Werk

Titel: Scientia rerum universalem ex Euclide restituta

Autor: Hentschius, Joannes Jacobus

Verlag: Haered. Lankisianorum

Ort: Lipsiae

Jahr: 1756

Kollektion: digiwunschbuch; mathematica

Signatur: 8 PHIL II, 288:2

Werk Id: PPN83290273X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN83290273X|LOG_0019

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=83290273X

EUCLIDIS ELEMENTORUM, LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. Similes ſiguræ rectilineæ ſunt, qvæ & ſingulos angulos ſingulis æqvales habent, & circa æqvales angulos latera proportionalia.
2. Reciprocæ figuræ ſunt, qvando in utraqve figura antecedentes & conſeqventes rationum termini fuerint.
3. *Secundum extremam ac mediam rationem* recta linea *ſecta* eſſe dicitur, qvando ut tota ad majus ſegmentum ita majus ſegmentum ad minus ſe habuerit.
4. Altitudo cujusqve figuræ eſt linea perpendicularis a vertice ad baſin ducta.
5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, qvando rationum qvantitates inter ſe multiplicatæ illius faciunt qvantitatem.

PROP. I. THEOR.

Triangula & parallelogramma, qvæ eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes.

Sint triangula qvidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quæ eandem habent altitu-

dinem videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam; dico ut basis BC ad basin CD ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

Constructio.

1. Producatur BD ex utraqve parte ad puncta H, L;
2. Basi BC æqvales qvotcunqve ponantur BG, GH; Basi vero CD ponantur qvotcunqve æqvales DK, KL.
3. Jungantur AG, AH, AK, AL.

Demonstratio.

1. Qvoniam CB, BG, GH inter se sunt æqvales, erunt & triangula AGH, AGB, ABC inter se æqvalia (per 38. 1.): ergo qvam multiplex est basis HC ipsius basis BC, tam multiplex est triangulum AHC trianguli ABC, eadem ratione, qvam multiplex est basis LC ipsius basis CD, tam multiplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli; & si æqvalis est basis HC basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æqvale; & si basis HC basin CL superat & triangulum AHC superabit triangulum ALC; & si minor, minus erit (per 38. 1.).

Qvatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC, CD & duobus triangulis ABC, ACD sumpta sunt æqve multiplicia, basis qvidem BC & ABC trianguli, videlicet HC basis & AHC

AHC triangulum; basis vero CD & trianguli ACD alia utcunqve æqve multiplicia, nempe CL basis & ALC triangulum. Atqve ostensum est, si basis HC basin CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqvalis, æqvale, & si minor, minus; est igitur ut BC basis ad basin CD ita triangulum ABC ad ACD triangulum (per 5. def. 5.).

Quod primo erat demonstrandum.

2. Qvoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum (per 41. 1.), partes autem eandem inter se rationem habent, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.); erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum.

Qvoniam igitur ostensum est, ut basis BC ad CD basin ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD, ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum: erit ut BC basis ad basin CD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum (per 11. 5.).

Quod 2do erat demonstr.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli

guli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, qvæ sectiones conjungit recta linea reliqvo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE: dico ut BD ad DA ita esse CE ad EA.

Demonstratio.

1. Jungantur BE, CD: triangulum igitur BDE triangulo CDE est æqvale, qvia in eadem sunt basi DE & intra easdem parallelas DE, BC (per 37. 1.). aliud autem est triangulum ADE; & æqvalia ad idem eandem habent rationem (per 7. 5.): ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE ita est BD ad DA: nam cum eandem altitudinem habeant videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam inter se sunt ut bases (per 1. 6.). Et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE ita CE ad EA: ut igitur BD ad DA ita est CE ad EA (per 11. 5.)

   Qvod erat demonstr.

2. *Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta sint in punctis D, E, ut BD ad DA ita sit CE ad EA, & jungatur DE: dico DE ipsi BC parallelam esse.*

Iisdem enim constructis, qvoniam est ut BD ad DA ita CE ad EA; ut autem BD ad DA ita triangulum BDE ad triangulum ADE (per 1, 6.);

&

& ut CE ad EA ita CDE triangulum eſt triangulum ADE : erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita CDE triangulum ad triangulum ADE (per 11. 5.). Utrumqve igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem, ideo triangulum BDE triangulo CDE æqvale eſt (per 9. 5.): & ſunt ſuper eadem baſi DE. Æqvalia autem triangula & ſuper eadem baſi conſtituta etiam intra easdem ſunt parallelas (per 39. 1.): ergo DE ipſi BC parallela eſt.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſin; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt qvam reliqva trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem qvam reliqva trianguli latera; quæ a vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.

1. *Sit triangulum ABC & ſecetur angulus BAC bifariam a recta linea AD: dico ut BD ad DC ita eſſe BA ad AC.*

Conſtructio.

1. Ducatur per C ipſi DA parallela CE (per 31. 1.).
2. Producatur trianguli latus BA usqvedum conveniat cum parallela ducta CE in puncto E.

Demonſtratio.

Qvoniam in parallelas AD, EC incidit recta linea AC; erit angulus ACE æqvalis angulo CAD (per 29. 1.). Sed CAD angulus ponitur æqvalis angulo BAD: ergo & BAD ipſi angulo ACE æqvalis erit.

Rurſus qvoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqvalis eſt interiori AEC (per 29.1.).

Oſtenſus autem eſt angulus ACE angulo BAD æqvalis; ergo & ACE ipſi AEC æqvalis erit; & propterea latus AE æqvale lateri AC (per 6. 1.).

Et qvoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD; erit ut BD ad DC ita BA ad AE (per 2. 6.), æqvalis autem eſt AE ipſi AC: eſt igitur ut BD ad DC ita BA ad AC.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Sit autem ut BD ad DC ita BA ad AC: & AD jungatur: dico, angulum BAC bifariam ſectum eſſe a recta linea AD.*

Iisdem enim conſtructis, qvoniam eſt ut BD ad DC ita BA ad AC eſt autem ut BD ad DC ita BA ad AE (etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD) erit ut BA ad AC ita BA ad AE (per 2. 6.): ergo AC eſt æqvalis AE (per 9. 5.) ac propterea & angulus AEC angulo ACE æqvalis (per 5. 1).

Sed angulus qvidem AEC eſt æqvalis angulo exteriori BAD, angulus vero ACE æqvalis alterno

CAD

CAD (per 29. 1.): qvare & BAD angulus ipsi CAD æqvalis erit. Angulus igitur BAC bifariam sectus est a recta linea AD.

Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP. IV. THEOR.

Æqviangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos: & homologa sunt latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Sint æqviangula triangula ABC, DCE, qvæ angulum qvidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqvalem habeant, & præterea angulum BAC æqvalem angulo CDE: Dico triangulorum ABC, DCE, proportionalia esse latera, qvæ sunt circa æqvales angulos; & homologa esse latera qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Demonstratio.

Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et qvoniam anguli ABC, ACB duobus rectis sunt minores (per 17. 1.), æqvalis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores: qvare BA, ED productæ inter se convenient (per 11. ax.) producantur, & convenient in puncto F.

Jam qvoniam angulus DCE æqvalis est angulo ABC, erit BF ipsi CD parallela (per 28. 1.).

Rurſus, qvoniam æqvalis eſt angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipſi FE: parallelogrammum igitur eſt FACD: ac propterea FA qvidem ipſi CD; AC vero ipſi FD æqvalis (per 34. 1).

Et qvoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipſi FE, parallela ducta eſt AC; erit ut BA ad AF ita BC ad CE (per 2. 6.) æqvalis autem eſt AF ipſi CD: ut igitur BA ad CD ita BC ad CE (per 7. 5, & alterne ut AB ad BC ita DC ad CE (per 16. 5.).

Rurſus qvoniam CD parallela eſt BF, erit ut BC ad CE ita FD ad DE. Sed DF æqvalis AC; ergo ut BC ad CE ita AC ad ED, & alterne ut BC ad AC ita CE ad ED. Itaqve qvoniam oſtenſum eſt, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED; erit ex æqvo ut BA ad CA ita DC ad ED (per 22. 5.)

Æqviangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa ſunt latera, qvæ æqvalibus angulis ſubtenduntur.

Qvod erat demonſtr.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, qvæ latera proportionalia habeant, ſitque ut AB qvidem

 ad

ad BC ita DE ad EF; ut autem BC ad CA ita EF ad FD; & adhuc ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse & æqvales habere angulos, qvibus homologa latera subtenduntur; angulum qvidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; & præterea angulum BAC angulo EDF.

Constructio & Demonstratio.

Constituatur ad rectam lineam EF & ad puncta in ipsa E, F, angulo qvidem ABC æqvalis angulus FEG, angulo autem BCA æqvalis angulus EFG: qvare reliqvus BAC angulus reliqvo EGF est æqvalis (per 32.1.). Ideoqve æqviangulum est triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur (per 4. 6.): ergo ut AB ad BC ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC ita DE ad EF: ut igitur DE ad EF ita GE ad EF (per 11. 5.): Utraqve igitur ipsarum DE, GE eandem habet rationem ad EF; & idcirco erit DE ipsi GE æqvalis (per 9. 5.). Eadem ratione & DF æqvalis erit GF. Itaqve qvoniam DE est æqvalis EG, communis autem EF: duæ DE, EF, duabus GE, EF sunt æqvales, & basis DF basi GF æqvalis: angulus igitur DEF est æqvalis angulo GEF (per 8. 1.), & DEF triangulum æqvale triangulo GEF & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales, qvibus æqvalia

latera

latera subtenduntur: angulus igitur DFE qvidem est æqvalis angulo GFE, angulus vero EDF æqvalis angulo EGF. Et qvoniam angulus DEF est æqvalis angulo GEF, & angulus GEF æqvalis angulo ABC (per construct.); erit & angulus ABC angulo DEF æqvalis. Eadem ratione & angulus ACB æqvalis est angulo DFE & etiam angulus ad A angulo ad F: ergo ABC triangulum est æqviangulum triangulo DEF.

Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa æqvales autem angulos latera proportionalia; æqviangula erunt triangula, & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqvalem habentia, circa æqvales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse, & angulum qvidem ABC habere æqvalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

Constructio.

Ad rectam lineam DF & ad puncta in ipsa D, F, alterutri

alterutri angulorum BAC, EDF constituatur æqvalis angulus FDG, angulo autem ACB æqvalis DFG.

Demonstratio.

Qvoniam in duobus triangulis ABC, DFG duo anguli A, C duobus angulis FDG, DFG æqvales sunt (per construct.); erit & reliqvus angulus B, reliqvo G æqvalis (per 32. 1.): ergo triangulum ABC triangulo DGF æqviangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita GD ad DF (per 4. 6.). Est autem ut BA ad AC ita ED ad DF (per hypoth.): ut igitur ED ad DF ita GD ad DF (per 11. 5.): qvare ED æqvalis est ipsi DG, (per 9. 5.); communis vero est DF: ergo duæ ED, DF duabus GD, DF sunt æqvales, & angulus EDF angulo GDF est æqvalis: basis igitur EF est æqvalis basi FG, triangulumqve DEF æqvale triangulo GDF, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales: alter alteri, qvibus æqvalia latera subtenduntur (per 4. 1.), angulus igitur DFG est æqvalis angulo DFE; angulus vero ad G æqvalis angulo ad E. Sed angulus DFG æqvalis est angulo ACB (per construct.): angulus igitur ACB angulo DFE est æqvalis, angulus autem BAC æqvalis est angulo EDF (per hypoth.): ergo & reliqvus, qvi ad B æqvalis reliqvo, qvi ad E (per 32. 1.) æqviangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF, & æqvales sunt anguli, qvibus homologa latera subtenduntur.

Qvod erat demonstr.

PROP

PROP. VII. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliqvorum vero utrumqve ſimul vel minorem vel non minorem recto; æqviangula erunt triangula & æqvales habebunt angulos circa qvos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum uni angulo æqvalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqvalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit DE ad EF ſicut AB ad BC, & reliqvorum, qvi ad C, F primo utrumqve ſimul minorem recto: Dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſſe, angulumqve ABC æqvalem angulo DEF, & reliqvum, qvi ad C reliqvo, qvi ad F æqvalem.

Conſtructio & Demonſtratio.

1. Si inæqvalis eſt angulus ABC angulo DEF unus ipſorum major erit. Sit igitur major ABC, & conſtituatur ad rectam lineam AB & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqvalis angulus ABG (per 23. 1.).

Qvoniam angulus A eſt æqvalis angulo D (per hypoth.), angulus vero ABG æqvalis angulo DEF (per conſtruct.); erit reliqvus AGB reliqvo DFE æqvalis: æqviangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; qvare ut AB ad BG ſic DE ad EF (per 4. 6.). Ut vero DE ad EF

ſic

ſic AB ad BC (per hypoth.): ut igitur AB ad BC ſic AB ad BG, ideo AB ad utramqve BC, BG eandem habet rationem (per 11. 5.); erit igitur BC ipſi BG æqvalis, ac propterea angulus BGC eſt æqvalis angulo BCG (per 5. 1.). Minor autem recto eſt angulus, qvi ad C (per hypoth.): ergo & BGC minor eſt recto; & ob id, qvi ei deinceps eſt AGB major recto (per 13. 1.). Atqvi oſtenſus eſt angulus AGB æqvalis angulo F: angulus igitur, qvi ad F recto major eſt, qvod hypotheſi repugnat: non eſt igitur angulus ABC inæqvalis angulo DEF; ergo ipſi eſt æqvalis. Eſt autem & angulus ad A æqvalis ei, qvi ad D: qvare & reliqvus, qui ad C æqvalis reliqvo, qvi ad F; æqviangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo DEF.

Qvod primo erat demonſtr.

2. Sed rurſus ponatur uterqve angulorum, qvi ad C, F non minor recto: dico rurſus, & ſic triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſſe. Iisdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC æqvalem ipſi BG, angulumqve ad C angulo BGC æqvalem. Sed angulus, qvi ad C non eſt minor recto: non eſt igitur recto minor BGC. Qvare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis minores; qvod fieri non poteſt (per 17. 1.), non igitur rurſus eſt ABC angulus inæqvalis angulo DEF; ergo æqvalis. Eſt autem & qvi ad A æqvalis ei, qvi eſt ad D: reliqvus igitur, qvi ad C reliqvo ad F eſt

eſt æqvalis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum eſt.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſin perpendicularis ducatur; qvæ ad perpendicularem ſunt triangula & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum BAC, & a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD;

1. *Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC ſimilia eſſe.*

Demonſtratio.

Qvoniam angulus BAC eſt æqvalis angulo ADB, rectus enim eſt uterqve, & angulus, qvi ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit reliqvus ACB reliqvo BAD æqvalis (per 32. 1.); æqviangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. Qvare ut BC, qvæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABC, ab BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa AB ſubtendens angulum, qvi ad C trianguli ABC ad BD ſubtendentem angulum æqvalem angulo, qvi ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli (per 4. 6.), & ſic etiam AC ad AD ſubtendentem angulum, qvi ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABC triangulo ABD æqviangulum

lum eſt, & circa æqvales angulos latera habet proportionalia: ſimile igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD (per 1. def. 6). Eadem ratione demonſtrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC ſimile: eſſeqvare utrumqve ipſorum ABD, ADC toti triangulo AB eſt ſimile.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Dico inſuper triangula ABD, ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe.*

Qvoniam enim rectus angulus BDA eſt æqvalis recto ADC: ſed & BAD oſtenſus æqvalis ei, qvi ad C; erit reliqvus, qvi ad B reliqvo DAC æqvalis (per 32. 1.): æqviangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC. Ergo ut BD trianguli ABD ſubtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC ſubtendentem angulum, qvi ad C, æqvalem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD, ſubtendens angulum, qvi ad B, ad DC trianguli ADC, ſubtendentem angulum DAC, ei, qvi ad B æqvalem (per 4. 6.). Et ſic etiam BA ſubtendens rectum angulum ADB ad AC ſubtendentem angulum rectum ADC: eſt igitur ABD triangulum ſimile triangulo ADC (per def. 6.).

Qvod ſecundo erat demonſtr.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad baſin ductam mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſin & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB: oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere; imperetur autem, ex: gr: pars tertia.

Constructio.

1. Ducatur a puncto A qvælibet recta linea AC, qvæ cum ipsa AB angulum qvemlibet contineat;
2. Sumatur in AC qvodvis punctum D, & ipsi AD æqvales ponantur DE, EC (per 3. 1.);
3. Jungatur BC & per D ipsi BC parallela ducatur DF (per 31. 1.).

Demonstratio.

Qvoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, parallela ducta est FD; erit ut CD ad DA, ita BF ad FA (per 2. 6.). Dupla autem est CD ipsius DA; Ergo & BF ipsius FA dupla: tripla igitur est BA ipsius AF.

Qvare a data recta linea AB imperata pars tertia AF abscissa est.

Qvod erat faciendum.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, ut data recta secta est.

Sit

Sit data recta linea insecta AB. secta vero AC: Oportet rectam lineam AB insectam similiter secare ut AC secta est in punctis D, E.

Constructio.

1. Datæ rectæ AB, AC, ponantur ita, ut angulum qvemvis comprehendant, jungaturqve BC.
2. Per puncta D, E ipsi BC parallelæ ducantur DF, EG, per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK.

Demonstratio.

Qvoniam parallelogrammum est utrumqve ipsorum FH, HB (per construct.) erit igitur DH æqvalis FG; HK vero ipsi GB æqvalis. Et qvoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit ut CE ad ED ita KH ad HD. Æqvalis autem est KH qvidem ipsi BG, HD vero ipsi GF: est igitur ut CE ad ED ita BG ad GF. Rursus qvoniam uni laterum trianguli ACE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD; ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est, ut CE ad ED ita esse BG ad GF: ut igitur CE ad ED ita est BG ad GF, & ut ED ad DA ita GF ad FA.

Ergo data recta linea insecta AB similiter secta est ut data recta AC.

Qvod erat demonstr.

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, ut angulum qvemvis comprehendant: oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Constructio.

1. Producantur AB, AC ad puncta D, E;
2. Ponatur ipsi AC æqvalis BD, & jungatur BC;
3. Per D ipsi BC parallela ducatur DE (per 31. 1.);

Demonstratio.

Qvoniam uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC; erit ut AB ad BD ita AC ad CE, æqvalis autem est BD ipsi AC: ut igitur AB ad AC ita est AC ad CE.

Qvare duabus datis lineis AB, AC tertia proportionalis CE est inventa.

Qvod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis, qvartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C: oportet ipsis A, B, C qvartam proportionalem invenire.

Conſtructio.

1. Exponantur duæ rectæ lineæ DE, DF, angulum qvemvis EDF comprehendentes; & ponatur ipſi qvidem A æqvalis DG, ipſi vero B æqvalis GE & ipſi C æqvalis DH;
2. Jungatur GH, & per E ipſi HG parallela ducatur EF.

Demonſtratio.

Qvoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH; erit ut DG ad GE, ita DH ad HF. Eſt autem DG ipſi A æqvalis, GE vero æqvalis B & DH æqvalis C: ut igitur A ad B ita C ad HF.

Qvare datis tribus rectis lineis A, B, C, qvarta proportionalis inventa eſt HF.

Quod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC: oportet inter ipſas mediam proportionalem invenire.

Conſtructio.

1. Ponantur in directum AB, BC, & ſuper ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC;
2. A puncto B ipſi AC ad rectos angulos ducatur BD (per 11. 1.);
3. Jungantur AD, DC.

Demonſtratio.

Qvoniam angulus ADC eſt in ſemicirculo, is rectus eſt (per 31. 3.). Et qvoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſin perpendicularis ducta eſt DB; erit BD media proportionalis inter ſegmenta baſis AB, BC.

Duabus igitur datis lineis AB, BC, media proportionalis inventa eſt DB.

Qvod erat faciendum.

PROP. XIV. THEOR.

Parallelogrammorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos; & qvorum parallelogrammorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter ſe ſunt æqvalia.

1. *Sint æqvalia parallelogramma AB, BC æqvales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB, BE; ergo & in directum erant FB, BG (per 14. 1): Dico parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ ſunt circa æqvales angulos eſſe reciproce proportionalia; hoc eſt, ut DB ad BE ita eſſe GB ad BF.*

Demonſtratio.

Compleatur parallelogrammum FE.

Qvoniam igitur parallelogrammum AB æqvale eſt

eſt parallelogrammo BC, eſt autem parallelogrammum FE aliud: erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 7. 5.) Sed ut AB qvidem ad FE ita eſt DB ad BE, ut autem BC ad FE ita GB ad BF (per 1. 6.) erit igitur ut DB ad BE ita GB ad BF. Ergo parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ circum æqvales angulos ſunt reciproce proportionalia.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Sint autem latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce proportionalia, ſitque ut DB ad BE ita GB ad BF: dico parallelogrammum AB eſſe æquale parallelogrammo BC.*

Qvoniam enim eſt ut DB ad BE ita GB ad BF (per hypoth.), ut autem DB ad BE ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE (per 1. 6.); erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 11. 5.): æqvale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC.

Quod ſecundo erat demonſtr.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos; & qvorum triangulorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter ſe ſunt æqvalia.

Sint æqvalia triangula ABC, ADE unum angulum uni æqvalem habentia, angulum scilicet ABC æqvalem angulo DAE: dico triangulum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, esse reciproce proportionalia, hoc est ut CA ad AD ita esse EA ad AB.

Constructio.

1. Triangula ABC, ADE ponantur ita, ut in directum sit CA ipsi AD: ergo & EA ipsi AB in directum erit (per 14. 1.);
2. Jungatur BD.

Demonstratio.

1) Qvoniam triangulum ABC æqvale est triangulo ADE (per hypoth.), est autem aliud triangulum ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD ita triangulum ADE ad triangulum BAD (per 7. 5). Sed ut triangulum qvidem CAB ad BAD triangulum ita CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD ita EA ad AB (per 1. 6.): Erit igitur CA ad AD in EA ad AB: qvare triangulorum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, sunt reciproce proportionalia:

Qvod primo erat demonstrandum.

2. *Sint autem latera triangulorum ABC, ADE reciproce proportionalia; & sit ut CA ad AD ita EA ad AB: dico triangulum ABC triangulo ADE esse æqvale.*

Iisdem

Iisdem ut ſupra conſtructis, qvoniam ut CA ad AD ita eſt EA ad AB; ut autem CA ad AD ita ABC triangulum ad triangulum BAD, & ut EA ad AB ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 1. 6.): erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 11.5.): utrumqve igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet rationem; ac propterea æqvale eſt ABC triangulum triangulo EAD (per 9.5.).

Qvod 2do erat demonſtr.

PROP. XVI. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale eſt rectangulo qvod ſub mediis comprehenditur: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale fuerit ei, qvod ſub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F; qvidem AB ad CD ita E ad F, dico rectangulum ſub rectis lineis AB, F æqvale eſſe ei, qvod ſub ipſis CD, E comprehenditur.

Conſtructio.

1. A punctis A, C ipſis AB, CD ad rectos angulos ducantur AG, CH (per 11. 1.);
2. Ipſi F ponatur æqvalis AG; ipſi vero E æqvalis CH;
3. Compleantur BG, DH parallelogramma.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut AB ad CD ita E ad F; eſt autem E qvidem æqvalis CH & F ipſi AG; erit ut AB ad CD ita CH ad AG parallelogrammorum igitur BG, DH reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos (per 2. def. 6). Qvorum autem parallelogrammorum æqviangulorum reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, ea inter ſe ſunt æqvalia (per 14. 6.); parallelogrammum igitur BG æqvale eſt parallelogrammo DH; eſt autem parallelogrammum BG, ſub rectis lineis AB, F comprehenſum, nam AG æqvalis eſt F; parallelogrammum vero DH comprehenditur ſub ipſis CD, E, cum CH ipſi E ſit æqvalis; rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub ipſis CD, E comprehenditur.

Qvod primo erat demonſtr.

2. *Sit rectangulum comprehenſum* AB, *F æqvale ei, qvod comprehenditur ſub ipſis* CD, *E: dico qvatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut* AB *ad* CD *ita E ad F.*

Iisdem enim conſtructis, qvoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub rectis CD, E comprehenditur, eſt autem rectangulum BG comprehenſum ſub rectis AB, F, etenim AG eſt æqvalis F; comprehenſum vero ſub rectis CD, E eſt rectangulum DH, qvod CH ipſi E ſit æqvalis: erit parallelogrammum BG æqvale parallelogrammo DH; & ſunt æqviangula: æqvalium

æqvalium autem & æqviangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æqvales angulos sunt reciproce proportionalia (per 14. 6.): qvare ut AB ad CD ita CH ad AG. Æqvalis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F: ut igitur AB ad CD ita E ad F.

Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æqvale est ei, qvod a media fit, qvadrato: Et si rectangulum sub extremis comprehensum æqvale fuerit ei, qvod a media fit, qvadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

1. *Sint tres rectæ lineæ proportionales* A, *B*, *C*, *ut qvidem* A *ad B ita B ad C: dico rectangulum comprehensum sub rectis* A, *C æqvale esse ei, qvod a media B fit, qvadrato.*

Constructio.

Ponatur ipsi B æqvalis D.

Demonstratio.

Qvoniam ut A ad B ita B ad C, æqvalis autem est B ipsi D; erit ut A ad B ita D ad C. Si autem qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum est æqvale ei, qvod sub mediis comprehenditur (per 16. 6.): ergo rectangulum comprehensum sub rectis, A, C

æqvale

æqvale eſt ei, qvod comprehenditur ſub rectis B, D. Sed rectangulum comprehenſum ſub rectis B, D eſt æqvale qvadrato, qvod fit ex ipſa B: etenim B eſt æqvalis D: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis A, C, eſt æqvale ei, qvod ex B fit qvadrato.

Qvod primo erat demonſtr.

2) *Sed rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale ſit qvadrato, qvod fit ex B: dico A ad B ita eſſe ut B ad C.*

Iisdem enim conſtructis, qvoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale eſt qvadrato, qvod fit ex B; at qvadratum, qvod fit ex B eſt rectangulum, qvod ſub ipſis B, D comprehenditur, eſt enim B æqvalis D: erit rectangulum comprehenſum ſub rectis A, C æqvale ei, qvod ſub rectis B, D comprehenditur.

Si autem rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale fuerit ei, qvod ſub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt (per 16. 6.): eſt igitur ut A ad B ita D ad C. Sed B æqvalis eſt D; ut igitur A ad B ita B ad C.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. XVIII. THEOR.

A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterqve poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea AB datum autem rectilineum

neum CE: Oportet a recta linea AB rectilineo CE simile similiterqve positum rectilineum describere.

Constructio & Demonstratio.

Jungatur DF; & ad rectam lineam AB & ad puncta in ipsa A, B angulo qvidem C æqvalis angulus constituatur GAB, angulo autem CDF angulus fiat æqvalis ABG (per 23. 1.): reliqvus igitur CFD angulus reliqvo AGB est æqvalis (per 32. 1): ergo æqviangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea ut FD ad GB ita FC ad GA & CD ad AB.

Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B, G angulo DFE æqvalis angulus BGH, angulo autem FDE æqvalis GBH: ergo reliqvus, qvi ad E reliqvo, qvi ad H est æqvalis: æqviangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH: qvare ut FD ad GB ita FE ad GH & ED ad HB. (per 4. 6.). Ostensum autem est ut FD ad GB ita esse FC ad GA & CD ad AB: Est igitur ut FC ad GA ita CD ad AB & FE ad GH, & adhuc ED ad HB (per 11. 5.), itaqve qvoniam angulus CFD æqvalis est angulo AGB (per construct.), angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqvalis. Eadem ratione & CDE est æqvalis ipsi ABH, & præterea angulus ad C angulo ad A æqvalis, angulus vero ad E æqvalis angulo ad H: æqviangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æqvales angulos habet proportionalia: ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit.

A data

A data igitur linea AB dato rectilineo CE simile & similiter positum rectilineum AH descriptum est.

Qvod erat faciendum & demonstr.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B æqvalem angulo ad E, & sit ut AB ad BC ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF (per 12. def. 5.): dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus, qvam habet BC ad EF.

Constructio.

1. Sumatur ipsis BC, EF tertia proportionalis BG, ut sit sicut BC ad EF ita EF ad BG (per 12. 6.);
2. Jungatur GA;

Demonstratio.

Qvoniam ut AB ad BC ita est DE ad FE; erit permutando ut AB ad DE ita BC ad EF (per 16. 5.). Sed ut BC ad EF ita EF ad BG, & igitur ut AB ad DE ita EF ad BG (per 11. 5.): qvare triangulorum ABG, DEF latera, qvæ circum æqvales angulos reciproce sunt proportionalia.

Qvorum autem triangulorum, unum angulum

uni

uni æqvalem habentium, latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce ſunt proportionalia, ea inter ſe ſunt æqvalia (per 15. 6.): æqvale igitur eſt A B G triangulum triangulo D E F. Et qvoniam eſt ut BC ad EF ita EF ad BG; ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplicatam rationem habet ejus, qvam habet ad ſecundam; habebit B C ad B G duplicatam rationem ejus qvam habet B C ad E F (per 10. def. 5.).

Ut autem BC ad BG ita ABC triangulum ad triangulum ABG (per 1. 6.): Ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus, qvam habet B C ad E F. Eſt autem ABG triangulum triangulo D E F æqvale: & igitur triangulum ABC ad triangulum D E F duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad EF.

Qvod erat demonſtr.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres lineæ proprotionales fuerint, ut prima ad tertiam ita eſſe triangulum, qvod fit a prima, ad triangulum a ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum: qvoniam oſtenſum eſt ut CB ad BG ita ad ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc eſt ad triangulum DEF.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur & numero æqvalia & homologa totis: & polygonum

gonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus, qvam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint ſimilia polygona ABCDE, FGHKL & ſit latus AB homologum ipſi FG: Dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi & numero æqvalia & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus, qvam habet AB ad FG.

Conſtructio.

Jungantur BE, EC, GL, LH.

Demonſtratio.

1. Qvoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL (per hypoth.) erit angulus BAE angulo GFL æqvalis: atqve eſt, ut BA ad AE ita GF ad FL (per def. 6.). Triangula igitur BAE, GFL ſunt ſimilia (per 6. 6.), ideoqve angulus ABE æqvalis angulo FGL, & angulus AEB æqvalis angulo FLG.

Eſt autem & totus AED angulus æqvalis toti FLK, propter ſimilitudinem polygonorum: ergo reliqvus BED angulus reliqvo GLK eſt æqvalis, & eadem ratione EBC reliqvo LGH eſt æqvalis.

Et qvoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL eſt ut BE ad BA ita GL ad GF; ſed & propter ſimilitudinem polygonorum ut BA ad BC ita FG ad GH: erit ex æqvo ut BE ad BC ita GL ad GH (per 22. 5.); nempe circum æqvales angulos EBC, LGH latera ſunt proportionalia;

tionalia: æqviangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH (per 6.6.), qvare & ſimile (per 1. def. 6.).

Eadem ratione & EDC triangulum ſimile eſt triangulo HLK; Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur & numero æqvalia.

Quod primo erat demonſtr.

2. Qvoniam in præcedentibus oſtenſum eſt triangulum ABE ſimile triangulo FGL, triangulum autem BEC ſimile triangulo GLH; erunt igitur inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum (per 19. 5.), hoc eſt, ratio trianguli ABE ad triangulum FGL eſt duplicata rationis BE ad GL, & ratio trianguli BEC ad triangulum GLH etiam duplicata eſt rationis BE ad GL: Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL ita triangulum BEC ad triangulum GLH (per 11. 5.). Eodem modo oſtendetur ut triangulum BEC ad triangulum GLH ita eſſe triangulum EDC ad triangulum LKH. Qvare ut unum antecedens videlicet triang. ABE ad unum conſeqvens ſcil. ad triangulum FGL ita omnia antecedentia ABE, BEC, CED ſimul ſumpta ad omnia conſeqventia FGL, GLH, HLK ſimul ſumpta (per 12.5.). Totis igitur homologa ſunt omnia iſta triangula, hoc eſt ut polygonum unum ad alterum.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

3. Ratio trianguli ABE ad triangulum FGL est duplicata rationis BA ad FG (per 19. 5.). Sed ratio polygoni ad polygonum est eadem cum ratione trianguli ABE ad triangulum FGL (ut jam ostendebatur). Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis AB ad FG (per 11. 5.).

Qvod tertio erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in similibus qvadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata ratione laterum homologorum, ostensum autem & in triangulis (ad coroll. 19. 6.): qvare universæ similes rectilineæ figuræ inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Corollarium 2.

Et si ipsis AB, FG tertiam proportionalem sumamus, qvæ sit M: habebit AB ad M duplicatam rationem ejus, qvam habet AB ad FG (per 10. def. 5.). Habet autem & polygonum ad polygonum, & qvadrilaterum ad qvadrilaterum duplicatam rationem ejus qvam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est qvam AB ad FG: atqve ostensum est hoc in triangulis. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, qvæ fit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Qvæ eidem rectilineo sunt similia & inter se sunt similia.

Sit utrumqve rectilineum A, B simile rectilineo C; dico & rectilineum A rectilineo B simile esse.

Demonstratio.

Qvoniam A rectilineum simile est rectilineo C (per hypoth.), & ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia (per 1. def. 6.).

Rursus, qvoniam rectilineum B simile est rectilineo C, etiam ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia;

Utrumqve igitur rectilineorum A, B ipsi C æqviangulum est, & circum æqvales angulos latera habet proportionalia:

Qvare & rectilineum A ipsi B æqviangulum est (per 1. ax.), ideoqve latera circum æqvales angulos proportionalia habet (per 11. 5.); ac propterea A ipsi B est simile (per 1. def. 6.).

Qvod erat demonstr.

PROP. XXII. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea qvæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt; & si rectilinea, qvæ ab ipsis fiunt similia & similiter descripta, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

1. *Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH sitqve ut AB ad CD ita EF ad GH; sint porro ab ipsis qvidem AB, CD descripta similia & similiter posita rectilinea KAB, LCD, ab ipsis vero EF, GH descripta sint rectilinea similia & similiter posita MF, NH: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.*

Constructio.

Sumantur ipsis qvidem AB, CD tertia proportionalis O; ipsis vero EF, GH tertia proportionalis P (per 11, 6.).

Demonstratio.

Qvoniam est ut AB ad CD ita EF ad GH, ut autem CD ad O ita GH ad P: erit ex æqvo ut AB ad O ita EF ad P (per 22. 5.); Sed ut AB ad O ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum, ut autem EF ad P ita rectilineum MF ad rectilineum NH (per 2. coroll. 20. 6.); Cum vero ratio AB ad O æqvalis sive eadem est ac ratio EF ad P, ut igitur KAB ad LCD ita MF ad NH (per 11. 5.).

Qvod primo erat demonstr.

2. *Sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum in MF ad rectilineum NH: dico ut AB ad CD ita esse EF ad GH.*

Conſtructio.

Fiat enim ut AB ad CD ita EF ad QR (per 12. 6.); & deſcribatur ab ipſa QR alterutri rectilineorum MF, NH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum SR (per 18. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam igitur eſt ut AB ad CD ita EF ad QR, & deſcripta ſunt ab ipſis qvidem AB, CD ſimilia & ſimiliter poſita KAB, LCD rectilinea, ab ipſis vero EF, QR ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MF, SR; eſt ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum MF ad SR rectilineum (ut in ſuperiori parte oſtenſum eſt.)

Ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD ita MF rectilineum ad rectilineum NH: rectilineum igitur MF ad utrumqve ipſorum NH, SR eandem habet rationem (per 11. 5.): ergo rectilineum NH eſt ipſi SR æqvale (per 9. 5.); eſt autem & ipſi ſimile ſimiliterqve poſitum (per conſtr.): Ergo GH eſt æqvalis QR. Et qvoniam ut AB ad CD ita eſt EF ad QR æqvalis autem QR ipſi GH; erit ut AB ad CD ita EF ad GH (per 7. 5.). *Qvod ſecundo erat demonſtr.*

LEMMA.

At vero ſi rectilinea æqvalia & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqvalia eſſe hoc modo demonſtrabimus.

Sint æqvalia & ſimilia rectilinea NH, SR; & ſit ut HG ad GN ita PQ ad QS: dico RQ ipſi HG eſſe æqvalem.

Si enim inæqvales sint una ipsarum major erit. Sit RQ major qvam HG; & qvoniam est ut RQ ad QS ita HG ad GN: & permutando erit ut RQ ad GH ita QS ad GN (per 16. 5.).

Major autem est QR qvam HG; ergo & QS qvam GN major erit; qvare & rectilineum RS rectilineo HN est majus; sed & æqvale, qvod fieri non potest: non est igitur QR inæqvalis ipsi GH; ergo æqvalis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Æqviangula parallogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Sint æqviangula parallelogramma AC, CF æqvalem habentia BCD angulum angulo ECG: dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex rationibus laterum; hoc est ex ratione, qvam habet BC ad CG, & ex ratione, quam habet DC ad CE.

Constructio.

1. Ponatur enim BC in directum ipsi CG, ergo & DC ipsi CE in directum erit (per 14. 1.);
2. Compleatur DG parallelogrammum productis rectis AD, FG usqve dum concurrant in puncto H;

3. Exponatur

3. Exponatur recta linea qvædam K, & fiat ut BC ad CG ita K ad L, ut autem DC ad CE ita L ad M (per 12. 6.).

Demonstratio.

Rationes ipsius K ad L & L ad M eædem sunt, qvæ rationes laterum videlicet BC ad CG & DC ad CE (per constr.).

Sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L & ratione L ad M: qvare & K ad M rationem habet ex rationibus laterum compositam (per 5. def. 6.).

Et qvoniam est ut BC ad CG ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH (per 1. 6); sed ut BC ad CG ita K ad L (per constr.) erit igitur ut K ad L ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum (per 11. 5.).

Rursus qvoniam est ut DC ad CE ita parallelogrammum CH ad parallelogrammum CF (per 1. 6.); ut autem DC ad CE ita L ad M (per constr.): ut igitur L ad M ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum (per 11. 5.).

Itaqve cum ostensum sit, ut K qvidem ad L ita esse AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH, ut autem L ad M ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum erit ex æqvo ut K ad M ita AC parallelogrammum ad ipsum CF (per 22. 5.). Habet autem K ad M rationem ex rationibus laterum compositam: ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF rationem habet ex rationibus laterum compositam.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi qvæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK: dico parallelogramma EG, HK & toti ABCD & inter se similia esse.

Demonstratio.

Qvoniam recta EK parallela est rectæ BC, erit angulus AEF æqvalis angulo ABC, angulus autem AFE æqvalis angulo ACB (per 29. 1.); duo igitur triangula AEF, ABC sunt æqviangula; Eodem modo & duo triangula AGF, ADC æqviangula sunt: qvare parallelogrammum EG æqviangulum est parallelogrammo ABCD: utrumqve enim eorum in duo triangula æqvalia & æqviangula per diametrum AC divisum est (per 34. 1.).

Porro qvoniam æqviangula sunt triangula ABC, AEF, erunt latera ipsorum circa æqvales angulos proportionalia, nempe ut AB ad BC ita AE ad EF; & qvoniam etiam æqviangula sunt triangula ADC, AGF (ut supra ostensum est), erunt ipsorum latera similiter proportionalia videlicet, ut CO ad DA ita FG ad GA (per 4. 6.): qvare parallelogramma EG, ABCD, qvæ & ſingulos angulos ſingulis angulis æqvales habent & latera circa æqvales angulos proportionalia, ſunt ſimilia (per 1. def. 6.).

Eadem ratione & parallelogrammum HK ſimile eſt parallelogrammo ABCD: utrumqve igitur ipſorum EG, HK parallelogrammorum toti parallelogrammo ABCD eſt ſimile. Qvæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia & inter ſe ſunt ſimilia (per 21. 5.): parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK.

Qvare omnis parallelogrammi qvæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æqvale idem conſtituere.

Sint data duo rectilinea videlicet ABC & D: oportet conſtituere rectilineum, idemqve ipſi ABC qvidem ſimile, ipſi vero D æqvale.

Conſtructio.

1. Ad rectam lineam BC applicetur parallelogrammum BE triangulo ABC æqvale; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æqvale ipſi D in angulo FCE, qvi angulo CBL eſt æqvalis (per 44. & 45. 1.);

 2. Sumatur

2. Sumatur inter ipſas BC, CF media proportionalis GH (per 13. 6.);
3. Ab ipſa GH deſcribatur rectilineum KGH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineo A B C (per 18. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam EB, CM ſunt parallelogramma & angulus FCE æqvalis eſt angulo CBL (per conſtruct.), in directum igitur eſt BC ipſi CF (per 41. 1.); & qvoniam eſt ut BC ad GH ita GH ad CF (per conſtruct.); cum autem tres lineæ rectæ ſint proportionales, ut prima ad tertiam ita eſt figura rectilinea, qvæ fit a prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam a ſecunda (per 2. coroll. 20. 6.): erit itaqve ut BC ad CF ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed ut BC ad CF ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum (per 1. 6.): & igitur ut triangulum A B C ad triangulum K G H ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum EF: qvare alterne ſive permutando ut ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum (per 16. 5.). Eſt autem triangulum ABC æqvale parallelogrammo BE (per conſtruct.): æqvale igitur eſt & KGH triangulum parallelogrammo EF. Sed EF parallelogrammum æqvale eſt rectilineo D: ergo & triangulum KGH ipſi D eſt æqvale. Eſt autem & KGH ſimile triangulo ABC (per conſtr.),

Dato

Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato D æqvale idem conſtitutum eſt KGH.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem cum ipſo angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur ſimile ipſi ABCD & ſimiliter poſitum, communemqve cum ipſo angulum habens DAB; dico parallelogrammum ABCD circa eandem eſſe diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Demonſtratio.

Si theſin propoſitionis negaveris, ſit itaqve ipſorum diameter AHC, ducaturqve per H alterutri ipſarum AD, BC parallela HK.

Qvoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG (per antitheſin), erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG ſimile (per 24. 6.): ergo ut DA ad AB ita GA ad AK (per 1. def. 6.).

Eſt autem & (propter ſimilitudinem parallelogrammorum ABCD, EG,) ut DA ad AB ita GA ad AE: ideoqve ut GA ad AE ita GA ad AK (per 11. 5.): ac proinde GA ad utramqve ipſarum

rum AK, AE eandem rationem habet; erit igitur AE ipsi AK æqvalis per 9. 5.), hoc eſt, totum ſuæ parti erit æqvale, qvod fieri neqvit: non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ABCD cum parallelogrammo AEFG.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei, qvæ a dimidia deſcribitur, maximum eſt, qvod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Sit recta linea AB ſeceturqve bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, ſimili & (Fig. 1. *ſimiliter poſita ei, qvæ a dimidio ipſius AB deſcripta eſt, hoc eſt a BC: Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam* (Fig. 2. *AB applicatorum & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi CE, maximum eſſe AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH ſimili & ſimiliter poſita ipſi CE; Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe.*

Demon-

Demonſtratio.

1. Qvoniam parallelogrammum CE ſimile eſt parallelogrammo KK, circa eandem diametrum ſunt (per 26. 6.). Ducatur eorum diameter DB & deſcribatur Figura prima.

Qvoniam igitur CF eſt æqvale ipſi FE (per 43. 1.), commune apponatur KH: totum igitur CH toti KE eſt æqvale. Sed CH eſt æqvale CG, qvoniam recta linea AC ipſi CB eſt æqvalis (per 36. 1.): ergo & GC ipſi EK æqvale erit. Commune apponatur CF: totum igitur AF eſt æqvale gnomoni LMN; qvare & CE, hoc eſt parallelogrammum AD, parallelogrammo AF eſt majus (per 36. 1.).

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. Sit rurſus AB ſecta bifariam in puncto C, & applicatum ſit AL deficiens figura CM; & rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura DF, ſimili & ſimiliter poſita ei, qvæ a dimidia AB deſcribitur, videlicet CM: Dico parallelogrammum AL, qvod ad dimidium eſt applicatum majus eſſe parallelogrammo AE.

Qvoniam enim ſimile eſt DF ipſi CM, circa eandem ſunt diametrum (per 26. 6.): ſit ipſorum diameter EB & deſcribatur Figura 2.

Et qvoniam LF æqvale eſt LH (per 36. 1.), etenim FG ipſi GH eſt æqvalis; erit LF ipſo EK majus. Eſt autem LF æqvale DL (per 43. 1.): majus igitur eſt DL ipſo EK. Commune

mune apponatur KD. Ergo totum AL toto AE eſt majus.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

PROP. XXVIII. THEOR.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qvæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æqvale applicandum eſt, non majus eſſe eo, qvod ad dimidiam applicatur ſimilibus exiſtentibus defectibus & ejus qvod ad dimidiam & ejus cui oportet ſimile deficere.

Sit data recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æqvale ad datam rectam lineam AB applicare ſit C, *non majus exiſtens eo, qvod ad dimidiam applicatum eſt ſimilibus exiſtentibus defectibus; cui autem ſimile oportet deficere ſit* D; *oportet ad datam rectam lineam A B dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qvæ ſimilis ſit ipſi D.*

Conſtructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 10.).
2. Ab ipſa EB deſcribatur ſimile & ſimiliter poſitum ipſi D, qvod ſit EBFG (per 18. 6.) & compleatur AG Parallelogrammum.

Demonſtratio.

Qvoniam AG vel æqvale eſt ipſi C, vel eo majus ob determinationem; & ſiqvidem AG ſit

æqvale

æqvale C, factum jam erit, qvod proponebatur; etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æqvale parallelogrammum AG applicatum est deficiens figura parallelogramma EF, ipsi D simili.

Sin autem non est æqvale, erit HE majus qvam C, atqve est HE æqvale EF: ergo & EF qvam C est majus. Qvo autem EF superat C, ei excessui æqvale ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur KLMN (per 25. 6.). Sed D est simile EF, qvare & KM ipsi EF simile erit. Sit igitur recta linea qvidem LK homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF.

Et qvoniam æqvale est EF ipsis C † KM erit EF ipso KM majus: major igitur est GE ipsa KL, & GF ipsa LM (per 1. Corol. 20. 6.). Ponatur GX æqvalis LK, & GO æqvalis LM (per 3. 1.), & compleatur X G O P parallelogrammum (per 31. 1.): æqvale igitur & simile est X O ipsi KM (per 24. 6.). Sed KM simile est EF: ergo & XO ipsi EF est simile (per 21. 6.): circa eandem igitur diametrum est X O cum ipso EF (per 26. 6.) Sit ipsorum diameter GPB & figura describatur.

Itaqve qvoniam EF est æqvale ipsis C X K M, qvorum XO est æqvale KM, erit reliqvus gnomon æqvalis reliqvo C. Et qvoniam O R est æqvale XS (per 43. 1.), commune apponatur RS: totum igitur OB toti XB est æqvale. Sed XB est æqvale TE (per 36. 1.), qvoniam & latus AE æqvale lateri EB: qvare & TE ipsi OB æqvale est. Commune apponatur XS; ergo totum TS æqvale toti

gnomoni

gnomoni XS † SF. At gnomon XS † SF ipsi C ostensus est æqvalis: & igitur TS ipsi C æqvale erit.

Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma RS ipsi D simili, qvoniam & RS simile est ipsi OX.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, qvæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æqvale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere, sit D: itaqve oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi D.

Constructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 10. 1.);
2. A recta EB ipsi D simile similiterqve positum parallelogrammum describatur EL (per 18. 6);
3. Utrisqve qvidem EL † C æqvale, ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur GH (per 25. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam parallelogrammum EL simile est ipsi D, & parallelogrammum GH eidem etiam D est simile (per construct.), erunt EL, GH inter se qvoqve

qve ſimilia (per 21. 6.), ideoqve latus KH eſt homologum lateri FL, KG vero ipſi FE.

Porro parallelogrammum GH majus eſt ipſo EL, ideoqve recta linea KH major qvam FL & KG major qvam FE.

Producantur FL, FE, & ipſi qvidem KH æqvalis fiat FLM, ipſi vero KG æqvalis FEN (per 3. 1.), & compleatur parallelogrammum; ergo MN æqvale & ſimile eſt ipſi GH. Sed GH eſt ſimile ipſi EL: & MN igitur ipſi EL ſimile erit (per 21. 6); ac propterea circa eandem diametrum eſt EL cum ipſo NM (per 26. 6.). Ducatur ipſorum diameter & figura deſcribatur.

Itaqve qvoniam GH ipſis EL † C eſt æqvale, ſed & GH æqvale MN; erit & MN æqvale ipſis EL † C. Commune auferatur EL: reliqvus igitur gnomon eſt ipſi C æqvalis. Et qvoniam EA eſt æqvalis EB, æqvale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc eſt ipſi LO (per 36. & 43. 1.). Commune apponatur EX: totum igitur AX æqvale eſt gnomoni. Sed gnomon eſt æqvalis C: ergo & AX ipſi C æqvale eſt.

Ad datam igitur rectam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicatum eſt AX excedens figura parallelogramma PO ipſi D ſimili, qvoniam & EL ſimile eſt OP. *Quod erat faciendum.*

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Sit data recta linea terminata AB: oportet ipſam

AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare (uid. Fig. 1.).

Conſtructio.

1. Deſcribatur ex AB qvadratum BC (per 46. 1);
2. Ad AC ipſi BC æqvale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipſi BC ſimili (per 29. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam qvadratum eſt BC: erit igitur & AD qvadratum. Et qvoniam BC eſt æqvale CD commune auferatur CE; reliqvum igitur BF reliqvo AD eſt æqvale. Eſt autem & ipſi æqviangulum: ergo ipſorum BF, AD latera, qvæ circum æqvales angulos ſunt reciproce proportionalia (per 14. 6.): ut igitur FE ad ED ita eſt AE ad EB. Eſt autem FE æqvalis AC, hoc eſt ipſi AB: & ED ipſi AE: qvare ut AB ad AE ita AE ad EB. Sed AB major eſt qvam AE: ergo AE qvam EB eſt major.

Recta igitur AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in E, & majus ipſius ſegmentum eſt AE. *Qvod erat faciendum.*

Aliter.

Conſtructio.

Secetur AB in C ita, ut rectangulum qvod comprehenditur ſub AB, BC æqvale ſit qvadrato ex AC (per 11. 2.). vid. Fig. 2.

Demonſtratio.

Qvoniam igitur rectangulum, qvod comprehenditur ſub AB, BC, æqvale eſt qvadrato ex AC (per conſtr.); erit ut AB ad AC ita AC ad CB (per 17. 6.).

6.). Ergo AB secundum extremam & mediam rationem secta est (per 3. def. 6.). *Qvod erat faciend.*

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura, qvæ fit a latere rectum angulum subtendente æqvalis est eis, qvæ a lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, similibus & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC: Dico figuram, qvæ fit a BC, æqvalem esse eis, qvæ a BA, AC fiunt, similibus & similiter descriptis.

Demonstratio.

Ducatur perpendicularis AD.

Qvoniam igitur in triangulo ABC ab angulo recto, qvi est ad A, ad BC basin perpendicularis ducta est AD; erunt triangula ABD, ADC, qvæ sunt ad perpendicularem similia toti & inter se (per 8. 6.). Et qvoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA ita AB ad BD. Atqvi cum tres rectæ lineæ proportionales sint; ut prima ad tertiam ita erit figura, qvæ fit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda (per 2. Coroll. 20. 6.). ut igitur CB ad BD ita figura, qvæ fit a CB ad similem & similiter descriptam a BA.

Eadem ratione & ut BC ad CD, ita figura, qvæ fit a BC, ad eam qvæ fit a CA, qvare & ut BC ad ipsas BD, DC; ita figura, qvæ fit a BC ad eas, qvæ fiunt a BA, AC similes & similiter descriptas. Æqvalis autem est BC ipsis BD, DC: ergo figura qvæ fit a BC æqvalis est eis, qvæ a BA, AC fiunt similibus, similiterqve descriptis. *Qvod erat demonstrandum.*

Aliter:

Qvoniam ſimiles figuræ ſunt in duplicata ratione laterum homologorum (per 23.6.): figura qvæ fit a BC ad eam, qvæ fit a BA, duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad BA (per 1. cor. 20. 6.); habet autem & qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA duplicatam rationem ejus, qvam habet BC ad BA: ergo ut figura qvæ fit a BC ad eam qvæ fit a BA ita qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA (per 11.5.) Eadem ratione, & ut figura qvæ fit a BC ad eam qvæ fit a CA ita qvadratum ex CB ad qvadratum ex CA; & igitur ut figura qvæ fit a BC ad eas qvæ fiunt a BA, AC ita qvadratum ex BC ad qvadrata ex BA, AC. Qvadratum autem ex BC æqvale eſt qvadratis ex BA, AC: ergo & figura, qvæ fit a BC eſt æqvalis eis, qvæ a BA, AC fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula, qvæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ſecundum unum angulum ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqva triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE, qvæ duo latera BA, AC duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut qvidem BA ad AC ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi CD & AC ipſi DE: Dico BC ipſi CE in directum eſſe.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam AB parallela eſt DC, & in ipſas incidit recta linea AC; erunt anguli alterni BAC, ACD æqvales inter ſe. Eadem ratione & angulus CDE æqvalis eſt angulo ACD: qvare & BAC ipſi CDE eſt æqvalis. Et qvoniam ABC, DCE ſunt duo triangula unum angulum qvi ad A uni angulo qvi ad D æqvalem habentis, circum æqvales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet ut BA ad AC ita CD ad DE: erit triangulum ABC triangulo DCE æqviangulum (per 6. 6.)? ergo ABC angulus eſt æqvalis angulo DCE. Oſtenſus autem eſt angulus ACD æqvalis angulo BAC: totius igitur ACE duobus ABC, BAC eſt æqvalis; Communis apponatur ACB: ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, ABC æqvales ſunt. Sed BAC, ACB, ABC anguli duobus rectis ſunt æqvales (per 32. 1.): & igitur anguli ACE, ACB duobus rectis æqvales erunt. Itaqve ad qvandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC, CE, non ad eaſdem partes poſitæ, angulos, qvi ſunt deinceps ACE, ACB duobus rectis æqvales faciunt; Ergo BC ipſi CE in directum erit (per 14. 1.).

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulis æqvalibus anguli eandem habent rationem, qvam circumferentiæ qvibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc etiam & ſectores, qvippe qvi ad centra ſunt conſtituti.

Sint æqvales circuli ABC, DEF & ad centra qvidem ipsorum G, H sint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC, EDF: Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam ita esse BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem GBC ad HEF sectorem.

Demonſtratio.

1. Ponantur circumferentiæ qvidem BC æqvales qvotcunqve deinceps CK, KL; circumferentiæ vero EF rurſus æqvales qvotcunqve FM, MN, & jungantur GK, GL, HM, HN.

Qvoniam igitur circumferentiæ BC, CK, KL inter ſe ſunt æqvales, & anguli BGC, CGK, KGL inter ſe æqvales erunt (per 27.1.): qvam multiplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC tam multiplex eſt BGL angulus anguli BGC. Et ſi æqvalis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqvalis (per 27. 3); & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN major erit & BGL angulus angulo EHN; & ſi minor, minor: qvatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF & duobus angulis BGC, EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ qvidem BC, & anguli BGC æqve multiplicia, videlicet circumferentia BL & angulus BGL; circumferentiæ vero EF & EHF anguli æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & angulus EHN atqve oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare, angulum EHN; & ſi æqvalis æqvalem; & ſi minor minorem eſſe: igitur ut circumferentia BC ad circumferentiam EF, ita angulus BGC ad angulum EHF (per 5. def. 5.). Sed ut BGC

angulus

angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum (per 15. 5.); uterqve enim utriusqve est duplus (per 20. 3.): & igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. *Qvod primo erat demonstrandum.*

2. *Dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem.*

Jungantur enim BC, CK, & sumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur & BX, XC, CO, OK.

Itaqve qvoniam duæ BG, GC duabus CG, GK æqvales sunt & angulos æqvales comprehendunt; erit & basis BC basi CK æqvalis: æqvale igitur est & GBC triangulum triangulo GCK (per 4. 1.). Et qvoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqvalis, & reliqva circumferentia qvæ complet totum circulum ABC æqvalis est reliqvæ, qvæ eundem circulum complet (per 3. ax.). Qvare & angulus BXC angulo COK est æqvalis (per 27. 3.): Simile igitur est BXC segmentum segmento COK: & sunt super æqvales rectas lineas BC, CK. Qvæ autem super æqvales rectas lineas sunt similia circulorum segmenta & inter se æqvalia sunt (per 24. 3): ergo segmentum BXC est æqvale segmento COK. Est autem & BGC triangulum triangulo CGK æqvale: & totus igitur sector GBC toti sectori GCK æqvalis erit (per 3. ax.). Eadem ratione & GKL sector utrivis ipsorum GKC, GCB est æqvalis: tres igitur sectores GBC, GCK, GKL sunt æqvales inter ſe. Similiter & ſectores HEF, HFM, HMN inter ſe ſunt æqvales; qvam multiplex igitur eſt BL circumferentiæ BC, tam multiplex eſt & GBL ſector ſectoris GBC. Eadem ratione & qvam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiæ EF, tam multiplex eſt & HEN ſector ſectoris HEF; & (ex modo oſtenſis) ſi circumferentia BL circumferentiæ EN eſt æqualis, & ſector GBL æqvalis eſt ſectori HEN; & ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN ſuperat & GBL, ſector ſectorem HEN; & ſi minor, minor. Qvatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus qvidem circumferentiis BC, EF, duobus vero ſectoribus GBC, HEF; ſumta ſunt circumferentiæ qvidem BC & ſectoris GBC æqve multiplicia, videlicet circumferentia BL & GBL ſector, circumferentiæ vero EF & ſectoris HEF æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & HEN ſector. Atqvi oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, & ſectorem GBL ſuperare ſectorem HEN; & ſi æqvalis æqvalem; & ſi minor minorem: eſt igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector GBC ad HEF ſectorem.

Qvod ſecundo erat demonſtr.

Corollarium.

Perſpicuum etiam eſt & ut ſector ad ſectorem ita eſſe angulum ad angulum (per 11. 5,).

JACOBI