Rudolf Friedrich Alfred Clebsch.

Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen

von einigen seiner Freunde.

Als vorigen Spätherbst ein zu früher Tod den verewigten Clebsch der Wissenschaft entriss, vereinigten sich im Gefühle des gemeinsamen Verlustes eine Reihe seiner Freunde und ehemaligen Schüler (Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, Von der Mühll), um der Verehrung, die sie dem Dahingeschiedenen widmeten, einen Ausdruck in einer grösseren wissenschaftlichen Biographie zu geben. Wohl erschien es schwierig, bei einem Manne, dessen Thätigkeit wesentlich dem letzten Jahrzehnte angehört und der mit ungewöhnlicher Vielseitigkeit in den verschiedensten Theilen der Wissenschaft gearbeitet hat, schon jetzt ein solches Unternehmen zu versuchen. Aber eben hierin erblickten wir ein erhöhtes Interesse, eine doppelte Wichtigkeit desselben: es galt nicht nur, die Arbeiten des einzelnen Forschers in ihrer Aufeinanderfolge zu schildern, es galt vielmehr auch, wissenschaftliche Bestrebungen Anderer in vergleichendem Ueberblicke zu charakterisiren und einen grossen Theil der Fragen zu bezeichnen, mit denen sich die Mathematiker der Gegenwart beschäftigen. Und wenn der Einzelne, bei der Beschränkung, die jeder subjectiven Anschauung anhaftet, es kaum wagen wird, eine solche Aufgabe in Angriff zu nehmen, so glaubten wir der hieraus fliessenden Schwierigkeit durch unsere Vereinigung einigermassen begegnen zu können.

Eine kürzere, auch in diese Annalen (Bd. VI. 2) aufgenommene Notiz über Clebsch erschien bereits in den Göttinger Nachrichten (Dec. 1872). Als ursprünglich für einen weiteren Leserkreis entworfen, bringt dieselbe wesentlich biographisches Material; ihre fachwissenschaftlichen Partieen sind mehr allgemein gehalten. Dem gegenüber wenden sich die nachstehenden Auseinandersetzungen an den engeren Kreis eigentlicher Mathematiker; sie beschränken sich durchaus auf speciell wissenschaftliche Erörterungen und mögen also in jener Notiz nach verschiedenen Seiten eine Ergänzung finden.

Man kann die mannigfachen Arbeiten, mit denen sich Clebsch beschäftigt hat, nach Inhalt und Aufeinanderfolge in 6 Gruppen bringen. Die ersten Untersuchungen Clebsch's beziehen sich auf Gegenstände der mathematischen Physik; er wendet sich sodann zu Problemen der Variationsrechnung und der Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Es folgen weiter seine ersten geometrischen Arbeiten, welche allgemeine Curven- und Flächentheorie betreffen. An sie schliesst sich eine Periode, die durch das Studium der Abel'schen Functionen und ihre Verwerthung in der Geometrie charakterisirt ist. Die letzten Jahre endlich sind durch gleichzeitige Arbeiten über Flächenabbildung und Invariantentheorie bezeichnet.

Wir haben die hiemit geschilderte Trennung des uns vorliegenden Stoffes zur Grundlage für unser Zusammenarbeiten gemacht, indem jede der genannten Gruppen von einem von uns (und zwar bez. von Von der Mühll, Mayer, Lüroth, Brill, Nöther, Gordan) übernommen und hernach die Reihe der so entstandenen Einzelreferate (durch Klein) zu einem Ganzen verbunden wurde. Freilich hat so unsere Arbeit nicht denjenigen Grad von Gleichmässigkeit erhalten können, den man vielleicht wünschen mag. Auch glaubten wir auf absolute Vollständigkeit unseres Berichtes verzichten zu sollen, da die Besprechung mancher Arbeit, die ein einzelnes Problem betrifft, den Zusammenhang des Ganzen zu sehr unterbrochen haben würde. — Möge es uns gelungen sein, von dem Wirken und Forschen des theuren Dahingeschiedenen ein anschauliches Bild entworfen und dazu beigetragen zu haben, dass ein Verständniss für die von ihm verfolgten wissenschaftlichen Ziele in immer weiteren Kreisen erwachse!

Im Juli 1873.

Ueberblickt man die Entwickelung der Mathematik, insbesondere der deutschen Mathematik, in den letzten Jahrzehnten, so wird man, ganz im Allgemeinen, zwei Gruppen zusammengehöriger Arbeiten unterscheiden: auf die eine Seite wird man die Untersuchungen aus dem Gebiete der Functionentheorie, der Zahlentheorie, der mathematischen Physik stellen, auf die andere Seite die neuere Geometrie und Algebra. Diese Trennung ist nicht nur eine äusserliche, durch die Verschiedenheit des Gegenstandes begründete. Es hat sich vielmehr in den verschiedenen Disciplinen die mathematische Denkweise selbst nach verschiedenen Richtungen ausgebildet: auf der einen Seite concentrirt sich die Forschung auf möglichst exacte Umgrenzung der einzuführenden Begriffe, auf der andern Seite geht man von einem kleineren Kreise bereits erkannter Grundbegriffe aus und richtet sein Augenmerk auf die Beziehungen und Folgerungen, welche aus ihnen hervorsprossen.

Die erstgenannte Richtung ist in Deutschland wesentlich auf Dirichlet und in weiterer Instanz auf Gauss zurückzuführen, die andere erwuchs einerseits aus den analytischen Arbeiten Jacobi's, andererseits aus den Ergebnissen der neueren geometrischen Speculation.

Clebsch gehörte seiner ganzen Beanlagung nach durchaus der zweiten Richtung an und muss um so mehr als deren Hauptvertreter im letzten Jahrzehnte unter den deutschen Mathematikern betrachtet werden, als er durch seine vielfältigen persönlichen Beziehungen wie durch seine eminente Lehrthätigkeit in den weitesten Kreisen fördernd und anregend für dieselbe gewirkt hat. Und doch hat er in gewissem Sinne dazu beigetragen, dass eine Vereinigung der beiderlei Richtungen in Zukunft möglich scheint: denn indem er seine Untersuchungen auf immer weitere Gebiete der Wissenschaft erstreckte, hat er die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker der einen oder der andern Richtung beschäftigen, in hohem Masse genähert.

Clebsch war in erster Linie Algebraiker, und allen seinen Arbeiten gemeinsam ist die vollendete Beherrschung des algebraischen Apparates. Ihr zur Seite stellt sich in den späteren Untersuchungen die klare geometrische Auffassung, vermöge deren jeder Schritt, den die Rechnung vollführt, zu einem anschaulichen Verständnisse gebracht wird. Aber es ist nicht die concrete Art, die räumlichen Verhältnisse zu sehen, wie wir sie bei manchen anderen Geometern finden; die geometrische Anschauung ist ihm mehr Symbol und Orientirungsmittel für die algebraischen Probleme, mit denen er sich beschäftigt. Immerhin wird Clebsch, gegenüber den verschiedenartigen Bestrebungen, deren sich andre Geometer der neueren Zeit beflissen haben, durch das Zusammengehen der algebraischen und der geometrischen Auffassung zu charakterisiren sein, und man wird unter seinen Leistungen diejenigen obenan stellen, in denen er vermöge dieser doppelten Begabung bis dahin gesonderte Disciplinen in ihrem gemeinsamen Grunde erfasste.

Freilich war zu solchen Arbeiten nur eine Natur befähigt, die gleich ihm unter der Menge der Einzelheiten die grossen treibenden Gedanken hervorzuziehen wusste. Wir berühren hiermit eine andere wesentliche Seite seiner mathematischen Denkweise, die sich bei manchen Vertretern der algebraisch-gometrischen Richtung, z. B. bei Jacobi, ebenfalls zeigt, die aber durchaus nicht an die Beschäftigung mit Algebra und Geometrie nothwendig geknüpft ist. Vom Einzelnen ausgehend, erfasst Clebsch allgemeine Methoden, und diese sind es, die ihn weiter führen, die seinen Arbeiten ein einheitliches, systematisches Gepräge ertheilen. Die apriorische Fragestellung nicht nur in der mehr philosophischen Form, sondern überhaupt die Concentration auf ein von vornherein gegebenes Problem tritt verhältnissmässig zurück; der mathematische Gedanke entspringt in freier organischer Entwickelung aus der Methode.

In voller Deutlichkeit spiegelt sich diese Art in der mehr analysirenden als deducirenden Darstellungsweise wieder, deren sich Clebsch in seinen Arbeiten bedient, deren durchsichtige Form nicht nur die Ueberzeugung von der Richtigkeit einer Behauptung, sondern das Bewusstsein einer klar erkannten Wahrheit vermittelt. Clebsch wurde dabei, wenn ein solcher Ausdruck gestattet ist, geradezu von einem künstlerischen Tacte geleitet: das Streben nach harmonischer Abrundung des Stoffes ist für die Richtung seiner Untersuchungen wie die Gestalt seiner Abhandlungen von der grössten Bedeutung gewesen.

Aber nicht minder erblicken wir darin einen hauptsächlichen Grund für den ausserordentlichen Erfolg seiner Lehrthätigkeit. Indem der Zuhörer geradezu ein ästhetisches Interesse empfand, den Vorträgen von Clebsch zu folgen, wurde ihm das Eindringen in die Grundanschauungen des Lehrers möglichst erleichtert. Doch ungerecht wäre es, an dieser Stelle nicht auch der liebenswürdigen Art und Weise zu gedenken, mit der Clebsch im persönlichen Verkehr von seinen Gedanken reich und unbegrenzt mittheilte. Der wissenschaftliche Austausch war für ihn selbst in hohem Grade Bedürfniss; indem er, in voller Würdigung fremder Gedanken, ebensogern empfing als gab, wusste er sich durch ihn die ungewöhnliche geistige Regsamkeit zu erhalten, vermöge deren das Gebiet seiner mathematischen Thätigkeit kein abgeschlossenes war, sondern immer umfassenderen Erweiterungen zustrebte.

Die ersten Arbeiten von Clebsch datiren aus der Mitte der fünfziger Jahre. Sie betreffen, im Gegensatze zu den späteren Arbeiten, meist einzelne Probleme, die er mit grosser Geschicklichkeit zu behandeln und zum Abschluss zu führen weiss. Man wird sie, insofern sich in ihnen die Eigenart von Clebsch noch weniger ausspricht, wesentlich als Vorstudien zu betrachten haben. Die glänzende Reihe seiner algebraisch-geometrischen Untersuchungen, die alle auseinander in innerem Zusammenhange erwachsen, und in denen Clebsch je länger um so bewusster dazu übergeht, der Wissenschaft neue Bahnen vorzuzeichnen, beginnen erst mit dem Jahre 1860. Wenn man bedenkt, wie kurz der Zeitraum ist, in welchem alle diese Arbeiten entstanden sind, wenn man in ihnen eine fortschreitende Entwickelung wahrnimmt, die wohl noch lange nicht ihren Höhepunkt erreicht hatte, so wird man doppelt schwer den Verlust empfinden, den die Wissenschaft durch den zu frühen Tod von Clebsch erlitten hat.

Clebsch hat den Grund zu seiner mathematischen Ausbildung auf der Universität seiner Vaterstadt Königsberg gelegt, die er von 1850—54 besuchte. Ein passenderer Ort für die Entwickelung eines mathematischen Talentes konnte damals wohl kaum gefunden werden. Denn gerade in Königsberg waren zu jener Zeit durch die Vereinigung von Hesse, Neumann und Richelot die mathematischen Fächer eben so vielseitig als glänzend vertreten. Wenn Clebsch durch Neumann's Vorlesungen in die damals noch weniger verbreiteten Vorstellungen der mathematischen Physik eingeführt wurde, wenn er andererseits durch Richelot's unermüdliche und mannigfaltige Lehrthätigkeit eine genaue Kenntniss der Analysis in ihrem damaligen Zustande gewann, so ist doch eigentlich Hesse für ihn von der nachhaltigsten Bedeutung geworden, indem ihn derselbe mit den neueren algebraisch-geometrischen Untersuchungen bekannt machte.

Die ersten Arbeiten, welche Clebsch unternahm, betreffen Probleme der mathematischen Physik, insbesondere der Elasticität und der Hydrodynamik. Veranlassung zur Wahl dieser Gegenstände waren ihm zunächst Neumann's Vorlesungen gewesen, aber er blieb auch später durch seine Stellung am Carlsruher Polytechnicum, an welchem er 1858—63 die Professur für theoretische Mechanik bekleidete, längere Zeit auf ähnliche Fragen hingewiesen. Clebsch ist in diesen Arbeiten übrigens nicht eigentlich Physiker. Die physikalische, überhaupt die naturwissenschaftliche Auffassung lag ihm, bei allen Kenntnissen, die er im Einzelnen besass, verhältnissmässig fern und interessirte ihn nicht besonders. Nur in seiner ersten Arbeit, seiner Inauguraldissertation: „Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit" (Königsberg 1854, vergl. Crelle's Journal Bd. 52), sowie später noch einmal in einer Untersuchung über Circularpolarisation (Crelles Journal Bd. 57) findet sich bei ihm eine Vergleichung der abgeleiteten Resultate mit dem Experimente. Ihn interessirte vielmehr die mathematische Fragestellung, insofern sie geschickte analytische Behandlung verlangte: er gehörte, auch hierin Jacobi ähnlich, der rein mathematischen Richtung an, welche den abstracten Gedanken um seiner selbst willen verfolgt. Es war daher natürlich, dass er sich allmählich von den physikalischen Problemen zu rein mathematischen Fragen hinwandte.

Eine grössere Reihe von Abhandlungen, die sich auf hydrodynamische und auf optische Probleme beziehen, enthält das Borchardt'sche Journal (vergl. die am Schlusse zugefügte Liste der Publicationen). Das Verdienst dieser Untersuchungen liegt wohl weniger in den durch sie erzielten Resultaten, so schätzbar manche derselben sind, als in der eleganten Handhabung des analytischen Apparates; aber eben deswegen lässt sich, ohne Eingehen auf Einzelheiten, nicht genauer von ihnen berichten. Gewissermassen als Abschluss dieser Periode der mathematisch-physikalischen Forschung veröffentlichte Clebsch 1862 (Leipzig, B. G. Teubner) sein Lehrbuch der Elasticität. Hatte Lamé's bekanntes Werk ein hohes Verdienst um die Ableitung und Umformung der allgemeinen elastischen Gleichungen und um die Anwendung derselben auf das Problem der doppelten Strahlenbrechung gehabt, so gab Clebsch im Wesentlichen eine musterhafte Darstellung des sogenannten de St. Venant'schen Problems. Neu ist dabei die Umkehrung desselben. De St. Venant hatte sich mit dem Falle eines Stabes beschäftigt, auf dessen Seitenflächen keine Kräfte wirken, und gezeigt, dass man die Probleme der Biegung und der Torsion lösen kann, wenn die auf die Endflächen wirkenden Kräfte nach einem bestimmten Gesetze über dieselben vertheilt sind. Clebsch zeigt nun, dass unter entsprechenden Voraussetzungen auch der umgekehrte Fall lösbar ist, wo auf die Seitenflächen Kräfte wirken, dagegen keine auf die Endflächen. Liefern jene Betrachtungen eine angenäherte Lösung für den Fall eines Stabes, an dessen Enden Kräfte wirken, so führen diese zu einer annähernden Lösung für den Fall einer Platte, deren Rand von Kräften angegriffen wird. Clebsch entwickelte dann weiter, dass die gemachten Voraussetzungen in dem Falle eines sehr dünnen Stabes und ebenso in dem Falle einer sehr dünnen Platte für die Elemente zutreffen, in welche man diese Körper nach Kirchhoff zerlegen muss, um richtige Gleichungen zu erhalten, und leitet so die zuerst von Kirchhoff gegebenen Endgleichungen für die beiden Fälle ab.

Mit seiner ersten rein mathematischen Arbeit knüpft Clebsch an Untersuchungen von Hesse und von Jacobi an. Clebsch hat Jacobi nicht persönlich gekannt, aber er hat dessen Werke mit Vorliebe studirt und sich später geradezu gelegentlich als Schüler desselben bezeichnet. Es sind von Jacobi hinterlassene Probleme, die Clebsch in den nun zu besprechenden Arbeiten aufgreift; und wenn der Ideenkreis, in welchem sich diese Untersuchungen bewegen, durchaus der Jacobi'sche ist, so gehen dieselben, was einzelne Leistungen betrifft, über das von jenem Erreichte doch weit hinaus.

Die Aufgabe, eine oder mehrere unbekannte Functionen so zu bestimmen, dass ein Integral, welches diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten auf eine gegebene Weise enthält, einen grössten oder kleinsten Werth erreiche, verlangt zunächst, dass die erste Variation des Integrals zum Verschwinden gebracht wird, und aus dieser Bedingung erhält man die Differentialgleichungen, durch deren Integration sich die unbekannten Functionen bestimmen. Damit aber ein wirkliches Maximum oder Minimum eintritt, muss überdiess für die hierdurch erhaltenen Functionen die zweite Variation ein unabänderliches Vorzeichen besitzen. Hieraus entspringt die andere Aufgabe, die zweite Variation auf eine zur Untersuchung ihres Zeichens geeignete Form zu bringen. Diese Aufgabe führt ihrerseits auf neue Differentialgleichungen, die auf den ersten Blick von so complicirtem Charakter scheinen, dass ihre Integration selbst den Bemühungen von Lagrange widerstand. Es war daher eine ausserordentliche Entdeckung Jacobi's, dass die Integration der Differentialgleichungen der zweiten Variation unmittelbar aus der Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation abgeleitet werden kann (Crelle's J. Bd. 17, 1837). Aber Jacobi hatte nur den einfachsten Fall eines einfachen Integrals mit einer unbekannten Function untersucht, und wenn man bedenkt, wie viel Anstrengungen es kostete, bis nur Jacobi's Angaben vollständig bewiesen waren, was erst durch Hesse's Arbeit (Borch. J. Bd. 54, 1857) geschah, so durfte man wohl kaum erwarten, dass es gelingen werde, auch in der Complication der allgemeineren Fälle den Jacobi'schen Satz wiederzufinden. Trotzdem unternahm Clebsch, bald nach dem Erscheinen der Hesse'schen Arbeit, die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation (Borch. J. Bd. 55, Nov. 1857, Febr. 1858, Bd. 56, Juni 1858),*) und indem er

*) Das den Citaten hier und im Folgenden beigesetzte Datum bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes bemerkt wird, die von dem Autor angegebene Zeit des Abschlusses der Arbeit.

durch einen sinnreichen Gedanken die Aufgaben der Variationsrechnung zunächst auf solche Probleme des relativen Maximums oder Minimums zurückführte, in denen nur erste Differentialquotienten auftreten, gelang es ihm, nicht blos für einfache, sondern auch für vielfache Integrale zu zeigen, dass für die Reduction der zweiten Variation neue Integrationen nicht erforderlich sind*).

Bei dieser Reduction tritt im Falle eines einfachen Integrals der merkwürdige Umstand ein, dass man ein Endresultat mit scheinbar mehr willkürlichen Constanten erhält, als nach der Theorie darin vorkommen können. Diese Constanten sind überdies durch gewisse Bedingungsgleichungen verbunden und müssen so bestimmt werden, dass der Nenner der Reduction innerhalb der Grenzen des Integrals nicht verschwindet. Wenn es daher eine oft versuchte Aufgabe war (die in den einfachsten Fällen von Eisenlohr, Spitzer und Hesse gelöst wurde), nachzuweisen, dass diese Constanten sich auf eine vorgeschriebene kleinere Anzahl reduciren lassen, so ist es doch auf der anderen Seite noch ungleich wichtiger, die ursprünglichen Constanten durch solche Functionen von neuen unabhängigen Constanten auszudrücken, welche jene Bedingungsgleichungen identisch erfüllen.

Von beiden Aufgaben enthalten die Arbeiten von Clebsch die erste vollständige Lösung (vergl. Borch. J. Bd. 55, Febr. 1858)**). Und bedeutsamer noch als das Resultat ist der Weg, auf dem diese Lösung erhalten wird. Er bringt den Beweis und die Erweiterung einer anderen fundamentalen Bemerkung, die Jacobi a. a. O. macht, den Nachweis nämlich, dass sich die Differentialgleichungen eines jeden isoperimetrischen Problems, in welchem nur eine unabhängige Variable auftritt, zurückführen lassen auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung***), wodurch der Variationsrechnung dieselben Methoden zugänglich werden, die Hamilton und Jacobi der Dynamik eröffnet haben.

Bald nach diesen Arbeiten begann Clebsch sich geometrischen Problemen zuzuwenden. Er ist aber später noch wiederholt (1860—62,

---

*) In etwas kürzerer Weise wurde dieselbe Reduction unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen später durch Lipschitz erreicht (Borch. J. Bd. 65). Die wirkliche Herstellung der Kriterien für ein Maximum oder Minimum gab auf Grund der Clebsch'schen Arbeit Mayer in seiner Habilitationsschrift (Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866), vergl. auch Mayer's Abhandlung in Borch. J. Bd. 69.

**) Eine directere Lösung der ersten Aufgabe wurde später im Anschlusse an Clebsch von Mayer gegeben (in der bereits genannten Schrift); ebenso, unabhängig von Clebsch, durch Stern (Göttinger Abhandl. Bd. 13, 1867).

***) In den erst später (1866) veröffentlichten Vorlesungen Jacobi's über Dynamik findet man allerdings diesen Satz ebenso allgemein ausgesprochen, doch wird er dort immerhin nur für specielle Fälle bewiesen.

1865) dazu gekommen, eine Reihe von Problemen, die Jacobi hinterlassen hatte, aufzunehmen. Er wurde dazu zunächst durch den Umstand veranlasst, dass er die Herausgabe einiger Theile des Jacobi'schen Nachlasses, sowie der Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik (erschienen 1866) übernommen hatte. Bei der nahen Beziehung, in der diese Arbeiten Clebsch's zu den oben besprochenen stehen, mag derselben gleich hier gedacht werden. Wie bei den Untersuchungen über Variationsrechnung ist auch bei diesen hauptsächlich die Geschicklichkeit in der Ueberwindung technischer Schwierigkeiten hervorzuheben; es ist ferner die für so complicirte Verhältnisse ganz ungewöhnliche Klarheit der Exposition zu betonen.

Man wusste aus einer Andeutung Jacobi's (Crelle's J. Bd. 29, p. 253), dass das Verfahren, durch welches man früher das Pfaff'sche Problem zu behandeln pflegte, hinsichtlich der Zahl der erforderlichen Integrationen vervollkommnet werden konnte; auch lag es nicht fern, zu vermuthen, dass hier eine Methode existiren müsse, die derjenigen analog ist, durch welche Jacobi die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung so wesentlich gefördert hatte.*) Die Schwierigkeit der Aufgabe lag in der sehr viel grösseren Complication der Vorgänge und Operationen, welche nothwendig werden. Aber Clebsch überwand alle diese Hindernisse (Borch. J. Bd. 60. dat. Sept. 1860, publ. 1862, Bd. 61. dat. Jan. 1861, publ. 1862), und indem er das Problem auf Systeme gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen zurückführte, die unabhängig von einander und ohne jede Integration aufgestellt werden können, gewann er demselben einen neuen Gesichtspunkt ab, der sich bald als fundamental erwies und voraussichtlich auch für alle künftigen Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem die Grundlage bilden wird.

Hierbei trat eine Schwierigkeit auf. Die einzelnen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, von deren Integration die Lösung des Pfaff'schen Problems abhängt, haben nämlich nicht unmittelbar diejenige Form, die Jacobi in seiner Nova Methodus zu integriren gelehrt hat, und in Folge dessen ist auch die Jacobi'sche Methode nicht ohne Weiteres auf dieselben anzuwenden. Es entstand also die Aufgabe, überhaupt die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen einer Untersuchung zu unterwerfen**). Clebsch

*) In der That hat Natani schon vor Clebsch die von Jacobi vorhergesehene Reduction der Anzahl von Integrationen im Pfaff'schen Probleme wirklich erzielt (Borch. J. Bd. 58. dat. Januar 1860. publ. 1861). Seine Methode und die von Clebsch sind indess trotz ihrer Uebereinstimmung betr. die Zahl der nothwendigen Integrationen noch nicht in Verbindung gebracht worden.

**) Mit Untersuchungen über die simultane Integration mehrerer partieller Differentialgleichungen hat sich, ohne jedoch speciell auf lineare einzugehen, schon wurde erst einige Jahre später (1865) veranlasst, das Problem in diesem Sinne weiter zu führen. Ihn beschäftigten damals die linearen partiellen Differentialgleichungen, denen die Invarianten algebraischer Formen genügen, wovon wir weiter unten noch zu berichten haben. Andererseits hatte er eine Arbeit von Weiler kennen gelernt, in welcher derselbe (vergl. Schlömilch's Zeitschrift. 1863.) die Zahl der Integrationen, welche nach der Jacobi'schen Methode bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu leisten sind, beträchtlich erniedrigt hatte. Der Untersuchung von Clebsch (Borch. J. Bd. 65) verdankt man wiederum zwei wichtige Resultate. Einmal den Satz, dass jedes System linearer partieller Differentialgleichungen, das überhaupt gemeinsame Lösungen zulässt, auf die Jacobi'sche Form gebracht werden kann, wodurch zur Lösung aller Probleme, die auf solche partielle Differentialgleichungen führen, eine gemeinsame Methode gewonnen ist. Sodann im Anschlusse an die Weiler'sche Untersuchung den Nachweis, dass die Zahl der erforderlichen Integrationen sowohl bei der eigentlichen Jacobi'schen Integrationsmethode als bei deren Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem um ein Bedeutendes reducirt werden kann. Neueren Arbeiten war es vorbehalten, zu zeigen, dass sich auch die Zahl der Integrationen, welche bei der Clebsch-Weiler'schen Methode erfordert werden, noch beträchlich verringern lässt (vergl. Aufsätze von Lie und Mayer in den Gött. Nachrichten 1872, sowie in Math. Ann. Bd. 5 und 6), wie denn überhaupt die hier einschlägigen Theorien in der allerletzten Zeit einer wesentlichen Entwickelung entgegen zu gehen scheinen. —

Die geometrisch-algebraischen Arbeiten von Clebsch beginnen mit dem Jahre 1860. Die nächste Veranlassung dazu, sich mit geometrischen Problemen zu beschäftigen, hatte ihm, wie er selbst angiebt, das Studium der Salmon'schen Werke geboten, die in ihrer bekannten Reichhaltigkeit für jeden Leser des Anregenden die Fülle enthalten. Auch mag der wissenschaftliche Austausch, wie ihn Clebsch bei mehreren seiner Carlsruher Collegen fand, von bestimmendem Einflusse gewesen sein: wie denn Clebsch später mit Vorliebe erzählte, dass er damals durch Schell die neuere synthetische Geometrie habe kennen lernen. Die analytisch-geometrische Grundlage für seine nun

---

vor Clebsch ganz allgemein Bour beschäftigt, dessen Resultate jedoch einer exacteren Formulirung bedürfen (vergl. einen Aufsatz von Mayer, Math. Ann. Bd. 4). Andererseits sind die im Texte noch zu nennenden linearen partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie bereits 1856 von Cayley hinsichtlich ihrer simultanen Integration untersucht worden (A second Memoir upon Quantics. Phil. Transactions 146). Cayley's Betrachtungen sind mit denen, die Clebsch anstellt, nahe verwandt; er hebt aber nicht die allgemeine Bedeutung hervor, welche dieselben für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen besitzen.

beginnende Thätigkeit hatte Clebsch, wie schon angedeutet, während seiner Universitätszeit in den Vorlesungen von Hesse gewonnen, auf dessen Untersuchungen er ja auch bei früheren Gelegenheiten (Reduction der zweiten Variation) geradezu weiter gearbeitet hatte.

Wollen wir für die Stellung, welche Clebsch in der Wissenschaft fortan einnahm, ein Verständniss gewinnen, so wird es nöthig, auf die Entwickelung der Geometrie in den letzten Jahrzehnten überhaupt zurückzugehen.

Es sind hauptsächlich zwei Richtungen geometrischer Forschung, die in dieser Zeit ihre Ausbildung gefunden haben, und diese gehen in mancher Beziehung mit der allgemeinen Zweitheilung mathematischer Bestrebungen parallel, deren wir im Eingange gedachten. Die Betrachtungen der einen Art sind wesentlich durch die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf metrische Probleme charakterisirt: es gehören dahin die Untersuchungen über Flächenkrümmung, über geodätische Linien etc., wie sie in Frankreich durch Monge, in Deutschland durch Gauss im heutigen Sinne angeregt worden sind. Wenn diese Forschungen rückwirkend ihre Wichtigkeit für die Ausbildung des Infinitesimalcalculs, wie andererseits eine hohe Bedeutung in Fragen der mathematischen Physik gewonnen haben, so hatten sie von Hause aus zu wenig algebraischen Charakter, um mit den Untersuchungen der anderen Art, die man unter dem Namen der neueren Geometrie zusammenfasst, in Zusammenhang zu bleiben. Erst in der allerneuesten Zeit bahnt sich in Folge der beiderseitigen Fortschritte eine Vereinigung der beiderlei Richtungen an, die in hohem Masse interessant und fruchtbar zu werden verspricht.

Die neuere Geometrie geht nach ihrem Ursprunge ebenfalls auf Monge resp. auf seine zahlreichen Schüler zurück, unter denen vor Allen Poncelet hervorragt, dessen grundlegendes Werk, der „Traité des propriétés projectives" 1822 erschien. Es ist sehr merkwürdig, dass die junge und lebenskräftige Disciplin in Frankreich zunächst nur einen Vertreter fand, der es vermochte, sie über den von Poncelet gewonnenen Standpunkt hinauszuführen. Wenn man Chasles hierfür allen Dank schulden wird, so muss man um so mehr bedauern, dass in jener Zeit der wissenschaftliche Austausch nur erst wenig entwickelt war und Chasles eine ganze Reihe von Gesichtspunkten erst selbständig zu finden hatte, die von den deutschen Geometern längst entwickelt waren.

Denn im Anschlusse an die von der französischen Schule gegebene Anregung entfaltete sich in Deutschland gegen Mitte der zwanziger Jahre plötzlich ein reiches geometrisches Leben, dessen Beginn durch das beinahe gleichzeitige Auftreten der drei grossen Forscher: Möbius, Plücker und Steiner bezeichnet ist.

Das erste und auch das wichtigste Werk von Möbius, der barycentrische Calcul, erschien bereits 1827. Aber es blieb lange Zeit fast unbeachtet. Die neuen und fundamentalen Gedanken, welche Möbius in demselben niedergelegt hat, haben erst Interesse und Verständniss finden können, als sich der allgemeine geometrische Sinn allmählich zu der Höhe gehoben hatte, von der aus Möbius seine Untersuchungen anstellt. Der barycentrische Calcul hat daher auch nicht in dem Masse in die Entwickelung der geometrischen Anschauungen eingreifen können, als er nach dem Reichthume neuer und fruchtbringender Ideen, die er einschloss, gesollt hätte. Ein ganz ähnliches Schicksal haben leider die nicht nur für Geometrie äusserst wichtigen Arbeiten eines anderen Forschers, H. Grassmann's, erfahren. Man beginnt erst in der letzten Zeit, auf die Grassmann'schen Arbeiten zurückzugehen und bemerkt, dass Grassmann bereits in den vierziger Jahren eine Reihe sehr umfassender Ideen concipirte, welche der Process allgemeiner geometrischer Entwickelung erst in der Zwischenzeit ausgebildet, zum Theil aber noch gar nicht berührt hat. Wir müssen hier vorgreifend dieses ausserordentlichen Verdienstes gedenken, da wir bei der isolirten Stellung, die Grassmann einnimmt, im Folgenden nur selten Gelegenheit haben werden, auf die Besprechung seiner Leistungen zurückzukommen, und dürfen dies um so mehr, als wir damit einer Ueberzeugung Ausdruck geben, der Clebsch im vollsten Masse beipflichtete.

Mit den Namen Plücker und Steiner ist für die deutsche Geometrie die Trennung in sogenannte analytische und synthetische Geometrie gegeben, welche bis in die allerneueste Zeit die Geometer in zwei getheilte Lager gespalten hat. Steiner hatte in der unmittelbaren geometrischen Anschauung das hinreichende Hülfsmittel und den einzigen Gegenstand seiner Erkenntniss erblickt, während Plücker in der Identität der analytischen Operation und der geometrischen Construction die Quelle seiner Beweise suchte und geometrische Wahrheit nur als eins der vielen denkbaren Gegenbilder analytischer Beziehung betrachtete. Und doch sind die Ziele, welche die beiden Forscher verfolgten, in vieler Hinsicht nahe verwandt: der Fortschritt der Wissenschaft hat es inzwischen ermöglicht, fast an allen Stellen zwischen den formal geschiedenen Betrachtungsweisen den Uebergang zu bewerkstelligen. Das gemeinsam Charakteristische: die projectivische Anschauung und die Anlehnung an die Begriffsbildung der Algebra tritt je länger je mehr in den Vordergrund, und die Bevorzugung der einen oder anderen Ausdrucksweise erscheint als etwas verhältnissmässig Nebensächliches.

Eben diese Auffassung von dem Verhältnisse der synthetischen und analytischen Geometrie bildet eine der Grundanschauungen von

Clebsch. Man vergleiche hierüber die Gedächtnissrede auf Plücker, die Clebsch im 16ten Bande der Göttinger Abhandlungen gegeben hat (1871). Clebsch schildert dort ausführlich und in vergleichendem Ueberblicke die damalige Entwickelung der Geometrie und nimmt dabei Gelegenheit, seine eigenen allgemeinen wissenschaftlichen Gesichtspunkte auseinanderzusetzen.

Während die rein geometrische Richtung Steiner's, mit welcher die gleichzeitig von Chasles verfolgten Untersuchungen nahe verwandt sind, durch Staudt eine principiellere Durchbildung erfuhr, erhielt die analytische Geometrie in Hesse's wichtigen Arbeiten eine neue und wesentliche Bereicherung. Hatte Plücker einen hauptsächlichen Vortheil seiner Betrachtungsweisen darin erblickt, dass er die algebraische Elimination durch eine geometrische Ueberlegung umging, so zeigte Hesse, wie man unter Benutzung der inzwischen ausgebildeten Hülfsmittel, besonders der Determinantentheorie, der algebraischen Operation diejenige Geschmeidigkeit ertheilen kann, deren Mangel für Plücker eben der Grund gewesen war, um dessen willen er die Elimination überhaupt verbannt wissen wollte.

Erst so war die Möglichkeit einer Verschmelzung der Geometrie mit der neu entstehenden Disciplin gegeben, welche man heute als Formen- oder Invarianten-Theorie bezeichnet und die bestimmt ist, die Grundgedanken der neueren Geometrie in analytischer Allgemeinheit zu repräsentiren.

Das Verdienst, diese Disciplin geschaffen und durch Verbindung derselben mit der geometrischen Speculation die letztere über den von Hesse gewonnenen Standpunkt hinaus gefördert zu haben, gebührt den englischen Geometern*) Sylvester, Cayley, Salmon, denen sich in Deutschland Aronhold anschliesst. Die späteren Untersuchungen von Steiner über höhere Curven und Flächen, die in den von ihm ohne Beweis veröffentlichten Resultaten für manchen Geometer, so namentlich auch für Clebsch, von der höchsten Anregung gewesen sind, haben leider auf die englischen Arbeiten zu wenig Rücksicht genommen, so dass manche der merkwürdigen Ergebnisse, die Steiner publicirte, von den englischen Forschern schon lange anticipirt waren. Andererseits hatten die Untersuchungen über Invariantentheorie, wie sie in jener Zeit durch Hermite und Brioschi angestellt wurden, eine zu wenig geometrische Form, um unmittelbar für die Geometrie von Wichtigkeit zu sein.

So ungefähr waren die verschiedenen Entwickelungsphasen geometrisch-algebraischer Kenntniss auf einander gefolgt, als sich Clebsch

*) Uebrigens besitzen die ersten englischen Arbeiten nicht diejenige analytische Eleganz, welche bereits in Hesse's Untersuchungen entwickelt war.

der Geometrie zuwandte. Schon früher einmal (Borch. J. Bd. 53. 1855) hatte er in einer seiner ersten Arbeiten ein geometrisches Thema berührt. Dasselbe bezieht sich auf das von Steiner auf Flächen zweiten Grades übertragene Malfatti'sche Problem, insbesondere auf eine von Cayley gegebene algebraische Auflösung desselben, von der Clebsch zeigt, dass sie sich mit Hülfe der elliptischen Functionen sehr einfach darstellen lasse. Es ist sehr merkwürdig, dass Clebsch mit dieser Arbeit einen Gedanken berührte, dessen spätere, allerdings in ganz anderer Richtung liegende Ausführung zu seinen grössten Verdiensten gehört: den Gedanken, die Theorie der höheren Transcendenten für neuere Geometrie zu verwerthen.

Wie soeben die Entwickelung der Geometrie geschildert wurde, war es natürlich, dass Clebsch an die Arbeiten der englischen Geometer anknüpfte. Wie sie stellt er, hierin über Hesse hinausgehend, die Probleme sofort in homogenen Coordinaten, die nur als Verhältnisszahlen definirt sind *). Dabei wird nicht nur als irrelevant betrachtet, wie in diesen Coordinaten die Gleichung der unendlich fernen Ebene gestaltet ist, sondern es wird auch die Frage unberührt gelassen (oder doch als von secundärer Wichtigkeit angesehen), ob man es mit reellen oder mit complexen Gebilden zu thun hat. Das algebraische Instrument, dessen sich Clebsch in seinen ersten Untersuchungen mit Vorliebe bedient (und hierin lehnt er sich an Hesse an), ist der Determinantenmultiplicationssatz in seiner Anwendung auf geränderte Determinanten. Erwähnen wir zunächst der eben auch mit Rücksicht hierauf sehr wichtigen Arbeiten über allgemeine Theorie der algebraischen Curven und Flächen. Es sind damit solche Arbeiten gemeint, welche in Anlehnung an die projectivische Anschauungsweise die allgemeinen Curven oder Flächen einer gegebenen Ordnung zum Gegenstande ihrer Untersuchung haben. Dieselben stehen in der engsten Beziehung zu den Problemen der Invariantentheorie linearer Substitutionen; dagegen sind sie wohl zu unterscheiden von anderen Betrachtungen, deren wir weiter unten zu gedenken haben, welche eine Curve oder Fläche als Ausdruck einer algebraischen Irrationalität auffassen und nach den Eigenthümlichkeiten fragen, die bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleiben.

Das erste Problem der allgemeinen Flächentheorie, mit dem sich Clebsch beschäftigt hat, betrifft diejenigen Punkte einer algebraischen Fläche der n^{ten} Ordnung, in denen dieselbe von einer Geraden vier-

---

*) Dem widerspricht nicht, wenn Clebsch in seinen Arbeiten, wo Differentiale der Coordinaten in Betracht kommen, gelegentlich eine nicht homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten voraussetzt. Dieselbe bezweckt dann nur eine symmetrische Durchführung von Eliminationsprocessen; die Werthe der in ihr vorkommenden Constanten sind gleichgültig.

punktig berührt wird (Zur Theorie der algebr. Flächen. Borch. J. Bd. 58. März 1860). Bereits Salmon hatte (Cambridge a. Dublin Math. J. t. IV. 1849) den Grad der von solchen Punkten gebildeten Curve zu $11n-24$ durch Abzählung gefunden, er hatte auch (Quarterly J. t. I. 1857) die Gleichung einer Fläche construirt, welche diese Curve aus der gegebenen Fläche ausschneidet. Aber diese Gleichung erscheint bei ihm in einer ziemlich unübersichtlichen Form, und es ist das Verdienst der Clebsch'schen Arbeit*), das einfache Bildungsgesetz derselben aufgedeckt zu haben. Clebsch gelangt dahin durch Entwickelung einer allgemeinen Methode, die gestattet, das Resultat der Elimination von n homogen vorkommenden Unbekannten, die an $(n-2)$ lineare Gleichungen, eine quadratische Gleichung und eine Gleichung beliebigen Grades geknüpft wird, in fertiger Form hinzuschreiben. Die Methode besteht ganz allgemein gesagt darin, die quadratische Gleichung mit Hülfe der $(n-2)$ linearen in zwei Factoren aufzulösen, welche im Schlussresultate symmetrisch vereinigt auftreten und also keine Irrationalität mit sich führen (vergl. auch Clebsch's Theorie der binären Formen § 27.). Die Resultante erscheint dabei — und darauf legte Clebsch besondern Werth — nicht als unübersichtliches Coëfficientenaggregat, sondern in durchsichtiger Weise aus gesetzmässig erzeugten Bildungen aufgebaut.

Clebsch hat von dieser Eliminationsmethode eine Anzahl weiterer geometrischer Anwendungen gegeben. Es gehört dahin die Arbeit über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung**) (Borch. J. Bd. 58. April 1860), dann namentlich der Aufsatz über ein Classe von Eliminationsproblemen etc. (ebenda Bd. 58. Juni 1860), wie endlich die inhaltreiche Abhandlung über Curven vierter Ordnung (Bd. 59. Sept. 1860). Letztere mag in der Absicht entstanden sein, für eine dereinstige durchgreifende Behandlung dieser Curven vorläufiges Material zu sammeln, an dem es noch sehr fehlt. Hatten sich die Untersuchungen Hesse's und Steiner's mit den merkwürdigen Gruppirungen beschäftigt, welche die 28 von Plücker zuerst gefundenen Doppeltangenten besitzen, so geht Clebsch mit seiner Arbeit nach einer anderen Richtung, indem er die Eigenschaften der cubischen Polarcurven zu erforschen strebt, welche die Curve vierter Ordnung

---

*) Clebsch's Arbeit ist vom 11. März 1860 datirt. Den 14. Juni desselben Jahres hat Salmon der Royal Society in einer Abhandlung über ternäre cubische Formen dasselbe Resultat ohne Beweis mitgetheilt (vergl. Phil. Transactions 1870). Später hat Gordan dasselbe unter consequenter Anwendung der symbolischen Bezeichnung auf kürzerem Wege abgeleitet (Schlömilch's Zeitschrift. Bd. 12 1867).

**) Das dort abgeleitete Produkt der 9 Wendetangenten war vorher von Salmon ohne Beweis angegeben worden (Higher Algebra 1. ed. p. 116).

den Punkten der Ebene zuordnet. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Hesse'sche Curve der jedesmaligen ersten Polare, die Polardeterminante, wie Clebsch sie nennt, welche für unendlich viele Punkte der Ebene in ein Dreieck ausartet. Die Pole dieser Dreiecke bilden eine neue Curve der vierten Ordnung, deren Gleichung in ähnlicher Weise aus den dritten Differentialquotienten der gegebenen Form zusammengesetzt ist, wie die erste Invariante einer cubischen Form aus deren Coëfficienten. Eine Reihe von schönen Sätzen erläutert die Beziehungen zwischen den Polardeterminanten und ihren Polen, sowie die merkwürdige Reciprocität zwischen diesen und den Ecken der Polardeterminantendreiecke, welche selbst jene neue Curve vierter Ordnung beschreiben.

Unter den Formen, auf welche die Untersuchung der hierbei auftretenden Curven führt, ist eine Invariante sechsten Grades, obwohl nicht die einfachste überhaupt, dadurch merkwürdig, dass sie verschwindet, wie Clebsch zeigt, wenn sich die Gleichung der Curve vierter Ordnung als Summe von fünf vierten Potenzen schreiben lässt *). Dieser Umstand gibt ein merkwürdiges Beispiel für die Unmöglichkeit einer Umformung, deren Möglichkeit nach einem ersten Constantenzählen zu erwarten schien (vergl. hierzu Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker p. 23). In ihm lag wohl für Clebsch die erste Veranlassung sich mit dem Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und der auf dasselbe gegründeten Umformung ihrer Gleichung in die Summe von fünf Cuben zu beschäftigen, insofern ihm die Begründung der betreffenden kanonischen Form aus dem blossen Uebereinstimmen der Zahl der Constanten nicht genügen konnte. Das Pentaedertheorem musste ihn umsomehr interessiren, als sich die Sätze über die 27 Geraden der Flächen dritter Ordnung als Corollare der allgemeinen Theoreme auffassen liessen, die Clebsch für die vierpunktige Berührung einer Geraden mit einer Fläche entwickelt hatte: es galt nun, bei den Flächen n^{ter} Ordnung auch solche Beziehungen nachzuweisen, wie sie bei den Flächen dritter Ordnung durch die Existenz des Pentaeders gegeben sind.

Die Flächen dritter Ordnung sind erst in verhältnissmässig neuer Zeit Untersuchungsgegenstand geworden. Im Jahre 1849 erschien eine Arbeit von Cayley über dieselben, in der er die Existenz der 27 Geraden, welche auf der Fläche liegen, nachwies, worauf er denn, in Verbindung mit Salmon, rasch eine Deduction der Haupteigenschaften der Fläche gab, welche sich an diese Geraden anschliessen (Cambridge and Dublin Math. J. t. IV). Bald darauf entdeckte Syl-

*) Diese merkwürdigen Curven sind später von Lüroth näher untersucht worden (Math. Ann. Bd. I).

vester, ausgehend von algebraischen Betrachtungen, das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche (ebenda. t. VI. 1851). Mit diesen beiden Entdeckungen sind die Hauptmomente gegeben, um welche sich noch jetzt die Untersuchung der Flächen dritter Ordnung dreht, und es mag betont werden, was Clebsch gern hervorhob, dass es seither noch nicht gelungen ist, die beiden Richtungen der Untersuchung in eine einfache Verbindung zu setzen*). Die Theorie der 27 Geraden machte durch die Grassmann'schen und Steiner'schen Betrachtungen über die Erzeugung der Flächen dritter Ordnung einen wesentlichen Fortschritt, vermöge dessen weiterhin die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und damit ein einfaches Mittel zum Studium dieser Verhältnisse gefunden wurde; sie wurde ferner in den Händen von Schläfli das Instrument für eine Eintheilung der Flächen dritter Ordnung in Arten. Die Theorie des Pentaeders dagegen ist in ihrer Bedeutung für die Geometrie der Flächen dritter Ordnung bis jetzt relativ unentwickelt geblieben.

Sylvester hatte seine Sätze über das Pentaeder ohne Beweis publicirt. Fünf Jahre später gab Steiner in seiner viel genannten Abhandlung über Flächen dritten Grades (Crelle's J. Bd. 53. 1856) neben manchen anderen eben auch diese Sätze, aber, wie er damals pflegte, ohne Beweis oder auch nur Andeutung eines solchen. Clebsch unternahm es daher, einen Beweis für die Pentaedersätze zu entwerfen. Nach einer ersten vorläufigen Mittheilung (Borch. J. Bd. 58, März 1860), in der er, von der Existenz des Pentaeders ausgehend, dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche darlegte und die Schritte auseinandersetzte, die im Sinne der Invariantentheorie nothwendig sind, um die Gleichung fünften Grades zu bilden, von der die Bestimmung der fünf Pentaederebenen abhängen muss**), zeigt er in einer grösseren Abhandlung (Borch. J. Bd. 59. Febr. 1861), dass die Existenz des Pentaeders mit den in seine Ecken fallenden Knotenpunkten der Hesse'schen Fläche aus einem allgemeinen Satze über die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche einer Fläche n^{ter} Ordnung hervorgeht. Der Beweis dieses Satzes, den man übrigens in manchen Punkten ver-

*) Für eine besondere Fläche dritter Ordnung, die von ihm sogenannte Diagonalfläche, hat Clebsch einen Zusammenhang zwischen den beiden Problemen nachgewiesen (Math. Ann. Bd. IV. Zur Theorie des Fünfseits etc.) und im Anschlusse hieran hat Klein eine Methode gefunden, bei den Flächen mit 27 reellen Geraden die Ebenen des Pentaeders näherungsweise zu construiren (Berichte der Erlanger phys. med. Societät. Juni 1873).

**) In der bereits genannten Arbeit über quaternäre cubische Formen (Juni 1860) publicirte Salmon ähnliche Resultate. Ein Irrthum, der sich in der bez. Arbeit von Clebsch findet und aus dem Uebersehen der Invarianten ungeraden Charakters entstanden war, ist in Salmon's Arbeit vermieden.

vollständigt wünschen mag, kommt darauf hinaus, die Zahl der gemeinsamen Schnittpunkte aller derjenigen Flächen zu bestimmen, welche durch die gleich Null gesetzten Unterdeterminanten der Hesse'schen Fläche repräsentirt werden, und ist seitdem für ähnliche Abzählungsaufgaben von Wichtigkeit geworden. Diese Punkte sind bei den Flächen dritter Ordnung, wie bekannt, in der Zahl 10 vorhanden und bilden eben die Ecken des Pentaeders. Clebsch erörtert ausführlich die hierin liegende Eigenthümlichkeit der betr. Gleichung 10^{ten} Grades, bei der jedesmal gewisse Paare von Wurzeln *eine dritte Wurzel rational* bestimmen, und die desshalb durch eine Gleichung fünften Grades lösbar ist. Ueberdies ist die Arbeit von Clebsch durch die wiederholte Anwendung der symbolischen Bezeichnung interessant, die später von Clebsch mit Consequenz gebraucht wurde *).

Es sei ferner der Abhandlung von Clebsch über das Normalenproblem bei Curven und Flächen zweiten Grades gedacht (Borch. J. Bd. 62. Jan. 1862). Sie ist ein musterhaftes Beispiel für die Behandlung metrischer Probleme im Sinne der neueren projectivischen Anschauung. Die metrische Beziehung des Senkrechtstehens wird nach dem Vorgange von Cayley durch eine Polarbeziehung zu einem beliebig gegebenen Kegelschnitte resp. einer beliebigen Fläche zweiten Grades ersetzt (was übrigens bei Gebilden zweiten Grades keine Verallgemeinerung des Resultats in projectivischem Sinne begründet), und die ganze Aufgabe tritt dadurch in den Kreis derjenigen, welche sich auf das simultane System zweier quadratischer Formen (mit beliebig vielen Veränderlichen) beziehen. Der Unterschied des Reellen und Imaginären, auf den Joachimsthal in seiner bekannten Abhandlung über dasselbe Problem (Crelles J. Bd. 59.) besonders eingeht, wird nicht berührt; dagegen concentrirt sich die Untersuchung darauf, die Orte der Punkte zu erforschen, für welche zwei oder drei oder zweimalzwei etc. Lösungen des Problems zusammenfallen. So bringt denn die Abhandlung eine Fülle neuer Sätze über die interessante Krümmungscentrafläche der Flächen zweiten Grades **).

*) Entsprechend der inzwischen erreichten Vervollkommnung der algebraischen Methoden, hat Gordan im fünften Bande der math. Annalen die Clebsch'sche Untersuchung unter fortwährender Anwendung des symbolischen Apparates strenger durchgeführt und eine Anzahl interessanter Formenbildungen (z. B. das schon von Salmon ohne Beweis angegebene Product der fünf Pentaederebenen) hinzugefügt. Andererseits brachten die Preisarbeiten von Cremona und Sturm rein geometrische Beweise für die Existenz des Pentaeders.

**) Beinahe gleichzeitig erschien in den Berl. Monatsberichten eine Arbeit über diese Fläche von Kummer, der ein Modell derselben construirt hatte (Juni 1862). Bei Clebsch wie bei Kummer wird der alte Irrthum, der sich noch in Liouville's Ausgabe von Monge findet, als könne eine Centrafläche im Allgemeinen keine Doppelcurve haben, corrigirt.

Von der grossen Zahl von Arbeiten, die Clebsch im Zusammenhange mit den nun besprochenen vollendete, erwähnen wir noch einzelne. Es gelang Clebsch nach wiederholten Versuchen, die Zahl der Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührung auf den Flächen n^{ter} Ordnung zu bestimmen und sie als Durchschnitte eines Flächensystems von der Ordnung $(8n - 14)$ darzustellen (Zur Theorie der alg. Flächen. Borch. J. Bd. 63. Mai 1863). Eine besondere Anwendung davon ist die Darstellung der 135 Schnittpunkte der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung durch ein System von Flächen der 10^{ten} Ordnung. — In einem Aufsatze über die Wendungsberührebenen der Raumcurven (ebenda Sept. 1862) leitet Clebsch die Gleichung einer Fläche von der $(6m + 6n - 20)^{ten}$ Ordnung ab, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen von der m^{ten} und bez. der n^{ten} Ordnung in ihren Wendepunkten trifft. — Wir erwähnen endlich der Arbeit „über einige von Steiner behandelte Curven" (Borch. J. Bd. 64. Juli 1864), in der Clebsch zum ersten Male von dem kurz zuvor von ihm eingeführten Begriffe des Geschlechts einer Curve Gebrauch macht, um für die Singularitäten eindeutig auf einander bezogener Curven eine neue Bestimmungsgleichung zu besitzen. —

Wir sind hiermit bis zu der Zeit gekommen, in der Clebsch durch Einführung der Abel'schen Functionen und der in ihnen entwickelten Betrachtungsweisen in die Geometrie der letzteren einen neuen, mächtigen Aufschwung ertheilte, der als eines der wichtigsten Verdienste erscheint, die mit dem Namen Clebsch verbunden bleiben werden. Die Veranlassung dazu war insofern eine äussere, als die ganze Richtung, welche Clebsch nunmehr mit seinen Arbeiten einschlägt, wesentlich durch den Umstand bestimmt wurde, dass sich um diese Zeit (Sommer 1863) Gordan in Giessen habilitirte, wohin Clebsch Ostern 1863 von Carlsruhe berufen worden war. Durch ihn wurde Clebsch mit den Abel'schen Functionen und insbesondere mit den damals noch verhältnissmässig neuen und wenig verbreiteten Riemann'schen Untersuchungen bekannt. Aber nicht nur in dieser einen Richtung, sondern nach vielen Seiten hin sollte der rege persönliche Verkehr, in den von nun ab die beiden Forscher traten, für ihre Thätigkeit wie für ihre Erfolge von der grössten Bedeutung sein. Es ist im Folgenden um so schwieriger, zu sondern, was dem Einen, was dem Anderen der Beiden gehört, als sie viele ihrer Arbeiten gemeinsam veröffentlicht haben. Auf Clebsch allein ist wohl zurückzuführen, was sich auf geometrische Deutung der gewonnenen algebraischen Resultate bezieht, während die Herleitung der letzteren vielfach Gordan zugefallen sein mag.

Die Veranlassung, die transcendenten Functionen mit der neueren Geometrie in Verbindung zu bringen, hatte für Clebsch zunächst ein von Steiner ohne Beweis mitgetheilter Satz gebildet (vergl. Crelle's J. Bd. 33), der sich auf Polygone bezieht, welche sich einer Curve dritter Ordnung einbeschreiben lassen. Es gelang ihm (Borch. J. Bd. 63. Sept. 1863), einen einfachen und durchsichtigen Beweis zu finden, indem er von einer Darstellung der Coordinaten der Punkte einer solchen Curve durch elliptische Functionen eines Parameters ausging, die Aronhold in den Berliner Monatsberichten 1861 gegeben hatte (vergl. Aronhold's ausfürlichere Darstellung*) in Borch. J. Bd. 61). Der Beweis kommt einfach auf eine Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Functionen hinaus, indem zwischen den oberen Grenzen von drei elliptischen Integralen erster Gattung, deren Summe gleich einer Constanten ist, die nämliche Beziehung besteht, wie zwischen den Abscissen der drei Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve dritter Ordnung, in deren Gleichung bloss das Quadrat der Ordinate auftritt. Vermöge dieser Bemerkung ist nicht nur der Steiner'sche Satz fast ohne Weiteres bewiesen, sondern es sind alle die merkwürdigen Theoreme, welche von Maclaurin, von Poncelet, von Plücker, Hesse und Steiner über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, über die Tangenten derselben, die Berührungskegelschnitte u. s. w. aufgestellt worden sind, wie mit einem Schlage erledigt: sie sind auf die einfache Gleichung zurückgeführt, die aussagt, dass die Summe der zu den Schnittpunkten gehörigen Argumente bis auf Multipla zweier Perioden einer Constanten gleich sind.

Bald hernach erschien die grosse Abhandlung über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie (Borch. J. Bd. 63. Oct. 1863), deren Principien in zwei weiteren Arbeiten: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als rationale, bez. als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64. Mai und October 1864), für die einfachsten Fälle ausführlicher verwerthet wurden.

Es liegt derselben der einfache Gedanke zu Grunde, dass man die Gleichung, welche Abel zur Definition der Irrationalität in den nach ihm benannten Integralen ansetzt, als Gleichung einer algebraischen Curve auffassen kann. Die Grenzen der Integrale, deren Summe nach Abel's Theorem gleich einer logarithmischen und einer algebraischen Function werden soll, sind dann durch die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen Curve mit einer beweglichen bestimmt, und die Sätze über Schnittpunktsysteme, wie sie von geometrischer Seite her durch Plücker aufgestellt, durch Jacobi und Cayley entwickelt worden waren (vergl. Plücker's Theorie der algebraischen Curven,

*) Vergl. auch Brioschi in den Annali di Matematica, Serie I. t. 3. 1860, sowie Bemerkungen desselben in den Comptes Rendus 1863, 64.

Einleitung), sind nichts, als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Theorems. Aber Abel's Theorem gibt mehr, als diese Sätze aussprechen; es gibt nicht nur die Zahl der Bedingungen zwischen den Schnittpunkten, sondern es gibt diese Bedingungen selbst in der möglichst durchsichtigen Form. Indem Clebsch die Schnittpunkte beliebig zusammenrücken, die schneidende Curve also in eine Berührungscurve übergehen liess, ergaben sich ihm eine Fülle von Sätzen über die Zahl solcher Berührungscurven, die zu einer gegebenen Curve gehören. Zugleich gestattete der Charakter der Relationen, von welchen die Bestimmung dieser Curven abhängt, ein Urtheil über die eigenthümliche Gruppirung der Lösungen, sowie über den Charakter der in dem entsprechenden algebraischen Probleme auftretenden Gleichungen. Es schliessen diese Sätze die mannigfachen Theoreme von Hesse und Steiner über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung als Corollare in sich *). Indess muss hier hervorgehoben werden, dass die von Clebsch betrachteten Berührungscurven wesentlich nur Contacte derselben Ordnung an den Stellen, in denen sie die gegebene Curve treffen, besitzen, hinsichtlich ihrer Allgemeinheit also hinter den von Jonquières (Borch. J. Bd. 66) und Cayley (Phil. Trans. Bd. 158) behandelten zurückstehen, welche die Anzahl der beliebigen Contactbedingungen unterworfenen Curven eines linearen Systems in eine Formel zusammenfassen.

Aber wir verdanken dem Clebsch'schen Aufsatze weiter ein fundamentales Eintheilungsprincip für algebraische Curven: das Geschlecht (deficiency bei Cayley). Dieser Begriff war nach seiner Bedeutung für Gleichungen zwischen zwei Variabeln zuerst von Riemann erkannt worden, seinen analytischen Eigenschaften nach aber auch Abel nicht fremd, der in seiner Preisschrift (Mémoires des savants étrangers. t. VII; die Arbeit wurde 1826 eingereicht, aber erst 1841 publicirt) die Frage nach der geringsten Zahl von Integralen gestellt hatte, auf die man eine Summe von Integralen mit gegebenen Grenzen zurückführen kann. Nach Clebsch gehören zu demselben Geschlechte alle diejenigen algebraischen (ebenen oder doppelt gekrümmten) Curven, welche einander derart zugeordnet werden können, dass jedem Punkte der einen nur ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt (wie z. B. Curve und Evolute), oder, was dasselbe ist, dass die eine Curve aus der anderen durch eindeutige Transformation abgeleitet werden kann (vergl. den Aufsatz von Clebsch: Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. Borch. J. Bd. 64. April 1864). Für eine gegebene Curve ist das Geschlecht eine Function ihrer Ordnung

*) In einer schönen Abhandlung im 66. Bande des Borchardt'schen Journals stellt Roch die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung durch die Abel'schen Functionen für $p = 3$ explicite dar und beweist hierdurch die bez. Theoreme von den Θ-Functionen ausgehend.

und der Zahl ihrer Doppel- und Rückkehrpunkte, andererseits ist es gleich der Classe der Abel'schen Functionen, durch welche die Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters darstellbar sind.

Mochte die Idee der geometrischen Interpretation des Geschlechtsbegriffs zu der Zeit, als Clebsch seine Abhandlung schrieb, auch sonst im *Gefühle der mathematischen Welt gelegen haben* und in besonderen Fällen auch wohl zum Ausdrucke gekommen sein (vergl. z. B. Schwarz: de superficiebus explicabilibus etc. Borch. J. Bd. 64), die Thatsache wird dadurch nicht geändert, dass Clebsch dieselbe zuerst allgemein aussprach und, was mehr ist, in ihrer Tragweite erkannte und nutzbar zu machen verstand. Seit jener Zeit ist der Geschlechtsbegriff in der Geometrie eingebürgert und wird von Synthetikern und Analytikern ununterschiedlich gebraucht. Es ist kein Zufall, wenn die allgemeinen auf algebraische Curven bezüglichen Abzählungsformeln sich durch Einführung desselben wesentlich vereinfachen; die oben erwähnte elegante Formel von Jonquières und Cayley für die Anzahl der Curven, die gegebenen Contactbedingungen genügen, sowie die Correspondenzformel für Punktsysteme auf einer Curve von höherem Geschlechte*) sind Beispiele dafür.

Der Satz von der Erhaltung des Geschlechts bei eindeutiger Transformation ist an und für sich ein algebraischer und verlangt als solcher einen directen (nicht auf die Betrachtung der Integrale gegründeten) algebraischen, oder, was bei der heutigen Ausbildung der Geometrie dasselbe sagen will, geometrischen Beweis**). Er gehört einem Gebiete an, das, seiner Entstehung nach eng mit der Theorie der Abel'schen Functionen verbunden, doch von demselben als etwas Selbständiges abgelöst werden muss: dem bis jetzt nur erst nach wenig Richtungen durchforschten Gebiete, welches überhaupt von den bleibenden Eigenschaften algebraischer Beziehungen bei beliebigen eindeutigen Transformationen handelt. Wir werden weiter unten noch von Untersuchungen zu berichten haben, die diesem Gebiete, soweit es sich um Functionen zweier Variabeln handelt, zuzuweisen sind (Theorie der Flächenabbildung); wir werden ferner Gelegenheit haben, von dem Verhältniss desselben zur eigentlich sogenannten Invariantentheorie zu reden. Hier sei nur der Untersuchungen gedacht, welche Clebsch und Gordan in ihrem sogleich ausführlicher zu besprechenden Werke über Abel'sche Functionen eben mit Rücksicht auf diesen Gesichtspunkt anstellen. Indem sie in dem dritten Abschnitte desselben das Problem der eindeutigen Transformationen

*) Diese Correspondenzformel ist eine Verallgemeinerung des Chasles'schen Correspondenzprincips, das sich bekanntlich nur auf rationale Gebilde einer Dimension bezieht. Sie ist 1866 von Cayley durch Induction gefunden und neuerdings von Brill (Math. Ann. Bd. VI, 1) bewiesen worden.

**) Der von Riemann gegebene Beweis gehört der Analysis situs an.

einer Curve algebraisch formuliren, gelingt ihnen der directe Beweis *) für die Erhaltung des Geschlechts vermöge eines subtilen Eliminationsprocesses, indem sie an Stelle einer identisch verschwindenden Resultante mit Hülfe der Variation der Constanten einen Ausdruck bilden, welcher dieselbe vertritt: ein Verfahren, das sich in anderen Aufgaben der Geometrie seitdem mehrfach als nützlich erwiesen hat. Sie untersuchen ferner die Frage nach den rationalen Functionen der Coordinaten, die man gleich den neuen Coordinaten zu setzen hat, damit die Ordnung der transformirten Curve eine möglichst niedrige wird. Hatte so Cayley die Ordnung auf die $(p+2)^{\text{te}}$ erniedrigt, (unter p das Geschlecht verstanden), so wird in dem Werke von Clebsch und Gordan für Curven mit nicht aussergewöhnlichen Singularitäten bereits die $(p+1)^{\text{te}}$ Ordnung angegeben und dem Geschlechte p eine Curve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung als Normal-Curve zu Grunde gelegt **). Eine andere wichtige Frage aus der Lehre von den eindeutigen Transformationen wird von Clebsch und Gordan nur berührt: die Frage nach den Moduln, d. h. denjenigen Parametern einer Curve, welche bei beliebiger eindeutiger Transformation ungeändert bleiben, und die somit für diese eine ähnliche Bedeutung haben, wie absolute Invarianten für die linearen Transformationen. (Bei binären Formen existiren Invarianten für höhere Transformationen im Sinne der Moduln nicht, vergl. eine Arbeit von Clebsch in den Göttinger Abhandlungen Bd. 15. 1870.) Die von Riemann gegebene Bestimmung dieser Moduln beruht auf nicht rein algebraischen Betrachtungen. Eine Bestimmung auf algebraischem Wege ist auch bis zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise erfolgt, wenn auch ein von Cayley gemachter Einwand sich inzwischen durch Betrachtung einer Anzahl von einzelnen Fällen ***) sowie durch neuere Untersuchungen von Cayley selbst (Math. Ann. Bd. 3) erledigt hat.

*) Cremona hat in seiner „Theorie der Oberflächen" einen einfachen geometrischen Beweis der Unveränderlichkeit des Geschlechts gegeben, indem er die drei Dimensionen des Raumes zu Hülfe nahm. Später haben, ohne aus der Ebene hinauszutreten, Bertini (Giornale di Mat. t. VII) und Zeuthen die Frage wieder aufgenommen, der Letztere, indem er von dem allgemeineren Falle einander mehrdeutig entsprechender Curven ausging. Vergl. auch eine Note von Brill und Nöther in den Göttinger Nachrichten 1873.

**) Diese Sätze gelten nur für Werthe von $p > 2$. — Riemann hat eine Normalform angegeben, welche die Variabeln einzeln im niedrigsten Grade enthält und somit, als Curve interpretirt, im Unendlichen zwei vielfache Punkte von halb so hoher Ordnung besitzt, als der Grad der Curve beträgt — Neuere Betrachtungen haben gezeigt, dass, wenn p zwischen $3(i+2)$ und $3(i+1)$ liegt, die Normalcurve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung immer in eine solche der $(p+1-i)^{\text{ten}}$ Ordnung transformirt werden kann, vergl. die bereits erwähnte Note von Brill und Nöther in den Gött. Nachrichten Febr. 1873.

***) Vergl. Cremona und Casorati „osservazioni etc." in den Rendiconti del

Hatte es Clebsch in den bis jetzt berührten Untersuchungen unternommen, die Theorie der Abel'schen Functionen für Geometrie fruchtbar zu machen, so stellte er sich nun, mit Gordan zusammen, die umgekehrte Aufgabe, die Geometrie für die Theorie der Abel'schen Functionen zu verwerthen. Ehe wir es unternehmen, von dem aus diesem Gedanken entsprungenen gemeinsamen Werke (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig. B. G. Teubner. 1866. dat. August 1866) Bericht zu erstatten, mögen einige Worte über den allgemeinen Entwickelungsgang der genannten Theorie vorausgeschickt werden. Es wird dies um so kürzer geschehen können, als nur wenige Disciplinen der Mathematik sich durch eine verhältnissmässig so geringe Zahl von Arbeiten einiger hervorragender Forscher in folgerichtigster und raschester Entwickelung bis zu der Höhe aufgeschwungen haben, auf der wir sie heute erblicken.

Die Theorie der Abel'schen Functionen leitet ihren Ursprung aus dem Umkehrprobleme der hyperelliptischen Integrale mit vier Periodicitätsmoduln her, welches Jacobi (vergl. Crelle's J. Bd. IX und XIII) in der Weise formulirt hatte, dass er zwei Summen von je zwei Integralen mit verschiedenen Grenzen bildete und die Frage nach der quadratischen Gleichung aufwarf, deren Wurzeln die oberen Grenzen sind. Diese Frage wurde unabhängig von Rosenhain (Mém. des savants étrangers. t. XI) und Göpel (Crelle's J. Bd. 35) beantwortet, indem sie beide die Bildungsweisen der Coëfficienten jener Gleichungen in gewissen doppelt unendlichen Reihen vermutheten, die der von den elliptischen Functionen her bekannten Function Θ ähnlich sind, und diese Vermuthung durch Rechnung bestätigten. Indessen war der Keim zu einer directen Lösung des Umkehrproblems auch für den Fall, dass n Summen von je n Integralen mit $2n$ Periodicitätsmoduln gegeben sind, deren obere Grenzen als Functionen dieser Summen dargestellt werden sollen, bereits in Jacobi's „Fundamenta nova" niedergelegt. Jacobi definirt bekanntlich die Θ-Function durch ein Integral zweiter Gattung, indem er den Differentialquotienten des Logarithmus der Θ-Function gleich der von ihm eingeführten Function Z setzt. Entsprechend hat nun Weierstrass (Crelle's J. Bd. 47, 52) n Integrale zweiter Gattung in der Weise definirt, dass sie partielle Differentialquotienten einer Function sind, welche alsdann die Stelle von Θ vertritt, und hat mit Hülfe dieser Function das Umkehrproblem für die allgemeinsten hyperelliptischen Integrale gelöst.

Der hiermit geschilderte Kreis von Betrachtungen sollte indess

Istituto Lombardo 1869, Brill, zwei Noten über die Moduln, Math. Ann. I und II, sowie id. ibd. Bd. VI, wo nachgewiesen wird, dass Transformationen existiren, durch die man die Curve in eine gewisse Normalcurve überführt, deren Constantenzahl mit der Zahl der Moduln übereinstimmt.

noch bedeutend erweitert werden. Bereits Abel hatte sein Theorem auf Integrale ausgedehnt, in denen an Stelle des Quadratwurzelausdrucks die allgemeinste algebraische Irrationalität getreten ist. Auch für solche Integralsummen liess sich das Umkehrproblem aufstellen. Lagen die Schwierigkeiten für den Fall der hyperelliptischen Functionen wesentlich in der analytischen Operation, die zum Theil nicht ohne langwierige Rechnung durchzuführen war, so musste für die Lösung des allgemeinen Umkehrproblems vor Allem ein neues Anschauungsgebiet geschaffen werden, in welchem die Integralsummen durch unzweifelhafte Darstellung des Integrationsweges eindeutig definirt werden konnten. Ein solches erfand Riemann in der nach ihm benannten Fläche, welche er über der complexen Ebene, dieselbe mehrfach überdeckend, construirte. Mit Hülfe dieser Fläche und des von ihm nach Dirichlet genannten Princips, vermöge dessen, ähnlich wie in der mathematischen Physik, eine Function durch gewisse Gränz- und Unstetigkeits-Bedingungen definirt wird, stellt Riemann in überraschender Weise Relationen zwischen transcendenten einerseits und algebraischen Functionen andererseits auf und gelangt so durch wenige Schlüsse zur Lösung des Umkehrproblems.

Gegen einige Punkte des kühnen und grossartigen Entwurfes von Riemann lassen sich indess Einwände erheben, welche zurückzuweisen mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden war und auch heute noch nicht in jeder Hinsicht geglückt ist. Zunächst finden sich in dem Beweise des Dirichlet'schen Princips angreifbare Stellen; auf Functionen von so allgemeinem Charakter, wie sie Riemann annahm, ist der Beweis nicht ohne Weiteres anzuwenden.*) Ferner konnte man sich von der Gestalt der Riemann'schen Fläche, welche für die Abel'schen Transcendenten vermöge der ihr auferlegten Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt ist, keine klare Vorstellung bilden.**) Endlich bemerkte man (vergl. Neumann's Vorlesungen über Riemann's Theorie etc. Vorrede), dass der Zusammenhang, in welchem die Θ-Function in der Riemann'schen Theorie auftritt, nicht so enge geknüpft ist, wie man dies wohl bei einem der wichtigsten Gliede der ganzen Theorie wünschen mochte.

---

*) Man vergl. u. A. Bemerkungen zum Dirichlet'schen Principe von Kronecker und Weierstrass, deren in einem Aufsatze von Heine in Borch J. Bd. 71 Erwähnung geschieht.

**) Erst in neuester Zeit hat Lüroth eine gewisse Normalgestalt angegeben, auf welche die Fläche gebracht werden kann (Math. Ann IV), und hierdurch die erwähnte Schwierigkeit beseitigt. In einer seiner letzten Arbeiten leitet Clebsch aus der Lüroth'schen Arbeit einige weitere Resultate ab, welche die Untersuchung des Abschnitts über Periodicität in dem weiter unten zu besprechenden Werk in einigen Punkten erweitern und vervollständigen (Math. Ann. Bd. VI).

Diess waren wohl die Hauptgesichtspunkte, welche Clebsch und Gordan eine neue Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen auf einer ganz anderen Basis als wünschenswerth erscheinen liessen. Die missliche Umgrenzung des Functionsbegriffs sollte, unter Rückgang auf die Jacobi'schen Methoden, durch engeren Anschluss an die algebraische Seite des Gegenstandes (vermittelst des Abel'schen Theorems) vermieden und ein directer Uebergang zur Θ-Function, in ähnlicher Weise, wie dies Weierstrass bei den hyperelliptischen Functionen gethan hatte*), ermöglicht werden.

Da dieser Weg unmittelbar zu den speciellen Theta's hinführte, welche den Abel'schen Functionen zugehören, so vermied er die Klippen, an welchen auch wohl noch heutzutage jeder Versuch scheitern muss, die Thetafunction zur alleinigen Grundlage einer Theorie der Abel'schen Functionen zu machen, so lange nämlich die Frage nach den Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln, von welcher Riemann im Eingange seiner Arbeit spricht, sowie die Frage nach den Thetarelationen ungelöst ist.

Es stellt sich dem Studium des Werkes von Clebsch und Gordan eine gewisse Schwierigkeit wegen der doppelten geometrischen Repräsentation der zu behandelnden Probleme entgegen, die auf den zwiefachen algebraischen und analytischen Charakter derselben zurückgeht und vielleicht auch mit der verschiedenen Denkweise der beiden Verfasser zusammenhängt. Für die Integrale einerseits konnte man die Repräsentation der Integrationswege auf der complexen Ebene, die Umgänge, Schleifen und Cyclen nach dem Vorgange von Puiseux, wie sie sich in dem Werke von Briot und Bouquet (1859) für die Untersuchung der doppelt periodischen Functionen so werthvoll erwiesen hatten, in keiner Weise entbehren. Für die algebraische Function andererseits gewährte die Bezeichnung: „Curvengleichung“ statt „Gleichung zwischen zwei Variabeln“, „Schnittpunktsystem“, „Doppel- und Rückkehrpunkt“ statt der entsprechenden schwerfälligen algebraischen Ausdrücke eine ungleich grössere Beweglichkeit, als sie Riemann in dieser Hinsicht zu Gebote stand. Wenn man bedenkt, welche Vortheile eine nur geringfügig scheinende Abkürzung der Gedankenentwickelung gewähren kann, so schreibt man vielleicht manche der algebraischen Resultate der Abschnitte über Theilung, die sich bei Riemann nicht finden, wie überhaupt die glückliche Lösung des Umkehrproblems auf dem geschilderten Wege auf Rechnung dieser geometrischen Ausdrucksweise.

*) Leider ist von den ausgedehnten Untersuchungen, welche Weierstrass über die Abel'schen Functionen angestellt hat, ausser einer kurzen Notiz in den Berliner Monatsberichten (1869), die von den allgemeinsten eindeutigen $2n$-fach periodischen Functionen handelt, nichts Näheres im Zusammenhange bekannt geworden.

Nachdem aber einmal die Curve in die Sprache des Werkes aufgenommen war, entsprach es einer symmetrischen Darstellungsweise, weiter auch die in der analytischen Geometrie längst als vortheilhaft erkannte Homogenität der Curvengleichung einzuführen. Es wird dadurch der Anschauungsweise, welche bei einer algebraischen Function nur auf solche Eigenschaften achten will, die bei eindeutigen Umformungen ungeändert bleiben, wenigstens insoweit Ausdruck gegeben, als die Gleichberechtigung aller Gestalten, welche die Function bei linearer Transformation annehmen kann, von vorne herein ersichtlich ist. Dementsprechend bewirkt der scheinbare Ballast, der durch die dritte Variable hineingebracht wird, eine Glätte und Uebersichtlichkeit der Darstellung, deren Vorzüge selbst durch den Umstand nicht in Schatten gestellt werden, dass die vollkommene Symmetrie den Gedankengang gelegentlich einhüllt.

Diese Einführung der homogenen Coordinaten bedingte die Umgestaltung der Form der Integrale in einer Weise, wie sie von Aronhold in der bereits oben erwähnten nach Darstellung und Inhalt gleich eleganten Arbeit im Borchardt'schen Journale Bd. 61 gegeben worden war. Unter Zugrundelegung dieser Form gestaltet sich die logarithmische und algebraische Function des Abel'schen Theorems überraschend einfach, besonders im Vergleiche mit dem von Abel selbst in seiner Preisschrift gegebenen Ausdrucke.

Das Abel'sche Theorem bildet die natürliche Brücke zwischen dem transcendenten und dem algebraischen Charakter der Theorie.*) Indem die Verfasser es unternehmen, im Anschlusse an den von Weierstrass eingeschlagenen Weg, von den Integralen aus einen Uebergang zu der Gleichung für die oberen Grenzen durch Vermittelung von Integralen zweiter Gattung zu finden, benutzen sie das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung. Die Coefficienten der entstehenden Gleichung enthalten indess noch gewisse Summen T von Integralen dritter Gattung, die erst zerfällt werden müssen in eben solche Summen U mit getrennten Unstetigkeitspunkten. Diese Untersuchung, geführt an der Hand der beiden erwähnten geometrischen Repräsentationen, bildet den Schwerpunkt des Werkes und gipfelt ihrerseits in der Darstellung des Differentials jener Function U, deren partielle Differentialquotienten aus Integralen zweiter Gat-

---

*) Der vorzugsweise algebraische Charakter des Abel'schen Theorems geht insbesondere aus neueren Untersuchungen über algebraische Functionen hervor, vermöge deren gewisse fundamentale Sätze, welche Riemann und Roch aus der Betrachtung von Integralen zweiter Gattung und dem Verschwinden der Θ-Function abgeleitet hatten, auf algebraischem Wege bewiesen und der Theorie der algebraischen Functionen organisch eingefügt wurden. Vergl. die Note von Brill und Nöther, Gött. Nachr. Februar 1873.

tung bestehen, welche durch Differentiation gewisser specieller Functionen T gebildet werden. Die Verfasser finden schliesslich, dass jene Function U alle Eigenschaften des Logarithmus einer Θ-Function, wie diese von Riemann definirt worden war, besitzt, deren Monodromie nicht ausgeschlossen. Bei diesem Anlass wird jener Begriff, den man bisher nur für Functionen von zwei Variabeln kannte, für solche von p Variabeln dahin festgestellt, dass eine Function, bei Eindeutigkeit im Allgemeinen, nicht aufhört, monodrom zu sein, wenn sie in einem Gebiete von $(p - 2)$ Dimensionen unbestimmt wird.

Bemerkenswerth ist dabei die eigenthümliche Wahl der Argumente der Θ-Function. Sind bei Riemann die unteren Grenzen der Integrale, aus denen sich die Argumente zusammensetzen, für die Integrale gleichgebildeter Differentialausdrücke dieselben, dagegen für verschieden gestaltete verschieden, so verhalten sich die Festsetzungen von Clebsch und Gordan gerade umgekehrt. Die Verfasser entnehmen nämlich ihr System von unteren Grenzen den Berührungspunkten von gewissen zerfallenden Curven $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von der Lage nur eines (übrigens schliesslich indifferenten) Punktes abhängen. Die Vorzüge dieser Bestimmungsweise sind neuerdings von Weber bei Gelegenheit des Umkehrproblems (Borch. J. Bd. 70) und von Fuchs in Anwendungen hervorgehoben worden (Borch. J. Bd. 73).

Wir gedenken hier ferner des Capitels, das von der Transformation der Θ-Function handelt. Substituirt man für ein System von Periodicitätsmoduln von Normalintegralen erster Gattung, wie sie in dem Clebsch-Gordan'schen Werke in dem Abschnitte über „Periodicität" durch die Puiseux'schen Methoden hergestellt worden sind, ein ebensolches anderes, so tritt eine Transformationsdeterminante mit besonderen Eigenschaften auf, deren Werth für diesen Fall, dessen Behandlung Jacobi die Theorie der unendlich vielen Formen der Function Θ nannte, sich auf Eins reducirt (Transformation erster Ordnung). Das allgemeinere Jacobi'sche Problem der Transformation der elliptischen Functionen hatte Hermite in seiner berühmten Abhandlung: sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus Bd. 55) für die ultraelliptischen durchgeführt, während ein von Abel gestelltes Transformationsproblem (oeuvres I. Nr. XIV. p 275) von Königsberger Borch. J. Bd. 65 auf ultraelliptische Functionen übertragen worden war. In dem Abschnitte über die unendlich vielen Formen der Function Θ beschäftigen sich nun Clebsch und Gordan mit der Transformation erster Ordnung der Abel'schen Functionen überhaupt, indem sie die mit der Transformation der Periodicitätsmoduln verbundene Aenderung der Integrale und der Θ-Function untersuchen, und eine für die Transformation der letzteren wesentliche Constantenbestimmung in derselben Weise, wie dies Kronecker gethan (Monatsber. der Berl. Akad.

Oct. 1866), durch Zurückführung der Transformation auf gewisse Elementartransformationen ausführen. Dieselbe Aufgabe behandelten Thomae (Dissertation, Halle 1864) und neuerdings, mittelst Summation mehrfacher Gaussischer Reihen, Weber (Borch. J. Bd. 74).

Die Verfasser betrachten endlich noch die Theilung der Abel-schen Functionen. Man hatte dieselbe bis dahin nur für elliptische Functionen und, nach den Untersuchungen von Hermite, für hyperelliptische Functionen gekannt. Clebsch und Gordan zeigen, dass die für die elliptischen Functionen aufgestellten Sätze nicht nur auf die hyperelliptischen, sondern, mit geringen Aenderungen, auf die Abel'schen Functionen überhaupt übertragen werden können. Wie bei den elliptischen Functionen ist das allgemeine Problem durch Wurzelziehen zu lösen, wenn man das sogenannte specielle Theilungsproblem als gelöst voraussetzt. Die cyclischen Functionen der allgemeinen Theilungsgleichung werden nämlich unter Adjunction der Wurzeln des speciellen rational durch die Coefficienten ausdrückbar; man hat somit eine „Abel'sche" Gleichung. Das specielle Theilungsproblem seinerseits führt zu einer Gleichung, die in Folge besonderer Eigenthümlichkeiten auf eine Gleichung niederen Grades und mehrere reine Gleichungen reducirt werden kann, aber diese niedere Gleichung ist nicht mehr algebraisch lösbar.

Noch sei des sogenannten „erweiterten Umkehrproblems" gedacht, das Clebsch und Gordan in ihrem Buche aufstellen. Dasselbe war bereits in Clebsch's oben genanntem Aufsatze: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64), für elliptische Functionen formulirt worden und hat dort den folgenden Inhalt. Es sind $m-1$ Summen von je m Integralen dritter Gattung und eine Summe von m Integralen erster Gattung gegeben; man soll eine Gleichung m^{ten} Grades aufstellen, deren Wurzeln die in jenen Integralen auftretenden oberen Grenzen sind. Die oberen Grenzen sind dadurch als $(m+1)$-fach periodische Functionen definirt; die Erledigung des Problems lässt sich indessen, wie Clebsch zeigt, auf das gewöhnliche Umkehrproblem zurückführen. Aehnlich gestalten sich die bez. Verhältnisse bei den Abel'schen Functionen.

Die vorstehenden Erörterungen werden zur Genüge gezeigt haben, dass die Theorie der Abel'schen Functionen, wie sie aus Riemann's Händen hervorging, zwei heterogene Bestandtheile umschloss: einen analytischen und einen algebraischen. Die Bestrebungen der späteren Bearbeiter der Theorie waren übereinstimmend darauf gerichtet, bei weitergehender Erforschung der einzelnen Probleme eine grössere Gleichmässigkeit des Ganzen durch Bevorzugung der einen oder anderen Art von Betrachtung herbeizuführen. Clebsch und Gordan ihrerseits erwarteten, wie sie in der Vorrede zu ihrem gemeinsamen Werke ausdrücklich hervorheben, die weiteren Fortschritte wesentlich von der Ausbildung der algebraischen Methoden. Es ist daher nicht zufällig, wenn sich beide seitdem ausschliesslich mit algebraischen (resp. geometrischen) Untersuchungen beschäftigten.

Dieselben gehen bei Clebsch nach zweierlei Richtungen. Sie betreffen einmal die Lehre von der eindeutigen Transformation, andererseits die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen.

In dem Werke über Abel'sche Functionen waren nur Curven hinsichtlich ihrer bei eindeutigen Transformationen bleibenden Eigenschaften untersucht worden. Clebsch dehnt fortan die bez. Untersuchungen auf Gebilde zweiter Stufe aus, er wendet sich, wie man sich seitdem ausdrückt, zum Studium der Flächenabbildung. Wenn dieselbe naturgemäss als Erweiterung der Riemann'schen Untersuchungen erwachsen musste, wenn andererseits auf sie bezügliche geometrische Betrachtungen vereinzelt wiederholt aufgetreten waren, so ist es doch Clebsch, der durch seine eigenen stetig fortgesetzten Arbeiten, wie durch die mächtige von ihm ausgehende Anregung, aus ihr diejenige geschlossene Disciplin gemacht hat, als welche wir sie heute erblicken. — Die Untersuchungen über Invariantentheorie, mit denen sich Clebsch gleichzeitig beschäftigte, können erst weiter unten ihre Besprechung finden. Clebsch dachte sich das Verhältniss der beiden Disciplinen in der Weise, dass er die Invariantentheorie linearer Substitutionen als nothwendige Vorstufe der allgemeineren Ueberlegungen betrachtete, die sich an eindeutige Transformationen überhaupt anknüpfen. Wir werden im Folgenden noch die bis jetzt allerdings erst kleine Reihe von Untersuchungen zu berühren haben, welche eine Verwirklichung dieses Gedankens anbahnen. —

Es wurde bereits oben des Unterschiedes gedacht, der die Theorie der Flächenabbildung von derjenigen Theorie der algebraischen Flächen scheidet, die sich an die Polarentheorie anschliesst und ihren algebraischen Ausdruck unmittelbar in den einfachsten Bildungen der linearen Invariantentheorie findet. Auch wird man zwischen ihr und der Theorie der conformen Abbildung von Fläche auf Fläche oder gar der von Gauss gegründeten Theorie der auf einander abwickelbaren Flächen keinen nahen Zusammenhang aufstellen wollen. Die neue Abbildungstheorie erachtet alle Flächen als äquivalent, welche durch eindeutige Transformation in einander übergeführt werden können; sie erblickt in einer Fläche das Bild einer algebraischen Function zweier Variabeln, und richtet ihr Augenmerk darauf, wie viel von den Eigenschaften dieser Function bei beliebiger eindeutiger Umformung erhalten bleibt. Von geometrischer Seite entspricht dieser Auffassung, wenigstens in mancher Beziehung, die Betrachtung der Erzeugung der Fläche durch andere Raumgebilde, deren Parameter die Punkte der Fläche eindeutig bestimmen und somit ein Coordinatensystem der Fläche liefern; und man wird als Vorläufer der Flächenabbildung eine Reihe geometrischer Arbeiten betrachten können, die sich auf Erzeugung algebraischer Flächen beziehen.

Es sind hier vor Allem die Grassmann'schen und Steiner'schen Untersuchungen über die Flächen dritten Grades zu nennen (Crelle's J. Bd. 49, 53), die über das merkwürdige System ihrer Geraden nicht nur, sondern auch über die Lage ihrer Curven niederster Ordnung bereits Klarheit verschaffen.*) Ihnen schliessen sich die Untersuchungen Schläfli's, August's und Schröter's als Fortsetzungen und Erweiterungen an (1858, 62, 63). Weiterhin sind die Arbeiten Kummer's über Flächen vierter Ordnung, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, zu erwähnen. (Berl. Monatsberichte. Juli 1863. Borch. J. Bd. 64). Die in denselben enthaltene Betrachtung der Steiner'schen Fläche vierter Ordnung mit drei sich in einem Punkte schneidenden Doppelgeraden gab Weierstrass (vergl. die Kummer'sche Arbeit) und Cayley (Borch. J. Bd. 64. 1864) Veranlassung, deren Coordinaten als quadratische Functionen zweier Parameter darzustellen, während andererseits Schröter (Berl. Monatsberichte Nov. 1863, Borch. J. 64) und Cremona (Borch. J. 63) dazu übergingen, eine Geometrie auf eben dieser Fläche zu ermitteln, ohne dass damals die Identität beider Betrachtungsweisen zum Bewusstsein oder doch der Uebergang von der einen zur anderen zur Darstellung gebracht wäre.

Nur für eine besonders einfache Fläche, die der zweiten Ordnung, hat man diesen Uebergang schon früh erfasst. Bereits 1847 hatte Plücker die Idee, das Netz, welches die beiden Systeme von Erzeugenden dieser Fläche bilden, zur Grundlage eines geradlinigen Coordinatensystems auf ihr zu machen (Crelle's J. Bd. 34). Zugleich wird von ihm diese Bestimmung der Punkte der Fläche durch die Parameter der beiden Systeme als identisch aufgefasst mit der Abbildung der Fläche auf die Ebene durch die schon 1828 von Chasles in allgemeiner Weise untersuchte stereographische Projection, — ein Gesichtspunkt, vermöge dessen er einzelne Sätze der Ebene auf die Fläche überträgt. Später (1861) entwickelte Chasles (Comptes Rendus t. 53), zu derselben Zeit, als Cayley (Phil. Magazine. Juli 1861)

*) Die allgemeinen Erzeugungsweisen aller algebraischen Gebilde, wie sie Grassmann in seiner Ausdehnungslehre gegeben und in einer Reihe von Aufsätzen in Crelle's Journal entwickelt hat, und die Grassmann's Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung als Corollar einschliessen, sind seither noch nicht von den Geometern weitergeführt worden; es muss der kommenden Zeit überlassen bleiben, deren Verhältniss zu den im Texte erwähnten Untersuchungen darzulegen.

auf diese Plücker'sche Darstellung und eine aus derselben abzuleitende Eintheilung der auf der Fläche liegenden Curven hinwies, unabhängig die Ideen Plücker's und Cayley's. Dabei führt er dieselben durch Aufstellung von Relationen zwischen den Parametern mit Hülfe seines Correspondenzprincips zu einer vollständigen Discussion der auf der Fläche gelegenen Curven durch. Schon kurz vorher hatte er (ebenda) eine ähnliche Methode auf die einfachsten geradlinigen Flächen mit einer mehrfachen Geraden rein geometrisch angewandt, indem er die Beziehung betrachtete, die durch eine Curve der Fläche zwischen zwei Ebenenbüscheln begründet wird, deren Axen die vielfache Gerade und eine Erzeugende der Fläche sind.

Um auch für höhere Flächen die Darstellung ihrer Coordinaten durch algebraische Functionen zweier Parameter als ein Mittel zum Studium ihrer Geometrie auffassen zu können und diese Darstellung selbst zu einem wichtigen Gegenstande der Forschung zu machen, war von algebraischer Seite der Durchgang durch die Begriffe und Methoden nöthig, welche in den Untersuchungen von Clebsch und Gordan über eindeutige Transformationen, deren wir oben bei den Abel'schen Functionen gedachten, ihre Ausbildung gefunden hatten. Bei ihnen entwickelte sich nicht nur jener Functionsbegriff auch für Flächen, sondern hauptsächlich auch die Methode, die zum Untersuchen der beim eindeutigen Entsprechen vorkommenden Singularitäten dient. Dabei war für die Curven der Zusammenhang zwischen diesem Standpunkte und dem der geometrischen Betrachtung ihrer Erzeugungsweise von vorneherein gegeben, so dass man, von den Curven ausgehend, bei den Flächen zu den entsprechenden Begriffsbildungen gelangen musste.

Aber auch von Seiten der rein geometrischen Forschung waren die Begriffe vorgerückt durch Ausbildung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Man hatte sich lange Zeit darauf beschränkt, neben der projectivischen Verwandtschaft die einfachste eindeutige, die quadratische, zu betrachten, die gleichmässig für projectivische und metrische Geometrie wichtig schien.*) Aber in den Arbeiten Cremona's (Mem. dell' Accad. di Bologna Ser. 2. Bd. 2. 1863 u. bes. Bd. 5. 1864) gelangte bereits der allgemeine Begriff der eindeutigen Punktverwandtschaft in der Ebene zur Aufstellung und Entwickelung. Erst neuerdings wurde freilich (ziemlich gleichzeitig von Clifford, Nöther und Rosanes, vergl. Clebsch in den Math. An-

*) Es sei indess hervorgehoben, dass Magnus in der Vorrede zu seinen „Aufgaben über analytische Geometrie" bereits darauf aufmerksam machte, dass sich durch Verknüpfung wiederholter quadratischer Transformationen höhere eindeutige Beziehungen ergeben (1837).

nalen Bd. IV. p. 490) der einfache Fundamentalsatz der Theorie gefunden: dass sich jede eindeutige Transformation der Ebene aus wiederholten quadratischen Transformationen zusammensetzen lässt.*)

Bei diesem Entwickelungsgange erklärt es sich, dass der eigentliche Beginn der Abbildungstheorie, die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung, durch ein nach Inhalt und Methode der Arbeiten vollständiges Zusammentreffen von Clebsch (Borch. J. Bd. 65. Oct. 1865) und Cremona bezeichnet ist (vergl. dessen 1866 von der Berliner Akademie gekrönte Arbeit in Borch. J. Bd. 68): ein merkwürdiges Beispiel dafür, wie sich in der Theorie der algebraischen Flächen die Objecte der Untersuchung sowohl, als auch die Begriffe, von denen man ausgeht, für die analytische und die synthetische Behandlung allmählich ganz ähnlich gestaltet hatten. Beide Forscher untersuchen die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und begründen dadurch eigentlich, was man „Geometrie auf der Fläche" nennt; bei beiden ist die Grundlage der Abbildung dieselbe: die Grassmann'sche Erzeugungsweise der Fläche durch projectivische Ebenenbündel. Für Clebsch wird die Abbildung ohne Weiteres durch die Formeln vermittelt, welche eben diese Erzeugungsweise darstellen. Bei Cremona wird zunächst eine Raumtransformation untersucht, die den Ebenen des Raumes Flächen dritter Ordnung mit einer gemeinsamen Curve sechster Ordnung zuordnet, eine Transformation, die im Grunde auf eine bereits von Hesse bei seinen Untersuchungen über Curven vierter Ordnung (Crelle J. Bd. 49) betrachtete Beziehung zurückkommt.

Was diese und die zunächst folgenden Arbeiten Clebsch's über Abbildungstheorie auszeichnet, ist die Methode, aus der Definition der die Abbildung bewirkenden Functionen allein die Geometrie der Fläche zu erschliessen. Die Verhältnisse auf der Fläche sind vollkommen bekannt, sowie das System ebener Curven gegeben ist, das, vermöge der Abbildung, den ebenen Schnitten der Fläche entspricht, und es bleibt zunächst unerörtert, wie diese Abbildung, wenn man die Fläche gegeben annimmt, gefunden werden kann.

Von dieser Methode hängt auch die Richtung ab, welche Clebsch mit seinen bez. Arbeiten zunächst einschlägt. Der mit den Specialitäten der ebenen Systeme zunehmenden Schwierigkeit entsprechend,

*) Die Verwerthung der quadratischen Transformation für metrische Probleme, welche an eine besondere Form derselben, die Transformation durch reciproke Radien, anknüpft, hat in neuerer Zeit eine principiellere Auffassung und allgemeine Benutzung gefunden (vergl. die Arbeiten der französischen Geometer Moutard, Laguerre, Darboux u. A., sowie Auseinandersetzungen von Lie und Klein in den Math. Ann. Bd. V). Aber diese Betrachtungen liegen den im Texte besprochenen doch verhältnissmässig fern.

behandelt Clebsch nach der Fläche dritter Ordnung die Steiner'sche Fläche und die geradlinige Fläche dritter Ordnung (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866) und weiterhin eine merkwürdige unter den von Kummer betrachteten Flächen, die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (Borch. J. Bd. 69. April 1868).

Aber schon bei der letztgenannten Arbeit und bei allen von ihm später in dieser Richtung untersuchten Flächen beschäftigt sich Clebsch auch mit der geometrischen Construction der Abbildung, nicht zum Zwecke ihres Studiums, sondern zum Beweise ihrer Möglichkeit. Die Betrachtungen, zu welchen er hierbei geführt wurde, gehören zu den schönsten und wichtigsten, welche die Abbildungstheorie ihm verdankt.

Der Nachweis der Abbildbarkeit einer Fläche auf die Ebene verlangt, auf der Fläche zwei lineare Systeme von einfach unendlich vielen Curven zu finden, die sich bezüglich nur in einem beweglichen Punkte schneiden. Es führt diese Aufgabe zu interessanten geometrischen Problemen, welche zu merkwürdigen algebraischen Gleichungen Anlass geben. So tritt bei den Flächen dritter Ordnung die Gleichung 27ten Grades auf, von deren Auflösung die Bestimmung der geraden Linien der Fläche abhängt. Bei der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wird es nöthig, die 16 Geraden dieser Fläche zu kennen, die sich vermöge der von Kummer gefundenen fünf die Fläche doppelt berührenden Kegel zweiten Grades aus einer Gleichung fünften Grades und mehreren quadratischen Gleichungen*) bestimmten u. s. w.

Wenn der Nachweis zweier Curvensysteme der geforderten Art im Anschluss an die Clebsch'schen Arbeiten allgemein für solche Flächen gegeben werden konnte, auf welchen eines derselben bekannt ist (cf. Nöther in den math. Annalen Bd. III), so ist es Clebsch selbst gelungen, die hier auftretenden Gleichungen überhaupt zu charakterisiren und einen Zusammenhang derselben mit denjenigen Gleichungen zu entdecken, welche bei der Theilung der Abel'schen Functionen auftreten. (Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen etc. Math. Ann. Bd. III. Mai 1870.)

Er wurde dazu durch den Versuch geführt, die Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung erster Species auf die Ebene abzubilden (Gött. Abhandl. Bd. 15. Jan. 1870). Es handelte sich dabei, wie schon bei der von Clebsch früher (Math. Ann. Bd. I. p. 253 ff.) geleisteten Abbildung der Flächen vierter Ordnung mit

*) Vergl. die citirte Arbeit von Clebsch. Die 16 Geraden der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wurden wohl zuerst von Darboux erkannt (Annales de l'Ecole Normale 1863), der in seinen allgemeinen Untersuchungen über Orthogonalsysteme die Flächen vierter Ordnung insbesondere betrachtete, welche den Kugelkreis doppelt enthalten.

Doppelgeraden, um die Aufgabe, auf der Fläche neben der von vorneherein erkennbaren Kegelschnittschaar gewisse isolirte Kegelschnitte nachzuweisen. Dieses Problem verlangte eine schwierige Abzählung (die später von Lüroth geleistet wurde, Math. Ann. Bd. III). Dagegen gestaltete sich die zweideutige Abbildung auf die Ebene, oder, wie Clebsch sagt, die Abbildung auf die Doppelebene, fast unmittelbar, indem man den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die, durch die Doppelcurve hindurchgehend, die Kegelschnittschaar ausschneiden, mit einem Ebenenbüschel schnitt. Es entstand so die neue Aufgabe, die Doppelebene auf die neue Ebene zu übertragen, und diese Aufgabe kommt auf die Aufsuchung gewisser Berührungscurven der in der Doppelebene enthaltenen Uebergangscurve hinaus, was, wie oben erörtert, von einem Zweitheilungsprobleme der auf die Curve bezüglichen Abel'schen Functionen abhängt (die in dem Falle, von dem hier die Rede ist, hyperelliptische sind). Insbesondere beruht der von Clebsch am eingehendsten untersuchte Fall der Abbildung einer Doppelebene mit Uebergangscurve vierter Ordnung auf tiefliegenden Eigenschaften dieser Curven, die Aronhold aufgedeckt hat, indem er von 7 ihrer Doppeltangenten ausging (Berliner Monatsber. Juli 1864). Die entsprechende Methode hat bei allen bekannten Flächenabbildungen den nämlichen Erfolg*). Clebsch hat mit diesen Arbeiten ein neues, weites Gebiet eröffnet, das der analytischen wie der rein geometrischen Forschung zugänglich ist, auf dem aber bisher kaum einige weitere Schritte geschehen sind.

Die Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen aufeinander hängt von einer Reihe bis jetzt noch nicht erledigter Fragen ab. Aber Clebsch hat auch in dieser Richtung wenigstens einen ersten Schritt gethan. Analog dem bei Curven entwickelten Geschlechtsbegriffe hat er in einem in den Comptes Rendus, December 1868, ohne Beweis mitgetheilten Satze eine von den Singularitäten der Fläche abhängige Zahl aufgestellt, die er als Geschlecht der Fläche bezeichnet, insofern sie bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleibt und ihre Gleichheit also zur Transformirbarkeit zweier Flächen in einander nothwendig ist. Bewiesen wurde dieser Satz von Nöther (1869), analytisch unter Ausdehnung auf mehrere Variable (Math. Ann. II.), sodann (1871) nochmals von Zeuthen durch geometrische Betrachtungen (Math. Ann. IV.). Seine weitergehende Bedeutung erhielt derselbe durch den Nachweis der Invarianteneigenschaft gewisser

*) Es ist zu bemerken, dass das Problem der Abbildung der Doppelebene auf die einfache Ebene in den im Texte gemeinten Fällen, in denen die Doppelebene durch Beziehung einer Fläche auf die Ebene gewonnen wurde, dadurch specialisirt resp. erleichtert ist, dass eine oder mehrere Wurzeln der Theilungsgleichung von vorneherein bekannt sind.

von der Fläche abhängigen Flächensysteme (Nöther, Gött. Nachr. März 1873), welche den mit gleicher Eigenschaft behafteten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus der Theorie der Abel'schen Functionen analog gebildet sind. Diese Sätze über die Erhaltung der Geschlechtszahlen scheinen bestimmt zu sein, für eine allgemeine Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Variabeln, als deren Vorstufe man die Abbildungstheorie betrachten mag, in späterer Zeit eine Grundlage abzugeben. Clebsch selbst hat in einer seiner letzten Arbeiten, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen werden, noch eine Anwendung des Geschlechtsbegriffs auf die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen gegeben.

Auf den reichen Inhalt der Ausführungen, welche Clebsch sowohl für die allgemeine Theorie als für die Geometrie einzelner Flächen gegeben hat (vergl. Math. Ann. Bd. I. III., Rend. del Ist. Lombardo. Nov. 1868), können wir hier nur im Allgemeinen verweisen. Es mag nur noch der Arbeit über die geradlinigen Flächen vom Geschlechte Null gedacht werden (Math. Ann. Bd. V. Oct. 1871), insofern in derselben ein neuer Begriff, der des Flächentypus, eingeführt wird. Flächen werden demselben Typus zugewiesen, wenn sie ohne Zwischentreten singulärer Elemente auf einander eindeutig bezogen werden können, wie z. B. Ebene und Steiner'sche Fläche; Flächen desselben Typus verhalten sich daher in ihrer Geometrie vollkommen ähnlich. — Die Darstellung einer Fläche durch Parameter hat Clebsch wiederholt auch benutzt, um Probleme des Unendlich-Kleinen, die sich auf die Fläche beziehen, zu behandeln. So wies er die Curven der Haupttangenten auf der Steiner'schen Fläche durch Integration als algebraische nach (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866), ein Resultat, das daraufhin von Cremona (1867) auch geometrisch durch die Abbildung selbst wiedergefunden wurde*). Er zeigte ferner, in Verallgemeinerung der Methode, dass auf allen geradlinigen Flächen die Aufsuchung der Haupttangentencurven auf Quadratur zurückgeführt ist, wenn man eine derselben kennt (Borch. J. Bd. 68. Juni 1867) u. s. f.

Wie sehr alle diese Arbeiten von Clebsch noch dazu beigetragen haben, die analytische und synthetische Methode geometrischer Forschung ihrem Inhalte nach zur Uebereinstimmung zu bringen, sollte eine neuere Thatsache auf merkwürdige Art zeigen. In Entwickelung der angedeuteten Begriffe und Methoden ist zu gleicher Zeit (1870—71) und von mehreren Seiten her (Cayley, Cremona, Nöther) eine

*) Diese Bestimmung der Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche kann als besonderer Fall der Integration der ebenfalls algebraischen Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten betrachtet werden, wie diese von Lie und Klein gegeben wurde. (Berl. Monatsberichte. Dec. 1870. Vergl. auch Math Ann. V.)

neue Theorie, die Theorie der eindeutigen Raumtransformationen aufgestellt worden, die man als directe Verallgemeinerung der Cremona'schen Transformationen der Ebene betrachten mag. Wenn dieselbe, obgleich erst in ihren Anfängen, schon jetzt gestattet, fast ohne Weiteres alle Flächenabbildungen, mit denen man sich bisher beschäftigt hat, abzuleiten, so darf man nicht vergessen, dass sie eben auf Grund dieser seitherigen Untersuchungen erwachsen ist. —

Wir hatten es seither verschieben müssen, von den Arbeiten Clebsch's auf dem Gebiete der Invariantentheorie im Zusammenhange zu berichten, so oft wir dieselben schon nebenbei berührt haben, und so enge die Beziehung dieser Arbeiten zu den bereits besprochenen geometrischen sein mag. Denn mit Problemen der Invariantentheorie hat sich Clebsch gerade auch in seinen letzten Jahren vielfach beschäftigt, und es hätte der zusammengehörige Stoff zerstückt werden müssen, wenn wir bereits bei früheren Gelegenheiten ausführlicher auf dieselben eingegangen wären.

Obwohl nach ihren Grundvorstellungen das analytische Bild der projectivischen Geometrie ist die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen in ihren ersten Anfängen weniger auf die vorangegangenen geometrischen Forschungen, als auf die algebraische Determinantentheorie und deren Auftreten in dem zahlentheoretischen Gebiete (Transformation quadratischer Formen etc.) zurückzuführen. Auch ist für die Ausbildung der Invariantentheorie die Variationsrechnung durch die Art der in ihr üblichen Operationen wenigstens indirect von grossem Vortheile gewesen. Erst später hat die Geometrie Einfluss auf die Invariantentheorie geübt. Die elementaren Operationen der letzteren stimmen mit den in der projectivischen Geometrie üblichen Constructionen überein; die Hülfsmittel der Theorie in ihrer weiteren Ausbildung gehen aber bedeutend über die in der Geometrie üblichen Verknüpfungsweisen hinaus. Es fliesst daraus die Aufgabe, die geometrischen Begriffe in einer solchen Weise auszubilden, dass sie sich auch diesen höheren oder allgemeineren Operationen anschliesst. Andererseits ist die algebraische Formulirung gewisser Gattungen geometrischer Probleme, besonders von Aufgaben des Unendlich-Kleinen, im Sinne der Invariantentheorie erst in neuerer Zeit versucht und noch nicht überall consequent durchgeführt worden.*)

Bei der wesentlich geometrischen Auffassung der algebraischen Verhältnisse, die Clebsch eigenthümlich war, und die sich bei ihm je länger um so bestimmter ausgeprägt hatte, ist es natürlich, dass

*) Vergl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen über homogene Differentialausdrücke von Christoffel und Lipschitz (Borch. J. Bd. 71 ff.), sowie die Erweiterungen, welche Beltrami der Lehre von den Differentialparametern hat zu Theil werden lassen. (Mem. dell' Accad. di Bologna.)

seine Untersuchungen über Invariantentheorie vorwiegend die geometrische Seite des Gegenstandes betreffen, ohne dass er sich jedoch ausschliesslich auf dieselbe beschränkt hätte. Die Abhandlung, durch deren Studium er zur Invariantentheorie geführt worden war und die für die Richtung seiner späteren Untersuchungen durchaus massgebend gewesen ist, ist Aronhold's *Theorie der ternären cubischen Formen* (Borch. J. Bd. 55). Einmal eröffnete diese Arbeit durch die grosse Zahl ihrer neuen Resultate, die sich sofort in die Theorie der Curven dritter Ordnung übersetzen liessen, wie durch die elegante Behandlung bereits von Anderen (bes. von Hesse) untersuchter Probleme der geometrisch-algebraischen Forschung eine Reihe von neuen Gesichtspunkten. Andererseits bediente sich Aronhold in derselben eines Formalismus, den Clebsch sofort mit dem grössten Interesse aufgriff.

Es ist die Methode der symbolischen Darstellung algebraischer Formen als der Potenzen linearer Ausdrücke, vermöge deren Aronhold im Stande war, eine Aufgabe in voller Allgemeinheit der Coordinatenbestimmung aufzufassen und durchzuführen. Die Darstellungsweise geht in ihren ersten Anfängen auf die Symbolik zurück, deren sich Cauchy, Boole u. A.*) bei der Behandlung von Differentialgleichungen bedient hatten, oder, wenn man will, auf die bekannte abgekürzte Bezeichnung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe. Sie hatte dann in den Händen von Cayley (vergl. z. B. Crelle's J. Bd. 30) bereits die Ausbildung erhalten, welche sie geeignet macht, in der Invariantentheorie mit Erfolg verwandt zu werden. Aronhold, der seinerseits selbständig zu ihr geführt worden war, gab ihr, in Beschränkung auf ganze rationale Functionen, eine minder abstracte Form, indem er die von den Früheren gebrauchte Bezeichnung durch blosse Operationszeichen verliess.

Clebsch's erste**) Invariantenarbeit (Borch. J. Bd. 59. Sept. 1860) geht unmittelbar von Aronhold's symbolischer Darstellung aus. War letztere für Aronhold zunächst nur ein brauchbares Hülfsmittel zum Beweise seiner Sätze gewesen, so wird sie für Clebsch die principielle Grundlage der ganzen Theorie, indem ihm der Beweis gelingt, dass die symbolische Darstellung in ihren Determinantenaggregaten geradezu alle invarianten Bildungen ergibt. Es muss indess, wenn wir im Anschlusse an Clebsch's eigene Ausdrucksweise diesen Satz so uneingeschränkt aussprechen, ausdrücklich hervorgehoben werden, was man damals, zum Theil im Gegensatze zu

---

*) Vgl. auch Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe von Pfaff (Nova Acta Petropol. XI. 1797) und Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36. pag. 135).

**) Vergl. auch die bereits genannte Abhandlung über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Borch. J. Bd. 58, sowie die sich zunächst anschliessenden geometrischen Arbeiten.

der heutigen, eben durch Clebsch selbst weiter entwickelten Anschauung, unter einer invarianten Bildung verstand. Man betrachtete nur solche Formenbildungen, wie sie bereits bei zwei und drei homogenen Veränderlichen auftreten: die Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen. Die Grundformen insbesondere dachte man nur mit einer Reihe ursprünglicher Veränderlichen ausgestattet. Später haben Clebsch und Gordan Formen mit verschiedenen Reihen von Veränderlichen zu Grunde gelegt, wie wir weiterhin noch ausführlicher zu berichten haben werden. Die dann nothwendig werdenden Symbole sind selbst aus anderen Symbolen zusammengesetzt und fügen sich dementsprechend in die Determinanten, die man aus ihnen zum Zwecke der Invariantenbildung aufbauen wird, nicht als Ganze ein. Auf Grundformen mit zusammengesetzten Symbolen ist daher der Clebsch'sche Satz in der Form, wie er ihn gab, nicht anwendbar.

Auf dem Standpunkte, der durch den Clebsch'schen Beweis geschaffen ist, und innerhalb der eben angedeuteten Begrenzung, wird das symbolische Aggregat geradezu die Definition der Invarianten; die Relationen zwischen den verschiedenen Bildungen, nach denen die Invariantentheorie sucht, ergeben sich aus den einfachen Principien der symbolischen Rechnung; die Invariantentheorie mit ihrer realen Vorstellung eines durch lineare Substitutionen unzerstörbaren Inhaltes erscheint fast als Corollar des symbolischen Formalismus. Hier springen nun alle die Vortheile hervor, welche ein solcher Formalismus, wenn er geschickt angelegt ist, mit sich führt. Die Hülfsmittel der symbolischen Rechnung, schon in der Form, in der Clebsch sie damals benutzte, führen sofort zu Bildungen, deren geometrische Bedeutung jenseits der Grenzen des rein geometrischen Verständnisses in seiner heutigen Ausbildung liegt. Clebsch hob diesen Punkt gern gesprächsweise hervor und pflegte dann wohl auf das Beispiel der binären Formen fünften und der ternären Formen vierten Grades aufmerksam zu machen. Bei beiden ergibt die symbolische Bezeichnung ohne Weiteres eine Reihe linearer Covarianten, während es bis jetzt nicht gelungen ist, bei fünf Punkten in gerader Linie einzelne covariante Punkte oder bei Curven vierter Ordnung einzelne covariante Gerade zu construiren*).

In seiner Abhandlung im 59ten Bande des Borchardt'schen Journals entwickelte Clebsch neben dem von der Allgemeingültigkeit der Symbolik noch insbesondere ein wichtiges Uebertragungsprincip, das eben durch die symbolische Darstellung ermöglicht wird. Dasselbe

*) Die im Texte genannten linearen Covarianten wurden von Hermite und Joubert entdeckt. Vergl. Cambridge a. Dublin Math. J. Vol. IX.

verwerthet die Theorie der Formen mit niederer Variabelnzahl für die Formen mit mehr Veränderlichen. Ein Beispiel wird am deutlichsten zeigen, worin dieses Princip besteht und in welcher Richtung seine Anwendung liegt.

Man kennt die Discriminante einer binären biquadratischen Form, d. h. die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass die gegebene Form zwei gleiche lineare Factoren besitzt. In symbolischer Darstellung ist dieselbe, wie jede Invariante binärer Formen, durch ein Aggregat von Producten zweigliedriger symbolischer Determinanten gegeben. Man kann nun vermöge des in Rede stehenden Princips in Folge dessen sofort die Bedingung hinschreiben, dass eine gerade Linie eine Curve vierter Ordnung in einem Punktsysteme mit verschwindender Discriminante schneiden soll, d. h. die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Es ist dazu nur nöthig, die symbolischen Determinanten, welche in der Darstellung der Discriminante vorkommen, durch Vermehrung der Symbolindices auf drei und Hinzunahme einer Reihe von Liniencoordinaten zu dreigliedrigen Determinanten zu erweitern und dann die Symbole als auf die Gleichung einer Curve vierter Ordnung bezüglich aufzufassen.

Clebsch hat damals diese Darstellung der Curven vierter Ordnung in Liniencoordinaten und entsprechend die der Flächen dritter Ordnung in Ebenencoordinaten gegeben, aus denen dann sofort eine Menge bis dahin unbekannter Sätze über diese Gebilde hervorgehen. Es sei hier noch insbesondere hervorgehoben, dass bei consequenter Anwendung dieses Princips und der symbolischen Rechnung die grossen zwiefach geränderten Determinanten, deren sich Clebsch, wie oben berichtet, in seinen früheren Arbeiten mit Vorliebe bediente, durch viel kürzere symbolische Potenzen ersetzt sind.

Im Zusammenhange hiermit erwähnen wir gleich hier einer späteren Arbeit von Clebsch über die Plücker'schen Complexe (Math. Ann. Bd. II. April 1869), in welcher Clebsch dem gemeinten Uebertragungsprincipe wie überhaupt der symbolischen Darstellung eine wesentliche Erweiterung hat zu Theil werden lassen.

Als Plücker, nach längerer physikalischer Thätigkeit, sich wieder mathematischen Problemen zuwandte (1864) und die neue Disciplin schuf, die man nun als Liniengeometrie*) bezeichnet, ergriff Clebsch die geometrischen Ideen, die Plücker vortrug, mit dem grössten Interesse. Für ihn war eine Geometrie der geraden Linien im Raume, wenn auch nicht bewusst von ihm erfasst, doch nach den

*) Dem Plücker'schen Buche (Neue Geometrie etc. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69) gingen eine grosse Zahl verschiedener Arbeiten Anderer voraus, die man heute zur Liniengeometrie rechnen wird. Vergl. Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker. Gött. Abhandl. Bd. 15.

allgemeinen Betrachtungen der bei quaternären Formen möglichen symbolischen Bildungen etwas sehr nahe liegendes gewesen*). Hiermit ist auch die Richtung gegeben, in der sich seine Untersuchungen über Plücker'sche Complexe erstrecken. Sie knüpft an die Darstellung der Liniencoordinaten durch die Determinanten aus zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten an: ein Standpunkt, von dem aus die Liniengeometrie als ein Theil der quaternären Formentheorie erscheint. In dem Plücker'schen Buche wird umgekehrt eine andere analytische Behandlungsweise der Liniengeometrie angebahnt, die sich der geometrischen Auffassung der Geraden als Raumelement genauer anschliesst und weiterhin besonders von Klein verfolgt worden ist (Math. Ann. Bd. II., V.). Sie betrachtet die 6 Coordinaten der geraden Linie als selbständige Veränderliche, die dann an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades geknüpft sind. Aber hiermit verlässt man den Boden der quaternären Formentheorie und tritt in den Kreis der Formen mit sechs Veränderlichen. —

Indem sich Clebsch der Darstellung der Liniencoordinaten durch zweigliedrige Determinanten bediente, zeigte er in der genannten Arbeit, wie man symbolisch einen Liniencomplex als Potenz einer viergliedrigen Determinante schreiben kann, in der zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten vorkommen, aus denen sich bei der Entwickelung der Determinante eben die Liniencoordinaten zusammensetzen. Ein wesentlicher Fortschritt, der hierin liegt, ist der, dass die Coëfficienten der darzustellenden Form nicht als blosse Producte von Symbolen, sondern als Determinantenaggregate**) von Symbolen erscheinen. Clebsch hat später (Math. Ann. Bd. V. Jan. 1872) gelegentlich die Fruchtbarkeit dieser Darstellung für die Behandlung der Complexe in ein helles Licht gestellt, indem er die fertigen Gleichungen einer Reihe in der Complextheorie auftretender Flächen ableitete. Er hat sodann diese neue Art von Symbolik bei allgemeinen Untersuchungen zu Grunde gelegt, auf die wir erst weiter unten zu sprechen kommen werden. —

Die Gesichtspunkte, die man bis jetzt in der Invariantentheorie verfolgt hat, mag man in zwei Gruppen bringen. Man hat einmal nach den charakteristischen Eigenschaften der invarianten Bildungen geforscht, man hat andererseits nach deren gegenseitigem Zusammenhange gefragt und nach Fundamentalformen gesucht, aus denen sich die übrigen durch einheitliche Processe ableiten lassen.

In seinen ersten Untersuchungen definirt Cayley die Invarian-

---

*) Vergl. den Bericht, den Clebsch in den Göttinger Anzeigen von dem Plücker'schen Buche erstattet hat (1869).

**) Dies ist also einer von den oben erwähnten Fällen, auf welche sich die Beschränkung bezieht, die man dem Clebsch'schen Satze von der Allgemeingültigkeit der Symbolik zufügen muss.

ten durch gewisse partielle Differentialgleichungen, in denen die Coëfficienten der gegebenen Formen als unabhängige Variable auftreten und deren einzige rationale Lösungen eben die Invarianten sind (Crelle's J. B. 47, vergl. auch Aronhold ebenda Bd. 62). Clebsch kommt auf diese Differentialgleichungen nur in der bereits oben bei Gelegenheit des Pfaff'schen Problems genannnten Arbeit über simultane lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu sprechen (Borch. J. Bd. 65). Sie erscheinen dabei als Beispiele eines sogenannten vollständigen Systems von Differentialgleichungen, d. h. eines Systems, dessen Gleichungen mit einander combinirt, keine neue Bildungen ergeben. *)

Eine andere Definition der Invarianten, von der besonders Aronhold in seiner „fundamentalen Begründung der Invariantentheorie" ausgeht (Borch. J. Bd. 62), ist die aus den nothwendigen Transformationsrelationen, welche erfüllt sein müssen, damit zwei Formen linear ineinander übergeführt werden können. Für Clebsch trat auch diese Art der Definition verhältnissmässig zurück. Für ihn waren die Invarianten einfach definirt als ganze rationale Functionen der Coëfficienten gegebener Formen, die sich bei linearer Transformation bis auf eine als Factor vortretende Potenz der Substitutionsdeterminante reproduciren. Dieses ihr Verhalten wird in durchsichtigster Weise durch das symbolische Bildungsgesetz ausgesprochen, und es interessirte nun Clebsch vorwiegend, diejenigen Probleme weiter zu verfolgen, die man auf Grund der symbolischen Darstellung zu erledigen hoffen darf.

Bereits bei einer binären Form kann man eine unbegrenzte Zahl invarianter Bildungen nach dem Principe der Symbolik entwerfen, indem man nur die Reihe der zu vereinigenden symbolischen Determinanten und der zu Hülfe zu nehmenden wirklichen Veränderlichen beliebig vermehrt; um so mehr wächst die Zahl der Bildungen bei ternären, quaternären Formen u. s. w. Man wird sich die Frage vorlegen, ob man nicht aus der Mannigfaltigkeit aller dieser Gestalten einen kleineren Kreis auswählen kann, aus dessen Formen sich alle anderen in einer festzusetzenden Art und Weise ableiten lassen.

Mit Bezug auf diese Fragestellung, die schon von Cayley, Hermite, Brioschi u. A., aber zum Theil in anderer Richtung, in Betracht gezogen war, haben sich Clebsch und Gordan in erster Linie gemeinschaftlich auf die Aufgabe concentrirt, solche Formen anzugeben, aus denen sich die übrigen rational und ganz mit Hülfe bloss numerischer Factoren zusammensetzen. Bei binären Formen gelang es Gordan (Borch. J. Bd. 69) unter Benutzung des symboli-

*) Den Beweis der Unabhängigkeit dieser Gleichungen haben später Christoffel (Borch. J. Bd. 68) und Aronhold (ibd. Bd. 69) geführt.

schen Apparates den Satz zu beweisen, dass jede einzelne binäre Form, wie auch jedes System solcher Formen eine endliche Zahl solcher Bildungen besitzt. Die verhältnissmässig hohe Vollendung, die durch diesen Satz der Theorie der binären Formen geworden ist, veranlasste Clebsch, eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie zu geben, die 1872 erschien (Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, B. G. Teubner. dat. September 1871). Wenn dieses Werk zunächst bestimmt ist, auch in weiteren Kreisen die Ergebnisse und Anschauungsweisen der heutigen Invariantentheorie zu verbreiten*), so haben wir hier und im Folgenden die in ihm enthaltenen einzelnen Fortschritte hervorzuheben. Mit Bezug auf die hier vorliegende Fragestellung hat Clebsch in seinem Buche den Nachweis geführt (der gleichzeitig von Gordan in einem Aufsatze über Resultanten (Math. Ann. Bd. III.) gegeben wurde), dass man binäre Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen immer durch ein simultanes System von Formen ersetzen kann, die nur eine Art von Veränderlichen enthalten, — wodurch denn das Problem der binären Formen nach dieser Seite begrenzt erscheint und namentlich auch bei der Bildung von Covarianten binärer Formen die Beschränkung auf solche mit nur einer Reihe von Veränderlichen gerechtfertigt ist.

Für ternäre und höhere Formen hat sich ein Satz, der dem Theoreme von der Endlichkeit des Formensystems bei binären Formen entspräche, trotz wiederholter Bemühungen von Gordan nur erst in einzelnen Fällen als gültig erwiesen. Dagegen nahm Clebsch in seiner grossen Arbeit: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Gött. Abhandl. XVII. März 1872, vergl. auch Math. Ann. Bd. V.) eine Erledigung der Fragen in Angriff, welche bei mehr Veränderlichen den letzt erwähnten auf binäre Formen bezüglichen entsprechen. Bei binären Formen gibt es wesentlich nur eine Art von Veränderlichen, die man als die Punkte einer Geraden zu deuten pflegt. Bei ternären Formen treten aber bereits zweierlei, bei quaternären dreierlei Variable auf, entsprechend den verschiedenen Grundgebilden in Ebene und Raum, welche die projectivische Geometrie unterscheidet: dem Punkte und der Geraden in der Ebene, dem Punkte, der Geraden und der Ebene im Raume. Bei n homogenen Veränderlichen wird die Zahl dieser verschiedenen Stufen*) gleich $(n-1)$. Insofern man nun

*) Das Werk stellt sich hierdurch neben Salmon's Lessons introductory to the modern Algebra. Ein Vergleich beider Bücher ist namentlich auch für Clebsch's mathematische Denkweise charakteristisch: bei Salmon in mannigfacher Abwechselung eine Fülle verschiedener Methoden, bei Clebsch ein einheitlicher streng systematischer Gang.

*) Die Unterscheidung dieser Stufen spielt bereits in Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844 eine wichtige Rolle.

alle solche Bildungen von der Betrachtung ausschliesst, welche sich aus anderen, die man bereits berücksichtigte, rational und ganz zusammensetzen lassen, genügt es, wie Clebsch zeigt, solche Formen zu betrachten, welche von jeder Art der in Betracht kommenden Veränderlichen höchstens eine Reihe enthalten. In der Geometrie der Ebene z. B. beachte man nur solche Formen, welche entweder allein eine Reihe von Punktcoordinaten oder nur eine Reihe von Liniencoordinaten oder von jeder Coordinatenart je eine Reihe enthalten. Die ersten beiden Classen repräsentiren, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Curve in Punkt- bez. Liniencoordinaten. Die dritte Classe ergibt das, was man früher als Zwischenform bezeichnet, aber nicht eigentlich geometrisch verwerthet hat. Die Formen dieser Art repräsentiren geometrisch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene und einem von Geraden umhüllten Orte, oder, was dasselbe ist, zwischen den geraden Linien der Ebene und zugeordneten Punktgebilden. Wir werden noch weiter unten berichten, wie Clebsch im Anschlusse an die hier besprochene Arbeit es unternahm, diese Art geometrischer Beziehung, die er als Connex bezeichnet, als neues Grundgebilde in die Geometrie der Ebene einzuführen, und dadurch einen ersten Schritt that, um die Lehre von den Differentialgleichungen erster Ordnung mit der neueren geometrischen Forschung in Verbindung zu bringen.

Für ternäre Formen, auf die sich das besprochene Beispiel bezieht, hat übrigens Clebsch in der genannteu Arbeit den Kreis der zu betrachtenden Formen noch enger gezogen. Bereits Gordan hatte in einer Arbeit über Combinanten (Math. Ann. Bd. IV) Connexe betrachtet, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen; auf eben solche Formen darf man sich, nach den Untersuchungen von Clebsch, überhaupt beschränken. Eine entsprechende Reduction des Problems scheint auch bei mehr Veränderlichen statthaft, durch die Arbeit von Clebsch ist aber die bez. Frage erst angeregt, noch nicht erledigt.

Für den Standpunkt, wie ihn Clebsch mit diesen Untersuchungen entwickelt hat, erscheint die Liniengeometrie als ein specieller Theil der überhaupt auf vier homogene Variable bezüglichen Probleme. Dementsprechend gelingt es Clebsch, die Symbolik, die er, wie oben berichtet, insbesondere für Linien-Complexe entwickelt hatte, auf alle Formen mit beliebig vielen Veränderlichen auszudehnen. Sie gibt ihm den Ausgangspunkt für seine weiteren Betrachtungen und den wesentlichen Apparat zum Beweise der abzuleitenden Sätze. —

Die zuletzt besprochenen Arbeiten gehen alle darauf aus, solche Formen anzugeben, aus denen sich alle anderen rational und ganz zusammensetzen lassen. Aber man kann die Aufgabe auch so stellen, dass man nur rationale Darstellung der ausgeschiedenen Bildungen verlangt. Mit Bezug auf diese Fragestellung haben Hermite*) und Brioschi**) bei binären Formen ganz allgemein ein System „associirter Formen“ aufgestellt. Alle Covarianten drücken sich durch dieselben in der Weise rational aus, dass im Nenner jedesmal nur die Potenz einer Form, etwa der Grundform auftritt. Sie gelangten zu diesem wichtigen Satze mit Hülfe einer gewissen linearen Substitution, vermöge deren die gegebene Form Coëfficienten erhält, die sich aus Invarianten und Covarianten zusammensetzen lassen (vergl. hierzu Clebsch's Theorie der binären Formen, deren zweite Hälfte diesen Untersuchungen gewidmet ist). In einer Note in den Göttinger Nachrichten (Aug. 1870. vergl. Math. Ann. Bd. III) zeigte nun Clebsch, dass die von jenen aufgestellten Systeme associirter Formen noch nicht die einfachsten ihrer Art sind, dass sie sich vielmehr noch aus niederen Bildungen zusammensetzen lassen, nämlich aus der Grundform, aus den Covarianten, welche in ihren Coëfficienten quadratisch sind, und aus den Functionaldeterminanten derselben mit der Grundform (vergl. den vereinfachten Beweis von Gundelfinger. Borch. J. Bd. 74).

Beziehen sich diese Betrachtungen gleichmässig auf Invarianten und Covarianten, so gibt es ähnliche Ueberlegungen, die nur Invarianten betreffen. Sie gehen darauf aus, solche Functionen der Veränderlichen als neue Variable einzuführen, welche mit den gegebenen Formen covariant verknüpft sind. Die Coëfficienten der neuen „typischen“ Form sind dann Invarianten, und durch diese Invarianten stellen sich von selbst alle anderen dar. Hermite, von dem diese Art der Betrachtung überhaupt herrührt, benutzt irrationale Bildungen zur typischen Darstellung. Aber dadurch wird gerade der charakteristische Unterschied aufgehoben, der zwischen der Typik und der sonst so viel gebrauchten Methode der kanonischen Formen besteht: die Beschränkung auf das Rationale. Dem gegenüber haben Clebsch und Gordan in einer gemeinsamen Arbeit über Formen fünften und sechsten Grades (annali di matematica. 1867. t. I.) insbesondere entwickelt, wie man den Vortheil rationaler Darstellung bei Formen gerader Ordnung dadurch erreichen kann, dass man quadratische Covarianten als neue Veränderliche einführt. Später haben Clebsch und seine Schüler die typische Darstellung auch anderer Formen gegeben; man vergleiche hierüber den zweiten Theil der „Theorie der binären Formen,“ in dem sie sämmtlich aufgeführt sind. —

Es war schon wiederholt von den Beziehungen der Invariantentheorie der linearen Substitutionen zur allgemeinen Lehre von den ein-

---

*) Cambr. und Dublin math. Journ. 1854. Crelle J. Bd. 52.
**) Annali di matem. tomo I p. 296.

deutigen Umformungen die Rede, und es wurde bereits von den Resultaten berichtet, welche letztere Theorie seither bei ternären und quaternären Formen aufzuweisen hat. Bei binären Formen, bei denen die Erledigung der einschlägigen Probleme um Vieles leichter scheint, hat zuerst Hermite (Comptes Rendus tome 46 pag. 961), dann Gordan (Borch. J. Bd. 71) den Gegenstand in der Weise in Angriff genommen, dass geradezu die Invarianten der durch eine gegebene eindeutige Transformation umgewandelten Form aufgestellt werden. Die Art, in der Gordan die eindeutige Transformation einführt, entspricht genau denjenigen, deren er und Clebsch sich in dem Buche über Abel'sche Functionen bei ternären Formen bedienten. Die neuen homogenen Veränderlichen werden mit ganzen Functionen der ursprünglichen proportional angenommen und aus diesen Gleichungen und der gleich Null gesetzten gegebenen Form werden die ursprünglichen Veränderlichen eliminirt. Die entstehende Resultante ist die transformirte Form. Die letztere ist also eine simultane Invariante der gegebenen Form und der Transformationsgleichungen; ihre Invarianten setzen sich dementsprechend aus den Invarianten der gegebenen Form und der Transformationsfunctionen zusammen.

Clebsch hat sich speciell mit der quadratischen Transformation binärer Formen beschäftigt (vergl. das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades, Math. Ann. Bd. 4. Juni 1871). Den Kern seiner Betrachtung bildet eine geometrische Repräsentation der quadratischen Transformation, die hier um so mehr auseinandergesetzt sein mag, als sie in ihrer Einfachheit ein ausgezeichnetes Beispiel für das Zusammengehen algebraischer Entwickelung und geometrischer Auffassung gibt, wie es die neuere Zeit entwickelt hat. Man ziehe n Tangenten an einen Kegelschnitt. Dann sind bekanntlich die Reihen von n Punkten, in welchen dieselben von einer beliebigen anderen Tangente des Kegelschnittes getroffen werden, alle untereinander projectivisch verwandt. Schneidet man die n Tangenten mit einer anderen Linie der Ebene, so ist das nicht mehr der Fall, sondern die durch die neuen Schnittpunkte repräsentirte Form geht aus der ursprünglichen eben durch eine quadratische Transformation hervor und die Gesammtheit der Formen, die durch quadratische Transformation entstehen können, ist durch die Gesammtheit der Schnittpunktsysteme der Geraden der Ebene mit den n Tangenten repräsentirt*). Handelt es sich jetzt darum, quadratische Transformationen zu bestimmen, welche der transformirten Form besondere Invarianteneigenschaften ertheilen, so

*) In ähnlicher Weise interpretirt man nach Clebsch die cubischen Transformationen, indem man n Osculationsebenen an eine Raumcurve dritter Ordnung legt und diese Ebenen mit den Geraden des Raumes schneidet.

kommt das auf die Bestimmung gewisser Linien der Ebene, d. h. auf ein Problem der linearen Invariantentheorie bei drei Veränderlichen hinaus.

Clebsch wendet diese Untersuchungen insonderheit auf binäre Formen fünften Grades an, und ohne dass wir hier eine nähere Darlegung der zahlreichen Resultate geben können, welche seine Arbeit im Einzelnen bietet, müssen wir hervorheben, dass er dieselben mit den Untersuchungen von Jerrard, Hermite und Kronecker, betr. die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, in Verbindung bringt.

Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie durch Lagrange begründet, durch Gauss und Abel weiter entwickelt, durch Galois zu ihrer jetzigen Allgemeinheit erhoben worden ist, hat Clebsch in hohem Masse interessirt. Er hat freilich in dieser Richtung nicht eigentlich eigene Untersuchungen angestellt, aber er hat indirect diesen Fragen genützt, indem er keine Gelegenheit vorübergehen liess, wenn ein geometrisches oder algebraisches Problem zu Gleichungen besonderen Charakters hinleitete, auf eben diese Gleichungen als an und für sich beachtenswerth hinzuweisen. Es waren wohl die Untersuchungen von Hesse und weiterhin die von Abel gewesen, die Clebsch's Interesse für diese algebraische Seite der geometrischen Probleme rege gemacht hatten; später wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie" zu widmen.

Das erste Beispiel einer solchen „geometrischen" Gleichung hatten die neun Wendepunkte der Curven dritter Ordnung geboten, von denen Hesse zeigte, dass sie durch eine biquadratische und zwei reine cubische Gleichungen zu bestimmen seien. Es mögen ferner die Gleichungen genannt werden, welche bei der Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung oder bei der Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung auftreten. Bei ihnen gelang es nicht, den Grad der Gleichungen zu erniedrigen (C. Jordan hat inzwischen bewiesen, dass das unmöglich ist), wohl aber besitzen ihre Wurzeln besondere Gruppirungen, welche interessante Beispiele für die bei Gleichungen höheren Grades in dieser Hinsicht auftretenden Eigenthümlichkeiten abgeben. Clebsch selbst hat in seiner Arbeit über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, deren wir oben gedachten, die Gleichung zehnten Grades näher discutirt, die durch die 10 Eckpunkte des Pentaeder's vorgestellt wird. In seinem Aufsatze „über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung" (Borch. J. Bd. 58) spielt der Zusammenhang zwischen einer Gleichung vierten und einer Gleichung sechsten Grades, auf den schon Hesse geführt worden war, eine interessante Rolle. Wir gedachten ferner bereits der Untersuchungen über die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen, die Clebsch und Gordan in ihrem gemeinsamen Buche gegeben haben. Aber sehr viel charakteristischer für Clebsch's allgemeine Auffassungsweise sind zwei andere Leistungen, die wir beide ebenfalls schon berührt haben. Die eine ist die, dass Clebsch allgemein den Zusammenhang erkannte, den die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen mit den Gleichungen zur Bestimmung der Berührungscurven einer ebenen Curve besitzen; die andere liegt in der Zurückführung der Gleichungen, welche in der Flächenabbildung auftreten, eben auf die Bestimmung solcher Berührungscurven.

Wir haben bei dieser Gelegenheit noch insbesondere von der Arbeit: über die binären Formen sechsten Grades und die Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen (Gött. Abhandl. Bd. 14. Juni 1869. vergl. Math. Ann. Bd. II) Bericht zu erstatten. Von der Aufgabe ausgehend, Curven dritter Ordnung zu construiren, welche sechs gegebene Gerade eines Büschels berühren, hatte Cayley (Quarterly J. Bd. 9) das Problem aufgestellt, eine binäre Form sechsten Grades in die Summe der dritten Potenz einer quadratischen und der zweiten Potenz einer cubischen Form zu zerlegen. Dieses Problem ist, wie Clebsch zeigt, vom 40ten Grade und kann vermöge einer Gleichung vom 27ten und einer anderen vom 5ten Grade gelöst werden. C. Jordan, dem Clebsch diese Resultate mitgetheilt hatte, erkannte die Uebereinstimmung dieser Gleichung vierzigsten Grades mit derjenigen, die sich bei der Dreitheilung der ultraelliptischen Functionen einstellt. Clebsch selbst gab darauf die Zurückführung des einen Problems auf das andere. Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe erschliesst er nicht nur die Existenz gewisser Resolventen, sondern, und das macht sie besonders bemerkenswerth, er gibt Methoden an, um diese Resolventen unter Benutzung der Hülfsmittel symbolischer Rechnung wirklich zu bilden. Man vergl. hierzu p. 234 ff. der „Theorie der binären Formen", wo Clebsch diese Untersuchungen, oder wenigstens einen Theil derselben, reproducirt hat.

War Clebsch in dieser Weise bemüht, die Invariantentheorie auch mit solchen Gebieten mathematischer Forschung in Verbindung zu setzen, die ihr bis dahin ziemlich fern standen, so sei, als einer Leistung in gleichem Sinne, eines Aufsatzes über die Charakteristiken der Kegelschnitte gedacht (Math. Ann. Bd. VI. Mai 1872). In der Theorie der Charakteristiken, wie sie durch Chasles geschaffen ist, spielt ein Satz, dem man durch Induction eine grosse Ausdehnung gegeben hat, eine fundamentale Rolle. Derselbe sagt aus, dass die Zahl der Kegelschnitte einer einfach unendlichen Reihe, welche einer gegebenen Bedingung genügen, sich aus zwei Zahlenpaaren linear und homogen zusammensetzt, von denen das eine bloss der Reihe, das andere bloss der hinzutretenden Bedingung angehört. In Benutzung der Resultate seiner Abhandlung: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie," deren wir oben ausführlich gedacht, zeigt nun Clebsch, dass dieser Satz aus bestimmten Eigenthümlichkeiten hervorgeht, die das simultane Formensystem beliebiger ebener Gebilde besitzt, wenn sich unter denselben ein Kegelschnitt befindet. Es ist durch diese Untersuchung nicht nur der Satz in einer vollständigeren Weise bewiesen, als das bis dahin geschehen war*), sondern es ist namentlich auch eine Begrenzung desselben wahrscheinlich gemacht. Denn der Beweis des Satzes hängt in einer solchen Weise von speciellen Eigenschaften der Kegelschnitte ab, dass eine Geltung desselben in der nämlichen Form bei Curven höherer Ordnung nicht angenommen werden kann. Dem widerspricht nicht, wenn er sich auch bei höheren Curven in einzelnen Fällen als gültig erwiesen hat (cf. Chasles in den Comptes Rendus t. 58, 1864, Zeuthen in den Math. Ann. Bd. 3. p. 154); denn in diesen Fällen sind die Bedingungen, denen man die Curven unterwirft, besonderer Natur. — Clebsch setzt bei seinem Beweise eine gewisse Unabhängigkeit zwischen der gegebenen Kegelschnittreihe und der hinzutretenden Bedingung voraus. Findet eine solche nicht statt, so hat der Satz von Chasles auch keinen unmittelbaren Sinn. Indirect ist er aber auch auf solche Fälle durch Chasles (Comptes Rendus 1864) und Cremona (ebenda 1865) vermöge einer nicht völlig begründeten Induction angewandt worden und hat dann zu lauter richtigen Resultaten geführt. Bei Clebsch sind solche Fälle, wie gesagt, ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen; die auf sie bezügliche Benutzung des Chasles'schen Satzes ist bis jetzt noch unbewiesen.

Gedenken wir schliesslich der bereits genannten Untersuchung über Connexe, die Clebsch als neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene einzufügen gedachte (vergl. Gött. Nachrichten, Aug. 1872. Math. Ann. Bd. VI). Mit denselben hat Clebsch der geometrischen Forschung ein unübersehbares Feld neuer Speculation geöffnet; er hat selbst nur noch die Richtung im Allgemeinen bezeichnen können, in der er den Gegenstand zu verfolgen beabsichtigte. Der Connex wird bei ihm in demselben Sinne Object der geometrischen Untersuchung, wie etwa eine Curve oder Fläche. Ein Connex hat seine

*) Vergl. z. B. die Betrachtungen von Darboux in den Comptes Rendus. Es wird dort nur auf solche Curvenreihen Rücksicht genommen, die von einem Parameter rational abhängen. In neuester Zeit wurde ein geometrischer Beweis für den Fundamentalsatz der Charakteristikentheorie von Halphen mitgetheilt, Bulletin de la Société Mathématique. 1873.

Singularitäten, zwischen ihnen bestehen Gleichungen, die den Plücker'schen Formeln für die Singularitäten ebener Curven analog sind. Man kann nach den Gebilden fragen, die zwei, drei Connexen etc. gemeinsam sind. Alle diese Erzeugnisse besitzen bei beliebigen eindeutigen Transformationen, die man auf das doppelt ternäre System der Punkt- und Linien-Coordinaten erstrecken darf, ein Geschlecht u. s. f.

Aber besonders wichtig scheint die Verbindung, in welche die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (zunächst bei zwei absoluten, oder, was dasselbe ist, drei homogenen Veränderlichen) zur Theorie der Connexe tritt. Jeder Connex zieht eine *solche* Differentialgleichung nach sich; ihre Integralcurven sind dadurch definirt, dass jedesmal Punkt und zugehörige Tangente der Connexgleichung genügen. Man erhält dadurch die allgemeinste algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, wobei das Verhältniss ein solches ist, dass zu einer gegebenen Differentialgleichung noch unendlich viele Connexe gehören. Es ist dadurch für diese Differentialgleichungen ein ganz neuer Standpunkt der Auffassung gewonnen, der sich auf das Genaueste an die neuere geometrisch-algebraische Forschung anschliesst. Man kann z. B. diese Differentialgleichungen nach ihrem Geschlechte eintheilen u. s. f. Es ist aber namentlich auch ein formaler Apparat geschaffen, mit dem man die Differentialprobleme behandeln wird, wenn man sich an die genannten neueren Anschauungen anschliessen will. Es scheint dieser Apparat die Ergänzung zu den *mehr synthetischen* Untersuchungen über Differentialgleichungen bilden zu sollen, wie sie in neuester Zeit besonders von Lie begonnen wurden.

Clebsch beabsichtigte, seine Untersuchungen auf mehr Veränderliche auszudehnen. Die Theorie der quaternären Formen z. B., welche eine Reihe von Punkt- und eine Reihe von Ebenen-Coordinaten enthalten, schliesst dann die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei drei Variabeln in sich. Auch für sie ist die Eintheilung in Geschlechter gegeben; andererseits mag man sie in Gruppen theilen je nach Ordnung und Classe der Connexe, zu denen sie gehören. Clebsch hat alle diese Fragen, die ihn in der letzten Zeit beschäftigten, nur noch gesprächsweise berühren können. Aber wir glaubten um so mehr, dieselben hier wenigstens nennen zu sollen, als er selbst von ihnen reichen Erfolg erwartete. Wie so oft vorher, *hat* Clebsch *mit diesen* Untersuchungen den Blick in neue, weite Gebiete geöffnet, die altbekannte, aber bis dahin getrennte Gegenstände in sich begreifen. Er hat mit ihnen dem Grundzuge seiner mathematischen Denkweise noch einmal Ausdruck gegeben, welche die Mathematik nicht als eine Reihe geschiedener, einander fremder Disciplinen, sondern als einen lebendigen Organismus erfassen wollte.