BKC = angulo ELF (per 27. 3.):

Porro qvoniam circuli ABC, DEF sunt æqvales (per hypoth.) erunt & rectæ e centris ductæ æqvales (per 1. def. 3.)

Duæ igitur BK, KC sunt æqvales duabus EL, LF, & æqvales angulos continent; Qvare Basis BC = basi EF (per 4. 1.)

In æqvalibus igitur circulis æqvales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.

Sit data circumferentia ADB bifariam ſecanda.

Conſtructio.

1. Jungatur recta AB, & bifariam ſecetur in C (per 10. 1.)
2. A puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD (per 11. 1.)
3. Jungantur AD, DB.

Demonſtratio.

Qvoniam in duobus triangulis ACD, BCD duo latera AC, CB ſunt æqvalia (per conſtruct.); latus autem CD commune; & præterea anguli ACD, BCD æqvales, qvia uterqve rectus eſt:

Baſis igitur AD æqvalis eſt baſi DB (per 4. 1.); ideoqve circumferentia AD æqvalis eſt circumferentiæ DB (per 28. 3.)

Qvare data circumferentia ADB bifariam ſecta eſt in puncto D.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo, angulus, qvi in ſemicirculo, rectus eſt: qvi vero in majori ſegmento minor eſt recto; & qvi in minori major recto; & inſuper majoris qvidem ſegmenti angulus recto major eſt; minoris vero ſegmenti angulus recto minor.

Sit circulus ABCD, cujus diameter BC, centrum autem E, & jungantur BA, AC, AD, DC: Dico

C (1.) *an-*

(1.) *angulum qvidem, qvi est in semicirculo BAC, rectum esse; (2.) qvi vero in segmento ABC majori semicirculo, videlicet angulum rectilineum ABC minorem esse recto; & (3.) qui in segmento ADC minore semicirculo, (hoc est, angulum rectilineum ADC) recto majorem esse.*

Demonstratio.

Jungatur AE, & BA ad F producatur.

1. Qvoniam angulus EAB = angulo EBA } (per 5.1.)
& angulus EAC = angulo ECA }

Ergo ang. EAB + EAC = ang. EBA + ECA (hoc est totus angulus BAC æqvalis est duobus angulis ACB & ABC simul sumptis); (per 2. ax.)

Est autem & angulus exterior FAC = duobus ang. ACB + ABC (per 32. 1.)

Ergo angulus BAC = angulo FAC (per 1. ax.) ac propterea uterqve ipsorum rectus est (per 10. def. 1.): qvare in semicirculo BAC angulus BAC rectus est. *Qvod primo erat demonstrandum.*

2. Qvoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BCA sunt minores duobus rectis (per 17. 1.) angulus autem BAC rectus est; Ergo angulus ABC recto minor est, & qvidem in segmento ABC majore semicirculo. *Quod secundo erat demonstrandum.*

3. Qvadrilaterum ABCD, circulo inscriptum, habet angulos oppositos ABC, ADC, duobus rectis æquales (per 22. 3.); Sed angulus ABC

minor eſt recto: reliqvus igitur ADC recto major eſt, & qvidem in ſegmento ADC minore ſemicirculo. *Quod tertio erat demonſtrandum.*

Dico præterea majoris ſegmenti angulum, comprehenſum a circumferentia ABC & recta linea AC, recto eſſe majorem; angulum vero minoris ſegmenti, comprehenſum a circumferentia ADC & recta linea AC, recto minorem: qvod qvidem perſpicue apparet. Qvoniam enim angulus a rectis lineis BA, AC comprehenſus rectus eſt, erit & comprehenſus a circumferentia ABC & recta linea AC major recto. Rurſus, qvoniam angulus comprehenſus a rectis lineis CA, AF rectus eſt; erit angulus, qvi comprehenditur a recta CA & ADC circumferentia, minor recto. *Qvod ultimo erat demonſtrandum.*

Corollarium.

Hinc manifeſtum eſt, qvod, ſi unus angulus trianguli ſit æqvalis duobus reliqvis, eſt rectus: propterea qvod ejus angulus deinceps iisdem eſt æqvalis; qvando autem anguli deinceps ſunt æqvales, recti erunt (per 10. def. 1.)

PROP. XXXII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, a contactu autem ducatur recta linea circulum ſecans, anguli qvos hæc cum contingente facit, æqvales erunt iis, qvi in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Sit circulus ABCD, qvem recta linea EF contingat in B, & a puncto B per circulum ABCD ducatur-

ducatur recta linea BD secans illum utcunqve: dico angulos, qvos BD cum contingente EF facit, æqvales esse iis, qvi in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est angulum FBD esse æqvalem angulo, qvi constituitur in DAB segmento, angulum vero EBD æqvalem angulo, qvi in segmento DCB constituitur.

Constructio.

1. A puncto B ipsi EF ad rectos angulos ducatur BA (per 11. 1.)
2. In circumferentia BD sumatur qvodvis punctum C, junganturqve AD, DC, CB.

Demonstratio.

Qvoniam recta EF circulum contingit in B, a puncto autem contactus recta BA ducta est ad angulos rectos tangenti, erit in ipsa BA centrum circuli (per 19. 3.):

Angulus igitur ADB in semicirculo est rectus (per 31. 3.) reliqvi vero anguli BAD † ABD uni recto sunt æqvales (per 32. 1.)

Est autem ang. ABF rectus (per constr.): Ergo angulus ABF = ang. BAD † ABD (per 10. ax.)

Communis auferatur ang. ABD.

Erit Reliqvus DBF = reliqvo BAD angulo, Qvi in alterno circuli segmento consistit.

Porro, qvoniam in circulo qvadrilaterum est ABCD, anguli ejus oppositi BAD † BCD æqvales sunt duobus rectis (per 22. 3.); Sed anguli DBF † DBE etiam æqvales sunt duobus rectis (per 13. 1.);

Ergo ang. DBF † DBE = BAD † BCD (per 10. ax);
Est autem ang. DBF = ang. BAD (ut supra ostens.)
Reliqvus igitur ang. DBE = ang. BCD (per 3. ax.)
Qvod erat demonstr.

PROP. XXXIII. PROBL.

Super data recta linea describere segmentum circuli, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta AB: super hac describendum est circuli segmentum, quod capiat angulum æqvalem dato angulo rectilineo C.

Cum vero datus angulus vel sit acutus, vel rectus, vel obtusus; de unoqvoqve sigillatim agemus.

1. *Sit datus angulus ad C acutus.*

Constructio.

1. Ad datam rectam AB & ad punctum in ea A constituatur angulus DAB æqvalis dato angulo C (per 23. 1).
2. Ex eodem puncto A erigatur ad rectam AD perpendicularis AE (per 11. 1.);
3. Ad alterum datæ rectæ AB punctum B fiat angulus ABG æqvalis angulo BAG; cujus latus BE secet perpendicularem AE in puncto G.
4. Centro G, intervallo GA describatur circulus AEB (per 3. post.);

Dico qvod Segmentum AEB capiat angulum dato angulo C acuto æqvalem.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam angulus GBA = angulo GAB (per conſtr.)

erit recta GB = rectæ GA (per 6. 1.)

Ergo centro G intervallo GA deſcriptus circulus tranſibit per punctum B (per 15. def. 1.):

Circulus igitur AEB per rectam AB ſectus eſt in punctis A & B; & angulus BAD, ex linea circulum contingente DA & ſecante AB conſtitutus, æqvalis ei, qvi in alterno ſegmento conſtituitur, angulo AEB; (per 32. 3.)

Sed angulus BAD = angulo C (per conſtr.):

Ergo angulus AEB = angulo C, ſuper data igitur recta linea AB deſcriptum eſt circuli ſegmentum AEB, qvod capiat angulum rectilineum AEB dato angulo acuto C æqvalem.

2. *Sit datus angulus ad C rectus:*

Conſtructio.

1. Ad datam rectam AB & ad punctum in ea A conſtituatur angulus DAB æqvalis angulo recto C (per 23. 1.);

2. Secetur AB bifariam in F (per 10. 1.);

3. Centro F intervallo autem æqvali alterutri ipſarum AF, FB circulus deſcribatur AEB (per 3. poſt.):

Dico qvod circuli ſegmentum AEB, ſuper datam rectam AB conſtitutum, capiat angulum dato recto angulo C æqvalem.

Demonſtratio.

Qvoniam recta linea DA ad extremitatem A diametri AB rectum angulum constituit (per construct.) & circulum AEB in puncto A contingit (per Coroll. 16. 3.); angulus igitur, qvi in alterno circuli segmento AEB constituitur, æqvalis est angulo DAB (per 32. 1.)

Sed recto angulo dato C æqvalis est idem DAB (per constr.); ergo & angulus, qvi in segmento AEB describitur recto angulo C est æqvalis (per 1. ax.)

Descriptum igitur est super data recta linea AB circuli segmentum AEB, qvod capiat angulum dato angulo C. æqvalem. *Qvod secundo erat faciendum.*

3. *Sit deniqve angulus ad C obtusus.*

Constructio.

1. Ad datam rectam lineam AB & ad punctum A constituatur angulus DAB æqvalis ipsi angulo C (per 23. 1.);

2. Ex eodem puncto A erigatur perpendicularis AE (per 11. 1.)

3. Ad alterum datæ rectæ AB punctum B fiat angulus ABG æqvalis angulo BAG, cujus latus BG secet diametrum AE in puncto G.

4. Centro G intervallo GA, describatur circulus AEBH (per 3. post.)

Dico qvod segmentum AHB capiat angulum dato obtuso angulo C æqvalem.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam angulus ABG æqvalis eſt angulo BAG (per conſtr.) erit recta AG æqvalis rectæ BG (per 6. 1.); ideoqve centro G, intervallo GA deſcriptus circulus tranſibit per punctum B (per 15. def. 1.): Circulus igitur AEBH per rectam AB ſectus eſt in punctis A, B, & angulus DAB ex linea circulum contingente AD & ſecante AB conſtitutus æqvalis eſt ei, qvi in alterno ſegmento conſtituitur angulo AHB (per 32. 3);

Sed & idem angulus DAB æqvalis eſt dato obtuſo angulo C (per conſtr.): Ergo angulus AHB etiam angulo C æqvalis eſt (per 1. ax.);

Super data igitur recta AB deſcriptum eſt circuli ſegmentum AHB qvod capiat angulum dato angulo obtuſo C æqvalem. *Qvod tertio erat faciendum.*

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo æqvalem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus D oportet a circulo ABC ſegmentum abſcindere, qvod capiat angulum angulo D æqvalem.

Conſtructio.

1. Ducatur recta linea EF, contingens circulum ABC in puncto B (per 17. 3.);
2. Ad rectam lineam EF & ad punctum in ea B conſtituatur angulus FBC, qvi eſt angulo D æqvalis (per 23. 1.)

Demonstratio.

Angulo FBC = angulus BAC (per 32. 3.);
Eidem ang. FBC = angulus D. (per constr.);
Ergo angulus BAC = angulo D. (per 1. ax.);

A dato igitur circulo ABC abscissum est segmentum BAC, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo D æqvalem. *Quod erat faciendum.*

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius comprehensum æqvale est ei, qvod sub alterius segmentis comprehenditur.

In circulo enim ABCD duæ rectæ lineæ AC, BD sese mutuo secent in puncto E: Dico rectangulum comprehensum sub AE, EC æqvale esse ei qvod comprehenditur sub DE, EB.

Demonstratio.

1. Si rectæ AC, BD per centrum E transeant (*ut in Fig.* 1.) manifestum est rectangulum comprehensum sub AE, EC, æqvale esse rectangulo comprehenso sub DE, EB: qvia rectæ omnes e centro ad peripheriam ductæ sunt æqvales (per 15. def. 1.).
2. Sin autem rectæ AC, DB non transeant per centrum (*uti in Fig.* 2.); sumatur circuli centrum F (per 1. 3.); atqve a centro F ad rectas AC, BD ducantur perpendiculares FG, FH (per 12. 1.); junganturque FC, FB, FE.

Qvoniam igitur recta FG per centrum ducta

rectam

rectam AC non ductam per centrum ad angulos rectos ſecat, ideoqve ipſam bifariam in puncto G ſecabit (per 3. 3.); porro qvoniam eadem recta AC etiam in duas partes in puncto E ſecta eſt; erit rectangulum ſub rectis AE, EC † qvadr. rectæ GE ∺ qvadrato rectæ GC (per 5. 2.); commune addatur qvadr. rectæ FG; Erit rectangulum ſub AE, EC † qvadr. GE † qvadr. FG ∺ qvadr. GC † qvadr. FG (per 2. ax.);

Sed qvadr. GE † qvadr. FG ∺ qvadr. FE; & qvadr. GC † qvadr. FG ∺ qvadr. FC (per 47. 1.):

Rectang. igitur ſub AE, EC † qvadr. EF ∺ qvadrato FC.

Eadem ratione oſtendetur rectang. ſub DE, EB † qvadr. FE ∺ qvadr. FB;

Eſt autem qvadr. FC ∺ qvadr. FB.

Ergo rectang. ſub AE, EC † qvadr. FE ∺ rectang. ſub DE, EB † qvadr. FE (per 1. ax.); commune auferatur qvadr. FE.

Relinqvetur rectang. ſub AE, EC ∺ rectang. ſub DE, EB.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliqvod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ qvarum altera circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam

circum-

circumferentiam, æqvale erit ei, qood a contingente fit, qvadrato.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliqvod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; & DCA qvidem circulum ABC ſecet DB vero contingat: Dico rectangulum ſub AD, DC æqvale eſſe qvadrato, qvod fit ex DB.

Demonſtratio.

1. Si recta DCA tranſeat per circuli centrum F (vide Fig. 1.). angulus FBD rectus erit (per 18. 3.); & qvoniam recta AC bifariam ſecta eſt in F, ipſiqve adjecta DC, erit rectangulum ſub AD, DC † qvadratum rectæ FC ∺ qvadrato rectæ FD (per 6. 2.);

Sed recta FC ∺ rectæ FB (per 15. def. 1.); ergo rectangulum ſub AD, DC † qvadratum rectæ BF ∺ qvadrato rectæ FD;

Porro qvadr. rectæ FD ∺ quadratis BD † BF (per 47. 1.);

Rectangulum igitur ſub AD, DC † qvadr. BF. ∺ qvadr. BD † qvadr. BF. (per 1. ax.) Auferatur commune qvadr. BF.

Relinqvetur rectangulum Sub AD, DC ∺ qvadrato BD (per 3. ax.)

Quod 1mo erat demonſtr.

2. Si recta linea DA non tranſeat per centrum circuli (2) (vide Fig. 2.); ſumatur centrum E, & ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF (per 12. 1.), junganturque EB, EC, ED.

Qvo-

Qvoniam igitur recta EF ad rectam AC perpendicularis est (per constr.) erit AC secta in duas partes æquales, videlicet AF = FC (per 3. 3.).

Rursus qvia ipsi AC etiam adjecta est linea CD, erit rectangulum sub AD, DC † qvadr. FC = qvadrato FD (per 6. 2.)

commune addatur qvadratum EF.

Sic rectang. sub AD, DC † qvadr. FC † qvadr. EF = qvadratis FD † EF. (per 2. ax.);

Porro qvoniam angulus EFD est rectus (per constr.); erit qvadratum rectæ ED = qvadratis FD † EF (per 47. 1.);

Ergo rectang. sub AD, DC † qvadr. FC † qvadr. EF = qvadr. ED (per 1. ax.).

Atqvi qvadratum EC = qvadr. EC † qvadr. EF (per 47. 1.)

Ergo rectang. sub AD, DC † qvadrat. EC = qvadr. ED, (per 1. ax);

Recta autem EC = rectæ EB (per 15. def. 1.), ideoqve rectang. sub AD, DC † qvadr. EB = qvadrato ED.

Cumqve rectus est angulus EBD (per 18. 3.), erunt qvadrata EB † BD = qvadr. ED. (per 47. 1.);

Qvare rectang. sub AD, DC † qvadr. EB = qvadratis EB † BD, auferatur commune qvadr. EB.

Relin-

Relinqvetur rectang. ſub AD, DC = qvadrato BD (per 3. ax.)

Hoc eſt rectangulum ſub tota AD, & ejus parte DC comprehenſum æqvale eſt qvadrato lineæ circulum tangentis BD.

Quod 2do erat demonſtr.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum ſumatur aliqvod punctum, atqve ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, qvarum altera qvidem circulum ſecet, altera vero in eum incidat, ſit autem rectangulum comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam circumferentiam æquale ei, qvod ab incidente fit, qvadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum ſumatur aliqvod punctum D, atqve ab hoc puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; & DCA qvidem circulum ſecet, DB vero in illum incidat, ſitqve rectangulum ſub AD, DC æqvale qvadrato qvod fit ex DB: Dico ipſum DB circulum ABC contingere.

Conſtructio.

1. Ducatur recta linea DE circulum ABC contingens (per 17. 3.);
2. Sumatur circuli ABC centrum F (per 1. 3.)
3. Junganturqve FE, FB, FD.

Demonſtratio.

Rectangulum ſub AD, DC = qvadrato tangentis DE (per 36. 3.);

Idem

Idem vero rectang. sub AD, DC = qvadrato rectæ DB (per hypoth.);

Ergo qvadratum DE = qvadrato DB (per 1. ax.) ac propterea linea DE = lineæ DB (per 8. ax.)

Porro recta FE = rectæ FB (per 15. def. 1.); in triangulis igitur DEF, DBF, duo latera DE, EF, duobus DB, BF sunt æqvalia & basis ipsorum FD communis, angulus igitur DBF = angulo DEF (per 8. 1.);

Rectus autem est DEF angulus (per 18. 3.),

Ergo & angulus DBF est rectus (per 1. ax.);

Et qvoniam recta FB per circuli centrum transit, ideoqve est circuli semidiameter (per 15. def. 1.), recta DB ab extremitate semidiametri FB ad angulos rectos ducta circulum ABC contingit (per cor. 16. 3.).

Qvod erat demonstr.

EUCLIDIS ELEMENTORUM, LIBER QUARTUS

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, qvando unusqvisqve figuræ inscriptæ angulus contingit unumqvodqve latus ejus, in qva inscribitur.
2. Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, qvando unumqvodqve latus circumscriptæ

ptæ contingit unumqvemqve angulum ejus, qvæ inſcribitur.

3. Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, qvando unusqvisqve inſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4. Figura rectilinea circa circulum circumſcribi dicitur, qvando unumqvodqve latus circumſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

5. Circulus ſimiliter in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando Circuli circumferentia unumqvodqve latus ejus, in qva inſcribitur, contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam circumſcribi dicitur, qvando circuli circumferentia unumqvemqve angulum ejus, circa qvam circumſcribitur, contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROBL.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, qvæ diametro ejus non major ſit, æqvalem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea D *non major circuli diametro: oportet in circulo ABC rectæ lineæ* D *æqvalem rectam lineam aptare.*

Conſtructio.

1. Ducatur circuli ABC diameter; Si igitur BC ſit æqvalis ipſi D, factum jam erit qvod proponebatur.

ponebatur. Etenim in circulo ABC aptata eſt BC rectæ lineæ D æqvalis;

2. Sin autem major eſt BC qvam D, ponatur ipſi D æqvalis CE (per 3. 1.); deinde centro qvidem C intervallo autem CE deſcribatur circulus AEG (per 3. poſtul.), & CA jungatur (per 1. poſt.).

Demonſtratio.

Qvoniam punctum C eſt centrum circuli AEG, erit

CA = CE (per 15. def. lib. 1.
Sed D = CE (per conſtr.)

Ergo recta D = rectæ CA (per 1. ax.).

In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, qvæ non major eſt circuli diametro, æqvalis aptata eſt CA. *Quod erat faciendum & demonſtrandum.*

PROP. II. PROBL.

In dato circulo inſcribere triangulum æqviangulum dato triangulo.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF: oportet in circulo ABC inſcribere triangulum triangulo DEF æqviangulum.

Conſtructio.

1. Ducatur recta linea HAG contingens circulum ABC in puncto A;
2. Ad rectam lineam HG & ad punctum in ea A conſtituatur angulus HAC = angulo DEF (per 23. 1.);
3. Ad rectam lineam HG & ad punctum in ea A

rurſus conſtituatur angulus GAB = angulo DFE & BC jungatur.

Demonſtratio.

Qvoniam circulum ABC contingit recta GH, a contactu autem ducta eſt AC, erit angulus HAC æqvalis ei, qvi in alterno circuli ſegmento conſiſtit, angulo, videlicet ipſi ABC (per 32. 3.);

Sed angulus HAC = angulo DEF (per conſtruct.);

Ergo & angulus ABC = angulo DEF (per 1. ax.).

Eadem ratione & angulus ACB eſt æqvalis angulo DFE:

Reliqvus igitur angulus BAC, reliqvo angulo EDF æqvalis erit (per 32. 1.)

Ergo triangulum ABC triangulo DEF eſt æqviangulum, & in circulo ABC inſcriptum eſt (per 3. def. 4.).

Quod erat fac. & demonſtr.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum circumſcribere triangulum, æqviangulum dato triangulo.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF: oportet circa circulum ABC circumſcribere triangulum æqviangulum triangulo DEF.

Conſtructio.

1. Protrahatur EF ex parte utraqve ad puncta H, G, (per 2. poſt.);
2. Sumatur circuli ABC centrum K (per 1. 3.);

3. Recta

3. Recta linea KB vtcunqve ducatur, constituaturqve ad lineam KB, & ad punctum in ea K angulus BKA = angulo DEG, angulo autem DFH = angulus BKC (per 23. 1.);
4. Per puncta A, B, C, ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL, circulum ACB contingentes (per 17. 3.)

Demonstratio.

Qvoniam rectæ LM, MN, NL circulum contingunt in punctis A, B, C; (per construct.) a centro autem K ad puncta A, B, C, ductæ sunt rectæ KA, KB, KC, erunt anguli ad puncta contactûs A, B, C, recti (per 18. 3.);

Porro qvoniam AMBK (qvod in duo triangula dividi potest) anguli qvatuor æqvales sunt qvatuor angulis rectis (per 32. 1.), e qvibus anguli KAM, KBM sunt recti; erunt reliqvi AKB, AMB duobus rectis æqvales;

Sunt autem & DEG & DEF duobus rectis æqvales (per 13. 1.): Anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF sunt æqvales, e qvibus AKB ipsi DEG est æqvalis (per construct.): ergo reliqvus AMB reliqvo DEF æqvalis erit (per 3. ax.)

Similiter demonstrabitur angulus LNM ipsi DFE æqvalis: Ergo & reliqvus MLN est æqvalis reliqvo EDF (per 32. 1.).

Est igitur LMN triangulum æqviangulum triangulo DEF, & circa circulum ABC circumscribitur (per 4. def. 4.)

Quod erat faciendum.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum inſcribere.

Sit datum triangulum ABC: oportet in triangulo ABC circulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Secentur anguli ABC, BCA bifariam per rectas CD, BD, productas usqve dum conveniant in puncto D (per 9. 1.),
2. A puncto D ad rectas lineas AB, BC, CA ducantur perpendiculares DE, DG, DH (per 12. 1.)

Demonſtratio.

Qvoniam angulus ABC bifariam ſectus eſt, erit ang. ABD = angulo CBD (per conſtruct.) & porro rectus angulus BED = recto ang. BHD (per ax. 10.); duo igitur triangula DEB, DHB habent duos angulos duobus angulis æqvales & unum latus DB utriqve commune, qvod ſcilicet uni æqvalium angulorum ſubtenditur: Qvare reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt, ſcilicet latus EB = lateri BH, & lat. DE = lat. DH (per 26. 1.) Eadem ratione erit etiam DG = DE = DH: Ideoqve centro D, intervallo autem DG vel DE vel etiam DH deſcriptus circulus tranſibit per puncta E, H, G, atqve in his punctis rectas AB, BC, CA continget (per coroll. 16. 3.); propterea etiam circulus in triangulo ABC inſcriptus eſt (per 5. def. 4.).

Qvod erat faciendum.

PROP.

PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ABC: oportet circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

Constructio.

1. Rectæ AB, AC bifariam secentur in punctis D, E (per 10. 1.);
2. A punctis D, E, ipsis AB, AC ad rectos angulos ducantur DF, EF (per 11. 1.)

Demonstratio.

Lineæ DF, EF, ad rectos angulos ductæ, vel intra triangulum ABC, vel in trianguli latere BC, vel extra triangulum ABC convenient in puncto F.

1. *Conveniant DF, EF intra triangulum in puncto F (vide Fig. 1.) & BF, CF, AF jungantur.*

Qvoniam igitur AD est æqvalis rectæ DB: bifariam enim secta est AB (per construct.) recta autem DF utriqve triangulo ADF, BDF communis, & angulus ADF æqvalis angulo BDF (per 10. ax.); erit basis AF = basi FB (per 4, 1.): Similiter ostendetur & CF æqvalis AF: ergo & BF = CF: tres igitur FA, FB, FC inter se sunt æqvales.

Qvare centro F, intervallo autem æqvali uni ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus etiam per reliqva puncta transibit: atqve erit circulus circa triangulum ABC circumſcriptus (per 6. def. 4.)

2. *DF, EF, conveniant in recta linea BC, in puncto F (ut in 2. Fig.), & AF jungatur:* Similiter demonſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum ABC circumſcripti.

3. *DF, EF conveniant extra triangulum ABC rurſus in puncto F (ut in Fig. 3.)*: & jungantur AF, BF, CF;

Qvoniam igitur AD = DB (per conſtr.); communis autem & ad angulos rectos DF; baſis AF baſi BF æqvalis erit (per 4. 1.)

Similiter demonſtrabimus & CF ipſi AF æqvalem eſſe, qvare & BF eſt æqvalis CF, rurſus igitur centro F, intervallo autem æqvali uni ipſarum AF, BF, CF, circulus deſcriptus etiam per reliqva tranſibit puncta; atqve erit circa triangulum ABC circumſcriptus.

Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, qvod, ſi centrum circuli intra triangulum ceciderit, angulus BAC exiſtens in ſegmento ſemicirculo majore minor eſt recto: Si autem ceciderit in recta linea BC, angulus in ſemicirculo rectus erit: & ſi extra triangulum ABC, angulus in ſegmento minore ſemicirculo erit major recto. Qvare ſi datum triangulum ſit oxygonium, DF, EF intra triangulum

gulum convenient: Sin in eo ſit angulus rectus BAC in ipſa AC: & ſi ſit major recto, extra ABC.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo qvadratum inſcribere.

Sit datus circulus ABCD: oportet in circulo ABCD quadratum inſcribere.

Conſtructio.

1. Ducantur Circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC, BD (per 11. 1.);
2. Jungantur AB, BC, CD, DA (per poſt. 1.).

Demonſtratio.

Quoniam E eſt centrum circuli, qvatuor autem anguli ad céntrum, E conſtituti, ſcil. AEB, AED, DEC, CEB ſunt recti (per conſtruct.) ideoqve omnes inter ſe æqvales (per 10. ax.); porro rectæ EA, EB, EC, ED ſunt æqvales (per 15. def. 1.):

Triangula igitur BEA, AED, DEC, CEB ſunt inter ſe æqvalia, ac proinde baſes BA, AD, DC, CB ſunt æqvales (per 4. 1.); Qvare qvadrilaterum ABCD eſt æqvilaterum.

Rurſus qvoniam recta BD eſt diameter circuli ABCD; erit BAD ſemicirculus; qvapropter angulus BAD rectus eſt (per 31. 3.); Cum vero eadem ratione demonſtretur reliqvos angulos ADC, DCB, CBA etiam eſſe rectos; rectangulum igitur eſt ABCD qvadrilaterum; oſtenſum autem eſt æqvilaterum eſſe : igitur qvadratum eſt (per 29. def. 1.) & inſcriptum eſt in circulo ABCD (per 3. def. 4.).

Qvod erat faciendum.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum circumſcribere.

Sit datus circulus ABCD : oportet circa ABCD circulum qvadratum deſcribere.

Conſtructio.

(1) Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC, BD ad rectos inter ſe angulos ; & (2) per puncta A, B, C, D, ducantur rectæ FG, GH, HK, KF contingentes circulum ABCD (per 17. 3.).

Demonſtratio.

Qvoniam recta FG circulum contingit, a centro autem E; ad punctum contactûs A ducta eſt recta EA ; erunt anguli ad A recti (per 18. 3.)

Eadem ratione & anguli ad puncta B, C, D, ſunt recti.

Porro qvoniam angulus AEB eſt rectus, & EBG etiam rectus ; erit (per 28. 1.) GH ipſi AC parallela ; eadem ratione & AC parallela eſt rectæ FK ; qvare GH & FK inter ſe ſunt parallelæ (per 30. 1.).

Similiter demonſtrabitur & utramqve ipſarum GF, HK ipſi BED parallelam eſſe ; ideoqve GF, HK etiam inter ſe parallelas.

Paral-

Parallelogramma igitur ſunt GK, GC, AK, FB, BK; ac propterea GF = HK; GH vero = FK (per 34. 1.).

Et qvoniam AC = BD (per 15. def. 1.) ſed & AC qvidem utriqve ipſarum GH, FK eſt æqvalis, BD vero æqvalis utriqve, GF, HK utraqve igitur GH, FK utriqve GF, HK, æqvalis erit. Qvare æqvilaterum eſt FGHK qvadrilaterum. Dico & rectangulum eſſe: qvoniam enim parallelogrammum eſt GBEA atqve angulus AEB eſt rectus & ipſe AGB angulus rectus erit, (per 34. 1.) Similiter demonſtrabimus angulos etiam, qvi ad puncta H, K, F ſunt conſtituti rectos eſſe: Rectangulum igitur eſt qvadrilaterum FG, HK; demonſtratum autem eſt & æqvilaterum: igitur qvadratum eſt; & circumſcriptum præterea eſt circa circulum ABCD.

Qvod erat faciendum.

PROP. VIII. PROBL.

In dato qvadrato circulum inſcribere.

Sit datum qvadratum ABCD: oportet in ABCD qvadrato circulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Utraqve ipſarum GH, GF ſecetur bifariam, in punctis, A, B (per 10. 1.)?
2. Per punctum A alterutri ipſarum GH, FK, parallela ducatur AC, per punctum vero B ducatur BD parallela alterutri GF, HK (per 32. 1.).

Dico: circulus centro E intervallo EA deſcriptus qvadrato inſcribetur.

Demonstratio.

Qvadrati FGHK latus FG = lateri GH; ergo lateris FG dimidium GA æqvatur lateris GH, dimidio GB (per 7. ax.), & qvoniam recta AC est parallela rectæ GH, recta autem BD parallela rectæ GF; est igitur AGBE parallelogrammum habens opposita latera æqvalia.

latus nempe AG = lateri BE
& lat. GB = lateri AE } (per 34. 1.)

Sed latus AG, & GB sunt ejusdem magnitudinis (ut supra ostensum est); ergo & BE, AE sunt æqvales (per 1. ax.);

Eadem ratione demonstrabitur parallelogramma esse BHEC, AEDF, eorumqve opposita latera esse æqvalia,

latus nempe BH = lateri EC
& latus AF = lateri ED } (per 34. 1.)

Qvoniam autem BH = GB, & AF = AG (per constr.);

erit etiam GB = EC
& AG = ED } (per 1. ax.).

Sed GB = AG (ut supra); ergo & FC = ED.

Et rursus, qvoniam ostensum est, iisdem æqvalibus AG, GB lateribus, etiam æqvalia esse latera BE, AE, qvatuor igitur latera EC, ED, BE, AE erunt inter se æqvalia. Qvare centro E, intervallo EA si describitur circulus, per reliqva puncta B, C, D qvoqve transibit, & unumqvodqve qvadrati latus in punctis A, D, C, B tanget; datoqve igitur qvadrato inscriptus erit.

Quod erat faciendum.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum qvadratum circulum circumſcribere.

Sit datum qvadratum ABCD: Oportet circa qvadratum ABCD circulum circumſcribere.

Conſtructio.

Jungantur AC, BD, qvæ ſe invicem in puncto E ſecent.

Demonſtratio.

Triangulorum ADC, ABC, duo latera ſunt æqvalia, latus ſcil. AD = lateri AB; latus autem AC utriqve eſt commune; & qvoniam baſis BC etiam æqvatur baſi DC, erit angulus BAC = angulo DAC: angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt a recta linea AC.

Similiter demonſtrabimus unumqvemqve angulorum ABC, BCD, CDA, bifariam ſecari a rectis lineis AC, BD.

Qvoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt æqvalis; erit etiam anguli DAB dimidium EAB = EBA, dimidio nempe anguli ABC (per 7. ax.); ideoqve æqvalibus hisce angulis oppoſita latera EA, EB inter ſe ſunt æqvalia (per 6. 1.)

Eadem ratione demonſtrabimus & vtramqve rectarum EC, ED utriqve EA, EB, æqvalem eſſe: ergo qvatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED inter ſe ſunt æqvales.

Centro

Centro igitur E intervallo autem æqvali uni ipsarum EA, EB, EC, ED circulus descriptus etiam per reliqva puncta transibit, atqve erit circumscriptus circa quadratum ABCD.

Quod erat faciendum.

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum, qvi sunt ad basin duplum reliqvi.

Isosceles triangulum ABD est construendum, cujus anguli ad basin ABD & BDA singuli sint dupli ejus ad verticem DAB.

Constructio.

1. Ponatur recta qvædam linea AB, & secetur in puncto C ita, ut rectangulum comprehensum sub AB, BC, æqvale sit qvadrato ex CA (per 11. 2.):
2. Centro A intervallo AB circulus describatur. BDF, (per 3. post);
3. In circulo BDF aptetur recta linea BD æqvalis ipsi AC (per 1. 4.);
4. Jungantur DA, DC; & triangulo ACD circumscribatur circulus ACD (per 5. 4.)

Demonstratio.

Qvoniam rectangulum sub AB, BC æqvale est qvadrato rectæ AC (per constr.), æqvalis autem est AC ipsi BD; erit rectangulum sub AB, BC æqvale qvadrato rectæ BD.

Porro

Porro, qvoniam extra circulum ACD ſumptum eſt punctum B, ab hoc autem puncto cadunt duæ rectæ lineæ BCA, BD, qvarum altera qvidem circulum ſecat, altera vero in eum incidit, & qvia rectangulum ſub AB, BC æqvale eſt qvadrato rectæ BD; recta igitur linea BD circulum ACD in puncto D continget (per 37. 3.);

Rurſus qvoniam BD circulum contingit, & a contactu D ducta eſt recta DC, erit angulus BDC æqvalis ei, qvi in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet angulo DAC (per 32. 3);

Cum autem angulus BDC æqvalis ſit ipſi DAC, communis addatur CDA: totus igitur BDA eſt æqvalis duobus angulis CDA, DAC. Sed his ipſis duobus angulis CDA, DAC etiam æqvalis eſt exterior angulus BCD (per 32. 1.): ergo & angulus BDA æqvalis eſt ipſi angulo BCD (per 1. ax.).

Iterum angulus BDA eſt æqvalis angulo DBA (per 5. 1.), nam latus AB æqvale eſt lateri AD (per 15. def. 1.) ergo & DBA ipſi BCD æqvalis erit.

Tres igitur anguli BDA, DBA, BCD inter ſe ſunt æqvales.

Qvoniam vero angulus DBA, vel (qvod idem eſt) angulus DBC æqvalis eſt angulo DCB; erit latus BD æqvale lateri DC (per 6. 1.).

Sed recta BD æqvalis eſt rectæ CA (per conſtruct.): ergo & DC æqvatur rectæ CA: quare & angulus CDA æqvalis eſt angulo CAD (per 5. 1.): anguli igitur CDA, CAD ſimul ſumpti ipſius anguli CAD dupli ſunt.

Eſt

Eſt autem & angulus BCD æqvalis angulis CDA, CAD ſimul ſumptis: ergo & ang. BCD duplus eſt ipſius CAD.

Sed angulus BCD eſt æqvalis alterutri ipſorum BDA, DBA: qvare & alteruter ipſorum BDA, DBA ipſius DAB (vel CAD) eſt duplus.

Iſoſceles igitur triangulum ADB conſtitutum eſt, habens alterutrum eorum angulorum, qvi ſunt ad baſin BD duplum reliqvi.

Qvod erat faciend.

PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCDE: oportet in ABCDE circulo pentagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Ponatur triangulum iſoſceles FGH habens alterutrum angulorum ad G, H duplum anguli, qvi eſt ad F (per 10. 4.)
2. In circulo dato inſcribatur triangulum ACD, triangulo FGH æqviangulum (per 2. 4.);
3. Anguli ad Baſin ACD, ADC ſecentur bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circumferentiæ in punctis B, E; (per 9. 1.);
4. Ducantur rectæ AB, BC, DE, EA.

Demonſtratio.

1. Qvoniam uterque angulorum ACD, CDA duplus eſt anguli CAD, & ſecti ſunt bifariam a

rectis

rectis lineis CE, DB (per constr.); qvinqve anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sunt inter se æqvales. Æqvales autem anguli æqvalibus circumferentiis insistunt (per 26. 3.); qvinqve igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA æqvales sunt inter se. Sed æqvales circumferentias æqvales rectæ lineæ subtendunt (per 29. 3.); ergo & qvinqve rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA inter se sunt æqvales: æqvilaterum est igitur ABCDE pentagonum. *Quod primo erat demonstr.*

2. Qvoniam circumferentia AB æqvalis est circumferentiæ DE (ut supra ostens) communis addatur circumf. BCD, tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqvalis.

Circumferentiæ qvidem ABCD insistit angulus AED, circumferentiæ vero EDCB insistit angulus BAE: ergo & BAE angulus est æqvalis angulo AED (per 27. 3.).

Eadem ratione & unusqvisqve angulorum ABC, BCD, CDE alterutri ipsorum BAE, AED est æqvalis: æqviangulum igitur est ABCDE pentagonum. *Quod 2do erat demonstr.*

In dato igitur circulo inscriptum est pentagonum æqvilaterum & æqviangulum.

Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABCDE: oportet circa circulum ABCDE pentagonum æqvilaterum & æqviangulum circumscribere.

Con-

Conſtructio.

1. Intelligatur circumferentia tota circuli in qvinqve partes æqvales diviſa per puncta A, B, C, D, E pentagoni circulo inſcripti (per 11. 4.);
2. Per puncta, A, B, C, D, E ducantur rectæ circulum contingentes GH, HI, IK, KL, LG (per 17. 3.);
3. Sumatur circuli centrum F (per 1. 3.);
4. Jungantur FB, FI, FC, FK, FD (per 1 poſt.).

Demonſtratio.

1. Qvoniam recta IK contingit circulum in puncto C, & a centro F ad contactum ducta eſt FC; erit FC ad ipſam IK perpendicularis (per 18. 3.): rectus igitur eſt uterqve angulorum, qvi ſunt ad C.

Eadem ratione & anguli, qvi ad puncta B, D ſunt recti.

Cum autem rectus eſt angulus FCI, erit qvadratum rectæ FI æqvale qvadrato rectæ FC † qvadr. rectæ CI (per 47. 1.).

Eandem ob cauſam qvadrato rectæ FB † qvadr. rectæ BI æqvale eſt qvadratum rectæ FI: qvare qvadratum rectæ FC † qvadrat: rectæ CI æqvalia ſunt qvadrato rectæ FB, † qvadrato rectæ BI (per 1. ax.).

Sed recta FC æqvalis eſt rectæ BF, ideoque qvadratum rectæ FC æqvale qvadrato rectæ FB: qvare qvadratum reliqvum rectæ BI æqvale eſt reliqvo qvadrato rectæ CI (per 3. ax.); æqvalis igitur eſt recta BI ipſi rectæ CI (per 8. ax.).

Qvoniam vero in duobus triangulis FBI, FCI duæ rectæ FB, BI duabus FC, CI sunt æqvales, Communis autem utriqve FI; erit angulus BFI æqvalis angulo IFC, & angulus BIF æqvalis angulo FIC (per 8. 1.). Duplus igitur est BFC anguli IFC, & angulus BIC duplus ipsius FIC.

Eadem ratione & angulus CFD duplus est anguli CFK, angulus vero CKD duplus anguli CKF.

Et qvoniam circumferentia BC circumferentiæ DC est æqvalis (per constr.) & angulus BFC angulo CFD æqvalis erit (per 27. 3.)

Atqvi angulus BFC duplus est anguli IFC, angulus vero CFD duplus ipsius CFK (ut supra): æqvalis igitur est angulus IFC angulo CFK (per 7. ax.).

Sunt igitur duo triangula FIC, FCK habentia duos angulos duobus angulis æqvales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æqvale, qvod ipsis commune est nempe FC, ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalis habent, & reliqvum angulum reliqvo angulo æqvalem (per 26. 1.); recta igitur IC est æqvalis rectæ CK, & angulus FIC æqvalis angulo FKC.

Qvoniam autem IC est æqvalis rectæ CK, erit IK ipsius IC dupla.

Eadem ratione & HI ipsius BI dupla ostendetur.

Rursus qvoniam BI ostensa est æqvalis ipsi IC, atqve est IK qvidem dupla rectæ IC, HI vero dupla ipsius BI; erit HI ipsi IK æqvalis (per 6. ax.)

Similiter & unaqvæqve ipsarum GH, GL, LK ostendetur æqvalis alterutri HI, IK: æqvilaterum igitur eſt GHIKL pentagonum. *Qvod primo erat demonſtrandum.*

2. Qvoniam angulus FIC eſt æqvalis angulo FKC,& oſtenſus eſt ipſius qvidem FIC duplus angulus HIK; ipſius vero FKC duplus IKL, erit & HIK angulus angulo IKL æqvalis (per 6. ax.)

Simili ratione oſtendetur & unusqvisqve ipſorum IHG, HGL, GLK, alterutri HIK, IKL æqvalis: Qvinqve igitur anguli GHI, HIK, IKL, KLG, LGH inter ſe ſunt æqvales. Ergo æqviangulum eſt GHIKL pentagonum. *Qvod 2do erat demonſtrand.*

Qvare circa circulum ABCDE datum circumſcriptum eſt pentagonum æqvilaterum & æqviangulum. *Qvod erat faciendum.*

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono æqvilatero & æqviangulo circulum inſcribere.

Sit datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum ABCDE: oportet in ABCDE pentagono circulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Uterqve angulorum BCD, CDE a rectis CK, DF bifariam ſecetur (per 9. 1.);
2. A puncto I, in qvo conveniunt inter ſe CI, DI, ducantur rectæ IB, IA, IE.

Demonſtratio.

Qvoniam pentagoni latus BC æqvale eſt lateri CD (per hypoth.), & latus IC commune, duo igitur triangula IBC, ICD habent duo latera æqvalia, alterum alteri,

alteri, habent vero & angulos BCI, DCI inter æqvalia latera BC, CI & CD, CI comprehenſos æqvales: qvare baſis BI baſi DI eſt æqvalis, & triangulum BIC æqvale triangulo DIC, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales, qvibus æqvalia latera ſubtenduntur (per 4. 1.): angulus igitur CBI angulo CDI æqvalis erit.

Cum autem angulus CDE anguli CDI eſt duplus (per conſtr.), & angulus qvidem CDE angulo ABC æqvalis, angulus vero CDI angulo CBI æqvalis; erit & CBA angulus duplus anguli CBI; ac propterea angulus ABI angulo IBC æqvalis: angulus igitur ABC bifariam ſecatur a recta linea BI.

Similiter demonſtrabitur & unumqvemqve angulorum BAE, AED a rectis lineis IA, IE bifariam ſecari. Itaqve a puncto I ad rectas lineas AB BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares IF, IG, IH, IL, IK.

Rurſus, qvoniam angulus GCI eſt æqvalis angulo HCI (per conſtr.), & rectus IGC recto IHC æqvalis (per 10 ax): erunt IGC, IHC duo triangula duos angulos duobus angulis æqvales habentia & unum latus uni lateri æqvale, commune ſcilicet IC, qvod utriqve æqvalium angulorum ſubtenditur: ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt, atqve erit perpendicularis IG perpendiculari IH æqvalis (per 26. 1.)

Similiter oſtendetur & unaqvæqve ipſarum IL, IK, IF, æqvalis alterutri IH, IG, qvinqve igitur rectæ lineæ IF, IG, IH, IL, IK inter ſe ſunt æqvales.

Qvare centro I intervallo autem æqvali uni ipſarum IF, IG, IH, IL, IK circulus deſcriptus etiam per reliqva tranſibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea qvod anguli ad F, G, H, L, K ſunt recti.

In dato igitur pentagono æqvilatero & æqviangulo circulus eſt inſcriptus. *Qvod erat faciendum.*

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum circulum circumſcribere.

Sit datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum ABCDE, oportet circa pentagonum ABCDE circulum circumſcribere.

Conſtructio.

1. Uterqve BCD, CDE angulorum bifariam a rectis lineis CF, DF ſecetur (per 9. 1.);
2. A puncto F, in qvo conveniunt rectæ CF, DF, ad puncta B, A, E, ducantur FB, FA, FE.

Demonſtratio.

Similiter, vt in antecedente prop. 13., demonſtrabitur unumqvemqve angulorum CBA, BAE, AED, a rectis lineis BF, FA, FE bifariam ſecari.

Et qvoniam angulus BCD angulo CDE eſt æqvalis, atque eſt anguli BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit FCD angulus æqvalis angulo FDC (per 7. ax.); qvare & latus FC lateri FD eſt æqvale.

Eadem ratione demonſtrabitur unaqvæqve ipſarum FB, FA, FE æqvalis alterutri FC, FD: qvinqve igitur rectæ lineæ FA, FB, FC, FD, FE ſunt inter ſe æqvales. Ergo centro F & intervallo

æqvali

æqvali uni ipſarum FA, FB, FC, FD, FE circulus deſcriptus etiam per reliqva tranſibit puncta, eritqve circumſcriptus circa pentagonum æqvilaterum & æqviangulum ABCDE. *Qv.e.faciendum.*

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCDEF: oportet in circulo ABCDEF hexagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Sumatur circuli ABCDEF centrum G (per 1. 3.);
2. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD; & centro D intervallo autem DG deſcribatur circulus EGCH (per 3 poſt.);
3. A punctis E, C per centrum G ducantur rectæ EB, CF; & jungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA: Dico hexagonum ABCDEF æqvilaterum eſſe & æqviangulum.

Demonſtratio.

1. Qvoniam G eſt centrum circuli ABCDEF, D vero eſt centrum circuli EGCH erit Recta GE ≕ GD, & recta DE ≕ GD (per 15. def. 1.), ideoq; recta GE ≕ rectæ DE (per 1. ax.): æqvilaterum igitur eſt GED triangulum treſqve ipſius anguli EGD, GDE, DEG ſunt inter ſe æqvales (per 5. 1.)

Sunt autem & hi tres anguli ſimul ſumpti æqvales duobus angulis rectis (per 32. 1.); unusqvis-

 qve

qve igitur ipsorum trium angulorum EGD, GDE, DEG est tertia pars duorum rectorum.

Similiter ostendetur triangulum G C D esse æqvilaterum, ejusqve tres angulos inter se esse æqvales & unumqvemqve horum angulorum DGC, GCD, CDG esse tertiam partem duorum rectorum: qvare duo anguli EGD, DGC sunt inter se æqvales.

Qvoniam recta CG insistens rectæ EB angulos, qvi sunt deinceps CGE, CGB, duobus rectis æqvales efficit; angulus autem CGE æqvatur angulis EGD, DGC, qvorum unusqvisqve est una tertia pars duorum rectorum; reliqvus igitur angulus CGB erit etiam una tertia pars duorum rectorum; qvare anguli EGD, DGC, CGB, sunt inter se æqvales.

Cum vero anguli BGA, AGF, FGE ipsis EGD, DGC, CGB angulis ad verticem sint oppositi & propterea æqvales (per 15. 1.): sex igitur anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sunt inter se æqvales: & sex proinde circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, qvibus isti æqvales anguli insistunt, inter se sunt æqvales (per 26. 3.).

Qvæ autem circumferentias ipsas æqvales subtendunt rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EF, EA, etiam æqvales sunt (per 29. 3.): qvare æqvilaterum est hexagonum ABCDEF. *Qvod primo erat demonstr.*

2. Qvoniam circumferentia AF æqvalis est circumferentiæ ED, communis addatur circumferentia A B C D: tota igitur circumferentia F A B C D æqvalis est toti circumferentiæ EDCBA (per 2. ax.); & propterea, qvi æqvalibus ipsis circumferentiis insistunt anguli AFE, DEF æqvales sunt (per 27. 3.).

Similiter

Similiter oſtendentur & reliqvi anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æqvales alterutri ipſorum AFE, DEF: eſt igitur æqviangulum ABCDEF hexagonum. *Quod 2do erat demonſtr.*

In dato igitur circulo inſcriptum eſt hexagonum æqvilaterum & æqviangulum. *Quod erat faciendum*

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus circuli ſemidiametro æqvale eſſe.

Et ſi per puncta A, B, C, D, E, F ducamus contingentes circulum, circa circulum circumſcribetur hexagonum æqvilaterum & æqviangulum, ad modum eorum qvæ de pentagono dicta ſunt. Ad qvorum modum etiam dato hexagono circulum inſcribemus & circumſcribemus.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo qvindecagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCD oportet in circulo ABCD qvindecagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Conſtructio.

1. Circulo ABCD inſcribatur triangulum æqvilaterum ACD (per 2. 4.);
2. Eidem circulo inſcribatur etiam pentagonum æqvilaterum (per 11. 4.).
3. Circumferentia BC dividatur bifariam in puncto E (per 30. 3.);

Dico utrumqve rectarum BE, EC eſſe latus qvindecagoni circulo inſcribendi.

Demonſtratio.

Si tota circuli circumferentia in qvindecim partes æqvales ſecta concipiatur, trianguli æqvilateri latus AC ab ipſis æqvalibus qvindecim partibus auferet partes qvinqve æqvales;

Pentagoni vero æqvilateri latus AB earundem partium tres partes æqvales auferet, circumferentia igitur AB lateris pentagoni a circumferentia ABC lateris trianguli ablata, relinqvetur circumferentia BC, duas partes decimas qvintas totius circuli circumferentiæ comprehendens: qvare, ipſa BC circumferentia in puncto B bifariam ſecta, erit utraqve rectarum BE, EC una decima qvinta pars totius circumferentiæ ABCDA.

Si igitur dato circulo ABCD in continuum aptentur rectæ lineæ æqvales uni ipſarum BE, EC (per 1. 4.), erit in ipſo inſcriptum qvindecagonum æqvilaterum, & ſimul æqviangulum (per 27. 3.),

Qvod erat faciendum.

Ad modum autem eorum, qvæ dicta ſunt de pentagono, ſi per circuli diviſiones ducamus rectas lineas circulum contingentes, circa ipſum circumſcribetur quindecagonum æqvilaterum & æqviangulum. Et inſuper ad modum eorum, qvæ dicta ſunt de pentagono, dato qvindecagono æqvilatero & æqviangulo circulum inſcribemus & circumſcribemus.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

PRAEPARATIO
AD
METAPHYSICAM REGINAM
SCIENTIARUM DICTAM.

Repetens incomparabilia Metaphyſicorum monumenta; ſapientiam fere omnem in terminis abſtruſis & barbaris effingendis poſitam eſſe, animadverti. Perverſisſima hæc methodus ex eadem ratione, qva aliis, mihi ſemper fuit odioſa, præſertim cum viderem: *vulgo nota* explicari miris verborum ambagibus & connexionem rerum naturalem penitus prætermitti atqve negligi. His cauſis motus, in eam adductus ſum ſententiam, ut cum aliis diſciplinam hanc, terminorum colluvie refertam, pro nudo, in qvo voces explicarentur, Lexico haberem. Sed ut diſciplinæ hujus miris modis transmutatæ natales repeterem, & formam genuinam atqve indolem *Philoſophiæ primæ* qvodammodo reſtituerem; hanc ineundam eſſe putavi rationem, ut ex vetuſtioribus illis temporibus *Ariſtotelem* & *Euclidem*, illum *Philoſophiæ*, hunc *Geometriæ* conditorem, de novo revocarem, eosqve in *ſcenam* prodeuntes inter ſe compararem.

Conſpicies hac in *ſcena*, niſi fallor, *Ariſtotelis* & *Euclidis*, ingenti numero familias, ſed in partes ſciſſas & interjectis qvaſi longis intervallis diſſitas; *prioris* plurimos, relicta paterna ſede, in vaſtiſſima tenebrarum loca conjectos, atqve nova deliciarum *genera* continuo effingentes, abſtractorum infinita fere ſerie conſumtos animadvertes; *poſterioris* ſucceſſores fere omnes, ſervatis domiciliis primitivis, naturæ ſimplicitate atqve *fructuum naturalium* ubertate contentos deprehendes.

Sed miſſis imaginibus rem ipſam efficiamus planiorem atqve lucidiorem!

Qvis non videt? *Ariſtotelem*, ſuo tempore ad cognitionis humanæ faſtigium, & ad ſidera cœleſtia usqve pertigiſſe creditum, ſubſeqventium temporum intervallis *Scholaſticorum* aliorumqve phantasmatibus & diſſenſionibus plene obſcuratum; *Euclidem* contra, collectis atqve in ordinem digeſtis Geometriæ elementis, ſucceſſorum ſuorum conſenſu plene illuſtratum, & in luce poſitum fuiſſe?

Qvem fugit? *Archimedem*, *Apollonium*, aliosqve veſtigiis Euclidis inſiſtentes, acceſſionibus & inventis omnem fere mentis aciem ſuperantibus, Geometriam locupletaſſe, recentioresqve fluxionum calculo feliciter detecto, ad infinita usqve pertigiſſe, & elementorum elementis abſtruſiſſima veteribusqve plane irreſolubilia problemata ſolviſſe?

Fingas, ſi fieri poteſt, Archimedem orbem noſtrum habitabilem introſpicientem, & *Hugeniana*, *Gregoriana*, *Leibnitiana*, *Bernoulliana*, *Newtoniana*, *Euleriana*, aliorumqve monumenta contemplantem, nonne hæc ætatis intervalla, qvibus infinitam Dei immortalis potentiam ex operibus & ex ſyſtematis noſtri mundani ſtructura videmus cognitam, ejusqve exiſtentiam contra Atheorum inſultus plene eſſe firmatam, fauſtiſſima prædicaret?

Iisdem poſitis, ſi Ciceronem fingas, philoſophiæ monumenta & Metaphyſicam abſtractorum infinita fere multitudine, ingenii luſibus & terminis inanibus refertam, intuentem; nonne hic, qvod aliam in cauſam dixit, idem Philoſophiæ ſatis eſſet tributurus? Certe ſi fingere hac in re licet, ipſum dicentem: O tempora! o mores! audio.

Sed inciderunt tempora, ut Scholaſticorum aliorumqve nodi gordii, in religionis Chriſtianæ, aliarumqve diſciplinarum detrimentum complicati, ſolverentur, & tenebræ Metaphyſicorum tandem aliqvando ex parte diſpellerentur. Hoc in negotio recentiori ætate plurimum peractum eſſe, notiſſimum qvidem puto; qvanqvam calculum meum iis lubenter adjicio, qvi, compilatores plurimos hodiernos Metaphyſicam ad priſtinum ſtatum reducere & luce clariora variis modis obſcurare, exiſtimant.

Finem propoſitum autem, ut conſeqvamur; generales rerum affectiones perſcrutabimur, miſſis omnibus peculiaribus rerum determinationibus. Aſcendemus igitur, Academici! idearum noſtrarum ſeriem perſecuturi, ad *Metaphyſica* ſeu *transcendentalia* uti vocant; Sed tantum abeſt, ut adytis & Metaphyſicorum abyſſis perterriti, in limine hæreamus; ut potius, caute inſpicientes loca abſtruſa, vacua & recondita, ad metam, qvam Euclides tanqvam optimus dux nobis e longinqvo demonſtrabit, tandem aliqvando pertingamus.

Diſqviremus igitur primum; qvænam rebus conceptis generatim tribuantur, deinceps relationes rerum, & qvæ inde reſultant, convenientias & differentias communes contemplabimur.

SECTIO

SECTIO I.
DE
REBUS CONCEPTIS ABSOLUTE TALIBUS IN GENERE.

§. 1.

Vox rei ſeu generis ſummi explicatur.

Series generum & ſpecierum, numero fere infinitas, miſſa inſigni, qvam inter ſe habent, varietate, percurrentes: *Univerſalia* omnia, qvæcunqve intellectui noſtro inſunt, in eo tandem convenire, qvod *res* ſint, obſervamus. *Rei* autem nomine deſignamus omne id, qvod concipi poteſt, ſeu in qvo nulla eorum, qvibus aliqvid conſtituitur, datur repugnantia. v. c. Triangulum dicitur *res*, prouti ſpatium tribus rectis comprehenſum, concipi poteſt, & circulus *rei* nomine venit, prouti figura, in cujus circumferentia puncta qvævis a centro æqvaliter diſtant, nullam repugnantiam habet. Hæc igitur vox patet latiſſime, ita, ut non ſolum ſpeciebus & generibus, ſed etiam ſingularibus omnibus, qvæ obverſantur ſenſibus noſtris, ſive in cœlo, ſive in terra, mari &c. ſint, tribuatur.

NOTA 1.

In Metaphyſica dantur notiones primæ.

Obſervandum hic ſemel: ideas & propoſitiones univerſaliter conceptas Metaphyſicorum eſſe *primas*

& *vulgo notas*; unde primas ejusmodi notiones definitionibus qvæ ideas concretas resolvunt in alias simpliciores, explicare velle, contradictorium est atqve temerarium. *Primarum* enim notionum nulla iterum dari potest differentia specifica, ideoqve nulla definitio, qvanqvam terminos metaphysicos per voces alias synonymicas explanari posse, facile consenserim. Sic, v. c. *rem* definire velle, æqve temerarium est, ac vocis *existentiæ* investigare differentiam specificam, cujus nulla datur. Et sic in aliis omnibus. Fundamentum afferti hujus continetur in Conam. I. Sect. XIV. §. 3. Errant igitur omnes ii, qvi genuinæ methodi mathematicæ ignari, definitiones pro ejusmodi terminis vulgo notis formare allaborant. Ne autem abducamur in devia Metaphysicorum; operam dabimus omnem, ut, qvantum fieri potest, neglecta terminorum colluvie, qvibus proh! dolor, referta est tota Metaphysica, ad res ipsas vocibus expressas advertamus animum; qvo qvidem pacto æqvum de sapientia *Metaphysicorum vulgarium* judicium ferre poterimus.

NOTA 2.

Miræ Metaphysicorum de ente distinctiones afferuntur.

Disciplina hæc, qvæ generalissimam rerum convenientiam & discrepantiam, nec non conclusiones ex iisdem deductas & vulgo notas explicat, Aristoteli in libris Metaphysicorum libr. III. c. I. ex edit. Julii Pacii, qvam semper adducam, est: ἐπιςήμη ἣ θεωρεῖ τὸ ὂν ᾗ ὄν, καὶ τὰ τȣ́τῳ ὑπάρχοντα καθ' αὑτό: Scientia, qvæ scrutatur ens, prouti ens est, & qvæ ei per se insunt. *Ontologia*, *Metaphysica* & *Philosophia prima* vulgo vocari solet.

Entis autem seu *rei* significationem pro more ita immutant Metaphysici, ut aliud dicatur ens *participiale*, aliud *nominale* aliud *potentia tale*, aliud *mere possibile*. Enti opponunt *non-ens*, qvod vel *desitivum*, *negativum* vel *privativum* esse statuitur, qvo etiam referunt

rationis

rationis ens, tum *rationis ratiocinantis*, tum *ratiocinatæ*. Sed miras has, qvibus *vulgo nota* explicantur, denominandi rationes in omnibus fere Compendiis obvias, enodare operæ pretium non esse arbitror; unde is, qvi hæc historice sibi nota, reddere voluerit, adeat Systemata Metaphysicorum, in qvibus explicationes terminorum horum occurrunt.

§. 2.

Nomina eorum, quæ tem quamvis conceptam constituunt.

Res qvælibet concepta, sive sit species, sive genus, iis, quæ reliqvorum fundamenta sunt, *constitui* intelligitur. Vocentur autem hæc *determinantia*, prouti differentiam specificam, ex qva res concepta cognosci & ab aliis discerni potest, formare concipiuntur v. c. *determinantia* circuli sunt: *Circulum habere centrum: rectas a centro ad circumferentiam usqve ductus, esse æqvales*. Determinantia, qvæ ad conscientiam moralem pertinent, sunt *judicium*, *lex* & *actio*; nihil enim aliud est conscientia, qvæ *moralis* dicitur, qvam judicium de actione ad legem relata.

§. 3.

Qvid genesis rei conceptæ sit, explicatur.

Differentia specifica, quæ ex *determinantibus* conflatur, rei conceptæ ex certis suppositis *genesin*, ultra qvam in re qvalibet nihil amplius licet asseqvi, supponit. *Genesis* autem reqvirit varia, quæ ad rem constituendam concurrant, nec non certum atqve determinatum modum, ex qvo rem ita esse formatam, intelligatur. Varia ista, qvæ concurrunt, vocentur *primitiva* seu *elementa*;

ratio

ratio autem iſta certa atqve determinata, ex qva res qvaſi reſultat, *generationis modus*. Sic in circulo pro *primitivis* habentur *recta* & *punctum fixum*, ex qvibus circulus ipſe generari intelligitur. Idem patet ex aliis ſuperficiebus, ſolidis & machinis, in qvibus *primitiva* iſta & generationis modum determinare licet.

Eandem in mentis noſtræ operationibus vides eſſe rationem, ſive ad intellectum, ſive ad voluntatem pertinere cenſeantur. v. c. Si concipiatur *lætitia*, tanqvam ſenſatio grata, ex bono præſenti oriunda; geneſis lætitiæ exhibetur, quæ in eo eſt poſita, qvod ſenſatio grata ex bono præſenti trahat originem. Si concipiatur *triſtitia*, tanqvam ſenſatio ingrata ex malo præſenti oriunda, geneſin triſtitiæ explicari vides. Et ſic in aliis.

Is igitur rei cujusvis conceptæ novit geneſin, qvi *primitiva* iſta, qvæ ad rem conſtituendam concurrunt, nec non *modum generationis* intelligit.

NOTA.

Metaphyſici rerum geneſin, *eſſentiam*, *naturam* & *formam* vocare ſolent; unde ea, qvæ geneſin rei ingrediuntur, *eſſentialia*, *naturalia* & *formalia* vulgo audiunt. Mirifice autem vocis hujus pro more immutant ſignificationem, ut *eſſentialia* alia dicantur *conſtitutiva*, alia *conſecutiva*; qvorum illa ad rei geneſin, hæc vero ad ea, qvæ ex geneſi rei conceptæ neceſſario fluunt, pertinent. Sic. v. c. *eſſentialia conſtitutiva* trianguli rectilinei ſunt tria latera, qvibus comprehenditur, ſed tres anguli, qvi inde reſultant, *eſſentialia* vocantur *conſecutiva*. En! miras vocum a fundatiſſimis, uti olim dicti ſunt, Metaphyſicis ex ſapientiæ ſublimioris theſauro productas transmutationes!

§. 4.

§. 4.

Enunciata de differentia rerum specifica.

Hæc, quæ generatim de differentia rerum specifica dicta sunt, seqventia suppeditant consectaria:

1) *Determinantia rei, ex qvibus differentia specifica resultat, primum præ reliqvis omnibus exqviri debere.* Sic in triangulo latera tria, qvibus comprehenditur, prius concipio, qvam angulos tres, qvi inde determinantur; in corpore extensionem prius concipio qvam divisibilitatem & dimensionem, qvod utrumqve; corpus esse extensum, supponit.

2) *Ex differentia rei specifica reliqua omnia derivari.* v. c. Sic ex trianguli differentia specifica, qvæ in definitione continetur, reliqva omnia fluunt, uti; triangulum tres habere angulos: duo latera in triangulo qvovis esse majora reliqvo; tres ipsius angulos æqvari duobus rectis &c.

3) *Determinantia rerum vel absolute h. e. absqve ullius rei suppositione ad qvam pertinere censeantur, vel respective seu in relatione ad certam qvandam rem spectari posse.* Sic v. c. figuram, rectam lineam, circumferentiam circuli &c. *absolute* & per se, ut determinantia ad nullam rem relata, primum considero; sed prouti v. c. figura, *recta linea & circuli circumferentia comprehendi concipitur,* determinantia hæc, qvæ *circuli segmentum* defin 6. elem. III. constituunt, relative talia sunt.

 4. De-

4) *Determinantia absolute spectata variis modis posse combinari ; unde ipsorum compositionem arbitrariam, mutabilem & variabilem esse, per se patet.* Manifesta hæc sunt ex defin. 7. 8. 9. 10. 11. elem. III. prouti determinantia in se & absolute spectantur. Eadem in rebus logicis, physicis, & moralibus est ratio. Sic. v. c. ideæ, judicia, ratiocinia &c. prouti ad hanc vel illam rem constituendam concurrere supponuntur, varietatem insignem habent. Et sic in aliis omnibus.

5) *Determinantia relative spectata a re concepta, ad qvam pertinere censentur, separari non posse.* Si v. c. *poenitentiam* mihi concipio tanqvam sensationem ingratam ex malo, qvod evitasse in potestate mea fuit, oriundam, determinantia hæc, uti sensatio ingrata, malum &c. a pœnitentia non separantur. Remotis enim pœnitentiæ determinantibus ; ipsam tolli, qvis non videt? Idem patet in *fiducia*, qvæ pro certa, de bono futuro obtinendo persvasione habetur. Et sic in aliis omnibus.

6) *Rem qvamvis conceptam ob determinantia qvæ ipsi insunt, unam esse.*

7) *Determinantia qvævis, prouti concipi possunt sive absolute sive respective considerentur, vera esse.*

En sensum canonis Metaphysicorum: *omne ens esse unum & verum.*

§. 5.

Enunciata de rerum genesi.

Eædem de rerum genesi formantur conclusiones.

Apertissimum enim est:

1) *Genesin esse in re qvalibet absolute primum, qvod præ reliqvis omnibus est concipiendum.*

2) *Reliqva omnia ex hoc fonte derivari; unde genesis est fundamentum reliqvorum omnium, qvæ rei conceptæ tribui possunt.*

3) *Primitiva quæ ad rerum genesin concurrunt, vel absolute vel respective considerari posse.* Sic v. c. circulus, semicirculus, diameter, recta, punctum &c. *primitiva absolute talia* sunt; Sed prouti v. c. semicirculus circa diametrum suam revolvi, & *sphæram* generare concipitur; *primitiva hæc*, qvæ ad genesin sphæræ concurrunt, *respective talia* vocantur.

4) *Primitiva absolute spectata, variis modis posse combinari; unde ipsorum compositionem arbitrariam, mutabilem, & variabilem esse, per se patet.* Sic notissimum est; primitiva extensorum in Geometria, & machinarum elementa absolute spectata, esse variabilia; prouti ad hanc vel illam rem generandam concurrere supponuntur.

5) *Primitiva relative spectata, a re concepta, ad qvam pertinere censentur, separari non posse.* Sic v. c. recta, qvæ circa punctum fixum revoluta, circulum generat, ab eodem separari non potest.

 6) *Genesin*

6) *Genesin rei cujusvis ob primitiva, quæ concurrunt, unam dici.*

7) *Primitiva, pro diverso considerandi modo, vim determinantium habere, & vice versa.*

§. 6.

Continuatio. Enunciata hæc, de differentia specifica, & genesi rerum formata, si comparaveris cum speciebus & generibus in universum spectatis; seqventes, qvæ claritatem maximam habent, conclusiones inde derivari posse, vides.

1) *Determinantia & primitiva species esse vel genera.* v. c. Semicirculus, diameter, recta &c. ad qvamcunque rem constituendam, concurrant, sunt species.

2) *Universalia prouti concipi possunt, necessario immutabiliter & in æternum esse vera.* Universale enim qvodvis, in cujus conceptu contradictorii nihil reperitur, simul repugnans, seu qvod idem: unam eandemqve rem, posita eadem determinatione, *veram* & *falsam* dicere velle. absonum est; unde species, & genera necessario, immutabiliter & in æternum veras esse, conseqvitur.

En! sensum canonis mire qvidem expressi: Species rerum *necessarias*, *immutabiles* & *æternas* esse.

3) *Vocem existentiæ seu realitatis vel ad singularia,*

gularia, ſenſibus noſtris obvia, vel ad genera & ſpecies referri poſſe.

4) *Genericam, ſpecificamqve realitatem, veritatem & exiſtentiam in nuda contradictionis abſentia, poſitam eſſe;* unde voces *realis, veri* & *poſſibilis* in relatione ad Univerſalia unum idemqve ſignificant. Univerſalia enim, prouti concipi poſſunt, *realia, poſſibilia* & *vera* dicuntur; uti omne id, qvod in rerum natura vere datur, & omnimodis differentiis diſtinctum eſt, *reale* ſeu *actuale in individuo*, vulgo audit. Sic, ſi in Geometria de *exiſtentia* parallelarum, parallelogrammorum, ſolidorum regularium &c qværitur; realitas non reſpicit individualem figurarum dictarum in plano qvodam deſcriptionem; ſed quæſtio: *num dentur parallelæ*, ad ſpecificam realitatem refertur; qvo in caſu idem eſt, ac ſi qværeretur: num parallelæ ſint posſibiles, uti ex elem. I. prop. 28. &c. conſtat. Idem obſervandum circa qvæſtiones arithmeticas, uti; num dentur magnitudines omni data & asſignabili minores: num exiſtant numeri ſurdi &c. Hujus enim generis quæſtiones, nullo habito reſpectu ad exiſtentiam individualem, in univerſum ſolvuntur.

5) *Qvæſtionem qvamlibet de rei cujusvis conceptæ exiſtentia, propoſitam, vel genericam ſpecificamqve, vel individualem rerum conceptarum exiſtentiam involvere.* v. c. ſi qværitur: num dentur ſubſtantiæ immateriales, a materialibus & corporeis prorſus diſtinctæ; quæſtio hæc duplicem

 admittit

admittit resolutionem; prouti primum ostenditur: substantias ejusmodi mente conceptas uti animam, Deum &c. nullam involvere contradictionem; deinceps, eas vere in rerum natura, seu in individuo dari, seorsim evincitur &c.

6) Realitatem universalium pendere a sola contradictionis absentia; nullo habito respectu, qvod vere insint intellectui nostro, aut, num vere etiam dentur in rerum natura. Hinc conseqvitur: canonem sermone tritum: *a posse ad esse non concludi*, de sola existentia individuali valere.

7) Omnia, qvæ concipi possunt, esse *realia* & *vera*, si vel maxime in rerum natura non existant. Huc pertinent Mathematicorum *infinite parva*, *punctum geometricum*, aliaqve hujus generis entia.

8) Multa a nobis, qvæ in rerum natura nullibi dantur, concipi posse.

9) Vim intellectus humani in definienda generum & specierum realitate seu possibilitate poni.

NOTA I.

Horribiles nonnullorum *de possibili*, & *impossibili*, *ente* & *non-ente*, *vero* & *falso*, eoqve vel *metaphysico* vel *logico* &c. theorias evolvens; steriles ejusmodi nugas ex philosophia eliminandas esse, censui. Quis enim non videt: *rem*, *reale*, *exsistens*, *possibile* & *verum* in scientiis omne id notare: qvod concipi potest, sive cæterum in individuo existat, sive non; uti id, qvod concipi non potest, *nonsens*, *chimæra*, *impossibile*, *falsum* & *contradictorium* vocari solet, v. c. Sic triangulum æqvi-

æqvilaterum dicimus *reale*, *possibile* & *verum*; bilineum autem rectilineum, *non-ens*, *falsum*, & *contradictorium* &c.

Notandum enim: ſcientias omnes, qvas perfici intellectus humanus, circa ſpecies verſari & genera, nec qvicqvam de ſingularibus, numero fere infinitis, & differentiis omnimodis a ſe invicem diſtinctis, ſpeculari, eam potiſſimum ob cauſam, qvod generatim percepta, ſingularibus omnibus poſſunt accommodari.

NOTA II.

Maximi uſus eſſe, ad evitandas Metaphyſicorum logomachias, & confuſiones, uti proh! dolor vidi, numero fere infinitas, conſectaria præcedentia; cognitu eſt facillimum. Nonnullas enim in tam horrenda ſomnia incidiſſe, aliosqve nugis ſuis ſterilibus ſefelliſſe; nullam aliam ſuppeditare licet cauſam, qvam qvod viam naturæ ſimpliciſſimam, regulasqve, ſecundum qvas intellectus humanus operatur, penitus neglexerint. Huc referas Metaphyſicorum qvorundam, notiſſimam illam *entium imaginariorum*, & *realium* diſtinctionem.

Solemne enim eſt nonnullis craſſa mathematum ignorantia laborantibus, corpora geometrica tanqvam *imaginaria* contemplari; ſua autem, qvæ ſcrutantur, entia metaphyſica vocare *realia*; forſan potiori jure *commenta realia*. Nolit vero qvisqvam putare, me in refutandis aliis gloriolam qvandam vanam, uti temporum noſtrorum mos eſt, affectare; id qvod a me eſſe alieniſſimum, omnes ii fatebuntur, qvi me norunt. Forſan anima mea ſegnior eſt exercitatis Metaphyſicorum animabus; qvamqvam rationibus non levibus eo fere ſim adductus, ut credam: eandem, ſi ad maturiorem ætatem pervenero, futuram mihi eſſe rationem.

Cæterum: diverſas, *realis*, *poſſibilis* & *veri* voces unum idemque ſignificare; recte, jam, obſervavit de

 Tſchirn-

Tſchirnhauſen in medicina mentis part. II. Sect. I. pag. 36. 37. edit. Lipſiæ 1695. cui jungi merentur Johannes Lock de intellectu humano Libr. IV. c. IX. & Celeb. Abraham Gotthelff Käſtnerus in diſſertat. ſupra jam adducta, qvæ inſcribitur: *de lege continui in natura* §. 12.

§. 7.

Attributa, hypotheſin ſub qua rei conceptcoæ nvenire cenſentur ſupponunt.

Sive autem differentia ſpecifica, ſive geneſis fundamenti loco ponatur; Omnia reliqva, qvæ ex re ſic concepta neceſſario fluere intelliguntur, *attributa* ſeu *affectiones* generatim vocentur. Attributa ejusmodi, qvamcunqve inter ſe habeant diverſitatem, omnia in eo conveniunt, qvod geneſin & differentiam rei ſpecificam vel aliam qvamcunqve hypotheſin ſupponant, qva qvidem poſita, rei conceptæ ſemper & neceſſario convenire cenſentur. Manifeſta hæc ſunt ex toto elem. III. in qvo circulorum attributa expoſita, vides.

§. 8.

Diverſitas attributorum ſeu affectionum.

Prouti affectiones vel toti rerum generi vel certæ ſolum ſpeciei competere intelliguntur; *communes* vel *propriæ* vocari ſolent. Sic v. c. affectiones communes triangulorum rectilineorum ſunt: angulum exteriorem, uno latere trianguli producto, eſſe majorem utrolibet interiorum & oppoſitorum: omnis trianguli duos angulos, minores,

minores esse duobus rectis, qvomodocunqve sumtos: Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendere. Affectiones autem *propriæ*: triangulorum æqvilaterorum angulos tres inter se æqvari: lineas parallelas angulos alternos habere inter se æqvales &c. Plura, qvi desiderat, exempla, adeat elem. III. præcedens, in qvo circulorum affectiones omnes sunt propositæ.

§. 9.

Continuatio. Attributa vel ea, qvæ rei per se spectatæ insunt, vel mutuas rerum conceptarum relationes sistunt. Attributa prioris generis sunt, qvæ exhibentur in Propos. I. II. III. IV. elem. III. uti: Centrum circuli esse in secante, si in circulo recta linea rectam bifariam, & ad angulos rectos secet: rectam lineam intra circulum cadere, si in circumferentia circuli duo quælibet puncta sumantur &c. Posterioris generis attributa sunt, qvæ exhibentur in Propos. IV. & VI. elem. III. uti: duorum circulorum sese invicem secantium, non esse idem centrum; duorum circulorum sese intra contingentium, non esse idem centrum. Ex his manifestum est: attributa vel ea, quæ rei conceptæ insunt, vel, qvæ non insunt, notare; ideoque in *positiva* & *negativa* posse dirimi. Sed *miseram* Philosophorum qvorundam in excogitandis præter omnem necessitatem, novis vocabulis, diligentiam seqvi non placet.

§. 10.

Enunciata de attributis rerum.

Hæc, quæ de attributis rerum generatim dicta sunt, seqventes suppeditant conclusiones.

1) Posita re qvacunqve concepta, affectiones inde resultantes poni, v. c. posito circulo, omnes ejus affectiones elem. III. explicitæ ponuntur. Hinc affectiones a re concepta separari non posse, manifestum est.

2) Sublata re concepta; omnes ejus tolli affectiones v. c. sublato bilineo; omnes tolluntur affectiones.

3) Pro diversitate rerum conceptarum variari affectiones. Sic triangulorum aliæ affectiones sunt, aliæ circulorum. Hinc, si oppositæ fuerint res conceptæ, ut affectiones oppositas habeant, necesse est, v. c. affectiones ex lætitiæ conceptu resultantes, oppositæ sunt iis, qvæ ex tristitia proveniunt. Ex lætitia enim sensatio grata de bono præsenti; Ex tristitia autem sensatio ingrata de malo præsenti oritur.

4) Affectiones unius ejusdemqve rei oppositas sese destruere. Sic duobus circulis sese intra contingentibus, idem & simul diversum centrum tribuere velle, contradictorium est.

5) Affectiones rei conceptæ sub hypothesi qvadam, undecunqve sumta, semper convenire. Enunciatum hoc generale & evidentissimum ex elem. III. in qvo circulorum affectiones proponuntur, illustrari potest.

6) Af-

6) Affectiones omnes in relatione ad hypothesin, sub qva rei conceptæ tribui possunt, *necessarias* esse, *immutabiles* & *æternas*.

7) Posito attributo proprio, rem ipsam, ad qvam proprium pertinet, poni. Sic, positis in triangulo duobus angulis æqvalibus, triangulum Isosceles ponitur.

§. II.

Usus generalis hujus doctrinæ.

Præter genesin, differentiam specificam & affectiones inde resultantes, in re universalissime concepta, nihil ulterius, qvod ei constanter insit, potest cogitari. Hæc igitur tria in tota diversorum generum, multitudine, qvam scrutatur intellectus humanus, exqviri debent, sive res sint *mathematicæ, physicæ* sive *morales*. Observandum autem est, intellectum nostrum rei cujusvis conceptæ partes, licet arctissime inter se cohæreant, successive percurrere, qvo qvidem pacto fit, ut, singulis rei propositæ partibus excussis, ad *totius* cognitionem pertingat; id qvod ipsius naturæ est convenientissimum. Sic v. c. Metaphysicus, qvi rem universalissime conceptam disqvirit, operatur per partes. A *genesi* enim rerum, in qva primitiva & generationis modum discernit, progreditur ad *differentiam* specificam, & ab hac ulterius ad rei conceptæ *affectiones*; qvibus successive peractis, qvid de re qvavis in universum possit prædicari, intelligit. Idem observat Geometra, qvi v. c. circuli genesin

nesin, differentiam specificam & affectiones ejusdem successive disqvirit, & continuata hac operatione per partes, totum tandem exhaurit; Et sic in aliis omnibus.

§. 12.

Comparatio Metaphysicæ cum Geometria & Arithmetica.

Non obstante Metaphysicæ, Geometriæ & Arithmeticæ, objecti, circa qvod versantur, diversitate; scientiarum dictarum quælibet objectum suum, qvod tractat, universalissime disqvirit; Arithmetica qvidem numeros, Geometria extensiones & Metaphysica rem universalissime conceptam. Enunciata qvidem Metaphysica latissime patent, ita, ut non solum de numeris & extensionibus, sed etiam de qvocunqve rerum genere, qvod concipi potest, prædicentur. Qvis enim sanus unqvam negaverit: rem qvamlibet conceptam habere genesin, differentiam specificam & affectiones?

Sed maxime præ Metaphysica, præcellit Geometria & Arithmetica; utraqve enim in scientias reliqvas ita influit, ut quæstionum propositarum solutiones enunciatorum Arithmeticorum & Geometricorum opem sæpissime desiderent; id qvod de *Metaphysica* vulgari nullo modo dici potest. Sic v. c. recta linea in Geometria tanqvam magnitudinis species, absolute & universalissime concepta, ad radium lucis in *Optica* accommodatur, qvæ in *Astronomia* a Centro Solis ad telluris centrum usqve producta supponitur.

Numerus

Numerus in Arithmetica abſolute & generatim ſpectatus, ad ſonos in *Muſica* accommodatur, & ad negotia civilia applicatur &c.

§. 13.

Comparatio terminorum metaphyſicorum cum terminis in Logica uſitatis.

Univerſalia, qvæ intellectui noſtro inſunt, de *re* ad minimum univerſalisſime ſpectata, formari ſupponuntur, ſine qva ſpecies & genera, qvæ obverſantur menti noſtræ, ne fingi qvidem poſſunt. Species enim qvælibet nihil aliud eſt, qvam exemplar rei in intellectu; unde ideam ſine re cogitare, æqve abſonum foret; ac triangulum ſine lateribus, qvibus comprehenditur, concipere velle. His paucis obſervatis, terminos logicos cum metaphyſicis exacte convenire, palam eſt. Sic *idea univerſaliſſima*, eadem eſt cum *re* ſeu *genere ſummo*; *idea univerſalis* coincidit cum *genere*, & *idea particularis* cum *ſpecie*. *Conceptus primus* exprimit *primitiva*, ex qvibus res qvævis generari concipitur; *Conceptus ſecundi* reſpondent *determinantibus*, ex qvibus rei cujusvis differentia ſpecifica conflatur. *Definitio realis* ſeu *genetica* exprimit *rei geneſin*; nominalis autem *differentiam* rei *ſpecificam*. *Prædicatis* reſpondent *affectiones*, *communibus* qvidem, *affectiones communes*, *propriis* autem, propriæ &c.

SECTIO

SECTIO II.
DE
CONVENIENTIA ET
DISCREPANTIA RERUM CONCEPTARUM IN GENERE.

§. I.

Res sunt vel similes vel dissimiles.

Res conceptas inter se comparantes, vel *similes*, vel *dissimiles* esse, observamus. *Similia*, qvalitates easdem, *dissimilia* autem diversas habere concipiuntur. Sic circuli intuitu generationis, vocantur similes, qvod omnes ex rectæ circa punctum fixum revolutione generantur; sed triangula, & qvadrilatera sunt dissimilia; prouti illa tribus, hæc vero qvatuor rectis terminantur.

NOTA.

Rei cuilibet conceptæ *qvalitas* tribuitur & *qvantitas*, prouti ea, qvæ ipsi insunt, vel *absolute & per se*, vel *ex alio assumto* possunt intelligi. *Qvalitas* enim qvæ inhæret rei conceptæ, per se & absolute concipitur; *qvantitas* rei autem innotescit ex alia re qvavis assumta, cum qva comparatur, Præter hæc duo in re qvavis concepta nihil amplius licet asseqvi; unde in disqvirendis rerum affectionibus, omnia ad qvalitatem & qvantitatem definiendam, redire, manifestum est.

Cæterum qvilibet videt: *qvalitatis*, *quantitatis*, *similitudinis* & *dissimilitudinis* &c. voces, ideas primas, qvæ

qvæ ulterius reſolvi neqveunt, exprimere; unde eas per ſynonyma explicare, omnino ſufficit. Hinc ſimul manifeſtum eſt: definitiones, qvippe qvæ ideas concretas reſolvunt in alias ſimpliciores, in ſyſtematibus logicis vulgaribus, cum nudis terminorum per ſynonyma explicationibus temere confundi; aliud enim eſt definire; aliud, vocem aliqvam per ſynonyma explicare. Conf. Ariſtoteles Metaphyſ. libr. IV. c. XIII. c. XIV.

§. 2.

Qvæ ſimilia ſunt diſſimilia eſſe poſſunt.

Similitudo omnis a noſtro conſiderandi modo, ſecundum qvem vel hanc vel illam rei qvalitatem ſupponimus, pendet. Hinc fit, ut ea, qvæ certo reſpectu pro ſimilibus habentur, alio reſpectu inter ſe differre ſeu disſimilia eſſe, posſint. Sic triangula & circuli pro ſimilibus habentur, prouti ſpatium comprehendunt, ſed disſimilitudinem habent, prouti triangulum tribus rectis & circulus una curva, qvæ dicitur circumferentia, terminatur.

Reſpectus ſeu qvalitas, ſub qva res qvælibet ad alteram relata, ſpectatur, *tertium comparationis* vocari ſolet; unde Ariſtotelicorum regula: *Similia ultra tertium comparationis non extendi*,

§. 3.

Enunciata de ſimilitudine rerum.

Hinc pendent ſeqventia, quæ vulgo nota ſunt, pronunciata.

1) *Qvalitatem* qvamvis rei ſuppoſitam ſimilitudinis conſtituere fundamentum.

2) Similia

2) Similia eſſe *relata*, qvorum unum ſine altero intelligi neqvit.

3) Similia inter ſe differre poſſe numero & magnitudine. Sic circuli ſimiles ſunt, variante numero & magnitudine.

4) Qvæ eidem ſimilia ſunt, inter ſe eſſe ſimilia. Confer. Elem. V. Euclid. prop. XI. & Joh. Lock de intell. hum. libr. II. c. XII. §. 7. & c. XXV. qvem exſcribere non placet.

§. 4.

Nota Generalis.

Obſervandum autem: ſimilitudinem ex ipſa rerum natura eſſe petendam; qvo qvidem neglecto, totam Metaphyſicorum de ſimilitudine rerum, theoriam ſterilem eſſe, per ſe patet; Sic Euclides elem. III. ſimilia circulorum ſegmenta dicit, qvæ angulos capiunt æqvales, & elem. VI. figuras rectilineas *ſimiles* vocat, qvæ & ſingulos angulos ſingulis æqvales habent, & circa æqvales angulos latera proportionalia.

§. 5.

Res ſunt æqvales vel inæqvales.

Prouti res conceptæ eandem vel diverſam habent qvantitatem. *æqvales* vel *inæqvales* vocari ſolent. *Similia* igitur, qvæ ab eadem qvalitate ita dicuntur, confundenda non ſunt cum *æqvalibus*, qvæ qvantitatem eandem ſupponunt. Recte igitur Ariſtoteles Metaphyſ. lib. IV. c. XV. dicit: Ὅμοια ὧν ἡ ποιότης μία. ἴσα δὲ, ὧν τὸ ποσὸν ἕν. Similia, qvorum qvalitas una, Æqvalia vero, qvorum qvantitas una.

§. 6.

Enunciata de æqvalitate rerum.

Ad analogiam præcedentium seqventia enunciata de æqvalitate rerum formata, manifesta sunt.

1) Aeqvalitatem supponere res ejusdem generis.

2) Aeqvalia esse relata.

3) Aeqvalia eidem, inter se esse æqvalia.

§. 7.

Res sunt vel perfectæ vel imperfectæ.

Metaphysici res generatim spectatas porro in *completas* & *incompletas*, *perfectas* & *imperfectas* distingvunt. *Completum seu perfectum id* dicitur, qvod omnia illa in se habet, qvæ ad rem qvandam constituendam pertinere censentur; ubi omne id, *incompletum* & *imperfectum* audit, ubi aliqvid eorum, qvæ ad rei conceptæ formationem reqviruntur, deest. Sic circulus secundum definitionis rigorem in plano qvodam descriptus, est *completus* & *perfectus*; reliqvo autem casu *imperfectus*.

Hinc videre licet:

1) Completum & perfectum ex certis quibusdam suppositis dijudicari.

2) Completum & perfectum hoc sensu acceptum, nullos habere gradus, ita, ut perfecto, perfectius non posit dari.

Uſu autem receptum : *perfecti* & *imperfecti* voces a *completo* & *incompleto* ſejunctas, ad certum propoſitum finem referre ; qvo in caſu omne id, qvod cum fine præfixo conſentit, *perfectum*, qvod vero non, *imperfectum* dicitur. Sic v. c. Geometria Euclidea eſt perfecta ; Metaphyſica vulgaris imperfecta.

Hinc patent ſeqventia conſectaria :

1) Perfectum ad certum qvendam finem relationem inferre.

2) Perfectum hoc ſenſu acceptum habere gradus, ita, ut perfecto, perfectius, & perfectisſimum posſit dari.

3) Perfectionem variari pro diverſitate rerum, qvibus tribuitur. Sic ſpiritus alias habent perfectiones, alias corpora. Conf. Ariſtoteles Metaphyſ. libr. IV. c. XVI. & Cel. Hollmannus in Philoſophia prima part. II. c. I. pag. 376. & ſeq.

NOTA.

Poenitet fere : alias rerum diſtinctiones a Metaphyſicis præter rem effictas, hoc in loco afferre ; unde theorias, uti vocant, de toto & parte, numero & magnitudine, ſigno & ſignato, neceſſario & contingente, aliasqve Arithmeticæ & Geometriæ detractas & miſere detortas notiones, lubenter facio miſſas, ſuo loco de his omnibus paucis dicturus. Convenientius autem Academicorum ſtudiis eſſe arbitror ; qvantitatis notionem, & latiſſimum ejusdem ſignificatum eruere, & qvibusnam rebus, qvantitas tribui poſſit, exqvirere.

§. 8. Qvantitas

§. 8.

Qvantitas ideis tribui poteſt.

Qvantitatis vox notat omne id, qvod augeri poteſt & minui. Hoc ſenſu tribuitur non ſolum magnitudinibus, uti lineis, ſuperficiebus & ſolidis, ſed etiam ideis noſtris, prouti in *analyſi* imminuimus notionum complexum, qvem in *ſyntheſi* augemus, addendo *generi* novas determinationes. v. c. ſi a triangulo abſtraho figuram, prætermiſſo numero laterum, qvibus ſpatium comprehenditur; notionum complexum imminuo; ſi vero in triangulo addo: duo latera eſſe æqvalia; complexum notionum augeo. Ideæ igitur, qvæ augeri & minui poſſunt, *componuntur*: addendo generi peculiares determinationes & *dividuntur*: reſolvendo ideas particulares in univerſales. Hinc *diviſionem* & *compoſitionem* ideis tribuere, abſonum non eſt.

§. 9.

Res omnes ſub cœlo habent qvantitatem.

Eundem in modum reliqvæ mentis humanæ facultates, ſive ad intellectum, ſive ad voluntatem pertineant, ut qvantitates ſpectari poſſunt, prouti incrementi & decrementi ſunt capaces; id qvod nemo ſanus in dubitationem vocaverit. Sic non ſolum *ingenium* & *memoria*; ſed ipſæ voluntatis propenſiones & affectus, uti *amor*, *odium*, *ira*, *ſpes*, *fiducia* &c. ſub qvantitatum conſiderationem veniunt, qvatenus de gradibus ipſorum æſtimandis diſqviritur. Qvinimo ne fingi qvidem poteſt res aliqva ſub cœlo, qvæ *qvantitatem* non habeat; unde in diſqvirendis rerum affectionibus non ſolum *qvalitatis*, ſed etiam *qvantitatis* habenda eſt ratio.

§. 10.

Dantur qvantitates omni data & aſſignabili minores.

Sed operæ pretium eſt: doctrinam de qvantitate ulterius perſeqvi, præeunte ipſo Euclide, qvi Prop. XVI. elem. III. demonſtrat: angulum contactus, qvi comprehenditur circumferentia & recta linea, angulo qvovis rectilineo eſſe minorem & Prop. I. elem. X. pronunciat: duabus magnitudinibus inæqvalibus propoſitis, ſi a majori auferatur majus, qvam dimidium, & ab eo, qvod reliqvum eſt, rurſus detrahatur majus qvam dimidium, & hoc ſemper fiat; relinqvi tandem magnitudinem, qvæ minor eſt, propoſita qvavis minore magnitudine. Vocantur qvantitates ejusmodi omni data & aſſignabili minores, Recentioribus *fluxiones*; qvod finitæ, qvas generant, magnitudines ex iſtis in determinabili ratione creſcentibus, oriuntur; nec non *elementa* & *differentialia*, qvod primæ incrementorum ſunt qvantitates, & ultimæ decrementorum evaneſcentium, differentiæ. Generis hujus qvantitates omni data & asſignabili minores vere dari; indirecte demonſtrant Iſaacus Newtonus in Princip. math. philoſ. naturalis Lib. I. Sect. I. Lemm. I. & Chriſt. Auguſt Hauſen in Elem. Matheſeos Arithm. propoſ. XX.

§. 11.

§. 11.

Enunciata de qvantitatibus omni data & assignabili minoribus.

Qvantitatem autem ejusmodi rationem atqve indolem, ut aliqva ex parte perspiciamus; canones seqventes in usum tyronum adjicere visum est.

1) Qvantitates infinite parvas ex quantitatibus finitis, decrescentibus infinities, generari.

2) Qvantitates finitas & dabiles ex elementis inassignabili & indeterminabili ratione crescentibus procreari.

Utrumqve constat ex circumferentia circulari, qvæ ut polygonum ex infinita rectarum infinite parvarum, multitudine considerari potest.

3) Infinite parva, qvantitatibus finitis comparari non posse. Hinc *evanescere* dicuntur in computatione, si concurrant cum finitis qvantitatibus, qvas in additione nec augent, neqve in subductione minuunt.

4) Infinite parvorum diversos dari ordines. Hinc fit, ut elementum respectu alterius in computatione evanescat.

Conf. De l'Hospital Analyse des infiniment Petits Sect. IV definit. 1. pag. 55. edit. à Paris 1715. in 4to & Joh. Lockius de intellectu humano. libr. II. cap. XVII. §. 1. 2. 3. 9.

SECTIO III.
DE ENUNCIATIS VULGO NOTIS, QVAE SUPPONUNTUR IN SCIENTIIS HUMANIS.

§. 1.

Instituti ratio.

Absoluta generali rerum doctrina ad enunciata, qvæ ob assensum generalem, qvem omnes rationis usum habentes, iis præbent, *vulgo nota* dicuntur, accedendum est. Hac in causa optime me facturum esse, arbitror, si Geometriæ simplicitatem secuturus, pronunciata hæc evidentissima, qvæ in qvovis scientiarum genere tacite supponuntur, secundum ordinem naturalem, proposuerim; qvo qvidem pacto de usu & abusu axiomatum metaphysicorum æqvum ferre poterimus judicium.

§. 2.

In re qvavis, qvod & qvomodo sit, disquirendum est.

Postulatur, in scientia qvavis: objectum, circa qvod versamur, ita exquiri debere, ut *qvod* & *qvomodo* sit, pateat. Jam cum in objecto qvovis, præter *genesin*, *differentiam specificam* & *affectiones*, nihil ulterius possit concipi; regulam propositam, vel ad genesin, differentiam specificam, vel ad affectiones rei cujusvis, pertinere, clarum est.

Cum

Cum autem ſupra jam Conam. I. Sect. X. de geneſi & differentia rei ſpecifica dictum ſit, reſtat, ut doceam, qvid circa affectiones, qvæ rei conceptæ inſunt, ſit obſervandum.

§. 3.

In exqvirendis affectionibus, qvod & quomodo inſint rei conceptæ, videndum eſt.

Scientiarum conditores circa exquirendas affectiones ita verſantur, ut, *qvod* & *qvomodo* inſint rei conceptæ, notum fiat. Sic Euclides circulorum affectiones elem. III. exqvirens, *qvod* & *quomodo* inſint, ſeu qvod idem: prædicata circulo convenire, poſitis his vel illis conditionibus, ſcrutatus eſt. V. c. conſectarium Prop. I. elem. III. centrum circuli eſſe in ſecante, ſi in circulo recta linea, rectam bifariam & ad angulos rectos ſecet, non ſolum pronunciat: centrum circuli eſſe in ſecante, ſed ſimul declarat: *qvomodo* inſit, ſeu qva poſita conditione, hæc de circulo prædicentur. Eadem eſt ratio Prop. III. & reliqvarum omnium, qvæ elem. III. continentur.

Eundem in modum Phyſicus, omne id, qvod corporibus ineſt, *qvomodo* inſit, declarat; qvinimo ne fingi qvidem poteſt ſcientia, qvæ enunciatum propoſitum in exquirendis objecti ſui affectionibus, non ſupponat.

§. 4.

Voces explicantur.

Suppoſita, ex qvibus intelligitur, *qvod* & *qvomodo* aliqvid ſit, *ratio-*

nes, *principia* & *causæ*; ea autem, qvæ inde resultant, *principiata* & *causata* ex more Metaphysicorum vocentur.

NOTA.

Vocabula *rationis*, *principii* & *causæ* a philosophis diversimode sumi, vulgo notum est. Causam enim a ratione *sufficiente* & *determinante* dicta, differre affirmant Metaphysici, uti continens a contento, & principium nunc cum causa, nunc cum ratione idem esse, pronunciant; unde aliud principium *qvod*, aliud *qvo* ipsis dicitur. Sed cum hæc omnia redeant ad diversam vocabulorum significationem, lites hac de re movere velle, temerarium est. Sive igitur hac, sive illa voce utaris, nihil interest, si modo ad rem ipsam attendas, & mente concipias: Metaphysicorum axioma: *nihil esse sine causa & ratione*, nos commonefacere: in re qvalibet concepta, *qvod* & *qvomodo* sit, esse exqvirendum; id qvod non solum de affectionibus; sed etiam de ipsa differentia rei specifica & genesi, valere, jam ostensum est.

§. 5.

Genesis est principium primum reliqvorum omnium.

Exqvirentes secundum legem propositam rerum affectiones, si hoc vel illud dari, ope principiorum qvorundam cognoverimus, circa principia eadem, *qvod* & *qvomodo* dentur, disqviri iterum potest, idqve continuo, usqve dum ad ipsam rei conceptæ *genesin* perveneri-mus, qvæ omnium eorum, qvæ ipsi tribui possunt, rationem ultimam in se continet. v. c. Si Euclides in consectario Prop. XV. elem. IV. pronunciat: *hexagoni*

hexagoni latus circuli ſemidiametro æqvale eſſe; affectio hæc fundatur in aliis principiis, ex qvibus intelligi poteſt, & hæc principia iterum in aliis, usqve dum perventum eſt ad circuli geneſin, in qva ratio ultima deprehenditur.

NOTA.

Principia, ex qvibus intelligitur, *qvod & qvomodo* aliqvid ſit, ſunt vel *idearum* vel *rerum*. Sed cum idea qvælibet ad minimum rem univerſaliſſime ſpectatam, de qva formata eſſe concipitur, ſupponat; evidens eſt: principia idearum cum rerum abſolute ſpectatarum principiis coincidere. Hinc Ariſtotelicorum *principium cognoſcendi, cum fiendi & eſſendi principiis* exacte convenit: qvocunqve demum ſenſu vocabula hæc accipiantur. Eſt enim *fiendi* principium, ex qvo intelligitur: *rem vere dari*; principium *eſſendi*, ex qvo rem, *hoc vel illo modo eſſe poſſibilem*, innoteſcit; ſive cæteroqvin res propoſita *ſingularis* fuerit ſive *univerſalis*. Hæc autem, cum eodem modo de *cognoſcendi* principio, qvod pertinet ad ideas, ſeu res univerſaliſſime conceptas, posſint prædicari; vulgarem hanc principiorum diſtinctionem fundamento omni deſtitui, eſt evidens.

Ariſtotelicorum igitur principium *fiendi & eſſendi* cum recentiorum *rationis ſufficientis* principio, qvomodocunqve expreſſo, exacte convenire, ex eo patet, qvod utrumqve enunciatum poſtulat: *in re qvalibet concepta, qvod & qvomodo ſit, eſſe exqvirendum*, id qvod nemo rationis uſu præditus, negaverit?

Cæterum *commune* hoc eſt ſcientiis omnibus humanis ſuppoſitum; de qvarum methodo eſſet actum, ſi caſus qvosdam præter rem fingere, eosqve principii hujus univerſalitati jure opponere liceret. Omnem enim judicandi vim, ſublata enunciati hujus univerſalitate, ſimul everti atqve deſtrui, qvis non videt?

§. 6.

Qvid ſit contradictionis principium?

Qvas ineſſe rei conceptæ obſervamus affectiones, eas ſimul non ineſſe, pronunciare velle, ſenſui communi repugnat. Si v. c. mihi concipio: triangulo tres ineſſe angulos, eos ſimul non ineſſe, affirmare velle, abſurdum putatur. Si de circulo prædico: puncta qvælibet in circumferentia ſumta, æqvaliter diſtare a centro; hoc vel illud punctum magis vel minus a centro diſtare, affirmare non poſſum. Et ſic in aliis omnibus. Hinc propoſitionem generaliter conceptam formare licet: *unam eandemqve rem non poſſe ſimul eſſe & non eſſe*, qvæ *principii contradictionis* nomine vulgo venit, eo, qvod duo, qvorum unum alteri repugnat, ſimul locum habere non poſſe, pronunciat. Conf. Ariſtoteles in Libr. Metaphyſ. libr. III. c. III. edit. citat.

§. 7.

Idearum de re qvavis formatarum alteram tollere poteſt.

Principio huic ideæ, de re qvavis formatæ, adverſantur, ſi ita ſint comparatæ, ut una alteram tollat & contradictorium ſit, utramque ſimul adeſſe. Si triangulum tribus rectis comprehendi, affirmo, & duos angulos ipſi ineſſe, mihi ſimul concipio; idearum unam alteram tollere, ſtatim video; triangulum enim qvod tribus comprehenditur lateribus, tres habet angulos. Si mihi concipio figuram duabus rectis comprehenſam;

hensam; vi pronunciati Euclidei: duæ rectæ spatium non comprehendunt, statim percipio: bilineum rectilineum esse impossibile.

§. 8.

Idem valet de judiciis de re qvavis formatis.

Qvæ in ideis de re qvavis formatis occurrit repugnantia; eadem in propositionibus, qvarum una, idem negat, qvod altera affirmat, locum habere potest. *Contradictoriæ* vocantur ejusmodi propositiones; unde si una vera sit, alteram falsam esse, semper colligere licet. v. c. Si vera est Prop. V. elem. II. *duobus circulis sese invicem secantibus, non esse ipsorum idem centrum*; falsa erit opposita enunciatio: circulos sub hac determinatione spectatos, habere idem centrum. Si vera est Prop. VI. elem. III. *duobus circulis sese intra contingentibus*, non esse ipsorum idem centrum; falsa erit opposita propositio: circulos intra sese contingentes idem habere centrum.

§. 9.

Præstantia principii contradictionis.

Principii hujus contradictionis veritas ex antecedaneis qvibusdam suppositis, neqve intelligi neqve demonstrari potest; ideoqve est propositio *primitiva*. Sublato hoc, qvod maximam secum fert claritatem, pronunciato, scientiæ omnes, qvippe qvæ propositionem hanc primam supponunt, simul evertuntur. Actum erit, de definitionum,

tionum, propositionum & ratiociniorum omnium veritate, si id, qvod rei conceptæ adversatur, locum simul habere potest.

Enunciatum hoc, nisi supponatur, asserta omnia vacillant, & certitudo tota cognitionis humanæ & veritas tollitur. v. c. Si mihi concipio qvadrilaterum qvatuor rectis comprehensum, & oppositum ejus: qvadrilaterum non esse qvatuor rectis comprehensum æqve est possibile; certitudo omnis perit. Si enunciationes oppositæ æqve veræ sunt, ac propositiones Euclideæ uti X. XI. XII. XIII. elem. III. omnis, qvæ Geometriæ tribuitur, veritas evanescit.

§. 10.

Usus & abusus enunciatorum expositorum in scientiis humanis.

Principia hæc remotissima, tanqvam *vulgo nota*, tacite qvidem supponit scientiarum ordo; nullo tamen modo exprimit. In eo enim posita est scientiæ cujusvis indoles, qvod asserta demonstret ex principiis *propriis*, a natura objecti, circa qvod versatur, repetendis, non autem alienis; qvo qvidem neglecto, elegantia omnis & doctrinæ puritas perit. Sic Euclides in demonstrandis assertis suis, ad principia ejusmodi remotissima nunqvam provocavit, sed *rationem sufficientem* ex ipsa rerum natura eruendam esse, recte judicavit. v. c. in propositionis XV. elem. III. qvæ est: *maximam in circulo esse diametrum*, demonstratione neqve *rationis sufficientis*, neqve *contra-*

contradictionis principium expressum deprehendes; (ridiculum enim foret, demonstrationis initium a remotissimis ejusmodi enunciatis capere); sed rem totam, adhibitis principiis Geometriæ propriis peractam esse. Falluntur igitur omnes ii, qvi sub specie *methodi mathematicæ*, qvam vere ignorant, in demonstrandis propositionibus ad *contradictionis* & *rationis sufficientis* principia recurrunt, & monumenta ejusmodi philosophica, in tædium prudentiorum, orbi literario obtrudere non erubescunt.

§. 11.

Errores recentiorum qvorundam refelluntur.

A recta via aberrant etiam omnes ii, qvi *rationis sufficientis* principium in *veritatibus contingentibus* & contradictionis enunciatum in *necessariis*, locum habere existimant; qvam falsam & erroneam opinionem vel maxime infirmat Geometria, qvippe qvæ *rationis sufficientis principium* tanqvam pronunciatum commune vi præcedentium supponit. Sed ipsam *veritatum necessariarum* & *contingentium* distinctionem, falsam esse & erroneam, palam erit, si ostendero: Verum omne in relatione ad intellectum definientem, esse necessarium. Qvid enim, qvæso! *Veritas generatim spectata*, aliud est, qvam omne id, qvod concipi potest. Jam id, qvod concipi potest, num idem simul concipi non potest? Haud ego dixerim; ideoqve ut *necessario*, *immutabiliter*, & *in æternum* verum sit, necesse est.

Sed

Sed objicient forſan: veritatem *tranſcendentalem* ſeu *metaphyſicam*, uti vocant, notare rerum præſentium *exiſtentiam individualem*, & hanc ob cauſam veritates, qvæ circa eam verſantur, vocari *contingentes*. En! miras vocum transmutationes! qvis enim ſanus: *res individuales intuitu compoſitionis & exiſtentiæ eſſe neceſſarias*, unqvam affirmaverit? Vellem ſcire ab hujus Sectæ Philoſophis, num propoſitiones: *res præſentes poſſe non exiſtere*: *plures poſſe dari mundos*, aliæqve ſimiles, de qvibus multa diſputare ſolent, *pro contingentibus* forent habendæ, hujus generis enim enunciationes æqve *neceſſario veras* eſſe, ac: *triangulum tres habere angulos*, exiſtimaverim. Qvi igitur veritates *concretive* ſpectatas; qvales ſunt: *actiones humanas eſſe liberas*: *univerſum, qvod ſenſibus noſtris obverſatur poſſe non-exiſtere* &c. vocant *contingentes*; qvid ſibi velint, ipſi ignorant.

Jam cum veritas *abſtractive ſpectata* ſeu *logica* in nuda contradictionis abſentia & conceptuum noſtrorum realitate ponatur; *Veritatem logicam* cum eo, qvod concipi poteſt, *coincidere*, apertisſimum eſt. Reliqvo caſu, ubi veritas, in nuda rerum extra nos poſitarum exiſtentia, nullo habito reſpectu ad intellectum definientem, ponitur; judicium omne ſuſpendi, nec illis, nec mihi de rebus individualibus aliqvid ſtatuendi, dari poteſtatem, qvis non videt?

Maneat igitur: *Veritates omnes neceſſarias eſſe immutabiles & æternas.*

Conſ.

Conf. Joh. Lock de intellectu humano Libr. IV. c. V. §. 11. & cel. Hollmannus in uberiori in universam Philosophiam introductione Tom. I. part. II. cap. I. pag. 193. seq.

SECTIO IV.
DE
PRINCIPIIS ET METHODO SCIENTIARUM HUMANARUM IN GENERE.

§. 1.

Scientiæ omnes iisdem nituntur abstractionis legibus.

Scientiæ omnes humanæ sive sint mathematicæ, physicæ, sive morales, secundum leges Conam. I. Sect. I. §. 2. expositas, objectum, qvod tractant, scrutantur. Hoc utiqve intellectui nostro, legibusqve naturæ simplicissimis, est convenientissimum; abstractio enim omnis, ad qvascunqve rei propositæ determinationes pertineat, in eo ponitur, qvod a minus universalibus perveniatur ad magis universalia. Methodus igitur hæc, qvam scientiarum conditores observant, est communis; unde abstractiones omnes, ad qvodcunqve scientiarum genus referantur, leges easdem, supponere, per se patet. Sic v. c. Geometra eodem modo operatur circa abstracta in extensorum doctrina obvia, qvo Physicus corporum

porum naturam ſcrutans, a ſpecialioribus ad univerſalia progreditur.

NOTA.

Scientiæ vocem nunc *ſubjective*, nunc *objective* ſumi, vulgo notum. Illo ſenſu ad certum qvoddam *ſubjectum*, qvod ſcientia præditum eſt, refertur, & habet gradus, prouti huic vel illi major vel minor ſcientia ineſt; hoc autem ſignificatu, ſcientia tanqvam *objectum* conſideratur, & in gradu altisſimo, ad qvem pertingere licet, ſpectatur. Cæterum, cum abſtractionis mathematicæ eædem, qvas ſectatur philoſophia, ſint leges; abſtractionem aliam *mathematicam* aliam *philoſophicam* hoc ſenſu fingere velle, temerarium eſt.

§. 2.

Notiones primæ ſupponuntur in ſcientiis humanis.

Ideas concretas ſeu compoſitas in ſimpliciores alias, qvas comprehendunt, reſolvendo; pervenitur tandem ad *ſimpliciſſimas* & *notiones primas*; qvæ nullam ulteriorem admittunt reſolutionem. Conam. I. Sect. XIV. §. 3.

Notiones ejusmodi *primæ* tanquam *vulgo notæ* ſupponuntur in ſcientiis humanis; unde ipſarum reſolutionem tentare velle, temerarium eſt; qvamqvam eas per voces alias æqvipollentes & ſynonymas explanari poſſe, facile conſenſerim. Huc pertinent voces metaphyſicæ, uti *eſſentia*, *exiſtentia*, *totum* & *pars*, *æqvale* & *inæqvale*, *majus* & *minus*, *abſolutum* & *relativum*, *identitas* & *diverſitas* &c. aliæqve, in qvibus reſolvendis hodierni plures, oleum & operam perdunt.

Ne

Ne autem notionem aliqvam præter rem habeamus pro *prima*; ad feriem idearum abſtractarum mente formatam, ut ſedulo attendamus, neceſſe eſt; ex qva judicandum: num notio aliqva ad *primas* vel *compoſitas*, pertineat.

§. 3.

Leges ſcientiis omnibus communes.

Idearum analyſi ad finem perducta; ſcientia qvælibet objectum ſuum univerſalisſime conceptum, primum in ſpecies dirimit, hasqve denuo in ſpecies proxime ſubjectas &c. obſervatis regulis Conam. I. Sect. III. propoſitis. Sic Geometria extenſorum ſpecies, uti *lineam*, *ſuperficiem* & *ſolidum* diſtingvit, easqve in alias proxime ſubjectas dirimit. Ex elem. I. enim perſpicuum eſt: lineam in *rectam* & *curvam*; figuram in *rectilineam* & *curvilineam*; figuras rectilineas in *trilateras*, *qvadrilateras* dividi & *multilateras*.

Deinceps ſpecierum hac lege formatarum proprietates ſigillatim inveſtigat, &, *qvod* & *qvomodo* rebus conceptis inſint, legitimo diſcurſu demonſtrat. Sic v. c. Euclidem elem I. & II. parallelarum, angulorum, triangulorum, parallelogrammorum, & elem III IV. circulorum affectiones ſecundum methodum propoſitam, indagaſſe, obſervamus.

Continuata hac operandi ratione, ſcientia qvælibet pertingit tandem ad ſpecies infimas; qvibus inventis, omnia, qvæ ad objecti propoſiti naturam pertinent, exhausta esse, qvis non videt?

Hinc evidens est: scientiam qvamlibet, excussis singulis objecti sui partibus, ad totius pervenire cognitionem; id qvod vel maxime, ubi de mente humana, Deo, aliisqve philosophiæ objectis disqviritur, observandum esse, suo loco videbimus.

Conferri hoc in loco merentur Cartesius in dissertatione de Methodo operibus ipsius inserta, & de Tshirnhausen in medicina mentis part. II. Sect. II. pag. 73. seq.

§. 4.

Facies philosophiæ naturalis expenditur.

Eandem, qvam Geometria sectatur, methodum sibi vindicat philosophia naturalis, qvæ communes corporum primum perseqvitur affectiones, uti, materiam, formam, motum, qvietem &c. deinceps ad species proxime subjectas progreditur, harumqve proprietates sigillatim iterum eruit atqve demonstrat, idqve continuo, usqve dum ad species infimas, exhausta omni, generum & specierum varietate, perventum fuerit. Idem in reliqvis omnibus, qvæ in rationis humanæ principiis fundantur, disciplinis, observari; nemo, nisi philosophiæ genuinæ ignarus, in dubitationem vocaverit.

§. 5. Hæc,

§. 5.

Generalia hæc sigillatim perlustrare, operæ pretium est.

Hæc, quæ in universum de modo, qvo versantur scientiæ humanæ circa suum objectum, exposita sunt, per partes contemplari, erit utilissimum. Nulla enim, qvæ exqvirendis primis scientiarum fundamentis impenditur cura & diligentia, nimia aut supervacanea censeri debet. Cum autem scientiis omnibus humanis sit commune, *affectiones objecti sui demonstrare ex certis qvibusdam suppositis seu principiis*; primarium hoc in loco suscipiendum negotium, in definienda principiorum natura atqve diversitate poni, cognitu est facillimum.

§. 6.

Qvid sint prima scientiarum principia?

Principiorum primorum nomine denotamus supposita, ex qvibus intelligitur, *qvod* & *qvomodo* reliqva omnia sint, qvæ rei conceptæ tribuuntur. Supposita hæc a qvolibet gratis assumta, argumento nullo aliunde adscito fulciuntur. His enim fundamentis scientiæ totam superstruunt conclusionum molem, adeo, ut series ratiociniorum formatorum qvorumvis ad hæc inconcussa stamina usqve pertingat.

Conf. Conam. I. Sect. IV. §. 8. 9.

§. 7.

Enunciata de principiis primis.

Naturam principiorum primorum ut accuratius intueamur;

mur; ſequentes ex Geometria deductas concluſiones adjicere viſum eſt.

1) *Principia prima intrinſecam habere claritatem.*

2) *Demonſtrationum eſſe fundamenta.*

3) *Nullam temporis, loci aut caſus pati exceptionem.* Sic v. c. axioma: *totum majus eſt ſua parte*, univerſaliter verum eſt, nec enim fingi poteſt caſus, tempus, aut locus, ubi ſuppoſitum hoc non valeat. Huc referas poſtulatum: *in re qvalibet concepta diſqvirendum eſſe, qvod & qvomodo ſit*, nec non ariſtotelicum illud axioma: idem non poteſt ſimul eſſe & non eſſe. Utrumqve enim eſſe univerſale & commune ſcientiis humanis, omnes uno ore profitentur.

4) *Principia prima a natura objecti circa qvod ſcientia verſatur, deſumi*, unde ſcientia qvælibet principia habet propria, non aliena.

5) *Realitatem & veritatem principiorum primorum in nuda contradictionis abſentia eſſe poſitam.* Parum igitur refert, ſi vel maxime aliqvid in rerum natura, cui ſuppoſita ejusmodi reſpondeant, non detur. Sic v. c. Geometra tanqvam *principium primum* poſtulat: *puncta qvævis in ſphæræ ſuperficie ſumta, a centro æqvaliter diſtare:* Mechanicus ſumit: *gravia verſus terræ centrum motu uniformiter accelerato deferri:* Aſtronomus ſupponit: *planetas in ellipſibus moveri* &c. ſi vel maxime talis ſphæra talisqve motus in rerum natura nullibi detur, ſufficit enim ſcire poſſe dari.

§. 8.

§. 8.

Observatio generalis.

Hæc ut rectius intelligantur; notandum: intellectum humanum primum idearum abstractarum series ex singularium contemplatione oriundas amplificare easqve infinitis fere modis inter se comparare Conam. I. Sect. XIV. §. 2. Peracta hac universalium comparatione, mens nostra ad supposita omni evidentia majora progreditur, ex qvibus format conclusiones, tam arcte cum principiis assumtis cohærentes, ut catenam, ad hæc prima stamina usqve pertingentem, nullaqve vi dissolubilem efficiant.

Parum autem refert: num supposita, ex qvibus conclusiones formantur, vere etiam in rerum natura dentur, an minus. Si enim vel maxime formatæ ejusmodi hypotheses, qvæ ab omni contradictione sunt alienæ, in individuo nullibi existerent, nihilominus conclusionum inde derivatarum series *necessario* & *in æternum vera* erit. Qvis enim negaverit? res conceptas ab omni contradictione liberas, a Deo posse produci. His fundamentis superstructæ sunt scientiæ omnes humanæ, qvæ cancellos rerum creatarum, limitesqve naturæ longe transgrediuntur, adeo ut *systemata intellectualia*, *physico* illo, qvod sensibus nostris obversatur, *systemate*, multo esse diffusiora, recte statuatur.

§. 9.

Qvotuplicia sint principia prima?

Ad hæc, ex qvibus intelligitur, *qvod* & *qvomodo* reliqva omnia sint, principia prima, referuntur partim *definitiones*, partim *propositiones primitivæ*; de qvarum diversitate paucis dispiciemus, aut in universum, qvid de suppositis ejusmodi simplicissimis posit prædicari, intelligatur.

§. 10.

Definitionum in scientiis humanis diversitas.

Definitiones, qvæ unum principiorum genus constituunt, *geneticæ* vocantur, prouti rei conceptæ explicant genesin; reliquæ autem omnes sunt *nominales*, qvæ nudam notarum continent enumerationem, ex qva rem propositam sufficienter agnoscere licet. Conam. I. Sect. II. §. 10.

Hæc duo definitionum genera exhauriunt omnia illa, qvæ primum in re qvavis concipiuntur; unde, cum præter *genesin*, *differentiam specificam* & *affectiones* rei cujusvis conceptæ nihil amplius detur. Sect. I; duo, nec plura definitionum dari genera, qvomodocunqve expressa, apertissimum est.

Utrumqve autem genus vel *absolute* vel *relative* tale vocabitur, prouti in definitione vel *determinationes rei conceptæ absolutæ & per se inhærentes*, vel *rei unius ad alteram relationes* occurrunt. V. c. definitio absolute talis est: triangulum

triangulum rectilineum *est figura plana*, *tribus rectis comprehensa*; relative talis: *recta a centro circuli magis distare dicitur, in qvam major perpendicularis cadit* &c.

Nolit vero qvisqvam putare: hanc definitionum differentiam in Geometria sola, ubi *ab interna linearum superficierum* & *solidorum constitutione*, plerumqve desumuntur, habere locum; generale enim esse hoc suppositum, nemo non videt, qvi definitiones in *Physica*, *Pnevmatologia* & *disciplinis moralibus* occurrentes, sub examen revocaverit.

§. 11.

Propositionum primitivarum in scientiis diversitas.

Propositiones primitivæ, qvæ alterum principiorum genus formant, *proximæ* vel *remotæ* vulgo audiunt; prouti vel *a natura objecti, qvod scientia tractat, vel undecunqve* desumuntur. Sic v. c. *propositiones primitivæ remotæ* reliqvis disciplinis philosophicis sunt *metaphysicæ illæ*, in præcedentibus expositæ, uti: ex differentia specifica reliqva omnia derivari: affectiones a re concepta separari non posse: rerum affectiones necessarias esse, immutabiles & æternas &c. sed *proxima* Geometriæ sunt axiomata Euclidea: angulos rectos inter se esse æqvales: circuli ejusdem semidiametros inter se æqvari: duas rectas non comprehendere spatium: inter duo puncta non cadere, nisi unicam rectam &c. Deinceps *magis* vel *minus universales* esse dicuntur *propo-*

ſitiones primitivæ; prouti vel plurium, vel unius tantum ſcientiæ demonſtrandi principia conſtituunt. V. c. *propoſitiones primitivæ magis univerſales* ſunt: qvæ eidem æqvalia ſunt, inter ſe eſſe æqvalia: ſi æqvalia æqvalibus addantur; tota eſſe æqvalia: ſi inæqvalibus æqvalia addantur; tota eſſe inæqvalia: totum ſua parte majus &c. *enunciationes minus univerſales* & *Geometriæ propriæ*: angulos rectos inter ſe eſſe æqvales: Rectas duas ſibi non occurrere, niſi ſemel: rectas lineas ſibi mutuo congruentes, eſſe æqvales: rectas lineas inter ſe æqvales, ſibi mutuo congruere &c. Conf Erhardus Weigelius in Analyſi Ariſtotelica Sect. II. c. XI. ſupra jam citat.

§. 12.

Forma methodi mathematicæ.

Expoſitis ſcientiarum humanarum principiis, *methodum* ſeu ordinem, qvem ſervant in rebus tractandis, paulo accuratius inveſtigandi, hac potisſimum cauſa impellimur, qvod accurata methodi genuinæ notitia vim habet *normæ* ſeu *regulæ*, ſecundum qvam *ordinis naturalis*, *ſpuriiqve* differentiam æſtimare licet.

Omnia autem, qvæ in ſcientiis peraguntur, cum redeant, vel ad *principia*, vel ad *concluſiones*; in delineando ſcientiarum ordine, ut ad utrumqve ſigillatim attendamus neceſſe eſt. Primum igitur de *principiis*, deinceps de *methodo concluſiones demonſtrandi* diſpiciemus.

Qvod ad *definitiones*, unum principiorum genus conſtituentes, attinet; ſcientiæ humanæ omnes, præſertim *mathematicæ* hunc obſervant ordinem, ut definiendo *ideas compoſitas* reſolvant in *ſimpliciores*, usqve dum perventum fuerit ad *ſimpliciſſimas, primas* & *vulgo notas*. Abſtractas ejusmodi & reliqvas omnes undecunqve oriundas ideas, *nominibus* propriis & *definitis* invariatis deſignant, ut omnis, qvantum fieri poteſt, vocum diſſenſionibus rixisqve inutilibus via præcludatur.

Qvod ad *pronunciata* alterum principiorum genus, in ſcientiis præſertim mathematicis moris eſt, formare *numero pauca*, *univerſaliter vera* & *utiliſſima*. *Scientias enim mathematicas ſimplicitati naturæ ſuperſtructas, paucis eſſe contentas ſcito.*

Idem circa *concluſiones* ex principiis deductas obſervant, qvarum numerum præter rem non augent; (abhorrent enim a caterva propoſitionum) ſed utilisſimas tantum exhibent, qvæ reliqvis lucem poſſunt afferre. Huc referas propoſitiones de *æqvalitate*, & *ſimilitudine* triangulorum generatim *ſpectatorum*, enunciationem ſic dictam *Pythagoricam*, aliasqve ſimiles.

Deniqve *Mathemata* in demonſtrandis propoſitionibus hunc tenent ordinem, ut concluſiones confirment ex principiis prius jam poſitis atqve concesſis, idqve continuo, usqve dum ad principia *prima* & ſuppoſita *vulgo nota* perventum

 fuerit.

fuerit. Hæc omnia ex elem. I. & III. Euclidis tam ſunt manifeſta, ut cœcum illum oporteat eſſe, qvi hæc non videat.

§. 13.

Comparatio methodi mathematicæ cum vulgari.

Methodum hanc explicitam a vulgari toto, qvod ajunt, cœlo, differre; nemo non videt, qvi utramqve ea, qva par eſt, diligentia, inter ſe comparaverit.

Sectatores enim vulgaris illius, a natura prorſus abhorrentis, & ad ſomnia & commenta abducentis methodi primum in eo peccant, qvod abſtractorum ſeriem ex idearum reſolutione oriundam nullis circumſcribant limitibus; unde fit, ut *res* a *rebus*, *nomina* a *nominibus*, a *rebus* iterum *nomina*, & *illa omnia* ab *intellectu*, & *intellectum* deniqve a ſe ipſo ſejungant.

Deinceps a *naturali* ſeu *mathematica* methodo penitus aberrant, qvod determinationes omnes posſibiles rei conceptæ inhærentes, deſignent vocabulis novis, iisqve barbaris, vocumqve receptarum ſignificationes, levisſima de cauſa mutent.

Præſtrata hac abſtractorum ingenti mole, vocumqve farragine; hujus generis philoſophi, qvantum fieri poteſt, principia fingunt *numero multa*, *vage ſumta*, *nulloqve plane modo definita*, eum potisſimum in finem, ut doctrinæ ubertatem præ ſe ferant, & controverſias, neiſcantur, ex qvibus famæ celebritatem conſeqvi ſatagunt.

Tandem

Tandem huic vaſtisſimo principiorum undecunqve ſumtorum, agmini, ſuperſtruunt concluſionum molem, nullaqve habita ordinis naturalis ratione, (abhorrent enim a rigore Geometrarum) unam eandemqve rem *decem* nominibus ſignatam, *decies* demonſtrant.

Hinc emergunt ſic dicta *vaſtiſſimæ molis* ſyſtemata, intra breve temporis ſpatium elaborata, qvæ continent *principia inaudita*, veteribusqve plane incognita, nec non *concluſiones*, qvæ ad *mundos omnes poſſibiles* pertingunt; (hujus generis enim philoſophis, qvi omnia ſe ſcire cupiunt, de omnibus *aliqvid* ſtatuere, placet); ſed, ſi ſyſtemata ejusmodi vaſtisſima & verborum ambagibus repleta, paullo accuratius examinaveris; *pauca* vel prorſus *nihil pluribus* exponi, pronunciata *ſterilia* & theoremata *nulli uſui inſervientia*, condi; *aliena*, ex principiis prius poſitis nullo modo fluentia adduci, quæſtiones *ſimpliciores* cum *magis perplexis* atqve difficilioribus confundi, & ut uno verbo omnia comprehendam: *ſumma cum imis* miſceri, deprehendes. En! vulgaris methodi formam! Sed miſſa hac perverſisſima philoſophandi ratione, ad methodi ſic dictæ mathematicæ naturam revertamur.

§. 14.

Methodus ſic dicta mathematica eſt naturalis & univerſalis.

Si qvis ex me qværeret: qvot & qvibusnam regulis contineretur methodus ſic dicta *mathematica*; ipſi eſſem reſponſponſurus: methodum generari ex legibus numero paucis, ſimplicisſimis, & maxime naturalibus, ſupra Conam. I. Sect. X. XI. expoſitis. Hanc autem ſimplicisſimis naturæ legibus ſuperſtructam methodum, ad ſcientias omnes, qvæ rationis humanæ principiis nituntur, pertingere, nemo non videt; qvi conſiderat: Scientias humanas omnes, hoc inter ſe habere commune, qvod *definiendo* ideas concretas primum reſolvant in ſimpliciores, deinceps a *pronunciatis* qvibusdam ſimplicisſimis ad concluſiones progrediantur.

Univerſalitatem igitur methodi propoſitæ, qvi in dubitationem vocant, qvid ſibi velint, ipſi ignorant, & methodum qvamcunqve aliam adhibentes, res in ſe planas atqve faciles prorſus obſcurant.

SECTIO V.
DE
SCIENTIARUM HUMANARUM FORMA ET NEXU IN GENERE.

§. 1.

Scientiarum humanarum formam generatim noſſe, juvat.

Utilisſimum iis, qvi vaſtisſimum ſcientiarum humanarum campum ingredi, & uberrimos fructus ex eodem conſeqvi voluerint, eſſe exiſtimo; formam ſcientiarum humanarum,

humanarum primum veluti in ſpeculo qvodam contemplari, ne, in devia abducti, rebus viloribus tempus impendant, & a fine conſtituto prorſus recedant.

Hæc, cum mente concipio; academiæ nundinis, ad qvas emtores concurrunt & venditores mihi videntur eſſe ſimillimæ. Videndum enim eſt, ut Academici, neglecto rerum habitu externo, emtores illos, qvi juſtum mercibus pretium ſtatuere norunt, imitentur, eosqve fructus, qvos ex literarum ſtudiis percipere cupiunt, vere adipiſcantur.

Nollem tamen eſſe auctor; ut *miſeram* nonnullorum diligentiam, qvi in ſtudiis tractandis, ſcientias eas, qvarum ope ad reliqvarum cognitionem datur acceſſus, prorſus negligunt, ſectarentur, ob levisſimam hanc cauſam: *non ſunt de pane lucrando.* Recte enim Cicero ſentit: *artes omnes, qvæ ad humanitatem pertinent, habent qvoddam commune vinculum, & qvaſi cognatione qvadam inter ſe continentur.*

§. 2.

Qvid ſint ſcientiæ mathematicæ?

Ordiemur a ſcientiis ſic dictis mathematicis, qvæ ob evidentiam ſummam, qvam habent, & eximiam utilitatem in vita civili conſpicuam, reliqvis omnibus, qvæ in rationis principiis fundantur, diſciplinis, præripiunt palmam. Loci hujus non eſt: vocis μαθημάτων denominandi rationem uberius inveſtigare,

veſtigare, qvamqvam cum nonnullis veroſimillimum eſſe, crediderim: *Geometriam*, *Arithmeticam*, *Muſicam* & *Aſtronomiam* nomen μαθημάτων recepiſſe, qvod, temporibus antiquisſimis ſcientias has ſolas a Græcis excultas, & juvenibus traditas eſſe, inter omnes conſtat. Verſantur ſcientiæ dictæ circa qvantitatem rerum definiendam, qvam primum qvidem corporibus ineſſe obſervamus; nec tamen: qvantitatem ad res materiales eſſe adſtrictam, putes; ſed eandem, reliqvis omnibus, qvæcunqve ſub cœlo ſunt, tribui, conſideres, uti jam ſupra monitum. Hinc efficitur: ut mathematum uſus, ad res omnes, qvæcunqve modo ab intellectu humano poſſunt concipi, pertingat; nec ſolum rerum phyſicarum, ſed etiam moralium atqve civilium gradus definiat.

Conf. de voce μαθημάτων Chriſtophorus Clavius in Prolegomenis Element. Euclidis.

§. 3.

Qvid Arithmetica? Arithmetica, qvæ in *vulgarem* & *univerſalem*, dirimitur, formationes & affectiones numerorum, & qvantitatum explanat. Principia numero pauca poſtulat atqve ſimplicisſima, a qvibus certitudo tota computationis, qvæ notisſimis illis qvatuor ſpeciebus Conam. II. expoſitis abſolvitur, pendet.

§. 4.

Forma Geometriæ. Geometriæ nomine ſcientiam, qvæ extenſorum naturam generatim ſpeculatur,

ſpeculatur deſignamus. Vulgo in Geometriam *rectarum* & *curvarum* dirimitur, qvarum illa problemata, qvæ ſunt *plana*, ope rectarum & circulorum ſolvit; hæc vero pro determinandis qvæſitis lineas aſſumit curvas.

Illa extenſorum *congruentiam*, *diviſibilitatem*, *proportionalitatem*, *ſpatiorum capacitatem*, aliasqve ſimiles affectiones generales ſcrutatur; hæc vero habitudinem rectarum intra curvas ductarum, curvaturam ipſam, & qvæ hinc pendent ſuperficierum dimenſiones, curvarum rectificationes, aliaqve his affinia, contemplatur.

Utramqve ob nexum arctisſimum, qvo inter ſe cohærent, unam perfectam & completam extenſorum ſcientiam conſtituere; ex Euclide & Apollonio, ſcriptoribus Geometriæ primariis, ſatis conſtat.

§. 5.

Qvid Mechanica & Optica?

Mechanica generatim ſpectata eſt virium & motuum ſcientia, qvæ ſic dictam *Hydroſtaticam*, *Hydraulicam* & *Aerometriam*, tanqvam partes, ad generalem motus doctrinam pertinentes, complectitur. Idem de *Optica ſtricte ſic dicta*, *Catoptrica* & *Dioptrica*, valet, qvæ junctim ſumtæ, perfectam atqve completam lucis theoriam conſtituunt, uti jam ab aliis factum.

§. 6.

§. 6.

QvidAſtronomia & Chronologia?

Aſtronomia phœnomenorum, qvæ in ſenſus externos cadunt, cauſas, & totius ſyſtematis mundani ſtructuram explanat. Omnes reliqvæ, uti *Geometria*, *Arithmetica*, *Mechanica* & *Optica* ſcientiæ, ad hanc tanqvam primariam totius Matheſeos diſciplinam collimant, qvæ pro præſtantisſima habetur, eo, qvod Dei infiniti exiſtentiam atqve omnipotentiam declarat. Cœli enim enarrant gloriam Dei, & terra manifeſtat opera manuum ipſius. Deniqve Chronologia, qvæ maximam vitæ civili affert utilitatem, ex periodicis ſyderum curſibus definit temporum intervalla.

§. 7.

Summa dictorum.

Dictorum igitur ſummam expendentes, videmus: totum ſcientiarum mathematicarum ambitum, *Arithmetica*, *Geometria*, *Mechanica*, *Optica*, *Aſtronomia*, *Chronologia*, tanqvam limitibus atqve finibus circumſcribi, adeo, ut omnia, qvæcunqve ſub mathematicam conſiderationem cadunt, ad dictarum diſciplinarum aliqvam pertineant.

Arithmetica, & *Geometria* junctim ſumtæ *Matheſeos abſtractæ ſeu puræ*; *Mechanica* autem, *Optica*, *Aſtronomia* & *Chronologia*, *Matheſeos applicatæ ſeu concretæ*, nomen ſortiuntur, eo, qvod illæ circa numeros & magnitudines in univerſum; hæ vero circa qvantitates concretas, uti *motum*, *lucem* & *tempus* verſantur.

Præter

Præter disciplinas dictas, qvæ proprie Mathemata constituunt, plures aliæ dantur, qvo referas *Geometriam*, & *Mechanicam practicam*, *Architecturam civilem* & *militarem*, *Pyrotechniam* & *Gnomonicam* &c.

Sed generis hujus artes omnes, qvamqvam Matheseos opem sæpissime desiderent; nihilominus ad ipsa Mathemata referuntur, uti jam ab aliis recte est observatum.

§. 8.

Forma Logicæ seu Philosophiæ rationalis.

Disciplina, qvæ explanat leges, secundum qvas intellectus humanus in exqvirendo vero operatur, *Logica* seu *Philosophia rationalis* vulgo audit, *Generalis* est vel *specialis*; prouti leges in eadem propositæ vel ad rerum qvalitates & qvantitatem simul, vel ad solam qvantitatem, pertinere censentur. Partem Logicæ generalem, *aristotelicam* & *vulgarem* dictam, Conam. I. specialem, seu *Logicam qvantitatum* Conam. II. qvoad principia expositam esse, vides.

Conf. Francisci Baconis de Verulamio Tractatus: de augmentis scientiarum libr. V qvi insertus est operibus ipsius Francofurti ad Moenum 1665. in fol. edit.

§. 9.

Qvid sit Philosophia prima?

Philosophia Prima, a successoribus Aristotelis odioso *Metaphysicæ*

ſicæ nomine inſignita, circa notiones communes verſatur. Vulgaris hæc eſt Metaphyſica, tractans vulgo nota, uti jam vidimus, enunciata, qvæ perfecta & completa vocabitur, ſi *univerſalis* hæc Philoſophia, eandem habuerit utilitatem, qvam præſtat Geometria ſcientiis mathematicis.

§. 10.

Qvid ſit philoſophia naturalis & Pnevmatologia?

Philoſophia naturalis rerum *materialium*, & corporearum; Pnevmatologia, immaterialium, uti *animæ*, *Dei* &c. naturam ſpeculatur. Utramqve unam eandemqve perfectam atqve completam efficere *Phyſicam*, tum ex principiorum *analogia*, tum ex *methodo* perveniendi ad concluſiones, ſuo loco patebit.

Cæterum Pnevmatologia in *Pſychologiam* qvæ circa animam, & *Theologiam naturalem* qvæ circa Deum verſatur, vulgo dirimi ſolet.

Conf. Baconis de Verulamio Tractatus ante jam citatus: de augmentis ſcientiarum Libr. III. c. II. usqve ad c. IV. & Libr. IV. c. III. edit. citat.

§. 11.

Forma Philoſophiæ moralis.

Philoſophia moralis generatim ſpectata, leges ex ratione ſola cognitas, & ad definienda hominum officia neceſſarias ſpeculatur. *Naturales* vocantur hujuscemodi leges, prouti ex rationis humanæ principiis innoteſcunt, & *communes*, prouti ad omnes pertinent, qvamcunqve religionem, ſectam &c. profiteantur.

Has, velim diſtingvas a *revelatis*, & *civilibus* illis legibus, qvæ ab hominum pendent inſtitutis, (aliud enim eſt, *naturæ leges*, aliud *revelatas a Deo* & in ſacro fonte obvias, aliud deniqve *leges civiles* ſeu *humanas* pertractare); unde eas in unam maſſam compactas, inter ſe confundere non licet.

Omnes autem Philoſophiæ moralis leges, cum a naturæ noſtræ proveniant conſtitutione; nemo non videt: operam omnem in exqvirendis naturæ legibus futilem eſſe atqve fruſtraneam, niſi prius Dei, mentisqve humanæ, nec non rerum præſentem ſtatum probe perſpexeris. Hinc efficitur: totam ſic dictam Philoſophiam Practicam ſpeculativa illa niti, nec qvicqvam ſolidi, prætermiſſa ſtatus noſtri accurata contemplatione, in definiendis hominum officiis dici.

Cæterum notiſſimæ tres illæ, uti *Ethica*, *Jurisprudentia naturalis* & *Politica*, diſciplinæ, ad unam eandemqve perfectam *morum* doctrinam facile reducendæ ſunt, partim ob *principiorum* modiqve concludendi, *analogiam*, partim ob *finem*, tendentem ad *mentis humanæ* tranqvillitatem, nec non ad *vitæ ſocialis* ſecuritatem atqve commoditatem.

Sed de his omnibus, ſuo loco & tempore, ſi Deus ita voluerit, pluribus diſpiciemus.

Conf. Johannes Lock de intellectu humano Libr. IV. c. XXI.

§. 12.

Nexus Logicæ & Metaphysicæ vulgaris cum Geometria & Arithmetica.

Exposita in universum scientiarum humanarum forma; de nexu, qvo inter se cohærent, dispiciendum erit, ut innotescat, qvo ordine pertractari, & absqve ullo temporis dispendio addisci debeant.

Qvod ad *Logicam* & *Metaphysicam vulgarem*; utriusqve originem a Geometria & Arithmetica, antiqvissimis jam temporibus exculta, repetendam esse, existimaverim; id qvod non solum ex Aristotelis libris Analyticorum & Metaphysicorum; sed etiam ex præsenti instituto tam est luculentum, ut coecum illum oporteat esse, qvi hæc non videat. Hinc patent seqventia enunciata.

1) *Logicam & Metaphysicam vulgarem Geometriæ & Arithmeticæ ope esse addiscendam.* Intellectui enim humano convenientissimum est: a suppositis Geometriæ & Arithmeticæ simplicioribus, ad generalia artis inveniendi progredi præcepta.

2) *Logicam & Metaphysicam ex Geometria Euclidea qvippe qvæ nulli errori subest, legitimo discursu deductam, genuinam esse & in æternum veram.*

3) *Geometriæ Euclideæ ope, Analyticorum & Metaphysicorum Aristotelis recessus recludi; unde pro clave organisic dicti Aristotelici recte habetur.*

NOTA.

NOTA.

Geometriam & Arithmeticam tum vulgarem tum universalem, rite perceptam, judicandi vim augere, attentionem promovere, mentisqve capacitatem extendere, omnes, qvi Mathemata, justo servato ordine, excoluerunt, uno ore profitentur. Rationem hujus effectus, non tam in multitudine propositionum perceptarum, cumuloqve veritatum geometricarum; qvam potius in methodo accurate adhibita, & reflexione instituta latere, observes.

Vulgus qvidem, facilitatem idearum nexum perspiciendi, vimqve judicandi a Logica vulgari repetere consvevit; sed falsam hanc & erroneam opinionem ipsa Philosophia rationalis, quippe qvæ in tradendis legibus generalioribus subsistit, nec qvicqvam de ipsa veritatum concretive spectatarum inventione satagit, infirmat. Qvid enim qvæso! nudas regulas logicas scire, aliud est, qvam nominum & verborum in Grammatica nosse formationes?

§. 13.

Nexus Physicæ & Pnevmatologiæ cum Mechanica, Optica & Astronomia.

Principia *Physicæ* seu *Philosophiæ naturalis* continentur in *Mechanica*, *Optica* & *Astronomia*, quæ tam arcte inter se copulantur, ut unam eandemqve perfectam atqve completam *naturæ* scientiam constituant. Ad Physicam enim doctrina de motu tam necessaria esse putatur, ut: *ignorato motu, naturam ipsam ignorari*, verissimum sit effatum.

Iisdem fundamentis innititur sic dicta *Pnevmatologia*, in qva mediante Philosophia naturali, qvæ suppeditat principia, ad rerum immaterialium, uti mentis humanæ, Dei &c. notitiam pervenitur.

Unica hæc, vera & genuina de rebus ejusmodi immaterialibus, philoſophandi eſt methodus; qvacunqve demum cauſa homines primum impulſi fuerint, ut: ſubſtantias ejusmodi a materia omni diſtinctas, vere dari, opinarentur; id qvod definire velle, difficillimum videtur.

Conf. Iſaacus Newtonus in Principiis math. Philoſophiæ natur. pag. 482. 483. edit. Amſtelod. 1714 in 4to.

§. 14.

Nexus diſciplinarum moralium cum ſpeculativis.

Diſciplinæ deniqve morales, uti Jurisprudentia naturalis, Ethica & Politica, in ſpeculativis, uti Philoſophia prima, Phyſica & Pnevmatologia fundantur. Leges enim naturales, ſive ad vitam ſocialem, ſive ad ſolitariam pertineant, *legislatorem* ſupponunt, nec non *ſummum bonum*, qvod reliqva omnia, qvæcunqve modo fingi poſſunt, bona ſuperet, vitamqve noſtram tranqvillam atqve beatam efficiat. Hac de cauſa *phyſicum* illud, qvod rerum materialium & immaterialium naturam ſpeculatur ſyſtema recte, præmittitur *morali*, qvod circa definienda hominum officia verſatur.

Utrumqve ad communem finem, qvi ad numinis divini reverentiam, vitæqve humanæ commoditatem tendit, collimat; ſed ſyſtema *phyſicum* a *morali* in eo maxime differt, qvod illud *naturæ*, *motusqve legibus*; hoc autem *regulis*, qvæ reſpondent *libertati humanæ*, ſuperſtructum eſt.

§. 15.

Summa dictorum.

Ex his colligitur naturalis scientiarum sic dictarum *mathematicarum* & *philosophicarum* connexio, qvæ eo fere redit, qvod utrumqve scientiarum genus assumat unum idemqve *cognoscendi principium*, eandemqve philosophandi, in formandis principiis & demonstrandis assertis, adhibeat methodum.

Subordinatæ autem hoc fere modo intelliguntur dictæ scientiæ, ut *Mathemata* præ reliqvis omnibus, jure sibi vindicent prærogativam, partim ob summam, qvæ ipsis inest, evidentiam; partim ob eximiam utilitatem in scientiis reliqvis conspicuam.

Notandum enim: *Mathesin uberrimum esse fontem, a qvo dimanat omnis, qvæcunqve modo sub coelo fingi potest, Philosophia, sive cæteroqvin speculativa fuerit, sive practica.*

§. 16.

Dictæ scientiæ junctim sumtæ, philosophiæ nomine veniunt.

Ob arctissimum hunc, qvo dictæ scientiæ inter se copulantur, nexum; *Mathemata* a sic dicta *Philosophia* male separantur. Est enim *philosophia generatim spectata* nihil aliud, qvam *scientia ex rationis humanæ principiis hausta atqve deducta*; id qvod de *Mathesi* seu scientia qvantitatum eodem modo valet. *Mathemata* enim omnia, qvacunqve de causa peculiarem hanc receperint denominationem, *rationis usu* addiscuntur; unde, cum reliqvas omnes, qvæ fingi modo possunt, scientias doctrinæ puritate multum

superent;

ſuperent; pro *genuina*, *vera*, qvinimo *principali* totius *Philoſophiæ parte*, jure habentur.

Cæterum Philoſophiæ hujus in ambitu ſuo ſpectatæ notitiam ſupponunt *tres reliqvæ* ſic dictæ *Facultates*, qvæ, pro varietate *objecti*, qvod tractant, a præceptis Philoſophorum generatim traditis, ad ſpecialiora progrediuntur. *Theologia* qvidem, *revelatione nixa*, ſuppoſitis veritatibus ex ratione humana cognitis, *coeleſtem*, in ſacro fonte obviam *doctrinam* contemplatur.

Jurisprudentia civilis leges, ab *hominum inſtitutis* pendentes, nec non *communibus* illis, *ratione ſola* cognitis reſpondentes, ſpeculatur; *Medicina* deniqve *obſervationibus* ſuperſtructa, a generali motus, viriumqve theoria ad ſpecialiorem corporis humani diſqviſitionem progreditur.

Sed hæc de ſcientiarum humanarum forma & nexu in genere ſufficiant. Proxime autem, ſi hæc Lectoribus & Academicis non ingrata fuiſſe, intellexero; *ſpecialem Philoſophiæ primæ partem*, aliaqve, ſi Deus ita voluerit, eruditorum examini ſubmittam.

Deo immortali ſit honor & gloria.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM,
LIBER QUINTUS

DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, qvando minor majorem metitur.

2. *Multiplex* est major minoris, qvando minor majorem metitur.

3. *Ratio* est duarum magnitudinum ejusdem generis secundum qvantuplicitatem mutua qvædam habitudo.

4. *Rationem inter se magnitudines* habere dicuntur, qvæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

5. *In eadem ratione magnitudines* esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad qvartam; qvando primæ & tertiæ æqve multiplices, secundæ & qvartæ æqve multiplices, juxta qvamvis multiplicationem, utraqve utramqve vel una superant, vel una æqvales sunt, vel una deficiunt inter se comparatæ.

6. Magnitudines, qvæ eandem rationem habent, *proportionales* vocentur.

7. Qvando autem æqve multiplicium multiplex primæ superaverit multiplicem secundæ, mul-

tiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem qvartæ: tunc prima ad ſecundam *majorem* habere dicitur *rationem*, qvam tertia ad qvartam.

8. *Proportio* eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſint proportionales, prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad ſecundam.

11. Si qvatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad qvartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad ſecundam; & ſic deinceps uno amplius, qvamdiu proportio exſtiterit.

12. *Homologæ magnitudines* dicuntur antecedentes qvidem antecedentibus, conſeqventes vero conſeqventibus.

13. *Alterna ratio* eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſeqventis ad conſeqventem.

14. *Inverſa ratio* eſt ſumptio conſeqventis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſeqventem.

15. *Compoſitio rationis* eſt ſumptio antecedentis una cum conſeqvente tanqvam unius ad ipſam conſeqventem.

16. *Diviſio rationis* eſt ſumptio exceſſus, qvo antecedens ſuperat conſeqventem ad ipſam conſeqventem.

17. *Converſio*

17. *Conversio rationis* est sumptio antecedentis ad excessum, qvo antecedens ipsam conseqventem superat.

18. *Ex æqvalitate ratio* est, qvando pluribus existentibus magnitudinibus & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER: Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. *Ordinata proportio* est, qvando fuerit ut antecedens ad conseqventem, ita antecedens ad conseqventem; ut autem conseqvens ad aliam qvampiam, ita conseqvens ad aliam qvampiam.

20. *Perturbata* vero *proportio* est, qvando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad conseqventem: ut autem in primis magnitudinibus conseqvens ad aliam qvampiam, ita in secundis magnitudinibus alia qvæpiam ad antecedentem.

PROP. I. THEOR.

Si fuerint qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, singulæ singularum æqve multiplices; qvam multiplex est

eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint qvotcunqve magnitudines AB, CD, qvotcunqve magnitudinum E, F, æqvalium numero ſingulæ ſingularum æqve multiplices: Dico qvam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices eſſe & AB, CD ipſarum E, F.

Demonſtratio.

Qvoniam AB æqve multiplex eſt ipſius E, atqve CD ipſius F (per hypoth); qvot magnitudines ſunt in AB æqvales ipſi E, tot erunt & in CD æqvales ipſi F.

Dividatur AB in partes ipſi E æqvales, qvæ ſint AG, GB; CD vero dividatur in partes æqvales ipſi F, videlicet CH, HD: erit igitur multitudo partium CH, HD æqvalis multitudini ipſarum AG, GB.

Rurſus qvoniam AG eſt æqvalis E, & CH æqvalis F, erunt & AG † CH æqvales ipſis E † F (per 2. ax.);

Eadem ratione GB eſt æqvalis E, & HD ipſi F; erunt igitur & GB † HD æqvales ipſis E † F (per 2. ax.).

Qvot igitur ſunt in AB æqvales ipſi E, tot ſunt & in AB † CD æqvales ipſis E † F: qvare qvam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices erunt & AB † CD ipſarum E † F.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si prima ſecundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, fuerit autem & qvinta ſecundæ æqve multiplex atqve ſexta qvartæ, erunt etiam prima & qvinta, ſimul ſumptæ, ſecundæ æqve multiplices atqve tertia & ſexta qvartæ.

Sit prima AB ſecundæ C æqve multiplex atqve tertia DE qvartæ F: autem & qvinta BG ſecundæ C æqve multiplex atqve ſexta EH qvartæ F; Dico primam AB & qvintam BG ſimul ſumptas ſecundæ C æqve multiplices eſſe, atqve tertiam DE & ſextam EH, ſimul ſumptas, qvartæ F.

Demonſtratio.

Qvoniam AB æqve multiplex eſt ipſius C atqve DE ipſius F (per hypoth.); qvot magnitudines ſunt in AB æqvales C, tot erunt & in DE æqvales F.

Eadem ratione & qvot ſunt in BG æqvales C, tot & in EH erunt æqvales F.

Qvot igitur ſunt in tota AG æqvales C, tot erunt & in tota DH æqvales F, ergo qvam multiplex eſt AG ipſius C, tam multiplex eſt DH ipſius F,

Sed toti AG æqvales ſunt prima AB & qvinta BG ſimul ſumptæ, toti autem DH æqvales ſunt tertia DE & ſexta EH ſimul ſumptæ: Qvare prima & qvinta AB † BG, ſecundæ C æqve multiplices erunt, atqve tertia & ſexta DE † EH qvartæ F.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. III. THEOR.

Si prima ſecundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, ſumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo ſumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem ſecundæ, altera vero qvartæ.

Sit prima A ſecundæ B æqve multiplex, atqve tertia C qvartæ D; & ſumantur ipſarum A, C æqve multiplices EF, GH, Dico EF æqve multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D.

Demonſtratio.

Qvoniam EF æqve multiplex eſt ipſius A; atqve GH ipſius C; qvot magnitudines ſunt in EF æqvales A, tot erunt & in GH æqvales C.

Dividatur EF qvidem in magnitudines ipſi A æqvales EK, KF; GH vero dividatur in magnitudines æqvales ipſi C, videlicet GL, LH; erit igitur ipſarum EK, KF multitudo æqvalis multitudini ipſarum GL, LH.

Et, qvoniam æqve multiplex eſt A ipſius B atqve C ipſius D, æqvalis autem EK ipſi A erit EK æqve multiplex ipſius B atqve GL ipſius D.

Eadem ratione æqve multiplex erit KF ipſius B, atqve LH ipſius D. Cum igitur prima EK (ſive A) ſecundæ B æqve multiplex eſt atqve tertia GL (ſive C) qvartæ D; eſt autem & qvinta KF ſecundæ B æqve multiplex atqve ſexta LH qvartæ D: erit & compoſita e prima & qvinta EF

ſecundæ

ſecundæ B æqve multiplex atqve tertia & ſexta GH qvartæ D (per 2. 5.).

Si igitur prima ſecundæ æqve fuerit multiplex atqve tertia qvartæ, ſumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo ſumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem ſecundæ, altera vero qvartæ.

Qvod erat demonſtr.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, & æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices ſecundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

Prima A ad ſecundam B eandem rationem habeat qvam tertia C ad qvartam D, & ſumantur ipſarum qvidem A, C utcunqve æqve multiplices E, F, ipſarum vero B, D aliæ utcunqve æqve multiplices G, H: Dico E ad G ita eſſe ut F ad H.

Demonſtratio.

Sumantur ipſarum qvidem E, F æqve multiplices K, L, & ipſarum G, H æqve multiplices M, N.

Qvoniam igitur E æqve multiplex eſt ipſius A atqve F ipſius C, ſumantur autem ipſarum E, F æqve multiplices K, L, erit K æqve multiplex ipſius A atqve L ipſius C (per 3. 5.).

Eadem ratione M æqve multiplex erit ipsius B atqve N ipsius D. Et qvoniam est ut A ad B ita C ad D, sumptæ autem sunt ipsarum A, C æqve multiplices K, L, & ipsarum B, D aliæ utcunqve æqve multiplices M, N: Si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor erit (per 5. def. 5.).

Suntqve K, L, qvidem ipsarum E, F æqve multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliæ utcunqve æqve multiplices: ut igitur E ad G, ita erit F ad H (per 5. def. 5.)

Qvare si prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices secundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatæ.

Qvod erat demonstr.

Corollarium.

Qvoniam igitur demonstratum est, si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqvalis, æqvalem esse; & si minor, minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqvalis, æqvalem esse; & si minor minorem: ac propterea ut G ad E, ita erit H ad F. Ex hoc manifestum est, si qvatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales erunt.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æqve multiplex sit atqve ablata ablatæ; erit & reliqva reliqvæ æqve multiplex atqve tota totius.

Sit

Sit magnitudo AB magnitudinis CD æqve multiplex atqve ablata AE ablatæ CF; dico & reliquam EB reliqvæ FD æqve multiplicem esse atqve totam AB totius CD.

Demonstratio.

Qvam multiplex enim est AE ipsius CF, tam multiplex fiat & EB ipsius CG.

Et qvoniam AE æqve multiplex est ipsius CF, atqve AB ipsius GF (per 1. 5.); ponitur autem AE æqve multiplex CF atqve AB ipsius CD; æqve multiplex est AB utriusqve GF, CD: ac propterea GF ipsi CD est æqvalis. Communis auferatur CF; reliqva igitur GC æqvalis est reliqvæ DF.

Itaqve qvoniam AE æqve multiplex est CF atqve EB ipsius GC, estqve GC æqvalis DF; erit AE æqve multiplex CF atqve EB ipsius FD.

Æqve multiplex autem ponitur AE ipsius CF atqve AB ipsius CD: Ergo EB est æqve multiplex ipsius FD atqve AB ipsius CD: & reliqva igitur EB reliqvæ FD æqve multiplex est atqve tota AB totius CD.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices sint, & ablatæ qvædam sint earundem æqve multiplices: erunt & reliqvæ vel eisdem æqvales, vel ipsarum æqve multiplices.

Sint duæ magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum

gnitudinum E, F æqve multiplices, & ablatæ AG, CH earundem (Fig. 2. *E, F, æqve multiplices : Dico & reliqvas GB, HD vel ipsis E, F, æqvales esse, vel ipsarum æqve multiplices,*

1. *Sit enim primum GB æqvalis E: (vid Fig. 1.) : dico & HD ipsi F esse æqvalem.* (Fig. 1.

Demonstratio.

Ponatur ipsi F æqvalis CK.

Qvoniam AG æqve multiplex est ipsius F atqve CH ipsius F, estqve GB qvidem æqvalis E, C K vero æqvalis F (per construct.) erit AB æqve multiplex ipsius E atqve HK ipsius F (per 2. 5.).

Æqve autem multiplex ponitur AB ipsius E atqve CD ipsius F, (per hypoth.) ergo KH æqve multiplex est ipsius F atqve CD ipsius F.

Qvoniam igitur utraqve ipsarum KH, CD est æqve multiplex ipsius F, erit KH æqvalis CD. communis auferatur CH: ergo reliqva KC reliqvæ HD est æqvalis.

Sed KC est æqvalis F, HD igitur ipsi F est æqvalis.

Si igitur GB ipsi E æqvalis fuerit, etiam HD ipsi F æqvalis erit.

2. Similiter demonstrabimus si GB (ut in fig. 2.) multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F æqve multiplicem esse.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices sint, & ablatæ qvædam sint earundem æqve multiplices : erunt & reliqvæ vel iisdem æqvales, vel ipsarum æqve multiplices. *Qvod erat demonstr.*

PROP.

PROP. VII. THEOR.

Æqvales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æqvales.

Sint æqvales magnitudines A, B, alia autem qvævis magnitudo C; dico utramqve ipsarum A, B, ad C eandem habere rationem; & etiam C ad utramqve A, B eandem habere rationem.

Constructio.

Sumantur ipsarum A, B, æqve multiplices D, E, & ipsius C alia utcunqve multiplex F.

Demonstratio.

Qvoniam D ipsius A æqve multiplex est atqve E ipsius B, estqve A ipsi B æqvalis; erit & D æqvalis E (per 6. ax.); alia autem est F utcunqve multiplex ipsius C: ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor. (per def. 5. 5.) erit igitur ut A ad C ita B ad C; & præterea inverse etiam ut C ad A ita C ad B (per coroll. 4. 5.).

Qvod erat demonstr.

PROP. VIII. THEOR.

In æqvalium magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem qvam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem, qvam ad majorem.

Sint

Sint inæqvales magnitudines AB, C, & ſit AB major, C vero minor, & ſit alia qvæcunqve D; Dico AB ad D majorem habere rationem qvam C ad D; & D ad C majorem habere rationem, qvam ad AB.

Conſtructio.

Qvoniam AB major eſt qvam C, ponatur ipſi C æqvalis BE (per 3. 1.); minor igitur ipſarum AE, EB multiplicata major aliqvando erit qvam D, (per 4. def. 5.)

Sit AE minor qvam EB, & multiplicetur AE, qvoad fiat major qvam D: ſitqve FG ipſius AE multiplex, qvæ ipſa D eſt major; qvam multiplex autem eſt FG ipſius AE, tam multiplex fiat & GH ipſius EB, & K ipſius C: ſumaturqve ipſius D dupla qvidem L, tripla vero M, & deinceps una major, qvoad ea, qvæ ſumitur, multiplex fiat ipſius D, & primo major qvam K ſumatur, ſitqve N ipſius D qvadrupla, & primo major qvam K.

Demonſtratio.

Qvoniam igitur K primo minor eſt qvam N, non erit K minor qvam M; & cum æqve multiplex ſit FG ipſius AE, atqve GH ipſius EB, erit & FG æqve multiplex ipſius AE atqve FH ipſius AB (per 1. 5.); æqve autem multiplex eſt FG ipſius AE atqve K ipſius C: ergo FH æqve multiplex eſt ipſius AB atqve K ipſius C; ac propterea FH, K ipſarum AB, C ſunt æqve multiplices.

Rurſus

Rurſus, qvoniam GH æqve multiplex eſt ipſius EB atqve K ipſius C, eſtqve EB æqvalis C (per conſtr.), erit & GH ipſi K æqvalis. Sed K non eſt minor qvam M: non eſt igitur GH minor qvam M.

Major autem eſt FG qvam D (per conſtr.): ergo tota FH utrisqve ſimul D, M major erit; Sed utræqve ſimul D, M ſunt æqvales ipſi N, qvare FH ſuperat N; K vero ipſam N non ſuperat; & ſunt FH, K æqve multiplices ipſarum AB, C; & N ipſius D alia qvædam multiplex: ergo AB ad D majorem rationem habet qvam C ad D (per 7. def. 5.).

Dico præterea & D ad C majorem habere rationem qvam D ad AB. Iisdemenim conſtructis, oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare; atqve eſt N multiplex ipſius D, & FH, K aliæ qvædam ipſarum AB, C æqve multiplices; ergo D ad C majorem rationem habet, qvam D ad AB. (per 4. def. 5.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. IX. THEOR.

Qvæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æqvales: & ad qvas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æqvales.

Demonſtratio.

1. *Habeat enim utraqve ipſarum A, B ad C eandem rationem: Dico A ipſi B æqvalem eſſe.*

Si

Si enim non esset æqvalis, non haberet utraqve ipsarum A, B ad C eandem rationem (per 8. 5.); habet autem: æqvalis igitur est A ipsi B.

2. *Habeat rursus C ad utramqve ipsarum A, B eandem rationem; Dico A æqvalem esse ipsi B.*

Si enim non sit A ipsi B æqvalis, non haberet C ad utrumqve A, B eandem rationem, (per 8. 5.) habet autem: Ergo A ipsi B est æqvalis.

Qvæ igitur eandem rationem habent ad eandem, sunt inter se æqvales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsæ etiam sunt inter se æqvales.

Qvod erat demonstr.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, qvæ majorem habet rationem, est major; ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa est minor.

Demonstratio.

1. *Habeant enim A ad C majorem rationem qvam B ad C; Dico A majorem esse qvam B.*

Si enim non est major, vel æqvalis erit vel minor; æqvalis autem non est A ipsi B sic enim utraqve ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem (per 7. 5.): Atqvi eandem non habet: non est igitur A æqvalis ipsi B. Sed neqve minor est A qvam B, haberet enim A ad C minorem rationem qvam B ad C (per 8. 5.); atqvi

non

non habet minorem: non est igitur A minor qvam B; Ostensum autem est, neqve esse æqvalem: ergo A qvam B major erit.

Qvod primo erat demonstr.

2. Habeat rursus C ad B majorem rationem, qvam C ad A: dico B minorem esse qvam A.

Si enim non est minor, vel æqvalis est, vel major, æqvalis utiqve non est B ipsi A, enim C ad utramqve ipsarum A, B eandem rationem haberet (per 7. 5.); non habet autem: ergo A ipsi B non est æqvalis.

Sed neqve major est B qvam A, haberet enim C ad B minorem rationem qvam ad A; Atqvi non habet; non est igitur B major qvam A; Ostensum autem est neqve æqvalem esse: ergo B minor erit qvam A.

Qvod 2do erat demonstrandum.

PROP. XI. THEOR.

Qvæ eidem eædem sunt rationes & inter se sunt eædem.

Sint enim ut A ad B ita C ad D, ut autem C ad D ita E ad F: dico ut A ad B ita esse E ad F.

Constructio.

1) Sumantur ipsarum A, C, E æqve multiplices G, H, K.

2) Ipsarum B, D, F sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonſtratio.

Qvoniam igitur eſt ut A ad B ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A, C æqve multiplices G, H, & ipſarum B, D aliæ utcunqve æqve multiplices L, M: Si G ſuperat L & H ipſam M ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor (per 5. def. 5.).

Rurſus qvoniam eſt ut C ad D ita E ad F & ſumptæ ſunt ipſarum C, E æqve multiplices H, K, ipſarum vero D, F aliæ utcunqve æqve multiplices M, N: ſi H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor. Sed ſi H ſuperat M, & G ſuperabit L & ſi æqvalis, æqvalis & ſi minor, minor: qvare ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor. Et ſunt G, K qvidem ipſarum A, E æqve multiplices, L, N vero ipſarum B, F aliæ utcunqve æqve multiplices; Ergo ut A ad B ita erit E ad F (per 5. def. 5.)

Qvod erat demonſtr.

PROP. XII. THEOR.

Si qvotcunqve magnitudines proportionales fuerint; ut eſt una antecedentium ad unam conſeqventium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſeqventes.

Sint qvotcunqve magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; & ut A ad B ita ſit C ad D, & E ad F: Dico ut A ad B, ita eſſe A, C, E ad B, D, F.

Conſtructio.

Constructio.

1. Sumantur ipsarum A, C, E æqve multiplices G, H, K;
2. Ipsarum B, D, F sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonstratio.

Qvoniam ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F; & sumptæ sunt ipsarum qvidem A, C, E æqve multiplices G, H, K ipsarum vero B, D, F aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N: Si G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Qvare si G superat L, superabunt & G, H, K ipsas L, M, N; & si æqvalis, æqvales? & si minor, minores. Suntqve C & G, H, K ipsarum A & A, C, E æqve multiplices; nam si fuerunt qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, singulæ singularum æqve multiplices, qvam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Eadem ratione L & L, M, N ipsarum B & B, D, F sunt æqve multiplices: est igitur ut A ad B ita A, C, E ad B, D, F.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam; tertia autem ad qvartam majorem habeat rationem qvam qvinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem qvam qvinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat qvam tertia C ad qvartam D, tertia autem C ad qvartam D majorem habeat rationem, qvam qvinta E ad sextam F: Dico & primam A ad secundam B majorem habere rationem, qvam qvintam E ad sextam F.

Demonstratio.

Qvoniam C ad D majorem habet rationem, qvam E ad F, sumantur qvædam ipsarum C, E æqve multiplices, & ipsarum D, F, aliæ qvædam æqve multiplices: & multiplex qvidem ipsius C superet multiplicem ipsius D, multiplex vero ipsius E non superat multiplicem ipsius F (per 7. def. 5.)

Sumantur, & sint ipsarum C, E æqve multiplices G, H, & ipsarum D, F aliæ qvædam æqve multiplices K, L, ita ut G qvidem superet K, H vero ipsam L non superet: & qvam multiplex est G ipsius C, tam multiplex sit & M ipsius A; qvam multiplex autem K ipsius D, tam multiplex sit & N ipsius B.

Et qvoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C, æqve multiplices M, G, & ipsarum B, D aliæ æqve multiplices N, K: Si M superat N, & G ipsam K superabit, & si æqvalis æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Sed

Sed G superat K, ergo & M ipsam N superabit; H vero non superat L; suntqve M, H ipsarum A, E æqve multiplices, & N, L ipsarum B, F aliæ qvædam æqve multiplices; Ergo A ad B majorem rationem habebit qvam E ad F.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: & secunda qvam qvarta major erit, & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, qvam tertia C ad qvartam D, major autem sit A qvam C: Dico & B qvam D majorem esse.

Demonstratio.

Qvoniam enim A major est qvam C, & alia utcunqve magnitudo B; habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.). Sed ut A ad B ita C ad D: Ergo & C ad D majorem habebit rationem qvam C ad B (per 13. 5.)

Ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est (per 10. 5.); Qvare D est minor qvam B: ac propterea B qvam D major erit. Similiter demonstrabimus & si A æqvalis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqvalem: & si A sit minor qvam C, & B qvam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: &

ſecunda qvam qvarta major erit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter ſe.

Sit enim AB æqve multiplex ipſius C atqve DE ipſius F; Dico ut C ad F ita eſſe AB ad DE.

Demonſtratio.

Qvoniam æqve multiplex eſt AB ipſius C atqve DE ipſius F; qvot ſunt magnitudines in AB æqvales ipſi C, totidem erunt & in DE æqvales F: Dividatur AB in magnitudines ipſi C æqvales, qvæ ſint AG, GH, HB: & DE dividatur in magnitudines æqvales F, videlicet DK, KL, LE: erit igitur ipſarum AG, GH, HB multitudo æqvalis multitudini ipſarum DK, KL, LE. Et qvoniam æqvales ſunt inter ſe AG, GH, HB, ſuntqve DK, KL, LE etiam inter ſe æqvales, erunt ut AG ad DK ita GH ad KL & HB ad LE (per 7. 5.): & erit ut una antecedentium ad unam conſeqventium, ita omnes antecedentes ad omnes conſeqventes: eſt igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipſi C eſt æqvalis, & DK ipſi F: ergo ut C ad F ita erit AB ad DE.

Qvod erat demonſtr.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

Si qvatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

Sint qvatuor magnitudines A, B, C, D proportionales, sitqve ut A ad B ita C ad D; Dico & alterne proportionales esse; videlicet ut A ad C ita esse B ad D.

Constructio.

1. Sumantur ipsarum A, B æqve multiplices E, F;
2. Ipsarum vero C, D sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices G, H.

Demonstratio.

Qvoniam æqve multiplex est E ipsius A atqve F ipsius B; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter se (per 1. 5. 5.): erit ut A ad B ita E ad F.

Ut autem A ad B ita C ad D: ergo ut C ad D ita E ad F (per 11. 5.).

Rursus, qvoniam G, H sunt ipsarum C, D, æqve multiplices; erit ut C ad D, ita G ad H; ergo ut E ad F ita G ad H (per 11. 5.).

Qvod si qvatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit qvam tertia; & secunda qvam qvarta major erit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 14. 5.).

Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor.

Sunt autem E, F, ipsarum A, B, æqve multiplices, & G, H, ipsarum C, D, aliæ utcunqve æqve multiplices: ergo ut A ad C ita B ad D (per 5. def. 5.).

Qvod erat demonstr.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines AB, BE, CD, DF proportionales, sitqve ut AB ad BE ita CD ad DF: Dico etiam divisas proportionales esse: videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD.

Constructio.

1. Sumantur ipsarum AE, EB, CF, FD æqve multiplices GH, HK, LM, MN.
2. Sumantur ipsarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP.

Demonstratio.

Qvoniam GH æqve multiplex est ipsius AE atqve HK ipsius EB (per constr.) erit GH ipsius AE æqve multiplex atqve GK ipsius AB (per 1. 5.).

Æqve autem multiplex est GH ipsius AE atqve

LM ipsius CF: Ergo GK æqve multiplex est ipsius AB, atqve LM ipsius CF.

Rursus qvoniam æqve multiplex est LM ipsius CF atqve MN ipsius FD; erit LM æqve multiplex ipsius CF atqve LN ipsius CD.

Sed æqve multiplex erat LM ipsius CF atqve GK ipsius AB; æqve igitur multiplex est GK ipsius AB atqve LN ipsius CD; qvare GK, LN ipsarum AB, CD æqve multiplices erunt.

Rursus qvoniam æqve multiplex est HK ipsius EB atqve MN ipsius FD; est autem & KO ipsius EB æqve multiplex, atqve NP ipsius FD: etiam composita HO ipsius EB æqve multiplex est atqve MP ipsius FD (per 2. 5.).

Cum autem sit ut AB ad BE, ita CD ad DF, & sumptæ sint ipsarum qvidem AB, CD æqve multiplices GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices HO, MP: igitur si GK superat HO, & LN superabit MP; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Superet igitur GK ipsam HO communiqve ablata HK, & GH ipsam KO superabit.

Sed si GK superat HO, & LN superat MP: superet itaqve LN ipsam MP; communiqve MN ablata & LM superabit NP: Qvare si GH superat KO & LM ipsam NP superabit.

Similiter demonstrabimus & si GH sit æqvalis KO, & LM ipsi NP esse æqvalem; & si minor minorem.

Sunt autem GH, LM, ipsarum AE, CF æqve multiplices, & ipsarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP: Ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD.

Qvod erat demonstr.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines AF, EB, CF, FD proportionales, & ut AE ad EB ita FC ad FD: Dico etiam compositas proportionales esse; videlicet ut AB ad BE ita CD ad FD.

Demonstratio.

Si enim non est ut AB ad BE ita CD ad FD; erit ut AB ad BE ita CD vel ad minorem qvam FD, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem nempe ad DG, & qvoniam est ut AB ad BE ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales: Ergo & divisæ proportionales erunt (per 17. 5.): est igitur ut AE ad EB ita CG ad GD.

Ponitur autem & ut AE ad EB ita CF ad FD: qvare & ut CG ad GD ita CF ad FD (per 11. 5.); At prima CG major est qvam tertia CF: ergo & secunda GD major erit qvam qvarta FD; sed & minor, qvod fieri non potest: non est igitur ut AB ad BE ita CD ad minorem qvam FD.

Similiter ostendemus neqve esse CD ad majorem qvam FD: est igitur ad ipsam.

Qvare

Qvare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqva ad reliqvam ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD ita ablata AE ad ablatam CF: dico & reliqvam EB ad reliqvam FD ita esse, ut tota AB ad totam CD.

Demonstratio.

Qvoniam est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & alterne erit ut BA ad AE ita DC ad CF (per 16. 5.)

Et qvoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ proportionales erunt (per 17. 5.): ut igitur BE ad EA, ita DF ad CF; rursus alterne ut BE ad DF ita EA ad FC.

Sed ut AE ad CF ita posita est AB ad CD: & igitur reliqva EB erit ad reliqvam FD ut tota AB ad totam CD (per 11. 5.).

Qvod erat demonstrandum.

Corollarium.

Et qvoniam ostensum est ut AB ad CD ita esse EB ad FD (per 16. 5.); si fuerit alterne ut AB ad BE ita CD ad DF, nempe compositæ magnitudines

tudines proportionales: ostensum autem est ut AB ad AE ita esse CD ad CF (per 16. & 19. 5.), qvod est per conversionem rationis (per 17. def. 5.). Ex hoc igitur perspicuum est, si compositæ magnitudines sint proportionales, & per conversionem rationis proportionales esse.

Qvod erat demonstr.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines & aliæ ipsis numero æqvales, qvæ binæ sumantur in eadem ratione, ex æqvo autem prima major sit qvam tertia: & qvarta qvam sexta major erit; & si æqvalis æqvalis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æqvales D, E, F, binæ sumptæ in eadem ratione, sitqve ut A ad B ita D ad E, & ut B ad C ita E ad F, ex æqvo autem major sit A qvam C; dico & qvartam D majorem esse sexta F; qvodsi prima A tertiæ C fuerit æqvalis, erit & qvarta D æqvalis sextæ F; sin illa minor, hæc qvoqve minor erit.

Demonstratio.

Qvoniam A major est qvam C, alia vero utcunqve B, & major ad eandem majorem habet rationem qvam minor (per 8. 5.); habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B.

Sed

Sed ut A ad B ita D ad E; & invertendo ut C ad B ita F ad E ergo & D ad E majorem habet rationem qvam F ad E.

Ad eandem vero rationem habentium, qvæ majorem habet rationem, illa major eſt (per 10. 5); major igitur eſt D qvam F. Similiter oſtendemus & ſi A ſit æqvalis C & D ipſi F æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æqvo prima major ſit qvam tertia: & qvarta qvam ſexta major erit; & ſi æqvalis, æqvalis, & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F, binæ ſumptæ & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, ut vero B ad C ita D ad E, & ex æqvo A major ſit qvam C: Dico & D qvam F majorem eſſe & ſi æqvalis, æqvalem; & ſi minor, minorem.

Demonſtratio.

Qvoniam major eſt A qvam C, alia vero B: habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.).

Sed

Sed ut A ad B ita E ad F, & invertendo ut C ad B ita E ad D; qvare & E ad F majorem habebit rationem qvam E ad D; ad qvam vero eadem majorem habet rationem illa minor eſt (per 10. 5.): minor igitur eſt F qvam D: ac propterea D qvam F major erit. Similiter oſtendemus & ſi æqvalis æqvalem: videlicet ſi A ſit æqvalis C, & D ipſi F æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXII. THEOR.

Si ſint qvotcunqve magnitudines & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æqvo in eadem ratione erunt.

Sint qvotcunqve magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F binæ ſumptæ in eadem ratione, ut A quidem ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico & ex æquo in eadem ratione eſſe ut A ad C ita D ad F.

Conſtructio.

1. Sumantur enim ipſarum qvidem A, D, æqve multiplices G, H.
2. Ipſarum vero B, E, ſumantur aliæ utcunqve æqve multiplices K, L, & ipſarum C, F, aliæ utcunqve æqve multiplices M, N.

Demon-

Demonstratio.

Qvoniam est ut A ad B ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A, D æqve multiplices G, H, & ipsarum B E aliæ utcunqve æqve multiplices K, L; erit ut G ad K ita H ad L (per 4. 5.). eadem qvoqve ratione erit ut K ad M ita L ad N.

Et cum sint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipsis numero æqvales H, L, N binæ sumptæ & in eadem ratione: ex æqvo igitur si G superat M & H ipsam N superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 20. 5.).

Sunt autem G, H ipsarum A, D æqve multiplices, & M, N ipsarum C, F aliæ utcunqve æqve multiplices: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Quod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æqvales, qvæ binæ sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio: & ex æqvo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eadem ratione D, E, F, sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita D ad E: dico ut A ad C ita esse D ad F.

Constructio.

Conſtructio.

Sumantur ipſarum qvidem A, B, C, æqve multiplices G, H, K, ipſarum vero D, E, F aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonſtratio.

Qvoniam G, H æqve multiplices ſunt ipſarum A, B; partes autem eandem habent rationem, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.) erit ut A ad B ita G ad H.

Simili ratione ut E ad F ita M ad N: atqve eſt ut A ad B ita E ad F. Ut igitur G ad H ita M ad N (per 11. 5.). Et qvoniam eſt ut B ad C ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum qvidem BD æqve multiplices H, L ipſarum vero C, E aliæ utcunqve æqve multiplices K, M; erit ut H ad L ita K ad M (per 15. 5.).

Oſtenſum autem eſt ut G ad H ita eſſe M ad N; Qvoniam igitur tres ſunt magnitudines G, H, L, & aliæ ipſis numero æqvales K, M, N, binæ ſumptæ in eadem ratione, eſtqve perturbata earum proportio, ex æqvo, ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor (per 21. 5.).

Sunt autem G, K, ipſarum A, C æqve multiplices, & L, N æqve multiplices ipſarum D, F: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Quod erat demonſtr.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam; habeat autem & qvinta ad ſecundam eandem rationem, qvam ſexta ad qvartam: & compoſita e prima & qvinta ad ſecundam eandem rationem habebit qvam compoſita e tertia & ſexta ad quartam.

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat rationem, qvam tertia DE ad qvartam F: habeat autem & qvinta BG ad ſecundam C rationem eandem, qvam ſexta EH ad qvartam F: dico & compoſitam e prima & qvinta AG ad ſecundam C eandem habere rationem qvam compoſita e tertia & ſexta DH ad qvartam F.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut BG ad C ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG ita F ad EH (per cor. 4. 5.).

Et qvoniam ut AB ad C ita eſt DE ad F, ut autem C ad BG ita F ad EH; erit ex æqvo ut AB ad BG ita DE ad DH (per 22. 5.). Cum autem diviſæ magnitudines ſint proportionales & compoſitæ proportionales erunt (per 18. 5.); Ut igitur AG ad GB ita eſt DH ad HE.

Ut autem GB ad C ita EH ad F: Ergo ex æqvo ut AG ad C ita erit DH ad F (per 22. 5.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXV. THEOR.

Si qvatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima duabus reliqvis majores erunt.

Sint qvatuor magnitudines proportionales, AB, CD, E, F, & ſit ut AB ad CD ita E ad F; ſit autem maxima ipſarum AB, & F minima: dico AB & F ipſis CD & E majores eſſe.

Demonſtratio.

Ponatur enim ipſi qvidem E æqvalis AG, ipſi vero F æqvalis CH. Qvoniam igitur eſt ut AB ad CD ita E ad F, eſtqve AG æqvalis E, & CH æqvalis F; erit ut AB ad CD ita AG ad CH.

Et qvoniam eſt ut tota AB ad totam CD ita ablata AG ad ablatam CH; erit & reliqva GB ad reliqvam HD ut tota AB ad totam CD (per 19. 5.). Major autem eſt AB qvam CD (ex hypoth.); Ergo & GB major eſt qvam HD.

Cum autem AG ſit æqvalis ipſi E, & CH ipſi F; erunt AG & F æqvales ipſi CH & E.

Si autem inæqvalibus æqvalia addantur tota erunt inæqvalia: cum igitur GB, HD ſint inæqvalia, ſitqve major GB, ſi ipſi qvidem GB addantur AG & F, ipſi vero HD addantur CH & E, fiant AB & F ipſis CD & E majores.

Qvod erat demonſtrandum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM, LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ ſunt, qvæ & ſingulos angulos ſingulis æqvales habent, & circa æqvales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ figuræ ſunt, qvando in utraqve figura antecedentes & conſeqventes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam ac mediam rationem* recta linea *ſecta* eſſe dicitur, qvando ut tota ad majus ſegmentum ita majus ſegmentum ad minus ſe habuerit.

4. Altitudo cujusqve figuræ eſt linea perpendicularis a vertice ad baſin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, qvando rationum qvantitates inter ſe multiplicatæ illius faciunt qvantitatem.

PROP. I. THEOR.

Triangula & parallelogramma, qvæ eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes.

Sint triangula qvidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quæ eandem habent altitudinem

dinem videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam; dico ut basis BC ad basin CD ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

Constructio.

1. Producatur BD ex utraqve parte ad puncta H, L;
2. Basi BC æqvales qvotcunqve ponantur BG, GH; Basi vero CD ponantur qvotcunqve æqvales DK, KL.
3. Jungantur AG, AH, AK, AL.

Demonstratio.

1. Qvoniam CB, BG, GH inter se sunt æqvales, erunt & triangula AGH, AGB, ABC inter se æqvalia (per 38. 1.): ergo qvam multiplex est basis HC ipsius basis BC, tam multiplex est triangulum AHC trianguli ABC, eadem ratione, qvam multiplex est basis LC ipsius basis CD, tam multiplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli; & si æqvalis est basis HC basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æqvale; & si basis HC basin CL superat & triangulum AHC superabit triangulum ALC; & si minor, minus erit (per 38. 1.).

Qvatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC, CD & duobus triangulis ABC, ACD sumpta sunt æqve multiplicia, basis qvidem BC & ABC trianguli, videlicet HC basis & AHC

AHC triangulum; basis vero CD & trianguli ACD alia utcunqve æqve multiplicia, nempe CL basis & ALC triangulum. Atqve ostensum est, si basis HC basin CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqvalis, æqvale, & si minor, minus; est igitur ut BC basis ad basin CD ita triangulum ABC ad ACD triangulum (per 5. def. 5.).

Quod primo erat demonstrandum.

2. Qvoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum (per 41. 1.), partes autem eandem inter se rationem habent, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.); erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum.

Qvoniam igitur ostensum est, ut basis BC ad CD basin ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD, ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum: erit ut BC basis ad basin CD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum (per 11. 5.).

Quod 2do erat demonstr.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli

guli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, qvæ sectiones conjungit recta linea reliqvo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE: dico ut BD ad DA ita esse CE ad EA.

Demonstratio.

1. Jungantur BE, CD: triangulum igitur BDE triangulo CDE est æqvale, qvia in eadem sunt basi DE & intra easdem parallelas DE, BC (per 37. 1.). aliud autem est triangulum ADE; & æqvalia ad idem eandem habent rationem (per 7. 5.): ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE ita est BD ad DA: nam cum eandem altitudinem habeant videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam inter se sunt ut bases (per 1. 6.). Et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE ita CE ad EA: ut igitur BD ad DA ita est CE ad EA (per 11. 5.)

Qvod erat demonstr.

2. *Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta sint in punctis D, E, ut BD ad DA ita sit CE ad EA, & jungatur DE: dico DE ipsi BC parallelam esse.*

Iisdem enim constructis, qvoniam est ut BD ad DA ita CE ad EA; ut autem BD ad DA ita triangulum BDE ad triangulum ADE (per 1. 6.);

&

& ut CE ad EA ita CDE triangulum eſt triangulum ADE : erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita CDE triangulum ad triangulum ADE (per 11. 5.). Utrumqve igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem, ideo triangulum BDE triangulo CDE æqvale eſt (per 9. 5.): & ſunt ſuper eadem baſi DE. Æqvalia autem triangula & ſuper eadem baſi conſtituta etiam intra easdem ſunt parallelas (per 39. 1.): ergo DE ipſi BC parallela eſt.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſin; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt qvam reliqva trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem qvam reliqva trianguli latera; quæ a vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.

1. *Sit triangulum ABC & ſecetur angulus BAC bifariam a recta linea AD: dico ut BD ad DC ita eſſe BA ad AC.*

Conſtructio.

1. Ducatur per C ipſi DA parallela CE (per 31. 1.).
2. Producatur trianguli latus BA usqvedum conveniat cum parallela ducta CE in puncto E.

Demonstratio.

Qvoniam in parallelas AD, EC incidit recta linea AC; erit angulus ACE æqvalis angulo CAD (per 29. 1.). Sed CAD angulus ponitur æqvalis angulo BAD: ergo & BAD ipsi angulo ACE æqvalis erit.

Rursus qvoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqvalis est interiori AEC (per 29.1.).

Ostensus autem est angulus ACE angulo BAD æqvalis; ergo & ACE ipsi AEC æqvalis erit: & propterea latus AE æqvale lateri AC (per 6. 1.).

Et qvoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit ut BD ad DC ita BA ad AE (per 2. 6.), æqvalis autem est AE ipsi AC: est igitur ut BD ad DC ita BA ad AC.

Qvod primo erat demonstr.

2. *Sit autem ut BD ad DC ita BA ad AC: & AD jungatur: dico, angulum BAC bifariam sectum esse a recta linea AD.*

Iisdem enim constructis, qvoniam est ut BD ad DC ita BA ad AC est autem ut BD ad DC ita BA ad AE (etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD) erit ut BA ad AC ita BA ad AE (per 2. 6.): ergo AC est æqvalis AE (per 9. 5.) ac propterea & angulus AEC angulo ACE æqvalis (per 5. 1).

Sed angulus qvidem AEC est æqvalis angulo exteriori BAD, angulus vero ACE æqvalis alterno

CAD

CAD (per 29. 1.): qvare & BAD angulus ipsi CAD æqvalis erit. Angulus igitur BAC bifariam sectus est a recta linea AD.

Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP. IV. THEOR.

Æqviangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos: & homologa sunt latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Sint æqviangula triangula ABC, DCE, qvæ angulum qvidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqvalem habeant, & præterea angulum BAC æqvalem angulo CDE: Dico triangulorum ABC, DCE, proportionalia esse latera, qvæ sunt circa æqvales angulos; & homologa esse latera qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Demonstratio.

Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et qvoniam anguli ABC, ACB duobus rectis sunt minores (per 17. 1.), æqvalis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores: qvare BA, ED productæ inter se convenient (per 11. ax.) producantur, & convenient in puncto F.

Jam qvoniam angulus DCE æqvalis est angulo ABC, erit BF ipsi CD parallela (per 28. 1.).

 Rursus,

Rursus, qvoniam æqvalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE: parallelogrammum igitur est FACD: ac propterea FA qvidem ipsi CD; AC vero ipsi FD æqvalis (per 34. 1).

Et qvoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit ut BA ad AF ita BC ad CE (per 2. 6.) æqvalis autem est AF ipsi CD: ut igitur BA ad CD ita BC ad CE (per 7. 5, & alterne ut AB ad BC ita DC ad CE (per 16. 5.).

Rursus qvoniam CD parallela est BF, erit ut BC ad CE ita FD ad DE. Sed DF æqvalis AC; ergo ut BC ad CE ita AC ad ED, & alterne ut BC ad AC ita CE ad ED. Itaqve qvoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED; erit ex æqvo ut BA ad CA ita DC ad ED (per 22. 5.)

Æqviangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa sunt latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Qvod erat demonstr.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, qvæ latera proportionalia habeant, sitque ut AB qvidem ad *ad BC ita DE ad EF; ut autem BC ad CA ita EF ad FD; & adhuc ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse & æqvales habere angulos, qvibus homologa latera subtenduntur; angulum qvidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; & præterea angulum BAC angulo EDF.*

Constructio & Demonstratio.

Constituatur ad rectam lineam EF & ad puncta in ipsa E, F, angulo qvidem ABC æqvalis angulus FEG, angulo autem BCA æqvalis angulus EFG: qvare reliqvus BAC angulus reliqvo EGF est æqvalis (per 32.1.). Ideoqve æqviangulum est triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur (per 4. 6.): ergo ut AB ad BC ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC ita DE ad EF: ut igitur DE ad EF ita GE ad EF (per 11. 5.): Utraqve igitur ipsarum DE, GE eandem habet rationem ad EF; & idcirco erit DE ipsi GE æqvalis (per 9. 5.). Eadem ratione & DF æqvalis erit GF. Itaqve qvoniam DE est æqvalis EG, communis autem EF: duæ DE, EF, duabus GE, EF sunt æqvales, & basis DF basi GF æqvalis: angulus igitur DEF est æqvalis angulo GEF (per 8. 1.), & DEF triangulum æqvale triangulo GEF & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales, qvibus æqvalia latera

latera ſubtenduntur: angulus igitur DFE qvidem eſt æqvalis angulo GFE, angulus vero EDF æqvalis angulo EGF. Et qvoniam angulus DEF eſt æqvalis angulo GEF, & angulus GEF æqvalis angulo ABC (per conſtruct.); erit & angulus ABC angulo DEF æqvalis. Eadem ratione & angulus ACB æqvalis eſt angulo DFE & etiam angulus ad A angulo ad F: ergo ABC triangulum eſt æqviangulum triangulo DEF.

Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera ſubtenduntur.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa æqvales autem angulos latera proportionalia; æqviangula erunt triangula, & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqvalem habentia, circa æqvales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſſe, & angulum qvidem ABC habere æqvalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

Conſtructio.

Ad rectam lineam DF & ad puncta in ipſa D, F,

alterutri

alterutri angulorum BAC, EDF constituatur æqvalis angulus FDG, angulo autem ACB æqvalis DFG.

Demonstratio.

Qvoniam in duobus triangulis ABC, DFG duo anguli A, C duobus angulis FDG, DFG æqvales sunt (per construct.); erit & reliqvus angulus B, reliqvo G æqvalis (per 32. 1.): ergo triangulum ABC triangulo DGF æqviangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita GD ad DF (per 4. 6.). Est autem ut BA ad AC ita ED ad DF (per hypoth.): ut igitur ED ad DF ita GD ad DF (per 11. 5.): qvare ED æqvalis est ipsi DG, (per 9. 5.); communis vero est DF: ergo duæ ED, DF duabus GD, DF sunt æqvales, & angulus EDF angulo GDF est æqvalis: basis igitur EF est æqvalis basi FG, triangulumqve DEF æqvale triangulo GDF, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales: alter alteri, qvibus æqvalia latera subtenduntur (per 4. 1.), angulus igitur DFG est æqvalis angulo DFE; angulus vero ad G æqvalis angulo ad E. Sed angulus DFG æqvalis est angulo ACB (per construct.): angulus igitur ACB angulo DFE est æqvalis, angulus autem BAC æqvalis est angulo EDF (per hypoth.): ergo & reliqvus, qvi ad B æqvalis reliqvo, qvi ad E (per 32. 1.) æqviangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF, & æqvales sunt anguli, qvibus homologa latera subtenduntur.

Qvod erat demonstr.

PROP

PROP. VII. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliqvorum vero utrumqve ſimul vel minorem vel non minorem recto; æqviangula erunt triangula & æqvales habebunt angulos circa qvos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum uni angulo æqvalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqvalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit DE ad EF ſicut AB ad BC, & reliqvorum, qvi ad C, F primo utrumqve ſimul minorem recto: Dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſſe, angulumqve ABC æqvalem angulo DEF, & reliqvum, qvi ad C reliqvo, qvi ad F æqvalem.

Conſtructio & Demonſtratio.

1. Si inæqvalis eſt angulus ABC angulo DEF unus ipſorum major erit. Sit igitur major ABC, & conſtituatur ad rectam lineam AB & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqvalis angulus ABG (per 23. 1.).

Qvoniam angulus A eſt æqvalis angulo D (per hypoth.), angulus vero ABG æqvalis angulo DEF (per conſtruct.); erit reliqvus AGB reliqvo DFE æqvalis: æqviangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; qvare ut AB ad BG ſic DE ad EF (per 4. 6.). Ut vero DE ad EF

ſic

ſic AB ad BC (per hypoth.): ut igitur AB ad BC ſic AB ad BG, ideo AB ad utramqve BC, BG eandem habet rationem (per 11. 5.); erit igitur BC ipſi BG æqvalis, ac propterea angulus BGC eſt æqvalis angulo BCG (per 5. 1.). Minor autem recto eſt angulus, qvi ad C (per hypoth.): ergo & BGC minor eſt recto; & ob id, qvi ei deinceps eſt AGB major recto (per 13. 1.). Atqvi oſtenſus eſt angulus AGB æqvalis angulo F: angulus igitur, qvi ad F recto major eſt, qvod hypotheſi repugnat: non eſt igitur angulus ABC inæqvalis angulo DEF; ergo ipſi eſt æqvalis. Eſt autem & angulus ad A æqvalis ei, qvi ad D: qvare & reliqvus, qui ad C æqvalis reliqvo, qvi ad F; æqviangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo DEF.

Qvod primo erat demonſtr.

2. Sed rurſus ponatur uterqve angulorum, qvi ad C, F non minor recto: dico rurſus, & ſic triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſſe. Iisdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC æqvalem ipſi BG, angulumqve ad C angulo BGC æqvalem. Sed angulus, qvi ad C non eſt minor recto: non eſt igitur recto minor BGC. Qvare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis minores; qvod fieri non poteſt (per 17. 1.), non igitur rurſus eſt ABC angulus inæqvalis angulo DEF; ergo æqvalis. Eſt autem & qvi ad A æqvalis ei, qvi eſt ad D: reliqvus igitur, qvi ad C reliqvo ad F eſt

eſt æqvalis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſt.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſin perpendicularis ducatur; qvæ ad perpendicularem ſunt triangula & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum BAC, & a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD;

1. *Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC ſimilia eſſe.*

Demonſtratio.

Qvoniam angulus BAC eſt æqvalis angulo ADB, rectus enim eſt uterqve, & angulus, qvi ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit reliqvus ACB reliqvo BAD æqvalis (per 32. 1.); æqviangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. Qvare ut BC, qvæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABC, ab BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa AB ſubtendens angulum, qvi ad C trianguli ABC ad BD ſubtendentem angulum æqvalem angulo, qvi ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli (per 4. 6.), & ſic etiam AC ad AD ſubtendentem angulum, qvi ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABC triangulo ABD æqviangulum

lum eſt, & circa æqvales angulos latera habet proportionalia: ſimile igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD (per 1. def. 6). Eadem ratione demonſtrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC ſimile: eſſeqvare utrumqve ipſorum ABD, ADC toti triangulo ABC eſt ſimile.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Dico inſuper triangula ABD, ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe.*

Qvoniam enim rectus angulus BDA eſt æqvalis recto ADC: ſed & BAD oſtenſus æqvalis ei, qvi ad C; erit reliqvus, qvi ad B reliqvo DAC æqvalis (per 32. 1.): æqviangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC. Ergo ut BD trianguli ABD ſubtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC ſubtendentem angulum, qvi ad C, æqvalem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD, ſubtendens angulum, qvi ad B, ad DC trianguli ADC, ſubtendentem angulum DAC, ei, qvi ad B æqvalem (per 4. 6.). Et ſic etiam BA ſubtendens rectum angulum ADB ad AC ſubtendentem angulum rectum ADC: eſt igitur ABD triangulum ſimile triangulo ADC (per def. 6.).

Qvod ſecundo erat demonſtr.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad baſin ductam mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſin & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

Sit data recta linea AB: oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere; imperetur autem, ex: gr: pars tertia.

Conſtructio.

1. Ducatur a puncto A qvælibet recta linea AC, qvæ cum ipſa AB angulum qvemlibet contineat;
2. Sumatur in AC qvodvis punctum D, & ipſi AD æqvales ponantur DE, EC (per 3. 1.);
3. Jungatur BC & per D ipſi BC parallela ducatur DF (per 31. 1.).

Demonſtratio.

Qvoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipſi BC, parallela ducta eſt FD; erit ut CD ad DA, ita BF ad FA (per 2. 6.). Dupla autem eſt CD ipſius DA; Ergo & BF ipſius FA dupla; tripla igitur eſt BA ipſius AF.

Qvare a data recta linea AB imperata pars tertia AF abſciſſa eſt.

Qvod erat faciendum.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data recta ſecta eſt.

Sit

Sit data recta linea insecta AB. secta vero AC: Oportet rectam lineam AB insectam similiter secare ut AC secta est in punctis D, E.

Constructio.

1. Datæ rectæ AB, AC, ponantur ita, ut angulum qvemvis comprehendant, jungaturqve BC.
2. Per puncta D, E ipsi BC parallelæ ducantur DF, EG, per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK.

Demonstratio.

Qvoniam parallelogrammum est utrumqve ipsorum FH, HB (per construct.) erit igitur DH æqvalis FG; HK vero ipsi GB æqvalis. Et qvoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit ut CE ad ED ita KH ad HD. Æqvalis autem est KH qvidem ipsi BG, HD vero ipsi GF: est igitur ut CE ad ED ita BG ad GF. Rursus qvoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD; ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est, ut CE ad ED ita esse BG ad GF: ut igitur CE ad ED ita est BG ad GF, & ut ED ad DA ita GF ad FA.

Ergo data recta linea insecta AB similiter secta est ut data recta AC.

Qvod erat demonstr.

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, ut angulum qvemvis comprehendant: oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Constructio.

1. Producantur AB, AC ad puncta D, E;
2. Ponatur ipsi AC æqvalis BD, & jungatur BC;
3. Per D ipsi BC parallela ducatur DE (per 31. 1.);

Demonstratio.

Qvoniam uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC; erit ut AB ad BD ita AC ad CE, æqvalis autem est BD ipsi AC: ut igitur AB ad AC ita est AC ad CE.

Qvare duabus datis lineis AB, AC tertia proportionalis CE est inventa.

Qvod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis, qvartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C: oportet ipsis A, B, C qvartam proportionalem invenire.

Constru-

Conſtructio.

1. Exponantur duæ rectæ lineæ DE, DF, angulum qvemvis EDF comprehendentes; & ponatur ipſi qvidem A æqvalis DG, ipſi vero B æqvalis GE & ipſi C æqvalis DH;
2. Jungatur GH, & per E ipſi HG parallela ducatur EF.

Demonſtratio.

Qvoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH; erit ut DG ad GE, ita DH ad HF. Eſt autem DG ipſi A æqvalis, GE vero æqvalis B & DH æqvalis C: ut igitur A ad B ita C ad HF.

Qvare datis tribus rectis lineis A, B, C, qvarta proportionalis inventa eſt HF.

Quod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC: oportet inter ipſas mediam proportionalem invenire.

Conſtructio.

1. Ponantur in directum AB, BC, & ſuper ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC;
2. A puncto B ipſi AC ad rectos angulos ducatur BD (per 11. 1.);
3. Jungantur AD, DC.

Demonstratio.

Qvoniam angulus ADC est in semicirculo, is rectus est (per 31. 3.). Et qvoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad basin perpendicularis ducta est DB; erit BD media proportionalis inter segmenta basis AB, BC.

Duabus igitur datis lineis AB, BC, media proportionalis inventa est DB.

Qvod erat faciendum.

PROP. XIV. THEOR.

Parallelogrammorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos: & qvorum parallelogrammorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter se sunt æqvalia.

1. *Sint æqvalia parallelogramma AB, BC æqvales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB, BE; ergo & in directum erant FB, BG (per 14. 1): Dico parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ sunt circa æqvales angulos esse reciproce proportionalia; hoc est, ut DB ad BE ita esse GB ad BF.*

Demonstratio.

Compleatur parallelogrammum FE.

Qvoniam igitur parallelogrammum AB æqvale est

eſt parallelogrammo BC, eſt autem parallelogrammum FE aliud: erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 7. 5.) Sed ut AB qvidem ad FE ita eſt DB ad BE, ut autem BC ad FE ita GB ad BF (per 1. 6.) erit igitur ut DB ad BE ita GB ad BF. Ergo parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ circum æqvales angulos ſunt reciproce proportionalia.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Sint autem latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce proportionalia, ſitque ut DB ad BE ita GB ad BF: dico parallelogrammum AB eſſe æquale parallelogrammo BC.*

Qvoniam enim eſt ut DB ad BE ita GB ad BF (per hypoth.), ut autem DB ad BE ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE (per 1. 6.); erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 11. 5.): æqvale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC.

Quod ſecundo erat demonſtr.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos; & qvorum triangulorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter ſe ſunt æqvalia.

 Sint

Sint æqvalia triangula ABC, ADE unum angulum uni æqvalem habentia, angulum ſcilicet ABC æqvalem angulo DAE: dico triangulum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, eſſe reciproce proportionalia, hoc eſt ut CA ad AD ita eſſe EA ad AB.

Conſtructio.

1. Triangula ABC, ADE ponantur ita, ut in directum ſit CA ipſi AD: ergo & EA ipſi AB in directum erit (per 14. 1.);
2. Jungatur BD.

Demonſtratio.

1) Qvoniam triangulum ABC æqvale eſt triangulo ADE (per hypoth.), eſt autem aliud triangulum ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD ita triangulum ADE ad triangulum BAD (per 7. 5). Sed ut triangulum qvidem CAB ad BAD triangulum ita CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipſum BAD ita EA ad AB (per 1. 6.): Erit igitur CA ad AD in EA ad AB: qvare triangulorum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, ſunt reciproce proportionalia:

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. *Sint autem latera triangulorum ABC, ADE reciproce proportionalia; & ſit ut CA ad AD ita EA ad AB: dico triangulum ABC triangulo ADE eſſe æqvale.*

Iisdem

Iisdem ut ſupra conſtructis, qvoniam ut CA ad AD ita eſt EA ad AB; ut autem CA ad AD ita ABC triangulum ad triangulum BAD, & ut EA ad AB ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 1. 6.): erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 11.5.): utrumqve igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet rationem; ac propterea æqvale eſt ABC triangulum triangulo EAD (per 9.5.).

Qvod 2do erat demonſtr.

PROP. XVI. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale eſt rectangulo qvod ſub mediis comprehenditur: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale fuerit ei, qvod ſub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F; *qvidem* AB *ad* CD *ita* E *ad* F, *dico rectangulum ſub rectis lineis* AB, F *æqvale eſſe ei, qvod ſub ipſis* CD, E *comprehenditur.*

Conſtructio.

1. A punctis A, C ipſis AB, CD ad rectos angulos ducantur AG, CH (per 11. 1.);
2. Ipſi F ponatur æqvalis AG; ipſi vero E æqvalis CH;
3. Compleantur BG, DH parallelogramma.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut AB ad CD ita E ad F; eſt autem E qvidem æqvalis CH & F ipſi AG; erit ut AB ad CD ita CH ad AG parallelogrammorum igitur BG, DH reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos (per 2. def. 6). Qvorum autem parallelogrammorum æqviangulorum reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, ea inter ſe ſunt æqvalia (per 14. 6.); parallelogrammum igitur BG æqvale eſt parallelogrammo DH; eſt autem parallelogrammum BG, ſub rectis lineis AB, F comprehenſum, nam AG æqvalis eſt F; parallelogrammum vero DH comprehenditur ſub ipſis CD, E, cum CH ipſi E ſit æqvalis; rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub ipſis CD, E comprehenditur.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Sit rectangulum comprehenſum AB, F æqvale ei, qvod comprehenditur ſub ipſis CD, E: dico qvatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad CD ita E ad F.*

Iisdem enim conſtructis, qvoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub rectis CD, E comprehenditur, eſt autem rectangulum BG comprehenſum ſub rectis AB, F, etenim AG eſt æqvalis F; comprehenſum vero ſub rectis CD, E eſt rectangulum DH, qvod CH ipſi E ſit æqvalis: erit parallelogrammum BG æqvale parallelogrammo DH; & ſunt æqviangula: æqvalium

æqvalium autem & æqviangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æqvales angulos sunt reciproce proportionalia (per 14. 6.): qvare ut AB ad CD ita CH ad AG. Æqvalis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F: ut igitur AB ad CD ita E ad F.

Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æqvale est ei, qvod a media fit, qvadrato: Et si rectangulum sub extremis comprehensum æqvale fuerit ei, qvod a media fit, qvadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

1. *Sint tres rectæ lineæ proportionales* A, *B*, *C*, *ut qvidem* A *ad* B *ita* B *ad* C: *dico rectangulum comprehensum sub rectis* A, *C æqvale esse ei, qvod a media B fit, qvadrato.*

Constructio.

Ponatur ipsi B æqvalis D.

Demonstratio.

Qvoniam ut A ad B ita B ad C, æqvalis autem est B ipsi D; erit ut A ad B ita D ad C. Si autem qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum est æqvale ei, qvod sub mediis comprehenditur (per 16. 6.): ergo rectangulum comprehensum sub rectis, A, C

æqvale

æqvale eſt ei, qvod comprehenditur ſub rectis B, D. Sed rectangulum comprehenſum ſub rectis B, D eſt æqvale qvadrato, qvod fit ex ipſa B: etenim B eſt æqvalis D: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis A, C, eſt æqvale ei, qvod ex B fit qvadrato.

Qvod primo erat demonſtr.

2) *Sed rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale ſit qvadrato, qvod fit ex B: dico A ad B ita eſſe ut B ad C.*

Iisdem enim conſtructis, qvoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale eſt qvadrato, qvod fit ex B; at qvadratum, qvod fit ex B eſt rectangulum, qvod ſub ipſis B, D comprehenditur, eſt enim B æqvalis D: erit rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale ei, qvod ſub rectis B, D comprehenditur.

Si autem rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale fuerit ei, qvod ſub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt (per 16. 6.): eſt igitur ut A ad B ita D ad C. Sed B æqvalis eſt D; ut igitur A ad B ita B ad C.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. XVIII. THEOR.

A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterqve poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea AB datum autem rectilineum

neum CE: Oportet a recta linea AB rectilineo CE simile similiterqve positum rectilineum describere.

Constructio & Demonstratio.

Jungatur DF; & ad rectam lineam AB & ad puncta in ipsa A, B angulo qvidem C æqvalis angulus constituatur GAB, angulo autem CDF angulus fiat æqvalis ABG (per 23. 1.): reliqvus igitur CFD angulus reliqvo AGB est æqvalis (per 32. 1): ergo æqviangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea ut FD ad GB ita FC ad GA & CD ad AB.

Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B, G angulo DFE æqvalis angulus BGH, angulo autem FDE æqvalis GBH: ergo reliqvus, qvi ad E reliqvo, qvi ad H est æqvalis: æqviangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH; qvare ut FD ad GB ita FE ad GH & ED ad HB. (per 4. 6.). Ostensum autem est ut FD ad GB ita esse FC ad GA & CD ad AB: Est igitur ut FC ad GA ita CD ad AB & FE ad GH, & adhuc ED ad HB (per 11. 5.), itaqve qvoniam angulus CFD æqvalis est angulo AGB (per construct.), angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqvalis. Eadem ratione & CDE est æqvalis ipsi ABH; & præterea angulus ad C angulo ad A æqvalis, angulus vero ad E æqvalis angulo ad H: æqviangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æqvales angulos habet proportionalia: ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit.

A data

A data igitur linea AB dato rectilineo CE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptum eſt.

Qvod erat faciendum & demonſtr.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B æqvalem angulo ad E, & ſit ut AB ad BC ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum ſit lateri EF (per 12. def. 5.): dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus, qvam habet BC ad EF.

Conſtructio.

1. Sumatur ipſis BC, EF tertia proportionalis BG, ut ſit ſicut BC ad EF ita EF ad BG (per 12. 6.);
2. Jungatur GA;

Demonſtratio.

Qvoniam ut AB ad BC ita eſt DE ad FE; erit permutando ut AB ad DE ita BC ad EF (per 16. 5.). Sed ut BC ad EF ita EF ad BG, & igitur ut AB ad DE ita EF ad BG (per 11. 5.): qvare triangulorum ABG, DEF latera, qvæ circum æqvales angulos reciproce ſunt proportionalia.

Qvorum autem triangulorum, unum angulum uni

uni æqvalem habentium, latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce ſunt proportionalia, ea inter ſe ſunt æqvalia (per 15. 6.): æqvale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. Et qvoniam eſt ut BC ad EF ita EF ad BG; ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplicatam rationem habet ejus, qvam habet ad ſecundam; habebit BC ad BG duplicatam rationem ejus qvam habet BC ad EF (per 10. def. 5.).

Ut autem BC ad BG ita ABC triangulum ad triangulum ABG (per 1. 6.): Ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus, qvam habet BC ad EF. Eſt autem ABG triangulum triangulo DEF æqvale: & igitur triangulum ABC ad triangulum DEF duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad EF.

Qvod erat demonſtr.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres lineæ proprotionales fuerint, ut prima ad tertiam ita eſſe triangulum, qvod fit a prima, ad triangulum a ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum: qvoniam oſtenſum eſt ut CB ad BG ita ad ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc eſt ad triangulum DEF.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur & numero æqvalia & homologa totis: & polygonum

gonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus, qvam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint ſimilia polygona ABCDE, FGHKL & ſit latus AB homologum ipſi FG: Dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi & numero æqvalia & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus, qvam habet AB ad FG.

Conſtructio.

Jungantur BE, EC, GL, LH.

Demonſtratio.

1. Qvoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL (per hypoth.) erit angulus BAE angulo GFL æqvalis: atqve eſt, ut BA ad AE ita GF ad FL (per def. 6.). Triangula igitur BAE, GFL ſunt ſimilia (per 6. 6.), ideoqve angulus ABE æqvalis angulo FGL, & angulus AEB æqvalis angulo FLG.

Eſt autem & totus AED angulus æqvalis toti FLK, propter ſimilitudinem polygonorum: ergo reliqvus BED angulus reliqvo GLK eſt æqvalis, & eadem ratione EBC reliqvo LGH eſt æqvalis.

Et qvoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL eſt ut BE ad BA ita GL ad GF; ſed & propter ſimilitudinem polygonorum ut BA ad BC ita FG ad GH: erit ex æqvo ut BE ad BC ita GL ad GH (per 22. 5.); nempe circum æqvales angulos EBC, LGH latera ſunt proportionalia;

tionalia: æqviangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH (per 6.6.), qvare & ſimile (per 1. def. 6.).

Eadem ratione & EDC triangulum ſimile eſt triangulo HLK; Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur & numero æqvalia.

Quod primo erat demonſtr.

2. Qvoniam in præcedentibus oſtenſum eſt triangulum ABE ſimile triangulo FGL, triangulum autem BEC ſimile triangulo GLH; erunt igitur inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum (per 19. 5.), hoc eſt, ratio trianguli ABE ad triangulum FGL eſt duplicata rationis BE ad GL, & ratio trianguli BEC ad triangulum GLH etiam duplicata eſt rationis BE ad GL: Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL ita triangulum BEC ad triangulum GLH (per 11. 5.). Eodem modo oſtendetur ut triangulum BEC ad triangulum GLH ita eſſe triangulum EDC ad triangulum LKH. Qvare ut unum antecedens videlicet triang. ABE ad unum conſeqvens ſcil. ad triangulum FGL ita omnia antecedentia ABE, BEC, CED ſimul ſumpta ad omnia conſeqventia FGL, GLH, HLK ſimul ſumpta (per 12.5.). Totis igitur homologa ſunt omnia iſta triangula, hoc eſt ut polygonum unum ad alterum.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

3. Ratio trianguli ABE ad triangulum FGL eſt duplicata rationis BA ad FG (per 19. 5.). Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione trianguli ABE ad triangulum FGL (ut jam oſtendebatur). Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis AB ad FG (per 11. 5.).

Qvod tertio erat demonſtrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in ſimilibus qvadrilateris oſtendetur, ea eſſe in duplicata ratione laterum homologorum, oſtenſum autem & in triangulis (ad coroll. 19. 6.): qvare univerſæ ſimiles rectilineæ figuræ inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Corollarium 2.

Et ſi ipſis AB, FG tertiam proportionalem ſumamus, qvæ ſit M: habebit AB ad M duplicatam rationem ejus, qvam habet AB ad FG (per 10. def. 5.). Habet autem & polygonum ad polygonum, & qvadrilaterum ad qvadrilaterum duplicatam rationem ejus qvam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt qvam AB ad FG: atqve oſtenſum eſt hoc in triangulis. Univerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe figuram rectilineam, qvæ fit a prima, ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam a ſecunda.

PROP. XXI. THEOR.

Qvæ eidem rectilineo sunt similia & inter se sunt similia.

Sit utrumqve rectilineum A, B simile rectilineo C; dico & rectilineum A rectilineo B simile esse.

Demonstratio.

Qvoniam A rectilineum simile est rectilineo C (per hypoth.), & ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia (per 1. def. 6.).

Rursus, qvoniam rectilineum B simile est rectilineo C, etiam ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia;

Utrumqve igitur rectilineorum A, B ipsi C æqviangulum est, & circum æqvales angulos latera habet proportionalia:

Qvare & rectilineum A ipsi B æqviangulum est (per 1. ax.), ideoqve latera circum æqvales angulos proportionalia habet (per 11. 5.); ac propterea A ipsi B est simile (per 1. def. 6.).

Qvod erat demonstr.

PROP. XXII. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea qvæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt; & si rectilinea, qvæ ab ipsis fiunt similia & similiter descripta, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

1. *Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH sitqve ut AB ad CD ita EF ad GH; sint porro ab ipsis qvidem AB, CD descripta similia & similiter posita rectilinea KAB, LCD, ab ipsis vero EF, GH descripta sint rectilinea similia & similiter posita MF, NH: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.*

Constructio.

Sumantur ipsis qvidem AB, CD tertia proportionalis O; ipsis vero EF, GH tertia proportionalis P (per 11. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam est ut AB ad CD ita EF ad GH, ut autem CD ad O ita GH ad P: erit ex æqvo ut AB ad O ita EF ad P (per 22. 5.); Sed ut AB ad O ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum, ut autem EF ad P ita rectilineum MF ad rectilineum NH (per 2. coroll. 20. 6.); Cum vero ratio AB ad O æqvalis sive eadem est ac ratio EF ad P, ut igitur KAB ad LCD ita MF ad NH (per 11. 5.).

Qvod primo erat demonstr.

2. *Sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum in MF ad rectilineum NH: dico ut AB ad CD ita esse EF ad GH.*

Constructio.

Conſtructio.

Fiat enim ut AB ad CD ita EF ad QR (per 12. 6.); & deſcribatur ab ipſa QR alterutri rectilineorum MF, NH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum SR (per 18. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam igitur eſt ut AB ad CD ita EF ad QR, & deſcripta ſunt ab ipſis qvidem AB, CD ſimilia & ſimiliter poſita KAB, LCD rectilinea, ab ipſis vero EF, QR ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MF, SR; eſt ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum MF ad SR rectilineum (ut in ſuperiori parte oſtenſum eſt.)

Ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD ita MF rectilineum ad rectilineum NH: rectilineum igitur MF ad utrumqve ipſorum NH, SR eandem habet rationem (per 11. 5.): ergo rectilineum NH eſt ipſi SR æqvale (per 9. 5.); eſt autem & ipſi ſimile ſimiliterqve poſitum (per conſtr.): Ergo GH eſt æqvalis QR. Et qvoniam ut AB ad CD ita eſt EF ad QR æqvalis autem QR ipſi GH; erit ut AB ad CD ita EF ad GH (per 7. 5.). *Qvod ſecundo erat demonſtr.*

LEMMA.

At vero ſi rectilinea æqvalia & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqvalia eſſe hoc modo demonſtrabimus.

Sint æqvalia & ſimilia rectilinea NH, SR; & ſit ut HG ad GN ita PQ ad QS: dico RQ ipſi HG eſſe æqvalem.

Si enim inæqvales sint una ipsarum major erit. Sit RQ major qvam HG; & qvoniam est ut RQ ad QS ita HG ad GN: & permutando erit ut RQ ad GH ita QS ad GN (per 16. 5.).

Major autem est QR qvam HG; ergo & QS qvam GN major erit; qvare & rectilineum RS rectilineo HN est majus; sed & æqvale, qvod fieri non potest: non est igitur QR inæqvalis ipsi GH; ergo æqvalis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Æqviangula parallogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Sint æqviangula parallelogramma AC, CF æqvalem habentia BCD angulum angulo ECG: dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex rationibus laterum; hoc est ex ratione, qvam habet BC ad CG, & ex ratione, quam habet DC ad CE.

Constructio.

1. Ponatur enim BC in directum ipsi CG, ergo & DC ipsi CE in directum erit (per 14. 1.);
2. Compleatur DG parallelogrammum productis rectis AD, FG usqve dum concurrant in puncto H;

3. Exponatur

3. Exponatur recta linea qvædam K, & fiat ut BC ad CG ita K ad L, ut autem DC ad CE ita L ad M (per 12. 6.).

Demonstratio.

Rationes ipsius K ad L & L ad M eædem sunt, qvæ rationes laterum videlicet BC ad CG & DC ad CE (per constr.).

Sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L & ratione L ad M: qvare & K ad M rationem habet ex rationibus laterum compositam (per 5. def. 6.).

Et qvoniam est ut BC ad CG ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH (per 1. 6); sed ut BC ad CG ita K ad L (per constr.) erit igitur ut K ad L ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum (per 11. 5.).

Rursus qvoniam est ut DC ad CE ita parallelogrammum CH ad parallelogrammum CF (per 1. 6.); ut autem DC ad CE ita L ad M (per constr.): ut igitur L ad M ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum (per 11. 5.).

Itaqve cum ostensum sit, ut K qvidem ad L ita esse AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH, ut autem L ad M ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum erit ex æqvo ut K ad M ita AC parallelogrammum ad ipsum CF (per 22. 5.). Habet autem K ad M rationem ex rationibus laterum compositam: ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF rationem habet ex rationibus laterum compositam.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi qvæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK: dico parallelogramma EG, HK & toti ABCD & inter se similia esse.

Demonstratio.

Qvoniam recta EK parallela est rectæ BC, erit angulus AEF æqvalis angulo ABC, angulus autem AFE æqvalis angulo ACB (per 29. 1.); duo igitur triangula AEF, ABC sunt æqviangula; Eodem modo & duo triangula AGF, ADC æqviangula sunt: qvare parallelogrammum EG æqviangulum est parallelogrammo ABCD: utrumqve enim eorum in duo triangula æqvalia & æqviangula per diametrum AC divisum est (per 34. 1.).

Porro qvoniam æqviangula sunt triangula ABC, AEF, erunt latera ipsorum circa æqvales angulos proportionalia, nempe ut AB ad BC ita AE ad EF; & qvoniam etiam æqviangula sunt triangula ADC, AGF (ut supra ostensum est), erunt ipsorum latera similiter proportionalia videlicet, ut CO ad DA ita FG ad GA (per 4. 6.): qvare parallelogramma EG, ABCD, qvæ & ſingulos angulos ſingulis angulis æqvales habent & latera circa æqvales angulos proportionalia, ſunt ſimilia (per 1. def. 6.).

Eadem ratione & parallelogrammum HK ſimile eſt parallelogrammo ABCD: utrumqve igitur ipſorum EG, HK parallelogrammorum toti parallelogrammo ABCD eſt ſimile. Qvæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia & inter ſe ſunt ſimilia (per 21. 5.): parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK.

Qvare omnis parallelogrammi qvæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æqvale idem conſtituere.

Sint data duo rectilinea videlicet ABC & D: oportet conſtituere rectilineum, idemqve ipſi ABC qvidem ſimile, ipſi vero D æqvale.

Conſtructio.

1. Ad rectam lineam BC applicetur parallelogrammum BE triangulo ABC æqvale; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æqvale ipſi D in angulo FCE, qvi angulo CBL eſt æqvalis (per 44. & 45. 1.);

 2. Sumatur

2. Sumatur inter ipſas BC, CF media proportionalis GH (per 13. 6.);

3. Ab ipſa GH deſcribatur rectilineum KGH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineo A B C (per 18. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam EB, CM ſunt parallelogramma & angulus FCE æqvalis eſt angulo CBL (per conſtruct.), in directum igitur eſt BC ipſi CF (per 41. 1.); & qvoniam eſt ut BC ad GH ita GH ad CF (per conſtruct.); cum autem tres lineæ rectæ ſint proportionales, ut prima ad tertiam ita eſt figura rectilinea, qvæ fit a prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam a ſecunda (per 2. coroll. 20. 6.): erit itaqve ut BC ad CF ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed ut BC ad CF ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum (per 1. 6.): & igitur ut triangulum A B C ad triangulum K G H ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum EF: qvare alterne ſive permutando ut ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum (per 16. 5.). Eſt autem triangulum ABC æqvale parallelogrammo BE (per conſtruct.): æqvale igitur eſt & KGH triangulum parallelogrammo EF. Sed EF parallelogrammum æqvale eſt rectilineo D: ergo & triangulum KGH ipſi D eſt æqvale. Eſt autem & KGH ſimile triangulo ABC (per conſtr.),

Dato

Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æqvale idem constitutum est KGH.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti & similiter positum, communem cum ipso angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur simile ipsi ABCD & similiter positum, communemqve cum ipso angulum habens DAB; dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Demonstratio.

Si thesin propositionis negaveris, sit itaqve ipsorum diameter AHC, ducaturqve per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK.

Qvoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG (per antithesin), erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile (per 24. 6.): ergo ut DA ad AB ita GA ad AK (per 1. def. 6.).

Est autem & (propter similitudinem parallelogrammorum ABCD, EG,) ut DA ad AB ita GA ad AE: ideoqve ut GA ad AE ita GA ad AK (per 11. 5.): ac proinde GA ad utramqve ipsarum

rum AK, AE eandem rationem habet; erit igitur AE ipsi AK æqvalis per 9. 5.), hoc est, totum suæ parti erit æqvale, qvod fieri neqvit: non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ABCD cum parallelogrammo AEFG.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ei, qvæ a dimidia describitur, maximum est, qvod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB seceturqve bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, simili & (Fig. 1. *similiter posita ei, qvæ a dimidio ipsius AB descripta est, hoc est a BC: Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam* (Fig. 2. *AB applicatorum & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ipsi CE, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH simili & similiter posita ipsi CE; Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.*

Demon-

Demonſtratio.

1. Qvoniam parallelogrammum CE ſimile eſt parallelogrammo KK, circa eandem diametrum ſunt (per 26. 6.). Ducatur eorum diameter DB & deſcribatur Figura prima.

Qvoniam igitur CF eſt æqvale ipſi FE (per 43. 1.), commune apponatur KH: totum igitur CH toti KE eſt æqvale. Sed CH eſt æqvale CG, qvoniam recta linea AC ipſi CB eſt æqvalis (per 36. 1.): ergo & GC ipſi EK æqvale erit. Commune apponatur CF: totum igitur AF eſt æqvale gnomoni LMN; qvare & CE, hoc eſt parallelogrammum AD, parallelogrammo AF eſt majus (per 36. 1.).

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. Sit rurſus AB ſecta bifariam in puncto C, & applicatum ſit AL deficiens figura CM; & rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura DF, ſimili & ſimiliter poſita ei, qvæ a dimidia AB deſcribitur, videlicet CM: Dico parallelogrammum AL, qvod ad dimidium eſt applicatum majus eſſe parallelogrammo AE.

Qvoniam enim ſimile eſt DF ipſi CM, circa eandem ſunt diametrum (per 26. 6.): ſit ipſorum diameter EB & deſcribatur Figura 2.

Et qvoniam LF æqvale eſt LH (per 36. 1.), etenim FG ipſi GH eſt æqvalis; erit LF ipſo EK majus. Eſt autem LF æqvale DL (per 43. 1.): majus igitur eſt DL ipſo EK. Commune

mune apponatur KD. Ergo totum AL toto AE eſt majus.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

PROP. XXVIII. THEOR.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qvæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æqvale applicandum eſt, non majus eſſe eo, qvod ad dimidiam applicatur ſimilibus exiſtentibus defectibus & ejus qvod ad dimidiam & ejus cui oportet ſimile deficere.

Sit data recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æqvale ad datam rectam lineam AB applicare ſit C, non majus exiſtens eo, qvod ad dimidiam applicatum eſt ſimilibus exiſtentibus defectibus; cui autem ſimile oportet deficere ſit D; oportet ad datam rectam lineam A B dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qvæ ſimilis ſit ipſi D.

Conſtructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 10.).
2. Ab ipſa EB deſcribatur ſimile & ſimiliter poſitum ipſi D, qvod ſit EBFG (per 18. 6.) & compleatur AG Parallelogrammum.

Demonſtratio.

Qvoniam AG vel æqvale eſt ipſi C, vel eo majus ob determinationem; & ſiqvidem AG ſit

æqvale

æqvale C, factum jam erit, qvod proponebatur; etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æqvale parallelogrammum AG applicatum est deficiens figura parallelogramma EF, ipsi D simili.

Sin autem non est æqvale, erit HE majus qvam C, atqve est HE æqvale EF: ergo & EF qvam C est majus. Qvo autem EF superat C, ei excessui æqvale ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur KLMN (per 25. 6.). Sed D est simile EF, qvare & KM ipsi EF simile erit. Sit igitur recta linea qvidem LK homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF.

Et qvoniam æqvale est EF ipsis C † KM erit EF ipso KM majus: major igitur est GE ipsa KL, & GF ipsa LM (per 1. Corol. 20. 6.). Ponatur GX æqvalis LK, & GO æqvalis LM (per 3. 1.), & compleatur X G O P parallelogrammum (per 31. 1.): æqvale igitur & simile est X O ipsi KM (per 24. 6.). Sed KM simile est EF: ergo & XO ipsi EF est simile (per 21. 6.): circa eandem igitur diametrum est X O cum ipso EF (per 26. 6.) Sit ipsorum diameter GPB & figura describatur.

Itaqve qvoniam EF est æqvale ipsis C X K M, qvorum XO est æqvale KM, erit reliqvus gnomon æqvalis reliqvo C. Et qvoniam O R est æqvale XS (per 43. 1.), commune apponatur RS: totum igitur OB toti XB est æqvale. Sed XB est æqvale TE (per 36. 1.), qvoniam & latus AE æqvale lateri EB: qvare & TE ipsi OB æqvale est. Commune apponatur XS; ergo totum TS æqvale toti

gnomoni

gnomoni XS † SF. At gnomon XS † SF ipsi C ostensus est æqvalis: & igitur TS ipsi C æqvale erit.

Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma RS ipsi D simili, qvoniam & RS simile est ipsi OX.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, qvæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æqvale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere, sit D: itaqve oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi D.

Constructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 10. 1.);
2. A recta EB ipsi D simile similiterqve positum parallelogrammum describatur EL (per 18. 6);
3. Utrisqve qvidem EL † C æqvale, ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur GH (per 25. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam parallelogrammum EL simile est ipsi D, & parallelogrammum GH eidem etiam D est simile (per construct.), erunt EL, GH inter se qvoqve

qve ſimilia (per 21. 6.), ideoqve latus KH eſt homologum lateri FL, KG vero ipſi FE.

Porro parallelogrammum GH majus eſt ipſo EL, ideoqve recta linea KH major qvam FL & KG major qvam FE.

Producantur FL, FE, & ipſi qvidem KH æqvalis fiat FLM, ipſi vero KG æqvalis FEN (per 3. 1.), & compleatur parallelogrammum; ergo MN æqvale & ſimile eſt ipſi GH. Sed GH eſt ſimile ipſi EL: & MN igitur ipſi EL ſimile erit (per 21. 6); ac propterea circa eandem diametrum eſt EL cum ipſo NM (per 26. 6.). Ducatur ipſorum diameter & figura deſcribatur.

Itaqve qvoniam GH ipſis EL † C eſt æqvale, ſed & GH æqvale MN; erit & MN æqvale ipſis EL † C. Commune auferatur EL: reliqvus igitur gnomon eſt ipſi C æqvalis. Et qvoniam EA eſt æqvalis EB, æqvale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc eſt ipſi LO (per 36. & 43. 1.). Commune apponatur EX: totum igitur AX æqvale eſt gnomoni. Sed gnomon eſt æqvalis C: ergo & AX ipſi C æqvale eſt.

Ad datam igitur rectam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicatum eſt AX excedens figura parallelogramma PO ipſi D ſimili, qvoniam & EL ſimile eſt OP. *Quod erat faciendum.*

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Sit data recta linea terminata AB: oportet ipſam

AB secundum extremam ac mediam rationem secare (uid. Fig. 1.).

Constructio.

1. Describatur ex AB qvadratum BC (per 46. 1);
2. Ad AC ipsi BC æqvale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili (per 29. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam qvadratum est BC: erit igitur & AD qvadratum. Et qvoniam BC est æqvale CD commune auferatur CE; reliqvum igitur BF reliqvo AD est æqvale. Est autem & ipsi æqviangulum: ergo ipsorum BF, AD latera, qvæ circum æqvales angulos sunt reciproce proportionalia (per 14. 6.): ut igitur FE ad ED ita est AE ad EB. Est autem FE æqvalis AC, hoc est ipsi AB: & ED ipsi AE: qvare ut AB ad AE ita AE ad EB. Sed AB major est qvam AE: ergo AE qvam EB est major.

Recta igitur AB secundum extremam ac mediam rationem secta est in E, & majus ipsius segmentum est AE. *Qvod erat faciendum.*

Aliter.

Constructio.

Secetur AB in C ita, ut rectangulum qvod comprehenditur sub AB, BC æqvale sit qvadrato ex AC (per 11. 2.). vid. Fig. 2.

Demonstratio.

Qvoniam igitur rectangulum, qvod comprehenditur sub AB, BC, æqvale est qvadrato ex AC (per constr.); erit ut AB ad AC ita AC ad CB (per 17. 6.).

6.). Ergo AB ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt (per 3.def.6.). *Qvod erat faciend.*

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura, qvæ fit a latere rectum angulum ſubtendente æqvalis eſt eis, qvæ a lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC: Dico figuram, qvæ fit a BC, æqvalem eſſe eis, qvæ a BA, AC fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Demonſtratio.

Ducatur perpendicularis AD.

Qvoniam igitur in triangulo ABC ab angulo recto, qvi eſt ad A, ad BC baſin perpendicularis ducta eſt AD; erunt triangula ABD, ADC, qvæ ſunt ad perpendicularem ſimilia toti & inter ſe (per 8. 6.). Et qvoniam ſimile eſt ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA ita AB ad BD. Atqvi cum tres rectæ lineæ proportionales ſint; ut prima ad tertiam ita erit figura, qvæ fit a prima, ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam a ſecunda (per 2.Coroll. 20. 6.). ut igitur CB ad BD ita figura, qvæ fit a CB ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam a BA.

Eadem ratione & ut BC ad CD, ita figura, qvæ fit a BC, ad eam qvæ fit a CA, qvare & ut BC ad ipſas BD, DC; ita figura, qvæ fit a BC ad eas, qvæ fiunt a BA, AC ſimiles & ſimiliter deſcriptas. Æqvalis autem eſt BC ipſis BD, DC: ergo figura qvæ fit a BC æqvalis eſt eis, qvæ a BA, AC fiunt ſimilibus, ſimiliterqve deſcriptis. *Qvod erat demonſtrandum.*

Aliter:

Qvoniam ſimiles figuræ ſunt in duplicata ratione laterum homologorum (per 23.6.): figura qvæ fit a BC ad eam, qvæ fit a BA, duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad BA (per 1. cor. 20. 6.); habet autem & qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA duplicatam rationem ejus, qvam habet BC ad BA: ergo ut figura qvæ fit a BC ad eam qvæ fit a BA ita qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA (per 11.5.) Eadem ratione, & ut figura qvæ fit a BC ad eam qvæ fit a CA ita qvadratum ex CB ad qvadratum ex CA; & igitur ut figura qvæ fit a BC ad eas qvæ fiunt a BA, AC ita qvadratum ex BC ad qvadrata ex BA, AC. Qvadratum autem ex BC æqvale eſt qvadratis ex BA, AC: ergo & figura, qvæ fit a BC eſt æqvalis eis, qvæ a BA, AC fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula, qvæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ſecundum unum angulum ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqva triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE, qvæ duo latera BA, AC duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut qvidem BA ad AC ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi CD & AC ipſi DE: Dico BC ipſi CE in directum eſſe.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam AB parallela eſt DC, & in ipſas incidit recta linea AC; erunt anguli alterni BAC, ACD æqvales inter ſe. Eadem ratione & angulus CDE æqvalis eſt angulo ACD: qvare & BAC ipſi CDE eſt æqvalis. Et qvoniam ABC, DCE ſunt duo triangula unum angulum qvi ad A uni angulo qvi ad D æqvalem habentis, circum æqvales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet ut BA ad AC ita CD ad DE: erit triangulum ABC triangulo DCE æqviangulum (per 6. 6.)? ergo ABC angulus eſt æqvalis angulo DCE. Oſtenſus autem eſt angulus ACD æqvalis angulo BAC: totius igitur ACE duobus ABC, BAC eſt æqvalis; Communis apponatur ACB: ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, ABC æqvales ſunt. Sed BAC, ACB, ABC anguli duobus rectis ſunt æqvales (per 32. 1.): & igitur anguli ACE, ACB duobus rectis æqvales erunt. Itaqve ad qvandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC, CE, non ad easdem partes poſitæ, angulos, qvi ſunt deinceps ACE, ACB duobus rectis æqvales faciunt; Ergo BC ipſi CE in directum erit (per 14. 1.).

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulis æqvalibus anguli eandem habent rationem, qvam circumferentiæ qvibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc etiam & ſectores, qvippe qvi ad centra ſunt conſtituti.

Sint æqvales circuli ABC, DEF & ad centra qvidem ipsorum G,H sint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC, EDF: Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam ita esse BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem GBC ad HEF sectorem.

Demonstratio.

1. Ponantur circumferentiæ qvidem BC æqvales qvotcunqve deinceps CK, KL; circumferentiæ vero EF rursus æqvales qvotcunqve FM, MN, & jungantur GK, GL, HM, HN.

Qvoniam igitur circumferentiæ BC,CK,KL inter se sunt æqvales, & anguli BGC, CGK, KGL inter se æqvales erunt (per 27.1.): qvam multiplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC tam multiplex est BGL angulus anguli BGC. Et si æqvalis est BL circumferentia circumferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqvalis (per 27. 3); & si circumferentia BL major est circumferentia EN major erit & BGL angulus angulo EHN; & si minor, minor: qvatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF & duobus angulis BGC, EHF, sumpta sunt circumferentiæ qvidem BC, & anguli BGC æqve multiplicia, videlicet circumferentia BL & angulus BGL; circumferentiæ vero EF & EHF anguli æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & angulus EHN atqve ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare, angulum EHN; & si æqvalis æqvalem; & si minor minorem esse: igitur ut circumferentia BC ad circumferentiam EF, ita angulus BGC ad angulum EHF (per 5. def. 5.). Sed ut BGC

angulus

angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum (per 15. 5.); uterqve enim utriusqve eſt duplus (per 20. 3.): & igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. *Qvod primo erat demonſtrandum.*

2. *Dico inſuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita eſſe ſectorem GBC ad HEF ſectorem.*

Jungantur enim BC, CK, & ſumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur & BX, XC, CO, OK.

Itaqve qvoniam duæ BG, GC duabus CG, GK æqvales ſunt & angulos æqvales comprehendunt; erit & baſis BC baſi CK æqvalis: æqvale igitur eſt & GBC triangulum triangulo GCK (per 4. 1.). Et qvoniam circumferentia BC circumferentiæ CK eſt æqvalis, & reliqva circumferentia qvæ complet totum circulum ABC æqvalis eſt reliqvæ, qvæ eundem circulum complet (per 3. ax.). Qvare & angulus BXC angulo COK eſt æqvalis (per 27. 3.): Simile igitur eſt BXC ſegmentum ſegmento COK: & ſunt ſuper æqvales rectas lineas BC, CK. Qvæ autem ſuper æqvales rectas lineas ſunt ſimilia circulorum ſegmenta & inter ſe æqvalia ſunt (per 24. 3): ergo ſegmentum BXC eſt æqvale ſegmento COK. Eſt autem & BGC triangulum triangulo CGK æqvale: & totus igitur ſector GBC toti ſectori GCK æqvalis erit (per 3. ax.). Eadem ratione & GKL ſector utrivis ipſorum GKC, GCB eſt æqvalis: tres igitur ſectores GBC, GCK, GKL ſunt æqvales inter ſe. Similiter & ſectores HEF, HFM, HMN inter ſe ſunt æqvales; qvam multiplex igitur eſt BL circumferentiæ BC, tam multiplex eſt & GBL ſector ſectoris GBC. Eadem ratione & qvam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiæ EF, tam multiplex eſt & HEN ſector ſectoris HEF; & (ex modo oſtenſis) ſi circumferentia BL circumferentiæ EN eſt æqualis, & ſector GBL æqvalis eſt ſectori HEN; & ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN ſuperat & GBL, ſector ſectorem HEN; & ſi minor, minor. Qvatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus qvidem circumferentiis BC, EF, duobus vero ſectoribus GBC, HEF; ſumta ſunt circumferentiæ qvidem BC & ſectoris GBC æqve multiplicia, videlicet circumferentia BL & GBL ſector, circumferentiæ vero EF & ſectoris HEF æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & HEN ſector. Atqvi oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, & ſectorem GBL ſuperare ſectorem HEN; & ſi æqvalis æqvalem; & ſi minor minorem: eſt igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector GBC ad HEF ſectorem.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

Corollarium.

Perſpicuum etiam eſt & ut ſector ad ſectorem ita eſſe angulum ad angulum (per 11. 5.).

JACOBI

JACOBI BERNOVLLI

Positiones Mathematicæ de *Rationibus* & *Proportionibus* Tom. I. operum insertæ.

I.

Id qvod hac vice tractandum suscepimus, *Euclidi* Λόγος, latine *Ratio*, dicitur; vel qvod in percipiendis rerum rationibus præcipua Rationis vis appareat, vel qvod in rebus ipsis Ratio vix qvicqvam aliud cognoscat, qvam rationes & relationes qvasdam, qvas inter se habent.

II.

Hoc ipsum præ cæteris in Mathesi perspicuum est; ubi nullius rei qvantitatem absolutam, seu, qvanta sit in se, cognoscimus; sed solummodo, qvam magna, vel qvam parva sit relative ad alias investigamus: unde non sine ratione qvis a nobis factum judicabit, qvod *Doctrinam Rationum*, quæ relationes istas magnitudinum explicat, & utramqve in hac scientia paginam facit, nonnullis Positionibus enucleatam demus.

III.

Definimus itaqve *Rationem*, qvod ſit affectio rerum qva ſecundum invicem comparari poſſunt ſecundum qvantitatem.

IV.

Comparari dicuntur duæ res *ſecundum qvantitatem*, dum conſideratur, qvoties una major, minorqve ſit altera; ſeu qvoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur.

V.

Illa vero, qvæ hoc pacto inter ſe comparantur, ſunt tum *Numeri*, tum *Res numeratæ*; interqve has primario *Magnitudines*; ſecundario etiam alia, qvæ ex magnitudinibus cognitis qvibuscum relationem qvandam habent, æſtimantur; ut *Pondera*, *Tempora*, *Celeritates*, *Vires*, *Soni*, *Divitiæ*, *Sortes Aleatorum* &c.

VI.

Unus enim Motus altero tanto celerior tardiorqve dicitur; ut & ſonus unus alio ſono tanto gravior vel acutior; qvanto linearum eodem tempore decurſarum, vel chordarum ſonos hos edentium, una altera longior, breviorque exiſtit.

VII.

Cætera, qvæ vel cum nullis, vel cum incognitis magnitudinibus relationem habent, accurate comparari, ac proinde cognoſci non poſſunt, qvalia ſunt, *Eruditio*, *Prudentia*, *Facundia*, *Pulchri-*

Pulchritudo, *Agilitas*, *Colores*, *Sapores*, *Odores* &c.

VIII.

Qvanqvam enim ſciamus, Hominem homine doctiorem, vel pulchriorem, Roſam roſa fragrantiorem, & cibum cibo ſvaviorem eſſe, ſi qvidem ſat magna inter utramqve diſparitas intercedat; attamen, qvanto unum altero his qvalitatibus antecellat, ignoramus. Idem fere dicendum de qvalitatibus tactilibus, *Calore*, *Frigore*, *Humiditate*, *Siccitate*; ut maxime earum gradus ope Thermometri & Hygrometri, qvodammodo metiri didicerimus.

IX.

Numeri qvamcunqve rationem exprimentes, ejus *Termini* vocantur; qvorum is, qvi ad alium refertur, *Antecedens* Ἡγȣ́μενος; & is, ad qvem refertur, Conſeqvens, Ἑπόμενος dicitur.

X.

Si termini ſunt æqvales, *Ratio æqvalitatis*, Λόγος Ἰσότητος; ſi inæqvales, *Inæqvalitatis*. Majoris qvidem, πρόλογος cum major terminus minoris eſt antecedens; at *Minoris*, ὑπόλογος, cum ejusdem eſt conſeqvens. Sic 5 ad 5, 6 ad 6, rationem habet æqvalitatis; 3 ad 2 inæqvalitatis majoris; 5 ad 6 minoris.

XI.

Si duarum rationum iisdem terminis conſtantium una eſt majoris, altera minoris inæqvalitatis, altera *Reciproca* dicitur: Sic ratio 3 ad 2. reciproca eſt rationis 2 ad 3 & hæc illius.

XII.

Ratio æqvalitatis eſt ſingularis & individua. Inæqvalitatis Ratio eſt *Simplex*, vel *Multiplex*, & hæc, vel præciſe, vel non præciſe talis.

XIII.

Si major terminus minorem ſemel tantum continet, & præterea unam ejus partem aliqvotam; ratio eſt *Simplex Superparticularis*, *Λόγος Ἐπιμόριος*; ſin plures partes aliqvotas, ratio *Simplex Superpartiens*, *Λόγος Ἐπιμερής*.

XIV.

Si major terminus minorem aliqvoties exacte continet; ratio eſt *Multiplex*, Πόλλαπλάσιος: ſi vero inſuper unam ejus partem, eſt Multiplex *Superparticularis*, Πολλαπλασιεπιμόριος; ſi plures, Multiplex Superpartiens, Πολλαπλασιεπιμερής.

XV.

Omnes rationes, numero qvidem explicabiles, ad unam harum ſpecierum referri poſſunt; ad qvam autem qvælibet referri debeat, palam facit ejus Exponens, qvi eſt qvotus reſultans ex diviſione majoris termini per minorem.

XVI.

Numerus integer hujus exponentis, ſi eſt unitas, indigitat *rationem ſimplicem*: ſi qvis multitudinis

tudinis numerus, *multiplicem*, puta *duplam*, ſi binarius; *triplam*, ſi ternarius; *decuplam*, ſi denarius: & ſi qva exponenti fractio adhæret, ea denotat rationem eſſe vel Superparticularem, vel Superpartientem: Superparticularem, cum fractionis numerator eſt unitas; Superpartientem, cum eſt numerus aliqvis multitudinis.

XVII.

Superparticularis ratio ſpecialem ſuam nomenclationem accipit a denominatore fractionis, præfixa vocula *ſeſqvi*; ut *ſeſqvi - altera*, *ſeſqvi - tertia*, *ſeſqvi - qvarta* &c. Superpartiens ab utroqve fractionis termino, ut *Superpartiens duas tertias*, tres qvartas &c. qvæ & ita efferuntur, *Superbipartiens tertias*, *ſupertripartiens qvartas* &c.

XVIII.

Exemplis res fiet clarior. Ratio 6. ad 3. vocatur dupla, qvia $6 : 3 = 2$. Ratio 12. ad 4. tripla, qvia $12 : 4 = 3$. Ratio 3 ad 2. ſeſqvi altera, qvia $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$. Ratio 5 ad 4, ſeſqviqvarta, qvia $5 : 4 = 1\frac{1}{4}$. Ratio 19 ad 7, dupla ſuperqvintupartiens ſeptimas, qvia $19 : 7 = 2\frac{5}{7}$.

XIX.

Si fractio exponenti adhærens numeris compoſitis conſtet, qvod fit qvotiescunqve ipſi rationum termini inter ſe compoſiti fuerint; tunc prius reducenda eſt ad terminos ſimplicisſimos:

alias

alias ratio videri poſſet ſuperpartiens, qvæ non niſi eſt ſuperparticularis : ſic ratio 6 ad 4, non dicenda eſt ſuperbipartiens qvartas, ut maxime $6 : 4 = 1\frac{2}{4}$; ſed ſeſqvi-altera, qvia $\frac{2}{4}$ æqvipollent $\frac{1}{2}$.

XX.

Rationes minoris inæqvalitatis eodem pacto exprimuntur, qvo earum reciprocæ, præmiſſa, diſcriminis ergo, ſyllaba *Sub* : ut Ratio 3 ad 6 eſt ſubdupla ; 4 ad 12 *ſubtripla* : 2 ad 3 *ſubſeſqvialtera* : 4 ad 5 *ſubſeſquiqvarta* : 7 ad 19, ſubdupla ſubſuperqvintupartiens ſeptimas.

XXI.

Sciendum tamen, barbara iſta Veterum vocabula obſoleta fere nunc eſſe, & modernos Mathematicos rationem qvamlibet freqventius ipſis terminis innuere ; Malunt enim ex. gr. dicere, circumferentiam Circuli ad diametrum ſe habere in ratione 22. ad 7, aut 223. ad 71, qvam in ratione tripla ſeſqviſeptima, vel tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas.

XXII.

Si duæ Rationes inæqvales comparantur invicem; illa dicitur *Major*, cujus antecedens ſæpius continet ſuum conſeqventem, vel majorem conſeqventis partem : Id circo Ratio majoris inæqvalitatis major eſt qvavis Ratione minoris inæqvalitatis ; duarum vero Rationum majoris inæqvaæqvalitatis, illa major est, qvæ majorem sortitur exponentem; at duarum minoris inæqvalitatis illa major, qvæ minorem.

XXIII.

Hinc inæqvalium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, qvam minor: sed eadem ad minorem, majorem rationem habet, qvam ad majorem. Ex gr. 8 ad 3 majorem habet rationem, qvam 7 ad 3, Contra 3 ad 7 majorem habet rationem, qvam 3. ad 8.

XXIV.

Si rationes æqvales invicem comparantur, existit *Proportio*, qvæ proinde nihil aliud est, qvam rationum æqvalitas, & denotatur ita : :, ut A. B : : C. D; qvo significatur, A ad B eandem habere rationem, qvam habet C ad D; seu qvantitates A, B, C, D proportionales esse.

XXV.

De Proportionalibus hæc capiantur Theoremata: Si termini rationis cujuscunqve, per communem aliqvem numerum, seu multiplicentur, seu dividantur; habebunt Producti, vel Qvoti, eandem cum illis rationem. Sic 6 habet ad 4 eandem rationem, qvam bis 6 ad bis 4; ter 6 ad ter 4, dimidium 6 ad dimidium 4. &c.

XXVI.

Qvatuor proportionalium prima ducta in ultimam, idem efficit, atqve secunda in tertiam; qvæ

qvæ proprietas Regulæ Aureæ fundamentum exiſtit.

XXVII.

Si totum ad totum, ut ablatum ad ablatum; erit etiam reliqvum ad reliqvum, ut totum ad totum: hoc eſt, Si A. B :: C. D erit etiam A - C. B - D :: A. B.

XXVIII.

Si qvotcunqve magnitudines proportionales fuerint A. B :: C. D :: E. F :: G. H &c. erit ut una antecedentium ad unam conſeqventium, ita omnes antecedentes ſimul ad omnes conſeqventes, id eſt, erit A. B :: A + C + E + G. B + D + F + H.

XXIX.

Si A. B :: C. D, erit invertendo B. A :: D. C; permutando A. C :: B. D; componendo A + B. B :: C. + D : D; dividendo A - B. B. :: C - D. D; convertendo A. A - B :: C. C - D; ſumendo antecedentium dupla 2 A. B :: 2 C. D.

XXX.

Si qvotcunqve magnitudines A. B. C. D fuerint ab una parte, totidemqve ab altera E. F. G. H; ſitqve A. B :: E. F, & B. C :: F. G, & C. D :: G. H; erit ex æqvo ordinate A. D :: E. H. Sin vero A. B :: G. H, & B. C :: F. G, & C. D :: E F; erit ex æqvalitate perturbata A. D :: E. H. Atqve hi, præter nonnullos alios,

ſunt

ſunt modi illi argumentandi, qvos Geometræ, in Propoſitionum maxime perplexarum demonſtrationibus ingenioſe admodum & magno legentium emolumento adhibent.

XXXI.

Si duæ rationes ſint æqvales & conſeqvens primæ conveniat cum antecedente ſecundæ, *Proportio continua* dicitur. Hæc, ſi per terminos plures continuetur, *Progreſſio* vocatur, qvæ vel *adſcendens* eſt, ſi ratio, per qvam progreditur, eſt minoris inæqvalitatis, ut 1. 3. 9. 27 &c. vel deſcendens, ſi majoris ut 8. 4. 2. 1.

XXXII.

Omnis Progreſſio continuari poteſt per infinitos terminos: deſcendendo tamen, nulla poteſt per terminos integros continuari; adſcendendo poteſt, ſi ratio per qvam continuatur, ſit exacte multiplex.

XXXIII.

Dato primo, ſecundo & ultimo Progreſſionis cujuscunqve termino, Summa omnium ita invenitur: Primus terminus ducatur in differentiam primi & ultimi; Productum dividatur per differentiam primi & ſecundi; Qvoto addatur ultimus, & habebitur Progreſſionis ſumma.

XXXIV.

Qvoniam in Progressione descendente infinitorum terminorum, postremus terminus perpetuo o est; idcirco duntaxat qvadratum primi per differentiam primi & secundi dividendum: quæ insuper differentia si sit unitas; ipsum statim qvadratum primi Summam prodit.

XXXV.

Patet hinc, qva ratione infinitæ numero magnitudines finitam summam constituere possint; qvod ignaris forte mirum videbitur, qvamqvam sit verissimum. Ita, siqvis facturus iter 100 milliarium, primo die conficeret milliaria 10. secundo 9, tertio $8\frac{1}{10}$ & sic, quolibet seqventium dierum, itineris præcedentis diei $\frac{9}{10}$ partes, ac per totam æternitatem iter faceret, nunqvam 100 milliaria absolveret.

XXXVI.

Si qvotcunqve rationes proponantur, productum omnium antecedentium ad Productum omnium conseqventium habere dicitur *Rationem compositam* ex rationibus propositis.

XXXVII.

Hinc datis qvotcunqve magnitudinibus, Ratio primæ ad ultimam *composita* censetur ex Ratione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad qvartam, & sic porro usqve ad ultimam.

XXXVIII.

Omnia Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cylindri, rationem habent ex rationibus basium & altitudinum compositam.

XXXIX.

Si duæ rationes æqvales componantur; Composita, alterutrius componentium *Duplicata* dicitur; si tres, *Triplicata*; si qvatuor, *Qvadruplicata* & vicissim una componentium, compositæ *subduplicata*, *subtriplicata*, subqvadruplicata. E qvibus patet immane discrimen esse inter Rationem duplam & duplicatam, λόγον διπλάσιον, καὶ διπλασίονα; adeoqve perperam a nonnullis, qvos inter *Meibomius* in Dial. *de Proportionibus*, confundi.

XL.

Infertur hinc, Qvadrata habere rationem duplicatam, Cubos triplicatam laterum suorum. Et si qvantitates aliqvot continue proportionales sint, Rationem primæ ad tertiam esse duplicatam, primæ ad qvartam triplicatam, primæ ad qvintam qvadruplicatam rationis ejus, qvam prima habet ad secundam.

XLI.

Similes superficies duplicatam, similia solida triplicatam habent rationem laterum homologorum. Intellige hæc etiam de Circulis ac Sphæris.

XLII.

Cæterum animadvertimus, *Archimedem* Libr. 2. de Sphær. & Cyl. Prop. 9. ipſas rationes compoſitas denuo inter ſe comparare, dum rationem triplicatam rationis alicujus ejusdem duplicatæ ſeſquialteram vocat, unde Ratio qvaſi *decompoſita* exſurgit.

XLIII.

Si ratio qvæcunque addita rationi æqualitatis componat aliqvam; compoſita non differt a Componente. Hinc eſt, qvod Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Priſmata, Coni, Cylindri & quæcunque figuræ ex rationibus baſium & altitudinum componuntur, in baſibus æqvalibus ſe habeant ut altitudines, & in altitudinibus æqvalibus, ut baſes. Item, quod momenta ponderum æqualium ſe habeant ut diſtantiæ ab axe motus, & vice verſa momenta æqvaliter diſtantium, ut pondera.

XLIV.

Si duæ rationes reciprocæ componantur; exſurgit ratio æqvalitatis: Hinc recenſitæ figuræ ſunt æqvales, qvotiescunque ipſarum baſes & altitudines reciprocantur; & momenta ſunt æqvalia qvotiescunqve pondera ſe habent in ratione reciproca diſtantiarum.

XLV.

Explicata Rationum doctrina; verbo adhuc indicandum eſt, qvænam ſint illa, qvæ inter ſe ratio-

rationem habere possunt, vel non possunt. Rationem non suscipiunt heterogenea; sic Pondus ad Tempus, Sonus ad Colorem,. Linea ad Superficiem, rationem nullam habet. Nihilominus, qvia in Arithmetica infinitorum linea, ut pars infinitesima corporis concipitur, potest ejus ad superficiem *Ratio* dici *infinite exigua.*

XLVI.

Finitum qvoque ad infinitum, licet homogeneum, linea finita ad infinitam, rationem nullam, vel si dicere mavis, infinite exiguam habet.

XLVII.

Magnitudines homogeneæ finitæ sunt vel rationales, ῥηταὶ, qvæ numero integro, fracto aut mixto exprimi possunt, vel irrationales ἄλογαι, qvæ non possunt. (Obiter notamus *Urstisium* qvi Cap. 3 Arith. mixtos numeros absurde surdis accenset) Omnes magnitudines rationales, qvia sunt commensurabiles, hoc est, qvia mensuram aliqvam communem admittunt, rationem habent numero explicabilem. Inter rationalem & irrationalem contra, qvamvis ratio sit, hæc tamen ob asymmetriam earum, numero explicari neqvit. Sic Ratio inter latus qvadrati & diagonium ejus, vel inter 1 & V 2 nullo numero exprimi potest. Inter duas irrationales ratio plerumque qvidem numero est inexplicabilis, velut inter V 2 & V 7; qvandoqve tamen numero comprehendi poteſt, ſic V 2 ad V 8 rationem habet exacte ſubduplam, eam videlicet, qvam habet 1 ad 2.

XLVIII.

Qvin etiam nulla datur earum, qvæ numero exprimi poſſunt, qvæ non etiam in irrationalibus locum inveniat: & hoc omnium forte in Geometria admirabiliſſimum, qvod dentur tales qvantitates; qvæ ſeorſim qvidem acceptæ, nullo numero intelligibili exprimuntur, inter ſe tamen collatæ rationem habent exacte cognitam & numero determinatam.

XLIX.

Imo, ipſi qvoqve infinito hæc qvodammodo accommodari poſſunt. Qvemadmodum enim rationale ad irrationale nullam habere poteſt rationem numero determinabilem; poteſt tamen unum irrationale ad aliud irrationale: Sic qvamvis finitum inter & infinitum nulla ratio ſit; ea tamen inter duo infinita obtinere poteſt: qvandoqvidem unum infinitum alterius infiniti concipere poſſum duplum, triplum, decuplum, centuplum, millecuplum, infinitecuplum, infinities infinitecuplum. Finge Cubo ad Latus meridionale apponi alium æqvalem Cubum, huic alium, huic iterum alium & alium ſine

ſine fine; qva ratione naſcetur Parallelepipedum oblongum, qvod bis, ter, qvater, & tandem infinities majus fiet Cubo propoſito: Huic, a plaga meridionali interminato, verſus orientem adjice ſecundum, tertium, qvartum usqve ad infinitum: qvod inde conflabitur ab ortu & meridie interminatum corpus, infinities ſuperabit Parallelepipedum, adeoqve infinities infinitis vicibus Cubum. Idem præſta verſus occidentem, & producetur corpus bis infinities infinite cuplo majus Cubo; cui ſi ex parte ſeptemtrionali ſimile adjeceris, habebis diſcum verſus omnes horizontis plagas infinite extenſum, qvi Cubum qvater infinities infinitis vicibus ſuperabit. Huic diſco ſi infinitos alios æqve craſſos ſubſternas, totidemqve ſuperſtruas, corpus habebis, qvod omne conceptibile ſpatium replebit eritque octies infinities infinities infinities majus Cubo. Deinde, qvia hedra eſt pars infiniteſima Cubi, & Cubi latus pars infiniteſima hedræ, & punctum lateris; idcirco immenſa illa moles, qvæ Cubum octies inf. inf. infinitis viribus ſuperat, ſuperabit punctum 8 inf. inf. inf. inf. inf. infinitis vicibus. Sic ut ſecundum hunc conceptum, dicendum, qvod Corpus in omnes mundi plagas conceptibiles infinite extenſum habeat ad atomum, rationem octies inf. inf. inf. inf. infinities infinite-cuplam.

L.

Qvamqvam vero isthæc insanientium deliriis non absimilia plerisqve videbuntur; nihilominus vix aliter se exprimere poterit sana mens, qvæ secundum conceptus a Deo sibi inditos, loqvi volet. Fateor, multis contradictionibus involuta esse; forte propterea, qvod finito intellectui infiniti comprehensio impossibilis; forte etiam quia nihil est, nec esse potest extra mentem nostram, qvod his conceptibus respondeat. Deus solus est is, qvem scimus & actu esse, & infinitum esse, ad qvem cætera omnia, qvantacunqve sunt, ne umbram quidem rationis habent. In hujus cognitione summa sapientia, in fruitione summa salus. Hoc qvi potitur, habet omnia; etsiamsi nihil haberet: qvi caret, nihil habet; tametsi infinitorum mundorum opes possideret.

PHILOSOPHIA PRIMA
EX
EUCLIDE RESTITUTA.

SECT. I.

DE PENETRABILITATE ET REALITATE MAGNITUDINUM IN GENERE.

§. 1.

Argumenti dignitas.

Tres magnitudinum ſpecies, uti lineam, ſuperficiem & ſolidum, qvamqvam in rerum natura inter ſe copulatas & cum materia permixtas, deprehendas, adeo, ut nullæ ſuperficies, nullæque lineæ dentur a ſoliditate ſejunctæ; nihilominus triplex hoc extenſorum genus ſeorſim contemplari, cognitionem noſtram juvat, ut in univerſum, qvid de magnitudine qvavis poſſit prædicari, intelligamus. Operæ igitur pretium eſſe exiſtimaverim, doctrinam hanc de magnitudinibus abſolute ſpectatis, utiliſſimam, data opera explanare, eamqve maxime controverſam ea, qva fieri poteſt, diligentia dilucidare. Qvod ut ut fiat rectius; operam omnem in eo potissimum collocabimus, ut ad ea, qvæ sensus nobis offerunt, sollicite attendamus, neglectisqve Philosophorum qvorundam subtilitatibus, simplicitati naturæ plurimum tribuamus. Placet autem primum, qvid *magnitudinis* vox significet, paucis indicare, ejusqve differentiam a *qvantitate* sic dicta annotare.

§. 2.

Magnitudinis vox explicatur.

Magnitudinis voce signamus rem qvamlibet compositam, limitibusqve conclusam. v. c. lineam, superficiem, solidum, numerum &c. dicimus magnitudines, prouti res sunt compositæ, limitibusque conclusæ, & numerus uti centenarius ex unitatibus multitudine terminata compositus esse intelligitur.

Magnitudinem igitur cum qvantitate confundere non licet; hæc enim præter magnitudines, qvibus tribuitur, diversissima alia sub se complectitur rerum genera, adeo, ut pro genere, cujus peculiaris est species magnitudo, habeatur. Sic non solum numeri, prouti augeri, minuiqve possunt, dicuntur qvantitates; sed etiam pœnæ, delicta, res emti & venditi &c. sub qvantitatum considerationem cadunt, qvatenus de gradibus ipsarum disqviritur, uti jam Conam. III. Sect. II. §. 8. 9 observatum est.

NOTA-

NOTA.

Repetendum hoc in loco: voces hic occurrentes ideas notare *primas*, in nullas alias ſimpliciores, uti deinceps videbimus, reſolubiles. Hoc ipſum valet de magnitudine & qvantitate, qvas qvidem voces per alias æqvipollentes & ſynonymicas explanare, omnino ſufficit. Sive igitur *qvantitas* explicetur per id, a qvo res aliqva major dicatur vel minor, vel per id, qvod augeri & minui poteſt, nihil refert, ſi modo qvantitatem a magnitudine tanqvam genus a determinata ſpecie diſtinctam eſſe notes.

§. 3.

Tres magnitudinum ſpecies nudæ ſunt capacitates.

Solida, ſuperficies & lineas, tanqvam nudas capacitates, a materia omni ſejunctas, contemplamur. Diſtinctam autem eſſe *materiam* & *capacitatem* ſic dictam *corpoream*, ſenſus docet communis; aliud enim eſt id, in qvo corpus & materia locatur, aliud corpus ipſum, vel ſi mavis dicere; aliud eſt continens, aliud contentum.

Hoc utiqve ex Geometria Euclidea manifeſtum eſt, qvippe qvæ in formandis extenſorum ideis, omnem excludit materiam, eo, qvod generalis, cujus præcepta latiſſime patent, eſt ſcientia; unde, nulla habita materiæ ratione, magnitudines, tanqvam nudas extenſiones contemplatur. V. c. *ſphæra* abſolute ſpectata, non ligneam, æneam &c. ſphæram notat; ſed prætermiſſa materia, capacitatem nudam, in qva

ſphæra

ſphæra lignea, ænea &c. locari poteſt, ſignificat. *Conum* abſolute conſiderat Geometra, non hunc vel illum ex materia qvadam definita compoſitum; ſed tanqvam corpoream capacitatem, in qva conus ligneus &c. locari poteſt; *cubum* ut nudum aliqvod ſpatium corporeum, in qvo locantur cubi ex materia qvacunque conflati. Superficies, veluti triangula qvadrilatera & multilatera abſolute itidem contemplatur Geometra, non hujus vel illius corporis ſuperficiem; ſed ſuperficiem mente abſtractam, tanqvam nudam aliqvam capacitatem, a priori, qvæ dicta eſt corporea, diverſam. Sic triangulum rectilineum concipitur tanqvam nuda capacitas, tribus rectis comprehenſa, nulla habita corporis alicujus, uti pyramidis ratione, cujus ſuperficies claudatur triangulis, tanqvam terminis ſuis; qvadrilaterum abſolute ſpectatur tanqvam expanſum qvatuor rectis terminatum, nullo habito agri alicujus reſpectu, cui qvadrilaterum mente conceptum reſpondere ſupponatur. Lineas deniqve easqve vel rectas vel curvas ſibi concipit Geometra, non tanqvam hujus vel illius ſuperficiei terminos, ſed generaliter tanqvam nudas capacitates a ſuperficiali, *areæ* nomine inſignita, prorſus diſtinctas, vel ſi mavis dicere tanqvam longitudines, qvæ latitudinis omnis ſunt expertes (nec enim aliter, ſi ſenſum communem ſeqvi voluerimus, res exprimi poterit.)

§. 4. Tres

§. 4.

Tres magnitudinum species sunt penetrabiles.

Magnitudines & nudæ capacitates spectatæ, *penetrabiles* esse dicuntur; Conceptæ enim absqve omni materia magnitudines, ut habeant penetrabilitatem, necesse est. *Penetrabilitatis* autem nomine designamus eam magnitudinum absolute spectatarum affectionem, qva fit, ut duo ejusdem generis extensa, uti duæ rectæ, duæ superficies & duo solida, in uno eodemqve ubi, vel si mavis dicere: in uno eodemqve loco simul adesse non repugnet. Hanc magnitudinum absolute spectatarum penetrabilitatem distingvas qvæso! a *congruentia*, ex qva magnitudinum ejusdem generis æqvalitas vi ax. 8. Elem. I. colligitur. Omnis enim congruentia penetrabilitas dici qvidem potest; nec tamen omnis penetrabilitas statim involvit congruentiam, v. c. duo triangula similia penetrabilia qvidem esse possunt; nullo tamen modo sibi congruunt, cum unum est majus, alterum minus; duo parallelogramma inæqvalia super eadem basi constituta, penetrabilia qvidem sunt; qvamqvam ob diversam qvantitatem neutiqvam sibi congruant.

Hæc magnitudinum penetrabilitas, qvæ extensis, qvatenus extensa sunt, tribuitur, innotescit ex Geometria Euclidea, in qva dictæ magnitudines, absqve omni materia spectatæ, penetrabiles esse recte supponuntur.

Qvod

Qvod ad lineas ; *rectæ æqvales* cum ſibi mutuo congruant, penetrabiles erunt, ſeu qvod idem: unum idemqve *ubi* ſimul occupare poterunt. Hinc fit, ut recta una alteri ſuperponatur, id qvod ex Prop. IV & VIII Elem. I demonſtrationibus ſatis apparet.

De Superficiebus res conſtat ex Prop. XXXV Elem. I. in qva Parallelogramma ſuper eadem baſi & in eisdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia ; nec non ex Prop. XXXVII. Elem. I. ubi triangula ſuper eadem baſi, & in eisdem parallelis conſtituta eſſe ſupponuntur ; id qvod fieri non poteſt, niſi magnitudines dictæ ſunt penetrabiles.

Eundem ad modum, triangula æqvalia ſuper eadem baſi & ad easdem partes conſtituta, in eisdem parallelis eſſe, prædicantur Prop. XXXIX. Elem. I. & parallelogrammum cum triangulo eandem habens baſin, eandemqve altitudinem ; trianguli duplum eſſe dicitur Prop. XLI. Elem. I. Circulorum penetrabilitas colligitur ex Prop. V. & VI. Elem. III. ubi duo circuli ſeſe invicem ſecare, vel ſeſe intra contingere ſupponuntur, collat. Prop. X. & XI. ejusdem Elementi.

Deniqve ſolidis tribuitur penetrabilitas, qvæ colligitur ex Prop. XXIX. Elem. XI. in qva duo ſolida Parallelepipeda ſuper eadem baſi, & in eadem altitudine conſtituta eſſe intelliguntur, nec non ex Prop. X. Elem. XII. in qua, conus tertia pars eſſe dicitur cylindri, eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqvalem.

§. 5. Tres

§. 5.

Tres magnitudinum species sunt reales.

Has, qvibus nudam capacitatem & penetrabilitatem tribuimus, magnitudines, tanqvam reales supponimus, si vel maxime in rerum natura nihil detur, qvod suppositis ejusmodi intellectualibus respondeat. Posita enim est omnis, qvæ speciebus & generibus tribuitur, realitas in nuda contradictionis absentia, qvæ vel a simplicissimis pendet suppositis, ex qvibus potest intelligi; vel demonstratione nititur, qvæ declarat: hoc vel illud suppositum a contradictione esse liberum. Si v. c. Geometra hypotheses format: *spatium aliqvod tribus rectis terminari*, vel: *semicirculum circa diametrum suam revolvi; realitas* hæc a posteriori experimento qvodam facile potest illustrari; sed num dentur parallelæ, parallelogramma, triangula æqvilatera &c. demonstratio confirmat.

Conf. Conam. I Sect. X. collat. Conam. III. Sect. I. §. 6.

§. 6.

Puncta sunt realia.

Hanc magnitudinum realitatem, ut habeamus perspectam; argumentum hoc utilissimum accuratius pertractare, veramqve solidorum, superficierum, linearum, & punctorum formationem intellectualem uberius investigare, operæ est pretium.

 Qvod

Qvod ad puncta, qvæ pro linearum terminis habentur; in classem rerum ea redigenda esse existimaverim, qvamqvam nullam magnitudinem, nullasqve habeant partes. Qvomodocunqve enim concipiatur aliqvod punctum, *reale* erit, non, qvod vere in rerum natura seu in individuo detur; sed ideo, qvod extensio linearis qvæ est terminata, puncta, nulla prædita magnitudine, postulat. Terminus enim lineæ, qvamqvam negationem aliqvam involvat, verus erit atqve realis (negativa enim æqve ac affirmativa realitatem habere, qvis negaverit?) Sic linea æqve realis est ac superficies, cujus est terminus; superficies æqve realis ac solidum, pro cujus extremo habetur; numeri negativi æqve reales sunt ac positivi; vitia æqve realia ac virtutes &c.

Notandum enim: *intellectum humanum relationes rerum formare infinitis fere modis, easqve in re fundatas semper esse reales, qvomodocunqve cæterum sese habeant.*

Nec solum puncta esse realia putes, intuitu formationis, qvæ est intellectualis; sed potissimum ideo, qvod pro diverso corporum statu, vel in motu vel in qviete constituta esse intelligantur; id qvod vel maxime ex *trochlea*, qvæ circa centrum suum, revolvi dicitur; nec non ex *centro gravitatis*, qvo sustentantur gravia, apparet.

§. 17.

§. 7.

Lineæ & superficies sunt reales.

Lineæ, tanqvam superficierum termini, eandem sibi vindicant realitatem tum intuitu formationis, qvæ est intellectualis, tum intuitu attributorum, quæ ipsis convenire censentur. Præter conceptum enim, lineis rectis & curvis communem, secundum quem longitudines sunt, latitudinis omnis expertes; in directum produci, secari, mensurari & qvomodocunqve comparari possunt; qvibus positis affectionibus, lineas tum rectas tum curvas infinitorum generum esse reales seu possibiles manifestum est.

Hæc autem omnia, cum de superficiebus, tanqvam solidorum terminis eodem modo valeant, qvippe qvæ augeri & minui, mensurari, æqvari, excedere, deficere, moveri possunt & qviescere; evidens est: superficiebus non solum intuitu formationis intellectualis, sed etiam respectu attributorum, qvæ ipsis conveniunt, realitatem esse tribuendam.

Conf. Euclidis Elem. I. II. & VI. ex qvibus linearum & superficierum affectiones generales colliguntur.

§. 8.

Solida sunt realia.

Deniqve solida, uti conus, sphæra, cylindrus, cubus, pyramis, prisma & parallelepipedum, dicuntur esse realia, partim ob simplicissimam, qvam habent genesin, partim ob communes congruentiæ, divisibilitatis, proportionalitatis, dimenſionis &c. qvæ ipſis competunt, affectiones. Si v. c. ſphæra tanquam figura ſolida, una ſuperficie comprehenſa, ad qvam ab uno puncto eorum, qvæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales, explicatur; definitio hæc in ſimpliciſſima hac hypotheſi: *ſemicirculum circa diametrum ſuam revolvi*, fundatur, de cujus veritate nemo poteſt dubitare, qvi analogiam, circuli ſphæræqve generationem intercedentem, animo penſitaverit. Uti enim recta linea circa punctum fixum revoluta, circulum deſcribit; ita ſemicirculus circa diametrum ſuam circumductus, ſphæram generare concipitur; unde, cum in circulo, omnia peripheriæ puncta a centro æqvaliter diſtent; hoc ipſum de ſphæra, ſimili modo generata, valebit. Conus itidem generari intelligitur, qvando trianguli rectanguli, manente uno latere eorum, qvæ circa angulum rectum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat, circum aſſumta figura; qvæ qvidem hypotheſis iterum eſt ſimpliciſſima; in qva definitio Euclidea de cono fundatur &c.

Conf. Euclidis Geometria Solidorum Elem. XI. XII. XIII. &c.

§. 9.

Comparatio corporis phyſici cum geometrico.

Magnitudines, qvas penetrabiles & reales eſſe, hactenus vidimus, abſolute tales ſunt h. e. abſqve

absqve omni materia concipiendæ. Contradiſtingvere eas ſolemus magnitudinibus aliis relative talibus, qvæ ex materia qvadam definita compoſitæ eſſe intelliguntur; unde illas *corpora geometrica*, has vero *phyſica* dicere moris eſt. Utrique corporum generi, qvamqvam realitas recte tribuatur; in eo tamen maxime differt corpus phyſicum a geometrico, qvod illud ob materiam ipſi inhærentem ſit *impenetrabile*, geometricum autem corpus, materia omni deſtitutum, *penetrabile*. v. c. cubus aqvæ dicitur eſſe impenetrabilis; cubus autem abſolute h. e. absqve materia qvadam ſpectatus, penetrabilis.

Huc accedit, qvod corporis phyſici compoſitio fiat ex partibus materialibus; geometrici autem ex partibus immaterialibus, vel ſi mavis dicere: ex capacitatibus minoribus.

§. 10.

Intellectus humanus, qvomodo corpora materialia concipiat?

Convenientia atqve diverſitate corporis utriusqve cognita; modum, qvem tenet intellectus humanus in concipiendis corporibus tum materialibus ſeu phyſicis, tum immaterialibus ſeu geometricis ſigillatim inveſtigabimus, eam potiſſimum ob cauſam, ut erroneas nonnullorum, qvas hoc in loco ſingere ſolent, hypotheſes deſtruere atqve evertere valeamus.

Qvod ad corpus, qvod dicitur materiale seu physicum; intellectus humanus, secundum regulam Conam I. Sect. I. §. 12. propositam, *qvamlibet corporis speciem, vocum qvarundam ope, missis omnibus, qvas sensus suppeditant, imaginibus, apprehendit, qvamqvam rem hoc modo perceptam ad sensibilia reducere, non repugnet.* V. c. si corpus materiale universaliter mihi concipio tanqvam compositum ex partibus materialibus, extensum atqve mobile; symbolica hæc est perceptio, vocibus qvibusdam expressa, nec qvicqvam refert, si vel maxime ad hoc vel illud corpus qvod in sensus incurrit, non attenderim; sufficit enim in universum scire, in qvonam corporis materialis universaliter concepti forma constituatur. Si fluidum corpus cogito; istud tanqvam corpus, cujus partes vi minimæ cedunt in universum mihi concipio, qvæ qvidem symbolica perceptio deinceps ad sensibilia potest reduci, ut res proposita, vocibusqve nudis expressa, illustretur.

§. 11.

Intellectus humanus, qvomodo corpora immaterialia percipiat?

Eandem per symbola cogitandi methodum intellectus humanus observat in concipiendis corporibus geometricis, quippe qvæ, nulla habita imaginum, qvas sensus offerunt, ratione, in universum, prouti vocibus expressa sunt, percipiuntur, qvamqvam universales

universales ejusmodi notiones, ad signa, qvæ sunt naturalia, reducere omnino conducat. V. c. si cylindrum, conum, pyramidem &c. in universum vocum qvarundam ope percepi; in plano qvodam deinceps formare licet schemata, qvibus dicta corpora, universaliter concepta, illustrantur.

Hæc intellectualis, qvæ fit signorum qvorundam ope, perceptio, præter corpora geometrica, tribuitur eodem modo superficiebns, lineisqve, qvippe qvæ tanqvam nuda nomina percipiuntur, & ad sensibilia deinceps, ut lucem inde accipiant, reducuntur. V. c. triangula, qvadrilatera, parallelogramma, uti, qvadratum, oblongum, Rhombus & Rhomboides &c. primum universaliter h. e. tanqvam nuda nomina percepta, in plano qvodam describuntur, id qvod ad meliorem intelligentiam plurimum facit. Lineæ tum rectæ tum curvæ universaliter, vocibus expressæ formantur in plano, ut intellectualis, qvæ fit perceptio, luculenter appareat.

NOTA.

Eundem intellectus humanus in concipiendis rebus pnevmatologicis & moralibus, tenet modum. Qvascunqve enim mentis humanæ vel Dei operationes, sive ad intellectum, sive ad voluntatem pertineant, sumseris: nos omnia universaliter h. e. missis imaginibus sensibilibus, percipere, est apertissimum. Qvid vero de conceptu substantiarum sive materialium, sive immaterialium, qvem nonnulli habere opinantur, statuendum sit, suo loco videbimus.

§. 12.

Corpora geometrica sunt realia, non imaginaria.

Ex his fundamentis qvæstio: *num corpora geometrica sint realia, an imaginaria*, componi facile poterit. Cum enim generum specierumqve realitas, in sola contradictionis absentia, nulla habita existentiæ individualis ratione, ponatur; Conam. III. Sect. I. §. 6. corpora geometrica, *vera*, *possibilia* atqve *realia* hoc sensu dicenda erunt, si vel maxime supposita ejusmodi intellectualia in individuo nullibi existerent.

Qvod si autem nonnulli, abstractis corporum geometricorum conceptibus varias sensibiles immisceant imagines; culpandi omnino erunt, ideo, qvod mens ipsorum a sensibus sese abduci non patiatur; nullo tamen modo vitiosa hæc & imaginaria perceptio efficiet, ut res ipsæ pro imaginariis venditentur. Sic multi, universalibus minus assveti, corpus tanqvam cameram intra parietes suos aliqvid complectentem sibi concipiunt; superficiem ut tenuissimam corporis alicujus cuticulam, lineamqve tanqvam filum tenue vi omni extensum, qvæ qvidem omnia recte dici poterunt imaginaria; nec tamen ideo Geometriæ tribuendum: eam circa imaginaria versari corpora, id qvod a communi sensu abhorret.

NOTA.

Qvantas male intellecta vocis *realis* significatio, confusiones in Philosophia pepererit; nemo non agnoscet, qvi systemata vulgaria, data opera, evolverit. Video enim, vulgares

vulgares nonnullos philoſophos tam perverſe hoc in argumento agere, ut nihil reale eſſe opinentur, niſi qvod manibus contrectari, viſu percipi vel alio qvocunqve ſenſu poſſit attingi. Hinc varia ad ſenſum plebis accommodata, & a ſcientiarum indole, plane abhorrentia promanarunt præjudicia, qvibus vel maxime ille obrutus erat, qvi cum interrogaretur: *qvænam ſcientiæ eſſent reales*, imprudenter reſpondebat: *qvæ ſunt de pane lucrando.*

§. 13.

Utilitas Geometriæ.

Qvod supereſt; Geometria, qvæ extenſorum naturam generatim ſpeculatur, maximam habet utilitatem in reliqvis ſcientiis mathematicis conſpicuam.

Qvod enim ad lineas, a Geometra abſolute ſpectatas; Mechanicus, Opticus & Aſtronomus eas ad uſus ſuos accommodant; Mechanicus qvidem, ut gravium, qvippe qvæ in lineis deſcendunt, motum definiat; Opticus, ut directionem lucis, qvæ fit in lineis rectis, determinet; Aſtronomus, ut corpora circa lineas qvieſcentes revolvantur.

Superficies, qvibus corpora ſeſe mutuo contingunt, primos motuum impetus excipiunt, lucisqve radios reflectunt. Solida deniqve, uti ſphæra, cylindrus, conus &c. in Mechanica, Optica & Aſtronomia ad varios adhibentur uſus, id qvod nemini, qvi vel dictarum ſcientiarum limina ſalutavit, obſcurum eſſe poteſt.

SECTIO II.
DE COMPOSITIONE
ET EXTENSIONE MAGNITUDINUM IN GENERE.

§. 1.

Qvid ſit compoſitio magnitudinum?

Magnitudines, qvæ ex pluribus inter ſe junctis conflantur, ſive plura illa ſint materialia, ſive immaterialia, *compoſitæ* vulgo audiunt. Sic non ſolum corpora qvævis materia qvadam definita prædita, magnitudines compoſitæ dicuntur; ſed etiam lineæ, ſuperficies & ſolida, qvæ materia omni ſunt deſtituta, compoſitionem habent, prouti ex capacitatibus pluribus minoribus generari concipiuntur. Nullam enim nobis concipere poſſumus lineam, niſi ex pluribus aliis lineis minoribus conflatam, qvam ideo compoſitam dicimus; nullam ſuperficiem niſi compoſitam ex aliis ſuperficiebus ipſam conſtituentibus; nullum deniqve ſolidum, niſi ex aliis ſolidis minoribus generatum.

NOTA.

Obſervandum hoc in loco: compoſitionis vocem, *qva plurium ſive materialium ſive immaterialium complexum* notamus, a magnitudinibus, qvibus primario tribuitur, ad qvævis alia, diverſiſſima rerum genera, qvæ ſuo modo compoſitionem habent, transferri. Sic ex antecedentibus notiſſimum: idearum alias eſſe compoſitas, alias primas; illasqve in alias ſimpliciores definiendo reſolvi, has vero tanqvam primas eſſe irreſolubiles. V. c. ideam compoſitam *trianguli* definiendo poſſum

ſum reſolvere, eſt enim *triangulum* figura plana, tribus rectis comprehenſa; ſed ideas *termini* & *comprehenſionis* tanqvam primas easqve irreſolubiles, recte aſſumo; terminus enim idem eſt ac extremum, & comprehendere idem ac terminari.

§. 2.

Magnitudo qvævis, ut totum conſiderata, habet partes.

Sive autem hæc magnitudinum compoſitio fiat ex partibus materialibus, ſive immaterialibus; plura hæc qvæ magnitudinem ingrediuntur, vocentur *partes*, magnitudo autem ipſa, qvæ ex partibus conſtat, *totum*, dicatur. Sic tres magnitudinum ſpecies, uti linea, ſuperficies & ſolidum, ut tota, qvæ ex partibus conſtant, recte conſiderantur; nec non numeri integri ſub *totius* conſiderationem cadunt, qvatenus ex unitatibus homogeneis tanqvam ſuis partibus conflantur; numeri autem fracti pro partibus habentur reſpectu unitatis, quæ conſtituit totum aliqvod in partes æqvales diviſum. Totius igitur & partis notiones primario ad magnitudines pertinere cenſentur; qvamqvam eas ad qvævis alia diverſiſſima rerum genera, qvæ ſuo modo tanqvam tota conſiderari poſſunt, transferre liceat.

§. 3.

Extenſio magnitudinum, qvid ſit?

Cum magnitudinum compoſitione neceſſario conjuncta eſt *extenſio*, qvæ in partium inter ſe junctarum dilatatione ponitur. Partes enim, qvæ conſtituunt magnitudinem, ſive ſint materiales, ſive immateriales, ut extenſæ ſint, neceſſe eſt; magnitudinum

enim

enim compoſitionem absqve extenſione cogitare velle, abſurdum putatur. Hæc igitur extenſio in partium inter ſe junctarum continuatione poſita, efficit, ut magnitudinis cujusvis terminatæ, extrema intervallo qvodam interjecto a ſe invicem diſtent, id qvod tres magnitudinum ſpecies ſatis indicant. Solida enim, uti ſphæra, cylindrus, pyramis &c. tanqvam ſpatia corporea, extenſionem habent terminatam, qva fit, ut extrema ſolidorum qvæ ſunt ſuperficies, intervallo qvodam, a ſe invicem diſtent; ſuperficies, uti triangula, qvadrilatera, extenſionem habent lineis, tanqvam ſuperficierum terminis, circumſcriptam; lineæ deniqve, ſive cæteroqvin ſint rectæ vel curvæ extenſæ eſſe intelliguntur usqve ad puncta, qvæ pro linearum terminis habentur.

§. 4.

Extenſio eſt vel partium materialium, vel immaterialium.

Cum autem magnitudines vel abſolute h. e. absqve ulla materia, vel relative h. e. prouti materia qvadam præditæ ſunt, poſſint conſiderari; duplex dabitur extenſio, prouti *vel partes* materiales vel immateriales extenſæ eſſe concipiuntur. Uti autem partium immaterialium extenſio in nuda ſpatiorum continuitate ponitur; ſic extenſio partium materialium eo redit, qvod materia repleat ſpatii partes finitimas.

§. 5.

Comparatio utriusqve extenſionis.

Utraqve extenſio, qvamqvam partes ſupponat, qvæ extenſæ concipiuntur

tur; in eo tamen maxime diversa est extensio partium materialium a nuda spatiorum seu partium immaterialium extensione, qvod illa sit impenetrabilis, hæc autem penetrabilis, uti jam Sectione præcedenti observatum est.

§. 6.

Extensionis partium immaterialium seu spatii affectiones.

Hæc, qvæ partium materialium extensio hactenus dicta est, aliis *capacitas* & *spatium* vocari solet. Spatium igitur, si cum enunciatis præcedentibus comparaveris, facile vides.

1) *Ideam spatii variari pro extensorum diversitate.* Sic alia est extensio spatii corporei, alia superficialis, alia extensio spatii linearis. Tot enim terminata sunt spatia, qvot sunt partium immaterialium extensiones.

2) *Spatium esse vel terminatum vel interminatum.* Prius illustrant solida, superficies & lineæ qvippe qvæ spatia sunt terminata; posterius lineæ parallelæ ex utraqve parte in infinitum productæ.

3) *Spatium esse compositum ex partibus immaterialibus, penetrabile & expansum.* §. 3.

4) *Spatium esse reale seu possibile;* concipi enim potest. Spatium igitur, qvod dicitur corporeum, *imaginarium*, *fictum*, aut corporis *phantasma* cum nonnullis appellare nollem si vel maxime spatium absqve materia, in rerum natura seu in individuo, nullibi existeret: pleraqve enim supposita intellectualia, scientiis præstructa, eodem

jure

jure *phantasmata* aut *imaginaria* forent dicenda; id qvod sane absurdum.

Conf. Conam. III. Sect. IV. §. 7. 8.

5) *Spatium corporeum cum materia non circumferri; sed, variante mole corporea immobile manere.*

6) Magnitudinem spatii corporei, magnitudini corporum, qvæ in ipso locantur, semper congruere.

7) Spatii linearis magnitudine, corporum distantiam, inter qvæ interjacet, æstimari.

§. 7.

Forma spatii corporei.

Hæc, qvæ de spatio corporeo dicta sunt, experientia seu singularium observatione illustrantur. Spatium igitur corporeum concipiemus tanqvam *compositum ex partibus immaterialibus, penetrabile, expansum & immobile.* Nec qvicqvam intererit, sive pro *mera, corpus qvodcunqve recipiendi, capacitate*, sive *pro magnitudinis cujusvis interponibilitate*, habeatur. Ideam enim spatii corporei tanqvam *primam*, in nullas alias simpliciores resolubilem agnoscimus Conam. III. Sect. I. §. 1. Not. 1. unde eam per synonyma explicare omnino sufficit.

§. 8.

Comparatio spatii corporei cum tempore.

Spatium hoc corporeum, si cum tempore comparaveris; analogiam quandam inter utrumqve facile animadvertes. Non obstante enim, qvod tempus tanqvam *duratio ad terminum qvemvis incertum*

certum fluens, ad ordinem ſucceſſionis, ſpatium autem ad molis corporeæ ſitum pertineat; utriqve extenſio, eaqve indefinite ſumpta, tribuenda erit.

Conf. Iſaacus Newtonus in Princ. Phil. natur. defin. VIII. Schol.

§. 9.

Spatium corporeum a materia diſtinctum eſt.

Suppoſito ſpatii corporei, qvem ſenſus comprobant, conceptu; ad quæſtiones de capacitatis corporeæ natura propoſitas, deveniendum eſt. Eſt autem prima omnium, qvæ huc pertinere cenſentur, quæſtio hæc: *num ſpatium corporeum a materia diſtinctum ſit, vel non?* ad qvam ſolvendam nihil aliud requiritur, qvam ut ex antecedentibus repetamus: ſpatium corporeum nudam eſſe capacitatem eamque penetrabilem, materiam autem impenetrabilem. Ob has enim determinationes oppoſitas, ſpatium corporeum cum materia unum idemqve eſſe, ſtatuere, æqve abſonum foret, ac colores tanqvam reale qvid corporibus ineſſe, affirmare velle.

Nollem igitur cum Carteſianis communem habere cauſam, hac hypotheſi ſeductis: corporis eſſentiam ſeu naturam in nuda poſitam eſſe extenſione, ex qva ſpatium cum corpore eſſe idem, ob communem utriqve extenſionem, colligunt. Sed falſum & erroneum eſſe principium, qvod aſſumunt, facile videre eſt, cum differentia corporis ſpecifica non ſit extenſio, qvippe qvæ materiæ & ſpatio eſt communis, ſed potius impenetrabilitas,

trabilitas, qva materiam a ſpatio differre, in antecedentibus jam oſtenſum eſt.

§. 10.

Num ſpatium corpore vacuum & extramundanum poſſit dari?

Spatium hoc corporeum a materia diſtinctum poteſt dari; ſi vel maxime nulla daretur materia, qvæ in ipſo tanqvam ſuo ſubſtrato, eſſet collocata.

Ponamus enim: materiam omnem mundanam in duas ſphæras cujuscunqve molis coacervari, deſtructis reliqvis omnibus corporibus: id qvod a Deo omnipotenti fieri poſſe nemo rationis uſu præditus, negaverit. Qvod ſi igitur una dictarum ſphærarum alteram contingat; unico in puncto fiet contactus per Prop. XIII. Elem. III; unde inter alia ſphærarum puncta, medium qvid h. e. aliqvod ſpatium interjacebit (deſtructa enim ſunt reliqva omnia corpora per hyp.) Qvod ſi autem disjunctæ ſint duæ ſphæræ; dabitur ſpatium aliqvod intermedium materia nulla repletum. Extra omnem igitur poſitum eſt dubitationem: ſpatium aliqvod materia vacuum poſſe dari; num autem in rerum natura ſeu in individuo vere etiam detur, ex phœnomenis in Philoſophia naturali occurrentibus, conficiendum eſt. Nobis hoc in loco ſufficit, nudam ſpatii materia vacui, poſſibilitatem cognoviſſe.

Idem de ſic dicto *ſpatio extramundano* eſt ſtatuendum. Spatium enim extramundanum,

materia

materia vacuum, five finitum five infinitum, posse dari, nihil repugnat, si vel maxime ideam spatii infiniti, nullam habeamus. Num autem vere etiam in rerum natura detur; alia, cujus solutio ad Philosophiam naturalem pertinet, est quæstio.

§. II.

Num spatium sit substantia an accidens?

Hæc, cum ita sint; disqvirendum porro est: *num spatium sit substantia, vel accidens?* Placet autem primum, qvid substantiæ & accidentis voces designent, determinare. Notissima hæc Metaphysicorum inter substantias & accidentia, distinctio, a qvocunque demum fuerit inventa, ex sensibus hausta, & a rerum singularium existentia abstracta esse intelligitur. Commune enim hominum de rebus individualibus esse effatum novimus: res alias existere tanqvam aliis inhærentes, alias autem per se & absolute existentiam suam continuare; unde illas, *accidentia seu modos*, has autem *substantias*, seu si mavis dicere; *substrata* vocare solemus. Sic v. c. solem, lunam, tellurem, *substantias* dicimus, eo, qvod per se subsistunt, nec aliam rem cui inhæreant, supponunt; sed *motum* inter accidentia referimus; concipi enim non potest motus, nisi supponatur aliqvid qvod moveatur, sive cæteroqvin sit sol, luna, sive tellus &c. Eandem ob rationem reliqvis omnibus corporibus materialibus, uti *vegetabilibus, mineralibus* & *animalibus* commune *substan-*

tiæ nomen imponimus; nec non ſpiritibus, uti Deo, animæ &c. Qvæcunqve autem ſubſtantiis dictis ineſſe intelligimus; ea generali, *accidentium* nomine deſignare ſolemus. Ita *Deus* eſt ſubſtantia, compoſitionis expers, omnipotens, omniſapiens &c. *anima*, ſubſtantia ſpiritualis intellectu & voluntate, qvæ ipſius *accidentia* ſunt, prædita; corpus materiale, qvod in abſtracto ſemper concipimus, eſt ſubſtantia qvæ habet accidentia, uti diviſibilitatem, extenſionem, impenetrabilitatem, mobilitatem &c.

Hæc ſi applicemus ad ſpatium, qvod dicitur corporeum; accidens corporis materialis, vel rei alius cujuscunqve vocari nullo modo poterit. Cum enim ſpatium corporeum poſſit dari absqve ulla materia, ſeu per ſe abſolute concipi §. 10. accidens non erit, cum materiæ neceſſario non inhæreat. Huc accedit, qvod ſpatium, ſi vel maxime materiæ junctum eſt, cum eadem non circumferatur §. 6. ex qvo itidem patet; capacitatem ſic dictam corpoream inter accidentium numerum referri non debere. Jam igitur ſi ſpatium corporeum accidens non eſt, forſan ex me quæres: Num id, qvod recipiendi corporis eſt capax ſeu ſpatium corporeum pro ſubſtantia habeam? Hac in re ſuſpendi a nonnullis judicium, ab aliis autem iſtud ex claſſe entium penitus excludi, video. Qvod ſi tamen, qvid ego ſentiam, ſcire cupias, ſcito: ſpatium corporeum ex claſſe entium a me non excludi, nec iſtud dari uti mobilitatem,

tem, durationem, tempus &c. existimo. Secus enim sese res habet in spatio, ac in mobilitate & duratione. Illud enim potest concipi absolute & per se §. 10., mobilitas autem & duratio dari non possunt, nisi supponatur aliqvid, qvod motum sustineat, vel *duret*.

Qvid igitur obstat, qvo minus spatium corporeum explicem per substantiam immaterialem & penetrabilem, accidentibus suis §. 10. recensitis, præditam? Si corpora materialia indefinite seu universaliter concepta vocamus substantias, qvid impedit, qvominus sphæram, cylindrum, conum &c. aliaque corpora geometrica indefinite itidem concepta generali substantiarum voce designemus? Gaudent enim dicta corpora geometrica suis affectionibus æqve ac materialia, & possunt dari, si vel maxime nulla materia daretur.

§. 12.

Num absurda inde seqvantur?

Sed dixerit aliqvis: si spatium corporeum pro substantia habetur: corpora materialia tanqvam substantias in alia iterum substantia contineri, id qvod sane absurdum. Has in cogitationes, si qvis inciderit, reputet secum: num absurdum sit dicere: partes materiales contineri in corpore physico tanqvam substantias minores in majori (qvamlibet enim partem materialem sejunctam a corpore toto substantiam esse, qvis negaverit? Hæc si non absurda sunt, qvare absonum erit, dicere: corpus materiale contineri in substantia penetrabili, & immateriali, qvalis est spatium corporeum. Præjudicia hæc perqvam multis Mathematum ignaris, consveta esse, inter omnes qvidem constat; sed præconceptas suas deponent opiniones, si Mathemata, qvippe qvæ a vulgaribus erroribus nos liberant, veritatis vim demonstrant & a vulgo nos separant, eo, qvo decet, ordine pertractaverint. Vulgaribus enim Philosophis, si centies dixeris: infinitum posse æqvari finito: infinitum contineri in infinito &c. absurda hæc omnia putabunt, qvæ in se sunt verissima.

NOTA. I.

Num mens humana in spatio sit & qvomodo?

Spatium primario corporibus materialibus, qvippe qvæ in ipso locantur, tribui, hactenus vidimus. Sed, num & qvomodo spatium corporeum, ad res nulla magnitudine, compositione, extensione figura &c. præditas, possit transferri, jam disquirendum est.

Immateriales ejusmodi & simplices substantias, quas dari, suo loco evincemus, a materia & spatio corporeo prorsus distinctas esse agnoscimus, easqve *spirituales* prouti cogitandi vim habent, dicere solemus.

Hac in causa, licet vel maxime mentis humanæ existentiam cum spatio vel si mavis dicere: cum *loco* & *Ubi* suo copulatam nobis concipiamus; lubenter fateor: me ignorare modum, secundum qvem substantia ejusmodi simplex, in qva ne minimam qvidem partem supponere licet, in suo *Ubi* sit constituta; omnem enim hic imaginandi vim evanescere, percipio, id qvod qvilibet alius, qvi ad hæc attendit, in semet ipso experietur. Nec enim ad analogiam materiæ qvippe, cujus partes replere spatii partes & expandi, novimus, anima *Ubi* suum, qvod ipsi tribuimus, vel *locum* potest occupare, quippe qvæ compositionis omnis est expers, nullamqve in se recipere potest extensionem.

NOTA

NOTA II.

NumDeus in ſpatio ſit, & qvomodo?

Multo minus Deo infinito ſuum *Ubi* ſeu ſpatium, modumque, qvo ſit in ſpatio, ex rationis humanæ ſolius principiis, determinare audeo. Hæc enim omnia, revelatione divina in ſubſidium non aſſumta, vix ac ne vix qvidem definire licet; unde nonnullos de rebus ejusmodi obſcuriſſimis tanta fiducia diſſeruiſſe, & ingentem attributorum divinorum catalogum confeciſſe, ſatis mirari non poſſum.

Qvod ſi tamen ex me, qvid ego prælucente ſcriptura ſacra, ſentiam, qværas; ſcito: me nullum ſive finitum ſive infinitum ſpatium Deo, vindicare. Univerſorum enim dominus, qvi eſt ubiqve per ſubſtantiam ſuam, non per ſolam virtutem, Matth. 3. v. 16. 17. præſens eſt *ſpatio & materiæ*, tantum abeſt, ut ſpatii vel materiæ limitibus includatur. Si ex me qværas: qvomodo ſit ſubſtantia ſua omnipræſens; modum, tacente ipſa ſcriptura, definire non audeo, qvamqvam eum per extenſionem ubiqve eſſe, dicere velle, rationi humanæ repugnat.

Cæterum caveas, ne Deum cum ſpatio, vel materia confundas, eumqve cum recentioribus quibusdam in ſpatio eſſe, ſupponas; Deum enim *eſſe in ſpatio, nec tamen eodem includi*, nihil eſt dicere.

SECT. III.
DE MAGNITUDINUM
INFINITATE ET DIVISIBILITATE.

§. 1.

Magnitudines tanqvam indefinitas concipimus.

Si qvis paullo accuratius ad conceptus univerſales mente formatos, attenderit: ſeſe magnitudines omnes, ſive materiales, ſive immateriales tanqvam indefinitas contemplari, facile animadvertet. Hæc illuſtrant tres magnitudinum ſpecies, uti lineæ, ſuperficies & ſolida. Si enim v. c. ſphæram, cylindrum, conum &c. tibi concipis; miſſa determinata magnitudine, indefinite dicta corpora percipis. Idem corpora materialia, licet vel maxime in rerum natura limitibus ſint circumſcripta, monſtrant; telluris enim planitiem indefinite protractam exiſtimamus; & arenam maris indefinita multitudine cogitamus &c.

§. 2.

Magnitudines infinitas concipere non poſſumus.

Qvamqvam igitur magnitudines tanqvam indefinitas contemplari, in noſtra eſt poteſtate; memoratu dignum eſt: nos nullam, magnitudinis infinitæ, ſive ſit data qvavis & aſſignabili major, vel minor, habere ideam, id qvod ſenſus internus qvemlibet docere poteſt. V. c. rectam infinite magnam æqve minus capimus, ac angulum contactus qvolibet rectilineo dato minorem. Et ſic in omnibus aliis.

Conf. Lock de intellectu humano libr. II. cap. XVII.

§. 3.

Qvantitates abſolute ſpectatæ in infinitum poſſunt augeri.

Qvantitas qvævis, ſive ſit numerus, ſive magnitudo continua, ita comparata eſt, ut finita qvantitate ſemper major poſſit accipi, & ſic in infinitum. V. c. lineæ rectæ terminatæ centuplum, millecuplum, decies-millecuplum &c.

ſumi

ſumi poteſt, ſuperficiei itidem & ſolidi &c. Cum igitur in conceptu qvantitatis nihil deprehendatur, qvod *progreſſum hunc in infinitum*, impediat; qvantitatem qvamvis abſolute ſpectatam in infinitum augeri poſſe, jure ſupponi poteſt.

§. 4.

Qvantitates infinite magnæ ſunt reales ſeu poſſibiles.

Licet autem qvantitates ejusmodi, omni data & aſſignabili majores comprehendere neqveamus; nihilominus reales ſeu poſſibiles erunt; a noſtro enim imaginandi defectu, ad rei ipſius veritatem vel falſitatem concludi non poteſt. V. c. ſpatium corporeum infinitum reale eſt, ſi vel maxime iſtud in rerum naturâ non detur, vel a nobis concipiatur; *abſciſſa* infinite magna, qvæ in Geometria ſupponitur, realis eſt & poſſibilis, ſi vel maxime in rerum natura nullibi detur. Et ſic in aliis omnibus.

§. 5.

Qvantitatem infinite magnam excedere, deficere & multiplicari non repugnat.

Qvantitates infinite magnæ, finitis qvidem & dabilibus qvantitatibus ſunt incomparabiles; inter ſe tamen comparantur; ideoqve eas excedere, deficere & multiplicari, non repugnat. V. c. numerus infinite magnus cum altero infinite magno comparatus, poteſt eſſe major vel minor.

§. 6. Hæc

§. 6.

Hæc omnia valent de qvantitatibus infinite parvis.

Progreſſui in infinitum opponitur *regreſſus in infinitum*, ſeu magnitudinum *diviſibilitas*, per qvam non actualem, qvæ fit per motum, intelligimus partium ſeparationem; ſed potius reſolutionem & diſtinctionem intellectualem partium in partes ſine fine. Fundatur hæc reſolutio in Prop. XVI. Elem. III. collat. Conam. III. Sect. II. §. 10. 11.

§. 7.

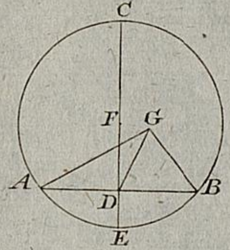
Uſus hujus reſolutionis.

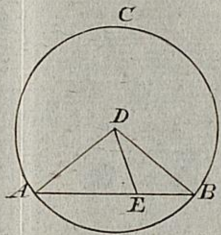
Hæc autem partium in partes ſine fine reſolutio, a præſtantiſſimis omnis ætatis philoſophis ſuppoſita, communibus hominum conceptibus maxime congrua, & ab omni contradictione aliena, maximam in Geometria habet utilitatem. His enim fundamentis, *infinitorum* Arithmetica eſt ſuperſtructa, de qva eſſet actum, ſi magnitudinem ſeu continuum ex indiviſibilibus ſeu atomis componere liceret.

Deo infinito, ſit honor & gloria in ſæcula ſæculorum.

Fig. I. Prop. I. Libr. III. Fig. 2. Prop. II. Fig. 3. Prop. III.

Tab. I.





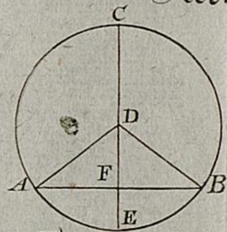


Fig. 4.

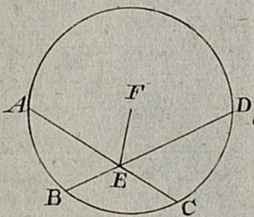


Fig. 5.

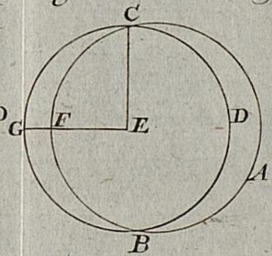


Fig. 6.

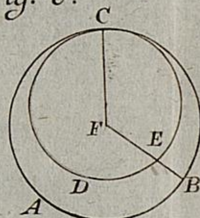


Fig. 7.

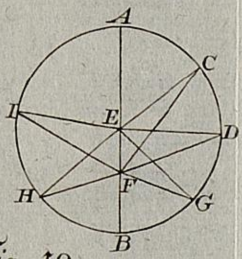


Fig. 8.

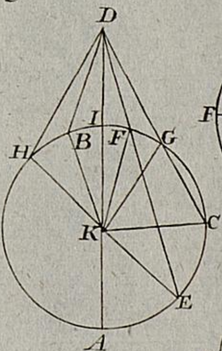


Fig. 9.

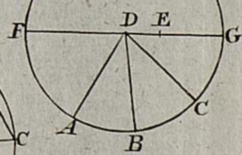


Fig. 10.

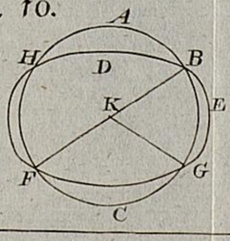
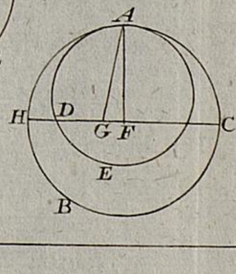


Fig. 11.



J. G. Krügner Jun. sc.

Tab. II.

Fig. 12.

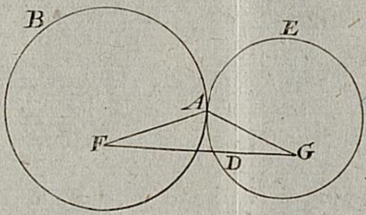


Fig. 13.

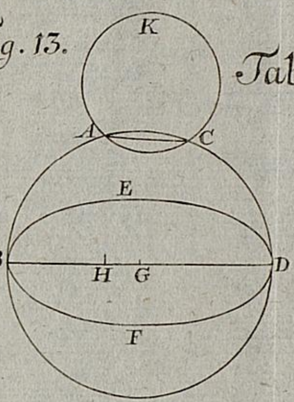


Fig. 14.

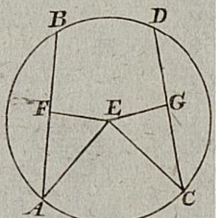


Fig. 15.

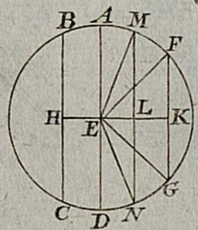


Fig. 16.

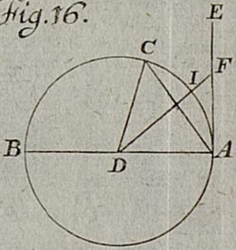


Fig. 17.

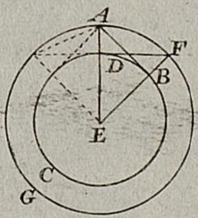


Fig. 18.

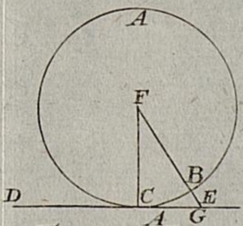


Fig. 19.

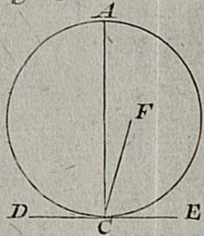


Fig. 20.

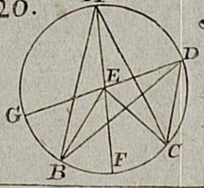


Fig. 21.

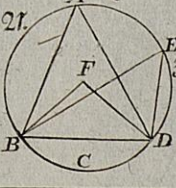


Fig. 22

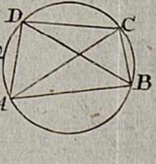
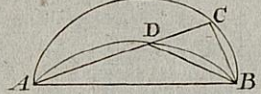


Fig. 23. Prop. XXIII. Fig. 24. Tab. III.



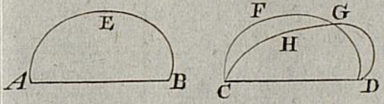


Fig. 25.

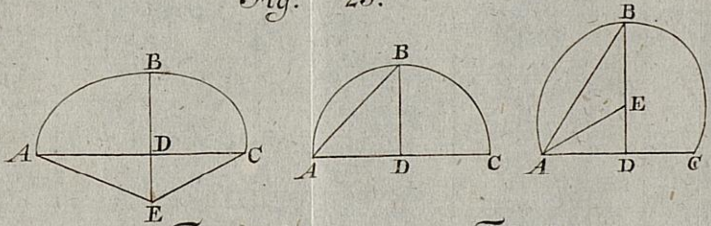
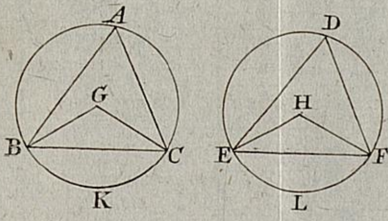
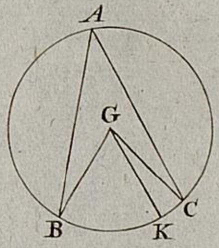


Fig. 26. Fig. 27.





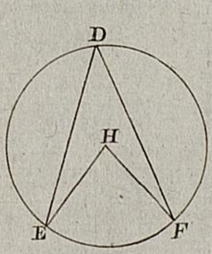


Fig. 28.

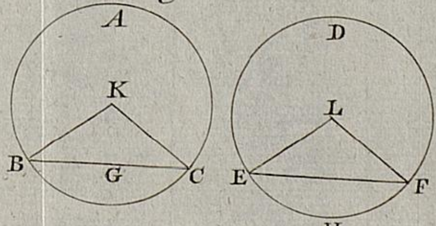
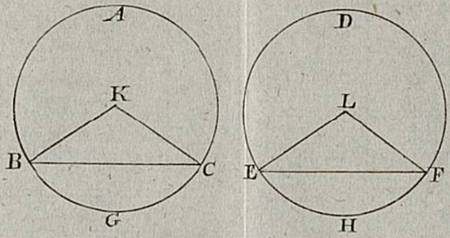


Fig. 29. Prop. XXIX. Fig. 30.



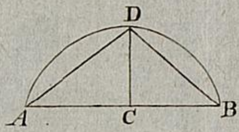


Fig. 31.

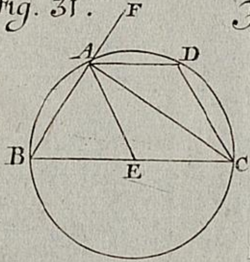


Fig. 32.

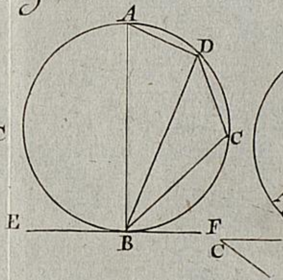
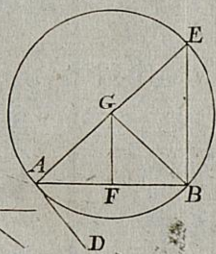
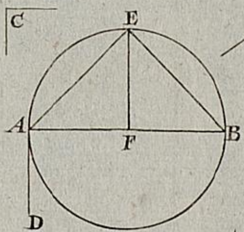


Fig. 33.





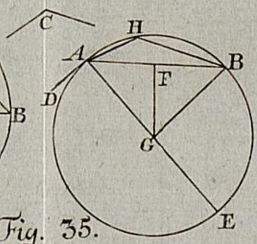


Fig. 34.

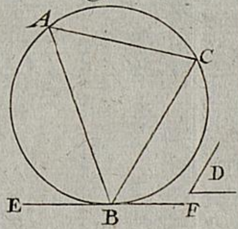
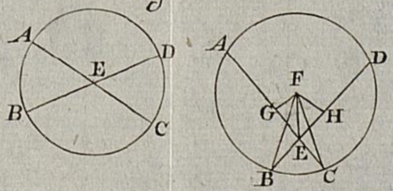
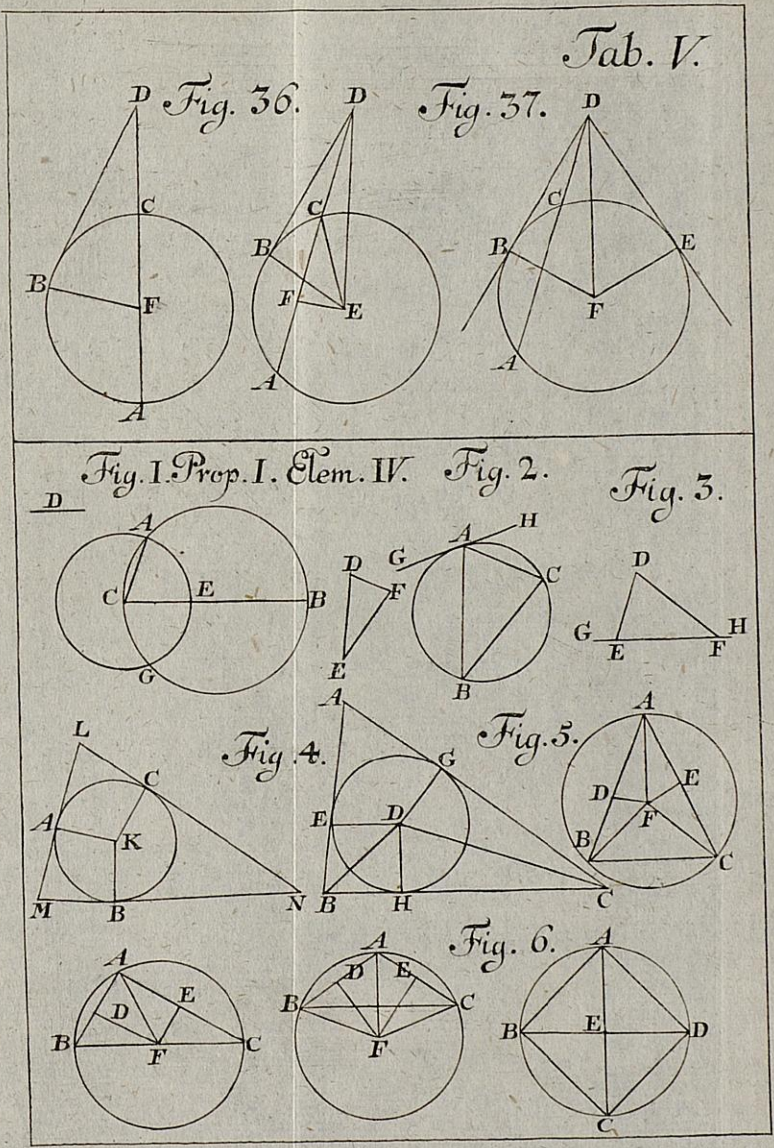


Fig. 35.



Tab. IV.



Tab. V.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. I. Prop. I. Elem. IV.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

Fig. 7.

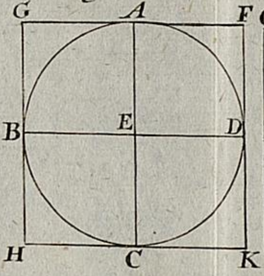


Fig. 8.

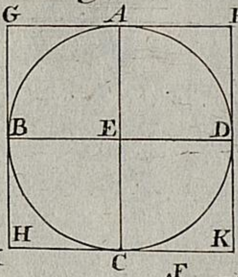


Fig. 9.

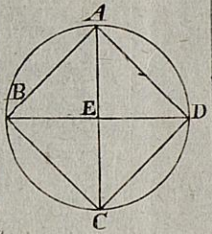


Fig. 10.

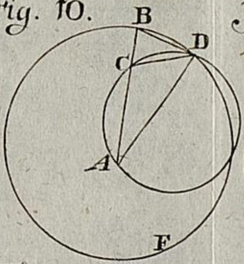


Fig. 11.

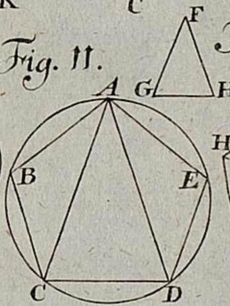


Fig. 12.

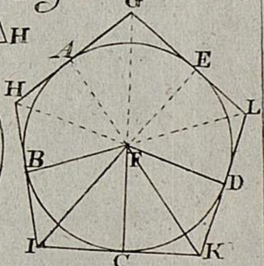


Fig. 13.

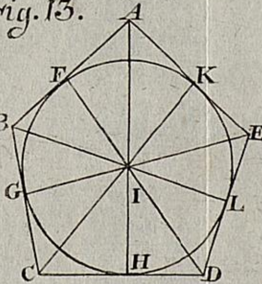


Fig. 14.

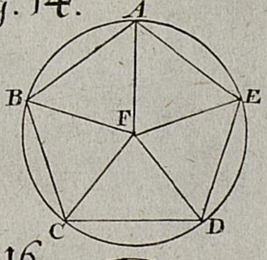


Fig. 15.

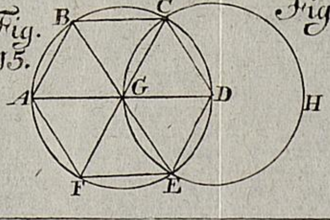
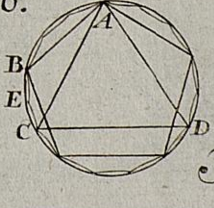
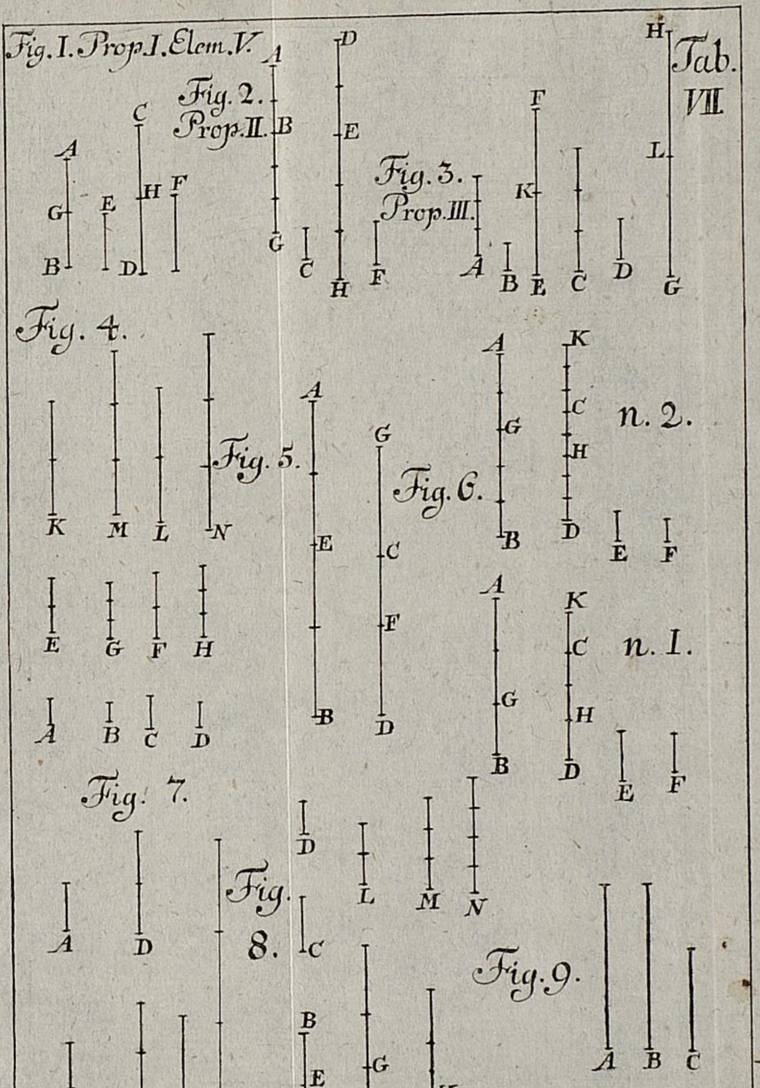
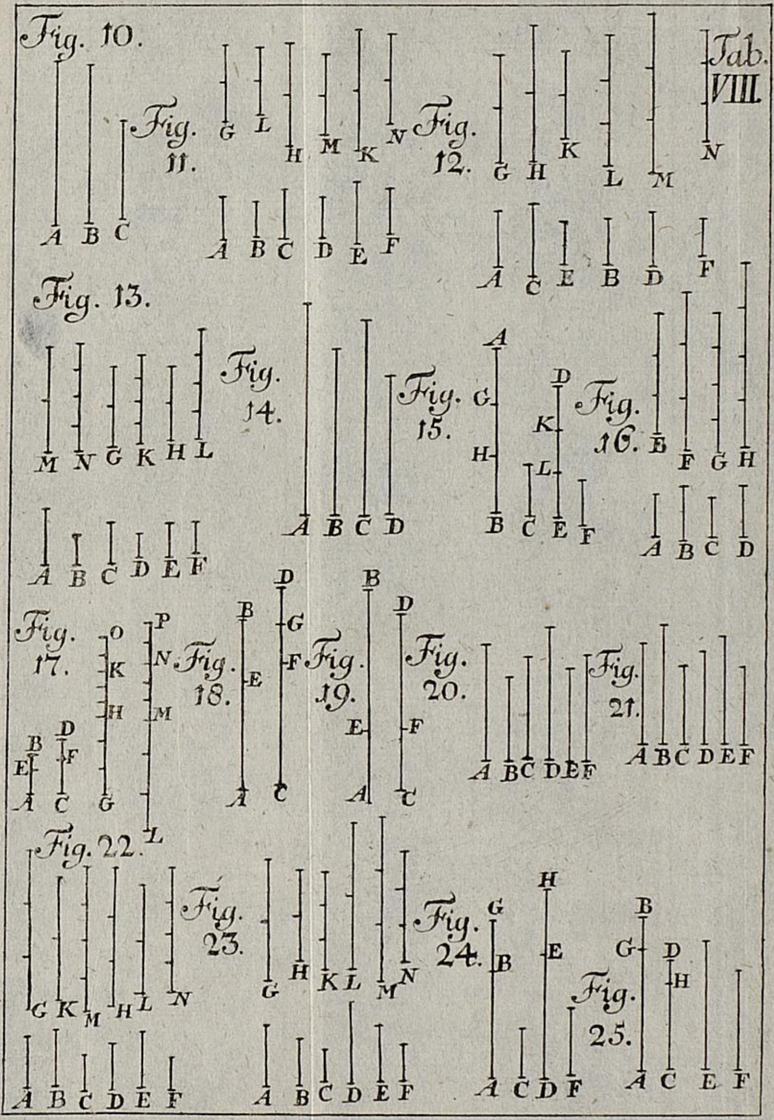


Fig. 16.



Tab. VI.


Tab. VIII.
Fig. I. Prop. I. Elem. V.
Fig. 2. Prop. II.
Fig. 3. Prop. III.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
n. 2.
n. 1.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.



Tab. VIII.
Fig. 10.
A B C
Fig. 11.
G L H M K N
A B C D E F
Fig. 12.
G H K L M N
A C E B D F
Fig. 13.
M N G K H L
A B C D E F
Fig. 14.
A B C D
Fig. 15.
A G H B
D K L C E F
Fig. 16.
E F G H
A B C D
Fig. 17.
B E A D F C
O K H G
P N M L
Fig. 18.
B E A
D G F C
Fig. 19.
B E A
D F C
Fig. 20.
A B C D E F
Fig. 21.
A B C D E F
Fig. 22.
G K M H L N
A B C D E F
Fig. 23.
G H K L M N
A B C D E F
Fig. 24.
G B A C H E D F
Fig. 25.
B G A D H C E F

Prop. I. Elem. VI.

Tab. IX.

Fig. 1.

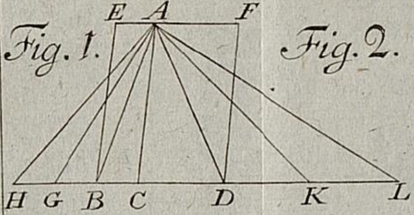


Fig. 2.

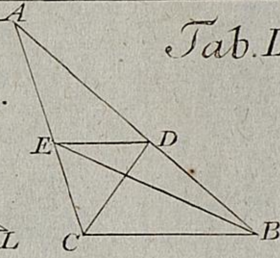


Fig. 3.

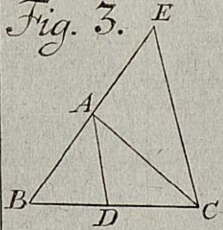


Fig. 4.

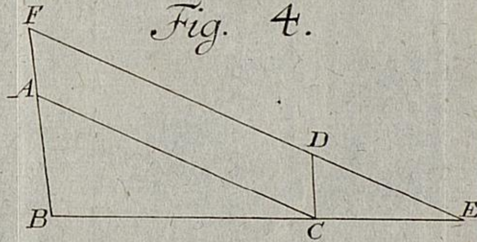


Fig. 5.

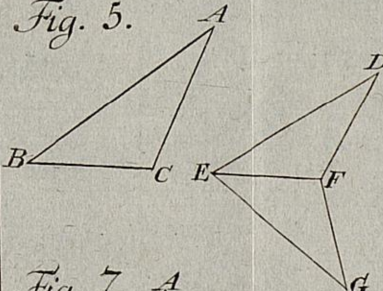


Fig. 6.

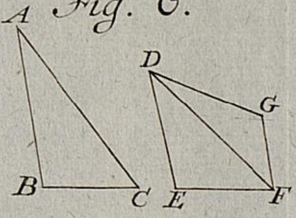


Fig. 7.

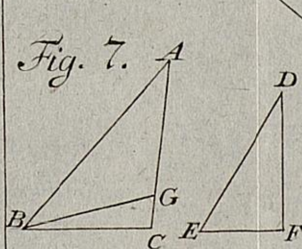
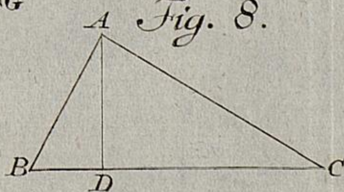


Fig. 8.



Tab. X.

Fig. 9.

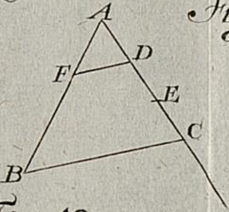


Fig. 10.

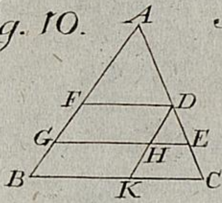


Fig. 11.

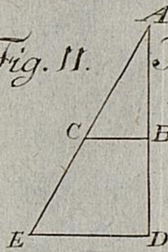


Fig. 12.

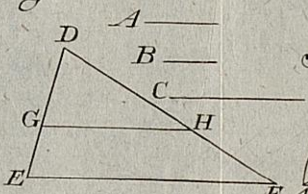


Fig. 13.

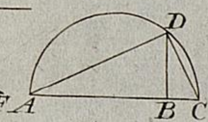


Fig. 14.

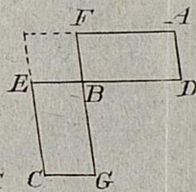


Fig. 15.

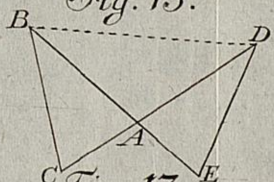


Fig. 16.

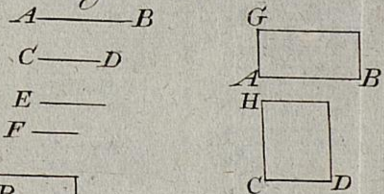


Fig. 17.

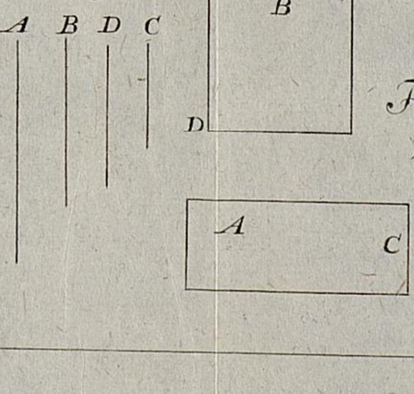
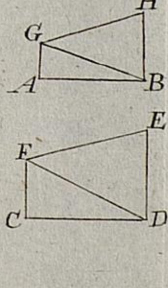


Fig. 18.



Tab. XI.

Fig. 19.

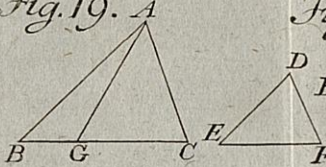


Fig. 20.

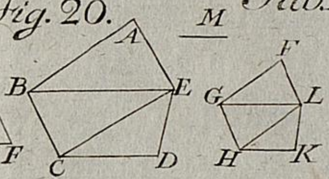


Fig. 21.

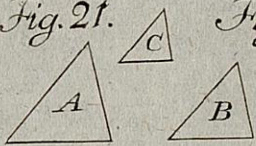


Fig. 22.

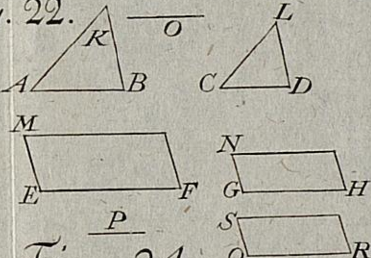


Fig. 23.

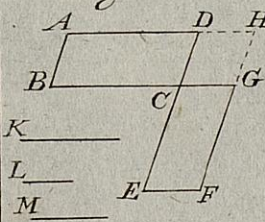


Fig. 24.

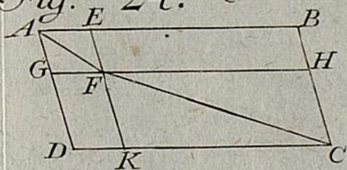


Fig. 25.

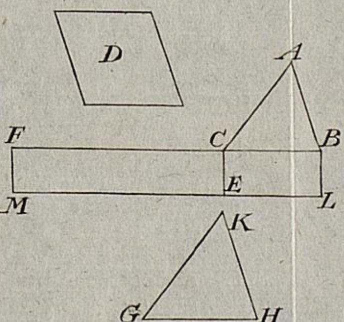
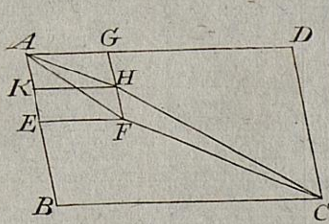
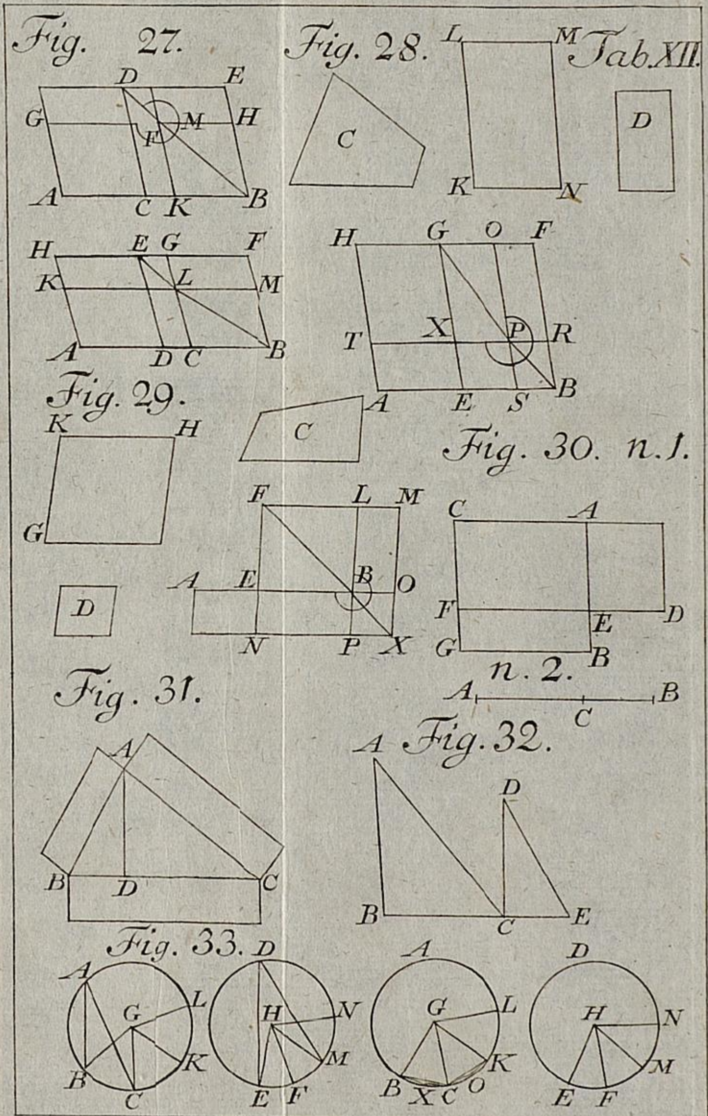


Fig. 26.




Tab. XII.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30. n. 1.
n. 2.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.