Werk

Titel: Scientia rerum universalem ex Euclide restituta

Autor: Hentschius, Joannes Jacobus

Verlag: Haered. Lankisianorum

Ort: Lipsiae

Jahr: 1756

Kollektion: digiwunschbuch; mathematica

Signatur: 8 PHIL II, 288:2

Werk Id: PPN83290273X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN83290273X|LOG_0018

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=83290273X

EUCLIDIS
ELEMENTORUM,
LIBER QUINTUS

DEFINITIONES.

1. *Pars* eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, qvando minor majorem metitur.

2. *Multiplex* eſt major minoris, qvando minor majorem metitur.

3. *Ratio* eſt duarum magnitudinum ejusdem generis ſecundum qvantuplicitatem mutua qvædam habitudo.

4. *Rationem inter ſe magnitudines* habere dicuntur, qvæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

5. *In eadem ratione magnitudines* eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad qvartam; qvando primæ & tertiæ æqve multiplices, ſecundæ & qvartæ æqve multiplices, juxta qvamvis multiplicationem, utraqve utramqve vel una ſuperant, vel una æqvales ſunt, vel una deficiunt inter ſe comparatæ.

6. Magnitudines, qvæ eandem rationem habent, *proportionales* vocentur.

7. Qvando autem æqve multiplicium multiplex primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, mul-

tiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem qvartæ: tunc prima ad ſecundam *majorem* habere dicitur *rationem*, qvam tertia ad qvartam.

8. *Proportio* eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſint proportionales, prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad ſecundam.

11. Si qvatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad qvartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad ſecundam; & ſic deinceps uno amplius, qvamdiu proportio exſtiterit.

12. *Homologæ magnitudines* dicuntur antecedentes qvidem antecedentibus, conſeqventes vero conſeqventibus.

13. *Alterna ratio* eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſeqventis ad conſeqventem.

14. *Inverſa ratio* eſt ſumptio conſeqventis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſeqventem.

15. *Compoſitio rationis* eſt ſumptio antecedentis una cum conſeqvente tanqvam unius ad ipſam conſeqventem.

16. *Diviſio rationis* eſt ſumptio exceſſus, qvo antecedens ſuperat conſeqventem ad ipſam conſeqventem.

17. *Converſio*

17. *Conversio rationis* est sumptio antecedentis ad excessum, qvo antecedens ipsam conseqventem superat.

18. *Ex æqvalitate ratio* est, qvando pluribus existentibus magnitudinibus & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER: Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. *Ordinata proportio* est, qvando fuerit ut antecedens ad conseqventem, ita antecedens ad conseqventem; ut autem conseqvens ad aliam qvampiam, ita conseqvens ad aliam qvampiam.

20. *Perturbata* vero *proportio* est, qvando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad conseqventem: ut autem in primis magnitudinibus conseqvens ad aliam qvampiam, ita in secundis magnitudinibus alia qvæpiam ad antecedentem.

PROP. I. THEOR.

Si fuerint qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, singulæ singularum æqve multiplices; qvam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint qvotcunqve magnitudines AB, CD, qvotcunqve magnitudinum E, F, æqvalium numero ſingulæ ſingularum æqve multiplices: Dico qvam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices eſſe & AB, CD ipſarum E, F.

Demonſtratio.

Qvoniam AB æqve multiplex eſt ipſius E, atqve CD ipſius F (per hypoth); qvot magnitudines ſunt in AB æqvales ipſi E, tot erunt & in CD æqvales ipſi F.

Dividatur AB in partes ipſi E æqvales, qvæ ſint AG, GB; CD vero dividatur in partes æqvales ipſi F, videlicet CH, HD: erit igitur multitudo partium CH, HD æqvalis multitudini ipſarum AG, GB.

Rurſus qvoniam AG eſt æqvalis E, & CH æqvalis F, erunt & AG † CH æqvales ipſis E † F (per 2. ax.);

Eadem ratione GB eſt æqvalis E, & HD ipſi F; erunt igitur & GB † HD æqvales ipſis E † F (per 2. ax.).

Qvot igitur ſunt in AB æqvales ipſi E, tot ſunt & in AB † CD æqvales ipſis E † F: qvare qvam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices erunt & AB † CD ipſarum E † F.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si prima ſecundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, fuerit autem & qvinta ſecundæ æqve multiplex atqve ſexta qvartæ, erunt etiam prima & qvinta, ſimul ſumptæ, ſecundæ æqve multiplices atqve tertia & ſexta qvartæ.

Sit prima AB ſecundæ C æqve multiplex atqve tertia DE qvartæ F: autem & qvinta BG ſecundæ C æqve multiplex atqve ſexta EH qvartæ F; Dico primam AB & qvintam BG ſimul ſumptas ſecundæ C æqve multiplices eſſe, atqve tertiam DE & ſextam EH, ſimul ſumptas, qvartæ F.

Demonſtratio.

Qvoniam AB æqve multiplex eſt ipſius C atqve DE ipſius F (per hypoth.); qvot magnitudines ſunt in AB æqvales C, tot erunt & in DE æqvales F.

Eadem ratione & qvot ſunt in BG æqvales C, tot & in EH erunt æqvales F.

Qvot igitur ſunt in tota AG æqvales C, tot erunt & in tota DH æqvales F, ergo qvam multiplex eſt AG ipſius C, tam multiplex eſt DH ipſius F,

Sed toti AG æqvales ſunt prima AB & qvinta BG ſimul ſumptæ, toti autem DH æqvales ſunt tertia DE & ſexta EH ſimul ſumptæ: Qvare prima & qvinta AB † BG, ſecundæ C æqve multiplices erunt, atqve tertia & ſexta DE † EH qvartæ F.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. III. THEOR.

Si prima ſecundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, ſumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo ſumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem ſecundæ, altera vero qvartæ.

Sit prima A ſecundæ B æqve multiplex, atqve tertia C qvartæ D; & ſumantur ipſarum A, C æqve multiplices EF, GH, Dico EF æqve multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D.

Demonſtratio.

Qvoniam EF æqve multiplex eſt ipſius A; atqve GH ipſius C; qvot magnitudines ſunt in EF æqvales A, tot erunt & in GH æqvales C.

Dividatur EF qvidem in magnitudines ipſi A æqvales EK, KF; GH vero dividatur in magnitudines æqvales ipſi C, videlicet GL, LH; erit igitur ipſarum EK, KF multitudo æqvalis multitudini ipſarum GL, LH.

Et, qvoniam æqve multiplex eſt A ipſius B atqve C ipſius D, æqvalis autem EK ipſi A erit EK æqve multiplex ipſius B atqve GL ipſius D.

Eadem ratione æqve multiplex erit KF ipſius B, atqve LH ipſius D. Cum igitur prima EK (ſive A) ſecundæ B æqve multiplex eſt atqve tertia GL (ſive C) qvartæ D; eſt autem & qvinta KF ſecundæ B æqve multiplex atqve ſexta LH qvartæ D: erit & compoſita e prima & qvinta EF

ſecundæ

ſecundæ B æqve multiplex atqve tertia & ſexta GH qvartæ D (per 2. 5.).

Si igitur prima ſecundæ æqve fuerit multiplex atqve tertia qvartæ, ſumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo ſumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem ſecundæ, altera vero qvartæ.

Qvod erat demonſtr.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, & æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices ſecundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

Prima A ad ſecundam B eandem rationem habeat qvam tertia C ad qvartam D, & ſumantur ipſarum qvidem A, C utcunqve æqve multiplices E, F, ipſarum vero B, D aliæ utcunqve æqve multiplices G, H: Dico E ad G ita eſſe ut F ad H.

Demonſtratio.

Sumantur ipſarum qvidem E, F æqve multiplices K, L, & ipſarum G, H æqve multiplices M, N.

Qvoniam igitur E æqve multiplex eſt ipſius A atqve F ipſius C, ſumantur autem ipſarum E, F æqve multiplices K, L, erit K æqve multiplex ipſius A atqve L ipſius C (per 3. 5.).

Eadem ratione M æqve multiplex erit ipſius B atqve N ipſius D. Et qvoniam eſt ut A ad B ita C ad D, ſumptæ autem ſunt ipſarum A, C æqve multiplices K, L, & ipſarum B, D aliæ utcunqve æqve multiplices M, N: Si K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor erit (per 5. def. 5.).

Suntqve K, L, qvidem ipſarum E, F æqve multiplices; M, N vero ipſarum G, H aliæ utcunqve æqve multiplices: ut igitur E ad G, ita erit F ad H (per 5. def. 5.)

Qvare ſi prima ad ſecundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices ſecundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

Qvod erat demonſtr.

Corollarium.

Qvoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi æqvalis, æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, & N ſuperare ipſam L; & ſi æqvalis, æqvalem eſſe; & ſi minor minorem: ac propterea ut G ad E, ita erit H ad F. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi qvatuor magnitudines ſint proportionales, & inverſe proportionales erunt.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æqve multiplex ſit atqve ablata ablatæ; erit & reliqva reliqvæ æqve multiplex atqve tota totius.

Sit

Sit magnitudo AB magnitudinis CD æqve multiplex atqve ablata AE ablatæ CF; dico & reliquam EB reliqvæ FD æqve multiplicem esse atqve totam AB totius CD.

Demonſtratio.

Qvam multiplex enim eſt AE ipſius CF, tam multiplex fiat & EB ipſius CG.

Et qvoniam AE æqve multiplex eſt ipſius CF, atqve AB ipſius GF (per 1. 5.); ponitur autem AE æqve multiplex CF atqve AB ipſius CD; æqve multiplex eſt AB utriusqve GF, CD: ac propterea GF ipſi CD eſt æqvalis. Communis auferatur CF; reliqva igitur GC æqvalis eſt reliqvæ DF.

Itaqve qvoniam AE æqve multiplex eſt CF atqve EB ipſius GC, eſtqve GC æqvalis DF; erit AE æqve multiplex CF atqve EB ipſius FD.

Æqve multiplex autem ponitur AE ipſius CF atqve AB ipſius CD: Ergo EB eſt æqve multiplex ipſius FD atqve AB ipſius CD: & reliqva igitur EB reliqvæ FD æqve multiplex eſt atqve tota AB totius CD.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices ſint, & ablatæ qvædam ſint earundem æqve multiplices: erunt & reliqvæ vel eisdem æqvales, vel ipſarum æqve multiplices.

Sint duæ magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum

gnitudinum E, F æqve multiplices, & ablatæ AG, CH earundem (Fig. 2. *E, F, æqve multiplices: Dico & reliqvas GB, HD vel ipsis E, F, æqvales esse, vel ipsarum æqve multiplices,*

1. *Sit enim primum GB æqvalis E: (vid Fig. 1.): dico & HD ipsi F esse æqvalem.* (Fig. 1.

Demonstratio.

Ponatur ipsi F æqvalis CK.

Qvoniam AG æqve multiplex est ipsius F atqve CH ipsius F, estqve GB qvidem æqvalis E, C K vero æqvalis F (per construct.) erit AB æqve multiplex ipsius E atqve HK ipsius F (per 2. 5.).

Æqve autem multiplex ponitur AB ipsius E atqve CD ipsius F, (per hypoth.) ergo KH æqve multiplex est ipsius F atqve CD ipsius F.

Qvoniam igitur utraqve ipsarum KH, CD est æqve multiplex ipsius F, erit KH æqvalis CD. communis auferatur CH: ergo reliqva KC reliqvæ HD est æqvalis.

Sed KC est æqvalis F, HD igitur ipsi F est æqvalis.

Si igitur GB ipsi E æqvalis fuerit, etiam HD ipsi F æqvalis erit.

2. Similiter demonstrabimus si GB (ut in fig. 2.) multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F æqve multiplicem esse.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices sint, & ablatæ qvædam sint earundem æqve multiplices: erunt & reliqvæ vel iisdem æqvales, vel ipsarum æqve multiplices. *Qvod erat demonstr.*

PROP.

PROP. VII. THEOR.

Æqvales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æqvales.

Sint æqvales magnitudines A, B, alia autem qvævis magnitudo C; dico utramqve ipsarum A, B, ad C eandem habere rationem; & etiam C ad utramqve A, B eandem habere rationem.

Constructio.

Sumantur ipsarum A, B, æqve multiplices D, E, & ipsius C alia utcunqve multiplex F.

Demonstratio.

Qvoniam D ipsius A æqve multiplex est atqve E ipsius B, estqve A ipsi B æqvalis; erit & D æqvalis E (per 6. ax.); alia autem est F utcunqve multiplex ipsius C: ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor. (per def. 5. 5.) erit igitur ut A ad C ita B ad C; & præterea inverse etiam ut C ad A ita C ad B (per coroll. 4. 5.).

Qvod erat demonstr.

PROP. VIII. THEOR.

In æqvalium magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem qvam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem, qvam ad majorem.

Sint

Sint inæqvales magnitudines AB, C, & sit AB major, C vero minor, & sit alia qvæcunqve D; Dico AB ad D majorem habere rationem qvam C ad D; & D ad C majorem habere rationem, qvam ad AB.

Constructio.

Qvoniam AB major est qvam C, ponatur ipsi C æqvalis BE (per 3. 1.); minor igitur ipsarum AE, EB multiplicata major aliqvando erit qvam D, (per 4. def. 5.)

Sit AE minor qvam EB, & multiplicetur AE, qvoad fiat major qvam D: sitqve FG ipsius AE multiplex, qvæ ipsa D est major; qvam multiplex autem est FG ipsius AE, tam multiplex fiat & GH ipsius EB, & K ipsius C: sumaturqve ipsius D dupla qvidem L, tripla vero M, & deinceps una major, qvoad ea, qvæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, & primo major qvam K sumatur, sitqve N ipsius D qvadrupla, & primo major qvam K.

Demonstratio.

Qvoniam igitur K primo minor est qvam N, non erit K minor qvam M; & cum æqve multiplex sit FG ipsius AE, atqve GH ipsius EB, erit & FG æqve multiplex ipsius AE atqve FH ipsius AB (per 1. 5.); æqve autem multiplex est FG ipsius AE atqve K ipsius C: ergo FH æqve multiplex est ipsius AB atqve K ipsius C; ac propterea FH, K ipsarum AB, C sunt æqve multiplices.

Rursus

Rurſus, qvoniam GH æqve multiplex eſt ipſius EB atqve K ipſius C, eſtqve EB æqvalis C (per conſtr.), erit & GH ipſi K æqvalis. Sed K non eſt minor qvam M: non eſt igitur GH minor qvam M.

Major autem eſt FG qvam D (per conſtr.): ergo tota FH utrisqve ſimul D, M major erit; Sed utræqve ſimul D, M ſunt æqvales ipſi N, qvare FH ſuperat N; K vero ipſam N non ſuperat; & ſunt FH, K æqve multiplices ipſarum AB, C; & N ipſius D alia qvædam multiplex: ergo AB ad D majorem rationem habet qvam C ad D (per 7. def. 5.).

Dico præterea & D ad C majorem habere rationem qvam D ad AB. Iisdem enim conſtructis, oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare; atqve eſt N multiplex ipſius D, & FH, K aliæ qvædam ipſarum AB, C æqve multiplices; ergo D ad C majorem rationem habet, qvam D ad AB. (per 4. def. 5.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. IX. THEOR.

Qvæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æqvales: & ad qvas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æqvales.

Demonſtratio.

1. *Habeat enim utraqve ipſarum A, B ad C eandem rationem: Dico A ipſi B æqvalem eſſe.*

Si

Si enim non esset æqvalis, non haberet utraqve ipsarum A, B ad C eandem rationem (per 8. 5.); habet autem: æqvalis igitur est A ipsi B.

2. *Habeat rursus C ad utramqve ipsarum A, B eandem rationem; Dico A æqvalem esse ipsi B.*

Si enim non sit A ipsi B æqvalis, non haberet C ad utrumqve A, B eandem rationem, (per 8. 5.) habet autem: Ergo A ipsi B est æqvalis.

Qvæ igitur eandem rationem habent ad eandem, sunt inter se æqvales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsæ etiam sunt inter se æqvales.

Qvod erat demonstr.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, qvæ majorem habet rationem, est major; ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa est minor.

Demonstratio.

1. *Habeant enim A ad C majorem rationem qvam B ad C; Dico A majorem esse qvam B.*

Si enim non est major, vel æqvalis erit vel minor; æqvalis autem non est A ipsi B sic enim utraqve ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem (per 7. 5.): Atqvi eandem non habet: non est igitur A æqvalis ipsi B. Sed neqve minor est A qvam B, haberet enim A ad C minorem rationem qvam B ad C (per 8. 5.); atqvi non

non habet minorem: non eſt igitur A minor qvam B; Oſtenſum autem eſt, neqve eſſe æqvalem: ergo A qvam B major erit.

Qvod primo erat demonſtr.

2. Habeat rurſus C ad B majorem rationem, qvam C ad A: dico B minorem eſſe qvam A.

Si enim non eſt minor, vel æqvalis eſt, vel major, æqvalis utiqve non eſt B ipſi A, enim C ad utramqve ipſarum A, B eandem rationem haberet (per 7. 5.); non habet autem: ergo A ipſi B non eſt æqvalis.

Sed neqve major eſt B qvam A, haberet enim C ad B minorem rationem qvam ad A; Atqvi non habet: non eſt igitur B major qvam A; Oſtenſum autem eſt neqve æqvalem eſſe: ergo B minor erit qvam A.

Qvod 2do erat demonſtrandum.

PROP. XI. THEOR.

Qvæ eidem eædem ſunt rationes & inter ſe ſunt eædem.

Sint enim ut A ad B ita C ad D, ut autem C ad D ita E ad F: dico ut A ad B ita eſſe E ad F.

Conſtructio.

1) Sumantur ipſarum A, C, E æqve multiplices G, H, K.

2) Ipſarum B, D, F ſumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonſtratio.

Qvoniam igitur eſt ut A ad B ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A, C æqve multiplices G, H, & ipſarum B, D aliæ utcunqve æqve multiplices L, M: Si G ſuperat L & H ipſam M ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor (per 5. def. 5.).

Rurſus qvoniam eſt ut C ad D ita E ad F & ſumptæ ſunt ipſarum C, E æqve multiplices H, K, ipſarum vero D, F aliæ utcunqve æqve multiplices M, N: ſi H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor. Sed ſi H ſuperat M, & G ſuperabit L & ſi æqvalis, æqvalis & ſi minor, minor: qvare ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor. Et ſunt G, K qvidem ipſarum A, E æqve multiplices, L, N vero ipſarum B, F aliæ utcunqve æqve multiplices; Ergo ut A ad B ita erit E ad F (per 5. def. 5.)

Qvod erat demonſtr.

PROP. XII. THEOR.

Si qvotcunqve magnitudines proportionales fuerint; ut eſt una antecedentium ad unam conſeqventium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſeqventes.

Sint qvotcunqve magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; & ut A ad B ita ſit C ad D, & E ad F: Dico ut A ad B, ita eſſe A, C, E ad B, D, F.

Conſtructio.

Conſtructio.

1. Sumantur ipſarum A, C, E æqve multiplices G, H, K;
2. Ipſarum B, D, F ſumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonſtratio.

Qvoniam ut A ad B, ita eſt C ad D, & E ad F; & ſumptæ ſunt ipſarum qvidem A, C, E æqve multiplices G, H, K ipſarum vero B, D, F aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N: Si G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor (per 5. def. 5.).

Qvare ſi G ſuperat L, ſuperabunt & G, H, K ipſas L, M, N; & ſi æqvalis, æqvales? & ſi minor, minores. Suntqve C & G, H, K ipſarum A & A, C, E æqve multiplices; nam ſi fuerunt qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, ſingulæ ſingularum æqve multiplices, qvam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Eadem ratione L & L, M, N ipſarum B & B, D, F ſunt æqve multiplices: eſt igitur ut A ad B ita A, C, E ad B, D, F.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam; tertia autem ad qvartam majorem habeat rationem qvam qvinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem qvam qvinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat qvam tertia C ad qvartam D, tertia autem C ad qvartam D majorem habeat rationem, qvam qvinta E ad sextam F: Dico & primam A ad secundam B majorem habere rationem, qvam qvintam E ad sextam F.

Demonstratio.

Qvoniam C ad D majorem habet rationem, qvam E ad F, sumantur qvædam ipsarum C, E æqve multiplices, & ipsarum D, F, aliæ qvædam æqve multiplices: & multiplex qvidem ipsius C superet multiplicem ipsius D, multiplex vero ipsius E non superat multiplicem ipsius F (per 7. def. 5.)

Sumantur, & sint ipsarum C, E æqve multiplices G, H, & ipsarum D, F aliæ qvædam æqve multiplices K, L, ita ut G qvidem superet K, H vero ipsam L non superet: & qvam multiplex est G ipsius C, tam multiplex sit & M ipsius A; qvam multiplex autem K ipsius D, tam multiplex sit & N ipsius B.

Et qvoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C, æqve multiplices M, G, & ipsarum B, D aliæ æqve multiplices N, K: Si M superat N, & G ipsam K superabit, & si æqvalis æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Sed

Sed G superat K, ergo & M ipsam N superabit; H vero non superat L; suntqve M, H ipsarum A, E æqve multiplices, & N, L ipsarum B, F aliæ qvædam æqve multiplices; Ergo A ad B majorem rationem habebit qvam E ad F.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: & secunda qvam qvarta major erit, & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, qvam tertia C ad qvartam D, major autem sit A qvam C: Dico & B qvam D majorem esse.

Demonstratio.

Qvoniam enim A major est qvam C, & alia utcunqve magnitudo B; habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.). Sed ut A ad B ita C ad D: Ergo & C ad D majorem habebit rationem qvam C ad B (per 13. 5.)

Ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est (per 10. 5.); Qvare D est minor qvam B: ac propterea B qvam D major erit. Similiter demonstrabimus & si A æqvalis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqvalem: & si A sit minor qvam C, & B qvam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: &

ſecunda qvam qvarta major erit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor.

Qvod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter ſe.

Sit enim AB æqve multiplex ipſius C atqve DE ipſius F; Dico ut C ad F ita eſſe AB ad DE.

Demonſtratio.

Qvoniam æqve multiplex eſt AB ipſius C atqve DE ipſius F; qvot ſunt magnitudines in AB æqvales ipſi C, totidem erunt & in DE æqvales F: Dividatur AB in magnitudines ipſi C æqvales, qvæ ſint AG, GH, HB: & DE dividatur in magnitudines æqvales F, videlicet DK, KL, LE: erit igitur ipſarum AG, GH, HB multitudo æqvalis multitudini ipſarum DK, KL, LE. Et qvoniam æqvales ſunt inter ſe AG, GH, HB, ſuntqve DK, KL, LE etiam inter ſe æqvales, erunt ut AG ad DK ita GH ad KL & HB ad LE (per 7. 5.): & erit ut una antecedentium ad unam conſeqventium, ita omnes antecedentes ad omnes conſeqventes: eſt igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipſi C eſt æqvalis, & DK ipſi F: ergo ut C ad F ita erit AB ad DE.

Qvod erat demonſtr.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

Si qvatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

Sint qvatuor magnitudines A, B, C, D proportionales, sitqve ut A ad B ita C ad D; Dico & alterne proportionales esse; videlicet ut A ad C ita esse B ad D.

Constructio.

1. Sumantur ipsarum A, B æqve multiplices E, F;
2. Ipsarum vero C, D sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices G, H.

Demonstratio.

Qvoniam æqve multiplex est E ipsius A atqve F ipsius B; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter se (per 1. 5. 5.): erit ut A ad B ita E ad F.

Ut autem A ad B ita C ad D: ergo ut C ad D ita E ad F (per 11. 5.).

Rursus, qvoniam G, H sunt ipsarum C, D, æqve multiplices; erit ut C ad D, ita G ad H; ergo ut E ad F ita G ad H (per 11. 5.).

Qvod si qvatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit qvam tertia; & secunda qvam qvarta major erit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 14. 5.).

Si igitur E ſuperat G, & F ipſam H ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor.

Sunt autem E, F, ipſarum A, B, æqve multiplices, & G, H, ipſarum C, D, aliæ utcunqve æqve multiplices: ergo ut A ad C ita B ad D (per 5. def. 5.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. XVII. THEOR.

Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt.

Sint compoſitæ magnitudines AB, BE, CD, DF proportionales, ſitqve ut AB ad BE ita CD ad DF: Dico etiam diviſas proportionales eſſe: videlicet ut AE ad EB ita eſſe CF ad FD.

Conſtructio.

1. Sumantur ipſarum AE, EB, CF, FD æqve multiplices GH, HK, LM, MN.
2. Sumantur ipſarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP.

Demonſtratio.

Qvoniam GH æqve multiplex eſt ipſius AE atqve HK ipſius EB (per conſtr.) erit GH ipſius AE æqve multiplex atqve GK ipſius AB (per 1. 5.).

Æqve autem multiplex eſt GH ipſius AE atqve

LM

LM ipsius CF: Ergo GK æqve multiplex est ipsius AB, atqve LM ipsius CF.

Rursus qvoniam æqve multiplex est LM ipsius CF atqve MN ipsius FD; erit LM æqve multiplex ipsius CF atqve LN ipsius CD.

Sed æqve multiplex erat LM ipsius CF atqve GK ipsius AB; æqve igitur multiplex est GK ipsius AB atqve LN ipsius CD; qvare GK, LN ipsarum AB, CD æqve multiplices erunt.

Rursus qvoniam æqve multiplex est HK ipsius EB atqve MN ipsius FD; est autem & KO ipsius EB æqve multiplex, atqve NP ipsius FD: etiam composita HO ipsius EB æqve multiplex est atqve MP ipsius FD (per 2. 5.).

Cum autem sit ut AB ad BE, ita CD ad DF, & sumptæ sint ipsarum qvidem AB, CD æqve multiplices GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices HO, MP: igitur si GK superat HO, & LN superabit MP; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Superet igitur GK ipsam HO communiqve ablata HK, & GH ipsam KO superabit.

Sed si GK superat HO, & LN superat MP: superet itaqve LN ipsam MP; communiqve MN ablata & LM superabit NP: Qvare si GH superat KO & LM ipsam NP superabit.

Similiter demonstrabimus & si GH sit æqvalis KO, & LM ipsi NP esse æqvalem; & si minor minorem.

Sunt autem GH, LM, ipsarum AE, CF æqve multiplices, & ipsarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP: Ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines AF, EB, CF, FD proportionales, & ut AE ad EB ita FC ad FD: Dico etiam compoſitas proportionales eſſe; videlicet ut AB ad BE ita CD ad FD.

Demonſtratio.

Si enim non eſt ut AB ad BE ita CD ad FD; erit ut AB ad BE ita CD vel ad minorem qvam FD, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem nempe ad DG, & qvoniam eſt ut AB ad BE ita CD ad DG, compoſitæ magnitudines ſunt proportionales: Ergo & diviſæ proportionales erunt (per 17. 5.): eſt igitur ut AE ad EB ita CG ad GD.

Ponitur autem & ut AE ad EB ita CF ad FD: qvare & ut CG ad GD ita CF ad FD (per 11. 5.); At prima CG major eſt qvam tertia CF: ergo & ſecunda GD major erit qvam qvarta FD; ſed & minor, qvod fieri non poteſt: non eſt igitur ut AB ad BE ita CD ad minorem qvam FD.

Similiter oſtendemus neqve eſſe CD ad majorem qvam FD: eſt igitur ad ipſam.

Qvare

Qvare ſi diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqva ad reliqvam ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD ita ablata AE ad ablatam CF: dico & reliqvam EB ad reliqvam FD ita eſſe, ut tota AB ad totam CD.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & alterne erit ut BA ad AE ita DC ad CF (per 16. 5.)

Et qvoniam compoſitæ magnitudines ſunt proportionales, & diviſæ proportionales erunt (per 17. 5.); ut igitur BE ad EA, ita DF ad CF; rurſus alterne ut BE ad DF ita EA ad FC.

Sed ut AE ad CF ita poſita eſt AB ad CD: & igitur reliqva EB erit ad reliqvam FD ut tota AB ad totam CD (per 11. 5.).

Qvod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Et qvoniam oſtenſum eſt ut AB ad CD ita eſſe EB ad FD (per 16. 5.); ſi fuerit alterne ut AB ad BE ita CD ad DF, nempe compoſitæ magni-

tudines

tudines proportionales: oſtenſum autem eſt ut AB ad AE ita eſſe CD ad CF (per 16. & 19. 5.), qvod eſt per converſionem rationis (per 17. def. 5.). Ex hoc igitur perſpicuum eſt, ſi compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & per converſionem rationis proportionales eſſe.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur in eadem ratione, ex æqvo autem prima major ſit qvam tertia: & qvarta qvam ſexta major erit; & ſi æqvalis æqvalis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F, binæ ſumptæ in eadem ratione, ſitqve ut A ad B ita D ad E, & ut B ad C ita E ad F, ex æqvo autem major ſit A qvam C; dico & qvartam D majorem eſſe ſexta F; qvodſi prima A tertiæ C fuerit æqvalis, erit & qvarta D æqvalis ſextæ F; ſin illa minor, hæc qvoqve minor erit.

Demonſtratio.

Qvoniam A major eſt qvam C, alia vero utcunqve B, & major ad eandem majorem habet rationem qvam minor (per 8. 5.); habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B.

Sed

Sed ut A ad B ita D ad E; & invertendo ut C ad B ita F ad E ergo & D ad E majorem habet rationem qvam F ad E.

Ad eandem vero rationem habentium, qvæ majorem habet rationem, illa major eſt (per 10. 5); major igitur eſt D qvam F. Similiter oſtendemus & ſi A ſit æqvalis C & D ipſi F æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æqvo prima major ſit qvam tertia: & qvarta qvam ſexta major erit; & ſi æqvalis, æqvalis, & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F, binæ ſumptæ & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, ut vero B ad C ita D ad E, & ex æqvo A major ſit qvam C: Dico & D qvam F majorem eſſe & ſi æqvalis, æqvalem; & ſi minor, minorem.

Demonſtratio.

Qvoniam major eſt A qvam C, alia vero B: habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.).

Sed

Sed ut A ad B ita E ad F, & invertendo ut C ad B ita E ad D; qvare & E ad F majorem habebit rationem qvam E ad D; ad qvam vero eadem majorem habet rationem illa minor eſt (per 10. 5.): minor igitur eſt F qvam D: ac propterea D qvam F major erit. Similiter oſtendemus & ſi æqvalis æqvalem: videlicet ſi A ſit æqvalis C, & D ipſi F æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXII. THEOR.

Si ſint qvotcunqve magnitudines & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æqvo in eadem ratione erunt.

Sint qvotcunqve magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F binæ ſumptæ in eadem ratione, ut A quidem ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico & ex æquo in eadem ratione eſſe ut A ad C ita D ad F.

Conſtructio.

1. Sumantur enim ipſarum qvidem A, D, æqve multiplices G, H.
2. Ipſarum vero B, E, ſumantur aliæ utcunqve æqve multiplices K, L, & ipſarum C, F, aliæ utcunqve æqve multiplices M, N.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut A ad B ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum A, D æqve multiplices G, H, & ipſarum B E aliæ utcunqve æqve multiplices K, L; erit ut G ad K ita H ad L (per 4. 5.). eadem qvoqve ratione erit ut K ad M ita L ad N.

Et cum ſint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipſis numero æqvales H, L, N binæ ſumptæ & in eadem ratione: ex æqvo igitur ſi G ſuperat M & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqvalis, æqvalis; & ſi minor, minor (per 20. 5.).

Sunt autem G, H ipſarum A, D æqve multiplices, & M, N ipſarum C, F aliæ utcunqve æqve multiplices: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Quod erat demonſtr.

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſit autem perturbata eorum proportio: & ex æqvo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æquales, binæ ſumptæ in eadem ratione D, E, F, ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita D ad E: dico ut A ad C ita eſſe D ad F.

Conſtructio.

Constructio.

Sumantur ipsarum qvidem A, B, C, æqve multiplices G, H, K, ipsarum vero D, E, F aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonstratio.

Qvoniam G, H æqve multiplices sunt ipsarum A, B; partes autem eandem habent rationem, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.) erit ut A ad B ita G ad H.

Simili ratione ut E ad F ita M ad N: atqve est ut A ad B ita E ad F. Ut igitur G ad H ita M ad N (per 11. 5.). Et qvoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum qvidem BD æqve multiplices H, L ipsarum vero C, E aliæ utcunqve æqve multiplices K, M; erit ut H ad L ita K ad M (per 15. 5.).

Ostensum autem est ut G ad H ita esse M ad N: Qvoniam igitur tres sunt magnitudines G, H, L, & aliæ ipsis numero æqvales K, M, N, binæ sumptæ in eadem ratione, estqve perturbata earum proportio, ex æqvo, si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 21. 5.).

Sunt autem G, K, ipsarum A, C æqve multiplices, & L, N æqve multiplices ipsarum D, F: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Quod erat demonstr.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam; habeat autem & qvinta ad ſecundam eandem rationem, qvam ſexta ad qvartam: & compoſita e prima & qvinta ad ſecundam eandem rationem habebit qvam compoſita e tertia & ſexta ad quartam.

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat rationem, qvam tertia DE ad qvartam F: habeat autem & qvinta BG ad ſecundam C rationem eandem, qvam ſexta EH ad qvartam F: dico & compoſitam e prima & qvinta AG ad ſecundam C eandem habere rationem qvam compoſita e tertia & ſexta DH ad qvartam F.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut BG ad C ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG ita F ad EH (per cor. 4. 5.).

Et qvoniam ut AB ad C ita eſt DE ad F, ut autem C ad BG ita F ad EH; erit ex æqvo ut AB ad BG ita DE ad DH (per 22. 5.). Cum autem diviſæ magnitudines ſint proportionales & compoſitæ proportionales erunt (per 18. 5.); Ut igitur AG ad GB ita eſt DH ad HE.

Ut autem GB ad C ita EH ad F: Ergo ex æqvo ut AG ad C ita erit DH ad F (per 22. 5.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXV. THEOR.

Si qvatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliqvis majores erunt.

Sint qvatuor magnitudines proportionales, AB, CD, E, F, & sit ut AB ad CD ita E ad F; sit autem maxima ipsarum AB, & F minima: dico AB & F ipsis CD & E majores esse.

Demonstratio.

Ponatur enim ipsi qvidem E æqvalis AG, ipsi vero F æqvalis CH. Qvoniam igitur est ut AB ad CD ita E ad F, estqve AG æqvalis E, & CH æqvalis F; erit ut AB ad CD ita AG ad CH.

Et qvoniam est ut tota AB ad totam CD ita ablata AG ad ablatam CH; erit & reliqva GB ad reliqvam HD ut tota AB ad totam CD (per 19. 5.). Major autem est AB qvam CD (ex hypoth.); Ergo & GB major est qvam HD.

Cum autem AG sit æqvalis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG & F æqvales ipsi CH & E.

Si autem inæqvalibus æqvalia addantur tota erunt inæqvalia: cum igitur GB, HD sint inæqvalia, sitqve major GB, si ipsi qvidem GB addantur AG & F, ipsi vero HD addantur CH & E, fiant AB & F ipsis CD & E majores.

Qvod erat demonstrandum.