Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.

Par

G. Peano à Turin.

Soit donné le système d'équations différentielles, ramené à la forme normale:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

où les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions continues aux environs de $t = b$, $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Dans cette Note on prouve que l'on peut déterminer un intervalle (b, b'), et, dans cet intervalle, n fonctions $x_1 \ldots x_n$ de t, qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = b$, prennent les valeurs $a_1 \ldots a_n$.*)

Toute la démonstration est réduite ici en formules de Logique, analogues aux formules d'Algèbre; car, bien qu'elle ne soit pas difficile, son développement complet avec le langage ordinaire serait d'une complication excessive.

Dans la première partie on explique les notations introduites, et l'on développe quelque théorie dont dans la suite on doit faire usage. La deuxième partie contient la démonstration du théorème.

---

*) La démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles, indépendente de la théorie des imaginaires, laquelle exige des conditions restrictives speciales, a été donnée par Cauchy, et (incomplétement) publiée par Moigno *Leçons de calcul diff. et de calcul intégral*, 1844, Vol. 2°, p. 385—454 et 513—534. Elle suppose l'existence et la continuité des dérivées partielles des φ par rapport aux x. Elle a été ensuite donnée par diverses auteurs, sous des conditions restrictives quelque peu différentes, et dont nous parlerons dans la suite.

Première partie.

§ a.

Explication des signes

K (*classe*), $\frown$ (*et*), $\smile$ (*ou*), $-$ (*non*), ε (*est*), $=$ (*est égal*), Ɔ (*est contenu* ou *on déduit*), Λ (*rien* ou *absurde*).*)

1. Nous écrirons K au lieu du mot *classe* (variété, ensemble d'êtres quelconques, *Klasse*).

Si a, b, c sont des K, alors:

2. $a \frown b \frown c$ signifie «la classe commune à a, b, c».
3. abc „ «$a \frown b \frown c$» lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité à craindre.
4. $a \smile b \smile c$ „ «la plus petite classe contenante les a, b et c».
5. $-a$ „ «la classe des non a».
6. $x \,\varepsilon\, a$ „ «x est un a».
7. $x, y \,\varepsilon\, a$ „ «x et y sont des a».
8. $a = b$ „ «les classes a et b sont identiques».
9. a Ɔ b „ «la a est contenue dans la b» ou «tout a est b».
10. Λ „ «rien» ou «la classe nulle». Ainsi $ab = \Lambda$ signifie «nul a est b».

Si a, b, c sont des propositions, alors

11. $a \frown b \frown c$ signifie «l'affirmation simultanée des propositions a, b, c».
12. abc „ «$a \frown b \frown c$».
13. $a \smile b \smile c$ „ «une au moins des a, b, c est vraie».
14. $-a$ „ «la négation de a». Si la proposition a contient un des signes de relation Ɔ, $=$, ε, etc. il est plus commode d'écrire le signe de négation $-$ avant le signe de relation. Ainsi nous écrirons $a -= b$ au lieu de $-(a = b)$, et $x - \varepsilon\, a$ au lieu de $-(x \,\varepsilon\, a)$ ou $x \,\varepsilon - a$. Ainsi, si a et b sont des K, $ab -= \Lambda$ signifie «quelque a est b».

---

*) On doit à Boole l'étude des opérations et relations de Logique. Ces questions ont été ensuite étudiées par plusieurs Auteurs. Voir l'intéressant ouvrage

E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exacte Logik*), Leipzig, 1890;

dont le premier volume vient de paraître.

J'ai déjà réduit en formules les propositions de quelques théories, dans mes

Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin 1889;

Principii di Geometria, logicamente esposti, Turin 1889;

Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules, (Mathesis, t. X);

publications auxquelles je renvoie le Lecteur pour des plus amples explications. Le signe ε est la lettre initiale de ἐστί; les signes Ɔ et Λ sont les initiales renversées des mots *contient* et *vrai*.

15. $a = b$ signifie «les propositions a et b sont équivalentes».
16. $a \supset b$ „ «de la a on déduit b» ou «si a, alors b».
17. Λ „ «absurde». Ainsi $a - b = \Lambda$ signifie $a \supset b$.

Si a, b sont des propositions contenantes des lettres indéterminées $x, y, \ldots$ alors:

18. $a \supset_x b$ signifie «quelque soit x, de a on déduit b».
19. $a \supset_{x,y} b$ „ «Si x, y satisfont à la a, ils satisfont aussi à la b».
20. $a =_x b$ „ «pour toutes les valeurs de x, les propositions a et b sont équivalentes».
21. $a -=_x \Lambda$ signifie «la condition a n'est pas, en regard de x, absurde» ou «il y a des x qui satisfont à la condition a».

Nous séparerons les différentes parties d'une formule au moyen des parenthèses, selon l'usage. Mais, pour séparer les propositions partielles d'un théorème, on adoptera les points . : ∴ : : etc. Pour lire une formule divisée par des points, on unira d'abord les signes qui ne sont pas séparés par des points, puis ceux qui le sont par un, puis ceux qui le sont par deux, etc. Ainsi

$ab \,.\, cd : ef \,.\, g \therefore h \,.\, kl$ signifie $\{[(ab)(cd)]\,[(ef)g]\}\,[h(kl)]$.

Lorsqu'une formule n'est pas contenue dans une seule ligne, elle se continue dans la suivante, un peu à droite.

Exemples.

1. $3 \,\varepsilon$ «Nombre premier».
2. «Multiple de 6» $\supset$ «Multiple de 2».
3. «Multiple de 6» $=$ «Multiple de 2» $\cap$ «Multiple de 3».

Dans les exemples suivants, au lieu des mots «quantité réelle» nous écrirons q. (Voir le § b).

4. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, ab = ba$.

«Si a et b sont des quantités (réelles), on a $ab = ba$». Ici les points divisent la proposition en hypothèse, signe de déduction, et thèse.

5. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a^2 + b^2 = 0 :\supset: a = 0 \,.\, b = 0$.
6. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, ab = 0 :\supset: a = 0 \,.\cup.\, b = 0$.
7. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, c -= 0 :\supset: ac = bc \,.=.\, a = b$.

Dans les ex. 5, 6, 7 les : divisent les propositions en trois parties; les hypothèses et thèses sont complexes; la thèse de 7 est l'égalité logique entre deux égalités algébriques.

Quelquefois il convient de considérer la formule ternaire $a \supset b$ comme un composé binaire de a et $\supset b$, ou de $a \supset$ et b.

8. $a, b, x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset \therefore x + y = a \,.\, x - y = b :=: 2x = a + b \,.\, 2y = a - b$.

Ici le signe $.\cdot.$ décompose la proposition en deux parties; la première est formée de l'hypothèse et du signe de deduction. La partie qui suit $.\cdot.$ est la thèse; elle est décomposée par les : en trois parties, les deux membres d'une égalité logique, et le signe d'égalité.

9. $a, b, c, a', b', c' \varepsilon \mathrm{q} : x \varepsilon \mathrm{q} . \supset_x . ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$
$.\cdot. \supset : a = a' . b = b' . c = c'.$

«Étant a, b, c, a', b', c' des nombres, si, quelque soit le nombre x, les deux trinômes $ax^2 + \cdots$ et $a'x^2 + \cdots$ sont égaux, alors ...».

10. $a, b \varepsilon \mathrm{q} . \supset :: x \varepsilon \mathrm{q} . x^2 + ax + b = 0 : - =_x \Lambda .\cdot. = . a^2 - 4b \geq 0.$

«Si a et b sont des nombres réels, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une racine réelle de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ est $a^2 - 4b \geq 0$».

11. $a, b, a', b' \varepsilon \mathrm{q} . \supset .\cdot.\cdot. x, y \varepsilon \mathrm{q} . ax + by = 0 . a'x + b'y = 0 : x$
$- = 0 . \cup . y - = 0 .\cdot. - =_{x,y} \Lambda :: = . ab' - a'b = 0.$

12. $a, b, c \varepsilon \mathrm{q} . a > 0 . l \varepsilon \mathrm{q} : \supset .\cdot.\cdot. m \varepsilon \mathrm{q} .\cdot. x \varepsilon \mathrm{q} . x > m : \supset_x . ax^2$
$+ bx + c > l :: - =_m \Lambda .$

«Soient a, b, c des quantités, dont la première positive; soit l une nouvelle quantité. Alors il existe un nombre m tel que, pour toutes les valeurs de x supérieures à m, soit $ax^2 + bx + c > l$»; ou «$ax^2 + bx + c$ devient infini en même temps que x».

Les notations ci dessus expliquées suffisent pour exprimer toutes les relations de logique entre individus, classes et propositions, lesquelles dans le langage commun sont representés par un très grand nombre de mots. Toutes les propositions d'une science quelconque peuvent s'exprimer au moyen de ces notations, et des mots qui représentent les êtres de cette science. Elles seules suffisent pour exprimer les propositions de Logique pure. Nous en écrirons ici quelques-unes, comme exercice:

1. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset . a \supset a$ {quod est, est},

2. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K}. \ a \supset b. \ b \supset c : \supset. \ a \supset c$ {syllogisme},

3. $a \varepsilon \mathrm{K}. \supset : aa = a. \ a \cup a = a. \ -(-a) = a. \ a - a = \Lambda. \ a\Lambda = \Lambda.$
$a \cup \Lambda = a.$

4. $a, b \varepsilon \mathrm{K}. \ \supset : ab = ba. \ a \cup b = b \cup a. \ ab \supset a. \ a \supset a \cup b. \ -(a \cap b)$
$= (-a) \cup (-b). \ -(a \cup b) = (-a) \cap (-b).$

5. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K}. \ \supset : (ab)c = a(bc) = abc. \ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) = a \cup b \cup c.$
$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c). \ a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$

6. $a, b \varepsilon \mathrm{K}. \ \supset .\cdot. a \supset b. \ = : x \varepsilon a. \ \supset_x. \ x \varepsilon b.$

La correspondance entre les signes $\frown$, $\smile$, ε, ... et les mots *et*, *ou*, *est*, ... est seulement approchée; car les signes ont toujours la même signification, ce qui n'est pas des mots dans le langage commun.

§ b.

Signes Q, q, θ, $t_0 \overline{\ } t_1$, q_n, m.

Nous poserons:

1. Q = «quantité positive» ou «nombre positif».
2. q = «nombre réel fini».
3. θ = «les nombres x qui satisfont à la condition $0 \leq x \leq 1$».
4. $t_0 \overline{\ } t_1$, où t_0 et t_1 sont deux q, = «les nombres compris entre t_0 et t_1, où égaux à l'une des limites». P. ex. on a $\theta = 0 \overline{\ } 1$.
5. q_n = «nombre complexe d'ordre n».*)

On appelle nombre complexe d'ordre n le système de n nombres réels. Nous désignerons par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le complexe formé des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui s'appellent les élements du complexe. On définit l'égalite de deux complexes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, leur somme et différence, le produit du complexe x par un nombre réel a, le complexe 0, et le *module*, mod x ou mx, du complexe x, comme il suit:

6. $x = y . = : x_1 = y_1 . x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.
7. $x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n)$.
8. $ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$.
9. $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.
10. $\mathrm{m}x = + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.**)

Si $x \,\varepsilon\, \mathrm{q}$, m$x$ réprésente sa valeur absolue.

Les plus importantes propriétés des nombres complexes sont données par les formules suivantes:

11. $x \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} . \supset . x = x$.
12. $x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} . x = y : \supset . y = x$.
13. $x, y, z \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} . x = y . y = z : \supset . x = z$.
14. $x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} . \supset . x + y \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}$.

---

*) Ici les nombres complexes sont introduits seulement pour simplifier les formules, car ils permettent d'écrire une lettre seule et une équation seule au lieu de n lettres ou de n équations. Des propriétés énoncées quelques unes sont évidentes; les autres sont démontrées dans ma Note *Intégration par séries des équations différentielles linéaires*, Math. Ann. XXXII, p. 450.

**) On pourrait aussi définir par mx, la plus grande des valeurs absolues des élements de x; alors les propriétes des modules sont presqu' évidentes.

15. $x, y \varepsilon \mathrm{q_n} . \supset . x + y = y + x.$
16. $x, y, z \varepsilon \mathrm{q_n} . \supset . (x+y) + z = x + (y+z) = x + y + z.$
17. $x, y, z \varepsilon \mathrm{q_n} . x = y : \supset . x + z = y + z.$
18. $x \varepsilon \mathrm{q_n} . a \varepsilon \dot{\mathrm{q}} : \supset . ax \varepsilon \mathrm{q_n} .$
19. $x, y \varepsilon \mathrm{q_n} . a \varepsilon \mathrm{q} : \supset . a(x+y) = ax + ay.$
20. $x \varepsilon \mathrm{q_n} . a, b \varepsilon \mathrm{q} : \supset . (a+b)x = ax + bx.$
21. „ $: \supset . b(ax) = (ba)x = bax.$
22. $x \varepsilon \mathrm{q_n} . \supset : x - x = 0 . x + 0 = x . 1x = x.$
23. $x \varepsilon \mathrm{q_n} . \supset : \mathrm{m}x \varepsilon \mathrm{Q} . \cup . \mathrm{m}x = 0.$
24. $x, y \varepsilon \mathrm{q_n} . \supset . \mathrm{m}(x+y) \leq \mathrm{m}x + \mathrm{m}y,$
25. $a \varepsilon \mathrm{q} . x \varepsilon \mathrm{q_n} : \supset \mathrm{m}(ax) = (\mathrm{m}a)(\mathrm{m}x).$
26. $\mathrm{m}0 = 0.$

On définit aussi la limite a d'un complexe variable x, et l'on a:

27. $\lim x = a \cdot = \cdot \lim \mathrm{m}(x - a) = 0.$

On définit la dérivée d'un complexe x fonction d'un variable réelle t, et l'on a:

28. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{m}x \leq \mathrm{m} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$

§ c.

Fonctions; inversion.

1. Dans la formule $f(x)$, ou fx, pour désigner une fonction de x, la lettre f s'appelle *signe* (ou *caractéristique*) *de fonction.*

2. Si a et b sont des K, par b/a nous indiquerons «les signes de fonction qui à chaque a font correspondre un b», ou «les représentations (*Abbildungen*) des a dans les b».

3. Si a, b sont des K, et $f \varepsilon b/a$, nous indiquerons, avec M. Dedekind*) par $\overline{f}$ le signe de la *fonction inverse* (*umgekehrte Abbildung*) de f. Donc, si $y \varepsilon b$, $\overline{f} y$ désigne la classe des x qui satisfont à la condition $y = fx$. On a:

$$y = fx \cdot = \cdot x \varepsilon \overline{f} y.$$

Lorsqu'il y a un seul x qui satisfait à la relation $y = fx$, ce qui arrive pour les *représentations semblables* (*ähnliche Abbildungen*), on a

$$y = fx \cdot = \cdot x = \overline{f} y.$$

*) *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1888, p. 8. L'Auteur adopte l'inversion seulement pour les représentations semblables. Dans mes *Arith. principia* et *Principii di Geom.* par commodité typographique, au lieu de $\overline{f}$, j'écris $[f]$.

4. En appliquant l'inversion à l'opération indiquée par m (module), si p est une Q, $\overline{\mathrm{m}}p$ indique les complexes d'ordre quelconque dont le module est p.

$$p \varepsilon \mathrm{Q} . x \varepsilon \mathrm{q}_n : \supset : \mathrm{m}x = p \cdot = \cdot x \varepsilon \overline{\mathrm{m}}p .$$

Pour indiquer «les complexes d'ordre n et de module p» il suffit d'écrire $\mathrm{q}_n \frown \overline{\mathrm{m}}p$; mais nous écrirons seulement $\overline{\mathrm{m}}p$, car dans cette Note il s'agit toujours des complexes du même ordre.

5. Si p est une proposition contenante une lettre (variable) x, il résulte déterminée une classe s formée des individus x qui verifient la condition p; et l'on a

$$x \varepsilon s \cdot = \cdot p .$$

Considérons le signe «$x\, \varepsilon$» comme un signe de fonction; on peut résoudre cette égalité par rapport à s, et l'on a

$$s = \overline{x\, \varepsilon}\, p .$$

Donc, $\overline{x\, \varepsilon}\, p$ signifie «les x qui satisfont à la condition p» ou «les racines de l'équation p».

Par ex. la déf. 3. du § b s'énonce

$$\theta = \mathrm{q} \frown \overline{x\, \varepsilon}\, (0 \leq x \leq 1) .$$

La déf. 3 de ce § s'énonce:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} . f \varepsilon b/a . y \varepsilon b : \supset . \overline{f}\, y = \overline{x\, \varepsilon}\, (y = fx) .$$

6. Si $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K}$, et $f \varepsilon b/a$, si s est une K contenue dans a, alors, suivant M. Dedekind*), fs indique la classe des b qui sont l'f de quelque s; en signes:

$$a, b, s \,\varepsilon\, \mathrm{K} . f \varepsilon b/a . s \supset a : \supset . fs = \overline{y\, \varepsilon}\, [x \varepsilon s . y = fx : - =_x \Lambda] .$$

Nous généralisons un peu cette notation; si dans une formule qui contient dans une seule place une lettre x, nous substituons à x le nom a d'une classe, on obtient l'ensemble des valeurs de cette formule, lorsque x prend toutes les valeurs de la classe a.

Exemples:

$a \varepsilon \mathrm{q} . \supset . a + \mathrm{Q} =$ «les nombres supérieurs à a»,

„ $a - \mathrm{Q} =$ «les nombres inférieurs à a»,

„ $a \pm \mathrm{Q} = \mathrm{q} \frown \overline{x\, \varepsilon}\, [x > a . \cup . x < a]$,

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} . a < b : \supset . (a + \mathrm{Q}) \frown (b - \mathrm{Q}) = \mathrm{q} \frown \overline{x\, \varepsilon}\, (a < x < b)$.

Il faut distinguer $(a + \mathrm{Q}) \frown (b - \mathrm{Q})$ de $a^{\frown} b$, défini dans le § b, prop. 4:

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . a^{\frown} b = a + \theta (b - a)$.

Ces deux expressions représentent l'intervalle (a, b) l'une sans, l'autre avec les points extrêmes.

---

*) Ib. p. 6.

7. Si a est une classe, par la convention précédente, $\mathrm{K}a$, où $\mathrm{K} \frown a$ représente l'ensemble des classes xa, ou x est une K quelconque. Mais, en variant x, xa représente toute classe contenue dans a; donc

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset.\, \mathrm{K}a = \text{«classes contenues dans } a\text{» ou «classes de } a\text{»}.$$

Ainsi Kq signifie «classe de q»; et $\mathrm{Kq_n}$ signifie «ensemble de $\mathrm{q_n}$» ou «Punktmenge».

Par la répétition du signe K on obtient $\mathrm{KKq_n}$ (dont nous nous servons seulement dans §e P 9 (4) et (5)) qui signifie «classe de classes de $\mathrm{q_n}$» ou «nom commun de plusieurs ensembles de points» ou «propriété que des ensembles de points peuvent avoir».

8. Si le signe f fait correspondre, à chaque individu de la classe a, une classe de b, et si s est une classe contenue dans a, alors fs indique la classe des b qui sont un f de quelque s; en signes

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, (\mathrm{K}b)/a \,.\, s \,\varepsilon\, \mathrm{K}a :\supset.\, fs = \overline{y\,\varepsilon}\,[x \,\varepsilon\, s \,.\, y \,\varepsilon\, fx : - =_x \Lambda].$$

Ainsi, si $a \,\varepsilon\, \mathrm{KQ}$, $\overline{\mathrm{m}}a$ signifie «les $\mathrm{q_n}$ qui ont pour module quelque a».

$$x \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} :\supset.\, x + \overline{\mathrm{m}}\,\theta p = x + \theta\,\overline{\mathrm{m}}p = \text{«les } \mathrm{q_n} \text{ dont la différence à } x \text{ a un module non supérieur à } p\text{»}.$$

$$x \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} \,.\, p, p' \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y \,\varepsilon\, x + \theta\,\overline{\mathrm{m}}p \,.\, z \,\varepsilon\, y + \theta\,\overline{\mathrm{m}}p' :\supset.\, z \,\varepsilon\, x + \theta\,\overline{\mathrm{m}}(p + p').$$

§ c'.

Observations sur le § c.

1. Dans le § précédent nous avons introduit quelques notations, et expliqué les cas particuliers, dont on fera usage dans cette Note. Mais il n'est pas inutile de donner quelques autres explications sur cette importante théorie.

L'idée de fonction (correspondance, opération) est primitive; on peut la considérer comme appartenante à la Logique. Comme exemple pris du langage commun, posons h = «homme», p = «le père de»; on a $p \,\varepsilon\, h/h$.

Dans l'Analyse on a $\log \varepsilon\, \mathrm{q/Q}$, $\sin \varepsilon\, \mathrm{q/q}$; mais on n'a pas $\operatorname{tang} \varepsilon\, \mathrm{q/q}$, car $\operatorname{tang} \frac{\pi}{2}$ n'est pas une q.

2. Par «(b/a) continue» nous entendons les b/a qui ont la proprieté de la continuïté. Cette proprieté est définie seulement pour les fonctions réelles d'une variable réelle, et pour les complexes d'ordre m fonctions des complexes d'ordre n. Le théorème de la continuité uniforme s'enonce:

$$x_0, x_1 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, f \,\varepsilon\, (\mathrm{q}/x_0 \frown x_1) \text{ continue.}\ h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} :\supset\therefore k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \therefore x, x' \,\varepsilon\, x_0 \frown x_1 \,.\, \mathrm{m}(x - x') < k :\supset_{x,x'} .\, \mathrm{m}(fx - fx') < h :: - =_k \Lambda.$$

La proprieté fondamentale des signes de fonction est

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, b/a \,.\, x \,\varepsilon\, a :\supset .\, fx \,\varepsilon\, b.$$

Lorsqu'on dit que $f \,\varepsilon\, b/a$, on n'exclut pas que l'opération f soit aussi définie pour des êtres non appartenants à la classe a:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, b/a \,.\, c \supset a :\supset .\, f \,\varepsilon\, b/c.$$

Lorsqu'on dit que $f \,\varepsilon\, b/a$, on ne suppose pas que tout b soit l'f de quelque a:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, b/a \,.\, b \supset c :\supset .\, f \,\varepsilon\, c/a.$$

On a aussi:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, c/a \,.\, f \,\varepsilon\, c/b :\supset .\, f \,\varepsilon\, c/(a \cup b).$$

3. Lorsque f est une ähnliche Abbildung, on a:

$$x = \overline{f}\, fx, \quad \text{et} \quad y = f\overline{f}\, y.$$

Ainsi p. ex. si $x \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$, et $y \,\varepsilon\, \mathrm{q}$, on a:

$$y = \log x \,.=.\, x = \overline{\log}\, y;\ \overline{\log}\, y = e^y;\ \overline{\log}\, \log x = x;\ \log \overline{\log}\, y = y.$$

Dans toute formule algébrique ou logique finissant par une lettre x, on peut considerer l'ensemble des signes qui précédent x comme un signe de fonction. Ainsi, si x, a, b sont des q, de

$$b = a + x, \quad \text{on a} \quad x = \overline{a +}\, b, \quad \text{au lieu de} \quad x = b - a,$$

$$b = a \times x, \quad \text{on a} \quad x = \overline{a \times}\, b, \quad \text{au lieu de} \quad x = \frac{b}{a}.$$

(On ne peut pas appliquer cette notation aux puissances a^b, car les deux lettres ne se trouvent pas dans la même ligne. On peut imaginer des conventions analogues, lorsque une formule commence par une lettre x. Voir mes *Arith. principia* pag. XIII).

Ces conventions sont analogues à celle dont ont a fait usage pour établir la formule

$$x \,\varepsilon\, s \cdot = \cdot p :=: s = \overline{x \,\varepsilon}\, p.$$

On a ainsi

$$\overline{x \,\varepsilon}\, (x \,\varepsilon\, s) = s$$

(«qui est bonus» = «bonus»),

$$x \,\varepsilon\, (\overline{x \,\varepsilon}\, p) = p$$

(«x est une racine de l'equation tang $x = x$» signifie «tang $x = x$»).

4. Lorsque f n'est pas semblable, $\overline{f}y$ est une classe. On a alors $y = f\overline{f}y$, et $x \,\varepsilon\, \overline{f}fx$; il serait contraire à nos conventions d'écrire $x = \overline{f}fy$. Ainsi, si l'on pose, $h =$ «homme», $p =$ «le père de», on a $p \,\varepsilon\, h/h$ non semblable, et l'on a:

$$y = px \cdot = \cdot x \,\varepsilon\, \overline{p}y$$

«y est le père de x» = «x est un fils de y».

Analoguement

$$y = \sin x \cdot = \cdot x \,\varepsilon\, \overline{\sin}\, y,$$

au lieu de $x = \text{arc} \sin y$.

$$x \,\varepsilon\, \overline{\sin} \sin x$$

«x est un des arcs dont le sinus est $\sin x$».

5. Mais, si les conventions adoptées suffisent pour notre but, elles ne résolvent pas encore en général le problème de l'inversion. Soit en effet f le signe d'une fonction, qui à chaque individu x d'une certaine classe fait correspondre une classe fx. On aura à considerer les deux relations

$$y = fx \quad (y \text{ est la classe } fx;\ y \text{ est identique à } fx),$$
$$y \,\varepsilon\, fx \quad (y \text{ est un individu de la classe } fx).$$

En vertu de la convention adoptée, on peut invertir la première, et l'on a $x \,\varepsilon\, \overline{f} y$. Pour résoudre la seconde par rapport à x, il faut une convention nouvelle. Posons $x \,\varepsilon\, f' y$. Alors on a:

$$\overline{f} y = \overline{x\,\varepsilon}\, (y = fx) = \text{«les individus } x \text{ tels que la classe } fx \text{ est } y\text{»},$$
$$f' y = \overline{x\,\varepsilon}\, (y \,\varepsilon\, fx) = \text{«les individus } x \text{ tels que } y \text{ est un } fx\text{»}.$$

Par exemple, x étant une classe de q, designons par Dx la classe dérivée (suivant M. Cantor) de x, et dont nous parlerons au § d. Alors $y = Dx$ (y est la classe dérivée de x), s'invertit par $x \,\varepsilon\, \overline{D} y$ (x est une classe dont la dérivée est y); on ne peut pas écrire $x = \overline{D} y$, car, dans des hypothèses convenables, il y a une infinité de classes dont la dérivée est x. Et la relation $y \,\varepsilon\, Dx$ (y est un point de la dérivée de x), s'invertit par $x \,\varepsilon\, D' y$ (x est une classe dont la dérivée contient y).

J'ai adopté ce second signe d'inversion dans mes *Principii di Geometria*, pag. 9. Soient a, b, c des points; désignons par ab l'ensemble des points du segment rectiligne ab; alors $c \,\varepsilon\, ab$ signifie «c est un point de ab». On peut considérer, dans ab, le signe a, qui précéde b, comme un signe de fonction, qui à chaque point b fait correspondre une classe ab de points. En résolvant la relation $c \,\varepsilon\, ab$ par rapport à b on a $b \,\varepsilon\, a' c$; donc $a' c$ désigne celle des deux parties indéfinies de la droite ac, divisée en c, laquelle ne contient pas le point a. La formule $\overline{a} c$ provient de l'inversion de $c = ab$, et en supposant a et b des points, c est un segment dont une extremité est en a; et alors $\overline{a} c$ représente l'autre extremité du segment c.

Des deux signes d'inversion $\overline{f}$ et f', on ne peut pas exprimer le second par le premier, mais on peut exprimer le premier au moyen du second et d'une nouvelle convention nécessaire dans d'autres récherches. Décomposons en effet le signe $=$ en ses deux parties est et *égal à*; le mot *est* est dejà répresenté par ε; répresentons aussi l'expression *égal à* par un signe, et soit ι (initial de ἴσος) ce signe; ainsi au lieu de $a = b$ on peut écrire $a \varepsilon \iota b$. Alors, si l'on inverte la $y \varepsilon f x$ par $x \varepsilon f' y$, ou invertira $y = fx$, c'est-à-dire $y \varepsilon \iota f x$ par $x \varepsilon (\iota f)' y$. Par ex., si y est un q, $\mathrm{D}' y$ signifie «les classes dont la dérivée contient le point y»; et $(\iota \mathrm{D})' y$ signifie «les classes dont la dérivée se réduit à y.»

6. Le signe ι permet aussi de résoudre une autre question. On peut considérer une classe comme étant un individu, et ainsi former des classes de classes (KK). P. ex. si a est un point, b une droite, et c un faisceau de droites, dans les propositions $a \varepsilon b$, «a est un individu (point) de b», et $b \varepsilon c$, «b est un individu (rayon) de c», la lettre b designe d'abord une classe, puis un individu de la classe c, la quelle est une KK de points.

Les formes du syllogisme

$$a \supset b \,.\, b \supset c : \supset . a \supset c,$$

$$a \varepsilon b \,.\, b \supset c : \supset . a \varepsilon c$$

sont exactes; mais des premisses $a \varepsilon b \,.\, b \varepsilon c$ on ne peut pas tirer de consequence. On voit aussi plus clairement qu'on doit bien distinguer les deux signes ε et $\supset$.

On peut aussi considérer les KK comme des individus; leurs classes sont des KKK; et ainsi à l'infini; mais l'on s'arrête bientôt dans le langage commun et dans les applications.

Pour indiquer la classe constituée des individus a et b on écrit quelquefois $a \cup b$ (ou $a + b$, en suivant la notation plus usitée). Mais il est plus correct d'écrire $\iota a \cup \iota b$; alors, par l'identité logique

$$x \varepsilon a \cup b : = : x \varepsilon a \,.\cup\, x \varepsilon b :$$

on a exactement:

$$x \varepsilon \iota a \cup \iota b : = : x \varepsilon \iota a \,.\cup.\, x \varepsilon \iota b : = : x = a \,.\cup.\, x = b.$$

Cette distinction est nécessaire lorsque a et b sont des classes; alors $a \cup b$, en vertu de la notation 4 du §a désigne la classe dont les individus sont les individus de a ou de b; $\iota a \cup \iota b$ désigne la classe dont les individus sont a et b. Si a et b sont des droites (ponctuelles), $a \cup b$ désigne l'ensemble des points qui se trouvent sur l'une ou sur l'autre des droites a et b; $\iota a \cup \iota b$ désigne la couple des droites a et b; les individus de $a \cup b$ sont des points; ceux de $\iota a \cup \iota b$ sont des droites.

La formule 23 du §b pourra aussi s'écrire

$$x \varepsilon \mathrm{q_n} \,.\, \supset .\, \mathrm{m} x \,\varepsilon\, (\mathrm{Q} \cup \iota 0)$$

ou

$$\mathrm{m} \,\varepsilon\, (\mathrm{Q} \cup \iota 0) / \mathrm{q_n}.$$

7. Les deux définitions, données aux N. 6 et 8, de fs, où s est une classe, la première appliquable si f fait correspondre un individu à chaque individu, la deuxième si f fait correspondre une classe à chaque individu, sont bien distinctes. Ainsi, si $x \varepsilon \mathrm{Q}$, $\overline{\mathrm{m}}x$ désigne l'ensemble des $\mathrm{q_n}$, dont le module est x, ou, si l'on adopte le langage géometrique, la surface sphérique de centre l'origine et de rayon x. Alors, par la notation du N. 8, on a

$$\overline{\mathrm{m}}\theta = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon \theta \,.\, y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda),$$

ou, en opérant sur les deux membres par le signe $y\varepsilon$, on a:

$$y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta \cdot = \therefore x \varepsilon \theta \,.\, y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda,$$

«affirmer que y est un $\overline{\mathrm{m}}\theta$ signifie qu'il y a un nombre x, appartenant à l'intervalle θ, tel que y ait pour module ce x». Donc $\overline{\mathrm{m}}\theta$ désigne l'ensemble des $\mathrm{q_n}$ dont le module n'est pas supérieur à l'unité, ou la sphère (volume) de rayon 1; elle est une $\mathrm{Kq_n}$.

Mais si l'on attribue à $\overline{\mathrm{m}}\theta$ la signification donnée au N. 6 on a:

$$\overline{\mathrm{m}}\theta = \overline{y\varepsilon}(x\varepsilon\theta \,.\, y = \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda)$$

ou

$$y \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta \cdot = \therefore x \varepsilon \theta \,.\, y = \overline{\mathrm{m}}x : - =_x \Lambda$$

«affirmer que y est un $\overline{\mathrm{m}}\theta$ signifie qu'il existe un x, dans l'intervalle θ, tel que y soit identique à la surface sphérique de rayon x». Donc, par le convention du N. 6, $\overline{\mathrm{m}}\theta$ désigne l'ensemble des surfaces sphériques dont le rayon n'est pas supérieur à l'unité. Les individus de $\overline{\mathrm{m}}\theta$ sont maintenant des surfaces sphériques, et $\overline{\mathrm{m}}\theta$ est une $\mathrm{KKq_n}$.

8. Les notations du N. 6 et 8 ne donnent pas, dans cette Note, lieu à des difficultés, qui se pourraient présenter dans d'autres cas. Car, lorsque on donne à fs une signification, il faut d'abord s'assurer qu'elle n'a pas dejà reçu une signification différente. Ensuite, lorsque f fait correspondre une classe à des individus, il est nécessaire de distinguer si l'on entend par fs ce qu'on a défini au N. 8, ce qui se présente ordinairement, ou si l'on entend la classe des classes qui résulte du N. 6, et qu'on doit étudier dans quelques cas.

Pour éviter ces difficultés, désignons p. ex. par $\underset{\smile}{f}s$ la classe définie au N. 8; c'est-à-dire posons

$$\underset{\smile}{f}s = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon s \,.\, y \varepsilon fx : - =_x \Lambda).$$

Alors la classe considérée au N. 6 résulte indiquée par $\underset{\smile}{\iota f}s$; car, si dans la définition qui précede on écrit ιf au lieu de f, et $y = fx$ au lieu de $y \varepsilon \iota x$, on a:

$$\underset{\smile}{\iota f}s = \overline{y\varepsilon}(x \varepsilon s \,.\, y = fx : - =_x \Lambda).$$

On pourra supprimer les signes $\smile$ et ι, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité à craindre, et l'on retrouve les définitions des N. 6 et 8.

Par ex., si, étant x un q_n (un point dans la varieté à n dimensions), on désigne par $\mathrm{p}x$ la droite qui projette x d'un point fixe alors, si y est une droite (ponctuelle) quelconque, on a:

$\underset{\smile}{\mathrm{p}}y =$ «le plan qui projette la y». Il est une Kq_n.

$\underset{\smile}{\iota\mathrm{p}}y =$ «le faisceau des rayons qui projettent les points de y». Il est une KKq_n, dont les individus sont des droites.

Si z est un faisceau de droites,

$\underset{\smile\smile}{\mathrm{p}}z =$ «la varieté à 3 dimensions qui projette le plan de z». Elle est une Kq_n.

$\underset{\smile\smile}{\iota\mathrm{p}}z =$ «l'ensemble (étoile) des droites qui projettent les points du plan de z». Il est une KKq_n, dont les individus sont des droites.

$\iota\underset{\smile\smile}{\mathrm{p}}z =$ «le faisceau des plans qui projettent les droites de z». Il est une KKq_n, dont les individus sont des plans.

$\underset{\smile\smile}{\iota\iota\mathrm{p}}z =$ «l'ensemble des faisceaux de droites qui projettent les droites de z». Il est une KKKq_n, dont les individus sont des faisceaux de droites.

§ d.

Signes l', l_1, max, min, C.

P, Hp, Ts; substitution.

Notations.

1. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\supset.\, \mathrm{l}'a =$ «la limite supérieure des a».
2. „ $.\supset.\, \mathrm{l}_1 a =$ « „ inférieure „ ».
3. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, \max(a,b) =$ «le plus grand des deux nombres a et b».
4. „ $.\supset.\, \min(a,b) =$ « „ petit „ „ „ „ ».

Ainsi p. ex. $\mathrm{l}'\theta = 1$, $\mathrm{l}_1\theta = 0$, $\mathrm{l}_1\mathrm{Q} = 0$. Les théorèmes connus qui permettent de reconnaitre l'existence des limites l' et l_1 s'énoncent:

5. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, a -\!\!= \Lambda \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a \cap (p + \mathrm{Q}) = \Lambda :\supset.\, \mathrm{l}'a \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.

«Si a est une classe de nombres réels, non nulle, et si il y a un nombre p, tel que des nombres de la classe a, et supérieurs à p n'existent point, alors la limite supérieure des a est un nombre réel et fini.»

5'. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, a -\!\!= \Lambda \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a \cap (p - \mathrm{Q}) = \Lambda :\supset.\, \mathrm{l}_1 a \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.

6. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, a \supset b :\supset: \mathrm{l}'a \leq \mathrm{l}'b \,.\, \mathrm{l}_1 a \geq \mathrm{l}_1 b$.

7. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq}_n \,.\, x \,\varepsilon\, a :\supset.\, \mathrm{l}_1 \mathrm{m}(a - x) = \theta$.

«Si a est une classe de complexes d'ordre n et si x est un de ces nombres, la limite inférieure des modules des différences entre x et les différents nombres a est 0». Car $0 \,\varepsilon\, \mathrm{m}(a - x)$, c'est-à-dire une des modules de ces différences est précisément 0.

$a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq_n} \,.\supset:\, \mathrm{l'm}\, a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cdot = \cdot$ «la classe a est *finie*».

Définition.

8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kq_n} \,.\supset.\, \mathrm{C}a = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,[\mathrm{l_1 m}(a - x) = 0]$.

«Si a est une classe de $\mathrm{q_n}$, par $\mathrm{C}a$ nous entendons l'ensemble des $\mathrm{q_n}$, qui sont des x tels que la limite inférieure des modules des différences entre cet x et les différents a soit nulle».

Si, par «distance du point x à l'ensemble a» on entend la limite inférieure des modules des différences entre x et les a, alors:

$\mathrm{C}a =$ «les points dont la distance à a est nulle».

On peut encore définir $\mathrm{C}a$, sans les mots «limite inférieure» comme suit:

$\mathrm{C}a = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,[h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, a \cap (x + \theta\,\overline{\mathrm{m}}\,h) -= \Lambda]$.

$\mathrm{C}a = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,[h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset_h \therefore y \,\varepsilon\, a \,.\, \mathrm{m}(y - x) < h : -=_y \Lambda]$.

On peut lire $\mathrm{C}a$ par «la classe a completée».

Observations sur la définition 8.

Étant donnée une $\mathrm{Kq_n}$, par la considération des infiniment proches, on peut en déduire une infinité d'autres classes. M. Cantor (Math. Ann. XV, p. 1, et XVII, p. 355) a étudié les propriétés du système dérivé. Soit $\mathrm{D}a$ la classe dérivée de a; on peut la définir:

$\mathrm{D}a = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,[h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} .\supset_h \therefore y \,\varepsilon\, a \,.\, y -= x \,.\, \mathrm{m}(y-x) < h : -=_y \Lambda]$.

$\mathrm{D}a = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,\{\mathrm{l_1 m}[(a - \iota x) - x] = 0\}$.

(Ici le signe ι a la signification expliquée au § c' N. 5 et 6).

Alors on a

$$\mathrm{C}a = a \cup \mathrm{D}a$$

«la classe $\mathrm{C}a$ est formée des points de a et des points de la classe dérivée de a». Mais la classe $\mathrm{C}a$ a une définition et des proprietés plus simples que celles de $\mathrm{D}a$, comme on voit des théorèmes qui suivent; et elle suffit dans notres applications. La classe $\mathrm{C}a$ est, suivant Cantor, le plus petit ensemble fermé (*clausus*, *abgeschlossene Punktmenge*) contenant a. La proposition $\mathrm{C}a = a$ signifie «l'ensemble a est fermé».

Si a est une classe de $\mathrm{q_n}$, on peut décomposer, comme j'ai fait dans mes *Applicazioni geometriche* p. 153 et dans les *Arithmetices principia* § 10, l'ensemble des $\mathrm{q_n}$ en trois classes $\mathrm{I}a$ (intérieur à a), $\mathrm{E}a$ (exterieur à a) et $\mathrm{L}a$ (limite de a), définies par les équations:

$\mathrm{I}a = \mathrm{q_n} \frown \overline{x\varepsilon}\,(p\,\varepsilon\,\mathrm{Q} \,.\, x + \theta \overline{\mathrm{m}} p \supset a : - =_p \Lambda)$ = «les complexes x tels qu'on puisse déterminer un nombre positif p de façon que tous les $\mathrm{q_n}$ dont la différence à x a un module non supérieur à p soient contenus dans la classe a».

$\mathrm{E}a = \mathrm{I} - a$ = «les points intérieurs à la classe des non a».

$\mathrm{L}a = (-\mathrm{I}a)\,(-\mathrm{E}a)$ = «les points qui appartiennent ni à l'une ni à l'autre des classes $\mathrm{I}a$ et $\mathrm{E}a$».

Alors on a:

$\mathrm{C}a = \mathrm{I}a \cup \mathrm{L}a = -\mathrm{E}a$.

Notations.

9. Nous renfermerons les démonstrations des théoremes dans des { }. Dans ces démonstrations nous adopterons aussi les abréviations suivantes.

10. P1, P2, ... désignent les propositions 1, 2, ... du même §, où elles sont rappellées. §2 P4 désigne la proposition 4 du § 2.

11. Hp et Ts signifient *l'Hypothèse* et la *Thèse* du théorème qu'on démontre. Pour indiquer l'hypothèse d'une autre proposition on fera suivre Hp du signe de la proposition.

12. Pour indiquer ce que dévient une proposition p, lorsque au lieu des lettres x, y (variables) qu'elle contient, on substitue a et b, on écrira $\begin{pmatrix} a, & b \\ x, & y \end{pmatrix} p$. Nous adoptons ainsi le signe connu de substitution, bien qu'on puisse exprimer ce résultat au moyen du signe d'inversion.

Théorèmes.

13. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\supset.\, a \supset \mathrm{C}a$. $\{\mathrm{P7} \supset \mathrm{P13}\}$.

14. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\, a \supset b :\supset.\, \mathrm{C}a \supset \mathrm{C}b$.

$\{\mathrm{Hp} \,.\, x\,\varepsilon\,\mathrm{C}a :\supset: \mathrm{l_1 m}(a - x) \geq \mathrm{l_1 m}(b - x) \,.\, \mathrm{l_1 m}(a - x) = 0 :\supset .\, x\,\varepsilon\,\mathrm{C}b\}$.

15. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\supset.\, \mathrm{C}(ab) \supset (\mathrm{C}a)\,(\mathrm{C}b)$.

$\{\mathrm{Hp} .\supset: ab \supset a \,.\, ab \supset b \,.\, \mathrm{P14} :\supset: \mathrm{C}(ab) \supset \mathrm{C}a \,.\, \mathrm{C}(ab) \supset \mathrm{C}b :\supset. \mathrm{Ts}\}$.

16. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\, \mathrm{C}a = a \,.\, \mathrm{C}b = b :\supset.\, \mathrm{C}(ab) = ab$.

$\{\mathrm{Hp} . \mathrm{P13} . \mathrm{P15} :\supset:: ab \supset \mathrm{C}(ab) . \mathrm{C}(ab) \supset (\mathrm{C}a)\,(\mathrm{C}b) = ab :\supset. \mathrm{Ts}\}$.

17. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\, x\,\varepsilon\,\mathrm{q_n} :\supset.\, \mathrm{l_1 m}[(a \cup b) - x] = \min[\mathrm{l_1 m}(a - x),\ \mathrm{l_1 m}(b - x)]$.

18. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\supset.\, \mathrm{C}(a \cup b) = \mathrm{C}a \cup \mathrm{C}b$. $\{\mathrm{P17} \supset \mathrm{P18}\}$.

19. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\, x\,\varepsilon\,\mathrm{q_n} :\supset.\, \mathrm{l_1 m}(a - x) = \mathrm{l_1 m}(\mathrm{C}a - x)$.

20. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\supset.\, \mathrm{CC}a = \mathrm{C}a$. $\{\mathrm{P19} \supset \mathrm{P20}\}$.

21. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l'}a, \mathrm{l_1}a\,\varepsilon\,\mathrm{q} :\supset.\, \mathrm{l'}a, \mathrm{l_1}a\,\varepsilon\,\mathrm{C}a$.

22. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Kq_n} \,.\, \mathrm{C}a = a \,.\, \mathrm{l'm}a\,\varepsilon\,\mathrm{q} \,.\, f\,\varepsilon(\mathrm{q}/a)$ continue $:\supset.\, \mathrm{C}fa = fa$.

§ e.

Limites de classes variables.

Définition.

1. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n})/\mathrm{Q} \,.\, \supset . f0 = \lim_{h=0} fh = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\varepsilon}\left[\lim_{h=0} \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0\right]$.

Conséquences immédiates.

2. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h .\, x \,\varepsilon\, fh \,.\!\cdot.\, \supset .\, x \,\varepsilon\, f0.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0 \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$
3. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n})/\mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{q_n} \cap \overline{x\varepsilon}\, [h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h .\, x \,\varepsilon\, fh] \supset f0.$ $\{\mathrm{P2} = \mathrm{P3}\}.$
4. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{K\,q_n} \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : h \,\varepsilon\, \theta k \,.\, \supset_h . fh \supset a \,.\!\cdot.\, \supset . f0 \supset \mathrm{C}a.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, x \,\varepsilon\, f0 \,.\, h \,\varepsilon\, \theta k : \supset : \lim_{h=0} \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0 \,.\, \mathrm{l_1\,m}(fh - x)$
$\geq \mathrm{l_1\,m}(a - x) : \supset : \mathrm{l_1\,m}(a - x) = 0 : \supset : x \,\varepsilon\, \mathrm{C}a\}.$
5. $f, g \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h . fh \supset gh \,.\!\cdot.\, \supset . f0 \supset g0.$
$\{\mathrm{Hp} . x \,\varepsilon\, f0 \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset : \mathrm{l_1\,m}(fh - x) \geq \mathrm{l_1\,m}(gh - x) \,.\, \lim \mathrm{l_1\,m}(fh - x)$
$= 0 : \supset : \lim \mathrm{l_1\,m}(gh - x) = 0 : \supset : x \,\varepsilon\, g0\}.$
6. $f, g \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \lim\, (fh \cap gh) \supset f0 \cap g0.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset : fh \cap gh \supset fh \,.\, fh \cap gh \supset gh : \mathrm{P5} : \supset .\, \mathrm{Ts}\}.$

6'. $f, f_1, f_2 \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n})/\mathrm{Q} : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h . f_1 h \supset fh \supset f_2 h : f_1 0 = f_2 0 \,.\!\cdot.\, \supset . f0$
$= f_1 0 = f_2 0.$ $\{\mathrm{P5} \supset \mathrm{P6'}\}.$

7. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \lim fh = \lim \mathrm{C}(fh).$ $\{\S\mathrm{d}\ \mathrm{P19} \supset \mathrm{P7}\}.$

Théorème.

8. $f \,\varepsilon\, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{C}(f0) = f0.$

$\{$(1) $\mathrm{Hp} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{C}f0 \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset . \left(x + \theta\overline{\mathrm{m}}\, \frac{1}{2} k\right) \cap f0 - = \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{C}f0 \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x' \,\varepsilon\, f0 \,.\, x' \,\varepsilon\, x + \theta\overline{\mathrm{m}}\, \frac{1}{2} k : \supset \,.\!\cdot\!\cdot.\, h' \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : h$
$\varepsilon\, \theta h' \,.\, \supset_h .\, fh \cap \left(x' + \theta\overline{\mathrm{m}}\, \frac{1}{2} k\right) \,.\!\cdot.\, - =_{h'} \Lambda :\!: x' + \theta\overline{\mathrm{m}}\, \frac{1}{2} k \supset x$
$+ \theta\overline{\mathrm{m}} k \,.\!\cdot\!\cdot.\, \supset :\!: h' \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : h \,\varepsilon\, \theta h' \,.\, \supset_h .\, fh \cap (x + \theta\overline{\mathrm{m}} k) - = \Lambda$
$.\!\cdot.\, - =_{h'} \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{C}f0 \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, (1) \,.\, (2) : \supset :\!: h' \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : h \,\varepsilon\, \theta h' \,.\, \supset_h .\, fh$
$\cap (x + \theta\overline{\mathrm{m}} k) - = \Lambda \,.\!\cdot.\, - =_{h'} \Lambda.$

(4) $\mathrm{Hp} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{C}f0 \,.\, (3) : \supset .\, x \,\varepsilon\, f0.$

(5) $\mathrm{Hp} \,.\, (4) : \supset .\, \mathrm{C}f0 \supset f0.$

(6) $\mathrm{Hp} \,.\, (5) .\ \S\mathrm{d}\ \mathrm{P13} \supset .\, \mathrm{Ts}.\}$

Théorème.

9. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} . fh \supset fk \therefore p \varepsilon \mathrm{Q} : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h$
$. fh \cap \theta\overline{\mathrm{m}}p -\!= \Lambda :: \supset . f0 -\!= \Lambda .$

Démonstration.

(1) $\mathrm{Hp} . c \varepsilon \mathrm{Kq_n} . h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda . k \varepsilon \theta h : \supset . c \cap fk = \Lambda .$

(2) $\mathrm{Hp} . c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . h, h' \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda . c' \cap fh' = \Lambda . h'' \varepsilon \mathrm{Q} \cap \theta h$
$\cap \theta h' : \supset . (c \cup c') \cap fh'' = \Lambda .$ $\{(1) \supset (2)\}$.

(3) $\mathrm{Hp} . c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} : \supset \therefore . h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda : -\!=_h \Lambda \therefore h' \varepsilon \mathrm{Q} . c'$
$\cap fh' = \Lambda : -\!=_{h'} \Lambda :: = \therefore h'' \varepsilon \mathrm{Q} . (c \cup c') \cap fh'' = \Lambda : -\!=_{h''} \Lambda .$
$\{(2) \supset (3)\}$.

(4) $\mathrm{Hp} . u = \mathrm{Kq_n} \cap \overline{c\varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} . c \cap fh = \Lambda : =_h \Lambda] . (3) : \supset \therefore . u$
$\varepsilon \mathrm{KKq_n} :: c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . \supset_{c,c'} \therefore c \cup c' \varepsilon u . = : c \varepsilon u . \cup . c'$
$\varepsilon u :: \theta\overline{\mathrm{m}}p \varepsilon u .$

(5) $u \varepsilon \mathrm{KKq_n} :: c, c' \varepsilon \mathrm{Kq_n} . \supset_{c,c'} \therefore c \cup c' \varepsilon u . = : c \varepsilon u . \cup . c' \varepsilon u$
$:: s \varepsilon u . \mathrm{l'm}s \varepsilon \mathrm{q} \therefore . \supset :: x \varepsilon \mathrm{C}s : k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k . x + \theta\overline{\mathrm{m}}k \varepsilon u$
$\therefore -\!=_x \Lambda .$

{Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. XXIII, p. 454}.

(6) $\mathrm{Hp} . u = \mathrm{Kq_n} \cap \overline{c\varepsilon} [h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . c \cap fh -\!= \Lambda] . (4) . (5) : \supset :: x$
$\varepsilon \theta\overline{\mathrm{m}}p : k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k . x + \theta\overline{\mathrm{m}}k \varepsilon u \therefore -\!=_x \Lambda .$

(7) $\mathrm{Hp} . (6) : \supset \therefore . x \varepsilon \theta\overline{\mathrm{m}}p \therefore k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . (x + \theta\overline{\mathrm{m}}k) \cap fh$
$-\!= \Lambda :: -\!=_x \Lambda .$

(8) $\mathrm{Hp} . (7) : \supset :: x \varepsilon \theta\overline{\mathrm{m}}p : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \mathrm{l_1 m}(fh - x) = 0 \therefore -\!=_x \Lambda .$

(9) $\mathrm{Hp} . (8) : \supset : x \varepsilon f0 . -\!=_x \Lambda .$

$\mathrm{Hp} . (9) : \supset . \mathrm{Ts}.$

Théorèmes.

10. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} fh \supset fk \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . fh$
$-\!= \Lambda \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm}\, fh \varepsilon \mathrm{q} : -\!=_h \Lambda :: \supset . f0 -\!= \Lambda .$
$\{\mathrm{P9} \supset \mathrm{P10}\}$.

11. $f \varepsilon (\mathrm{Kq_n})/\mathrm{Q} \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} . \mathrm{C}fh \supset fk :: \supset . f0 = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\varepsilon}$
$[h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . x \varepsilon fh].$

{(1) $\mathrm{Hp} . h \varepsilon \mathrm{Q} . h' \varepsilon \mathrm{Q} . h' < h : \supset \therefore k \varepsilon \theta h' . \supset_k . fk \supset fh' : \mathrm{P4} \therefore \supset \therefore$
$f0 \supset \mathrm{C}fh' . \mathrm{C}fh' \supset fh \therefore \supset \therefore f0 \supset fh .$

(2) $\mathrm{Hp}\,.\,(1) : \supset . f0 \supset \mathrm{q_n} \frown \overline{x\varepsilon}[h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h . x \varepsilon fh]$.

$\mathrm{Hp}\,.\,(2)\,.\,\mathrm{P3} : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

12. $a \varepsilon \mathrm{Kq} \,.\, a - = \Lambda \,.\, f \varepsilon (\mathrm{Kq_n}) / a \therefore t \varepsilon a \,.\, \supset_t : ft - = \Lambda \,.\, \mathrm{C}ft = ft \,.\, \mathrm{l'm}ft \varepsilon \mathrm{q} \therefore t, t' \varepsilon a \,.\, t' > t : \supset_{t,t'} . ft' \supset ft :: \supset . \overline{x\varepsilon}(t \varepsilon a \,.\, \supset_t . x \varepsilon ft) - = \Lambda$. $\{\mathrm{P}10 \frown \mathrm{P}11 \supset \mathrm{P}12\}$.

§ e'.

Observations sur le § e.

Dans le §e on étudie les classes variables fh, qui dépendent d'une variable positive h et l'on définit leur limite pour $h = 0$.

P 1. «Si f fait correspondre une classe de $\mathrm{q_n}$ à chaque nombre positif h, par $f0$, ou par limite de fh lorsque h *tend* vers 0, on entend l'ensemble des complexes x qui ont la propriété que la limite inférieure des modules des différences entre les individus de fh et x, lorsque h tend vers 0, a pour limite 0».

Ces limites jouent un rôle important dans cette Note; mais elles se présentent aussi dans une foule d'autres récherches. Ainsi dans les applications du calcul infinitésimal à la géometrie on parle toujours de la limite d'une figure variable, p. ex. de la ligne commune à deux surfaces d'une même série (caractéristique), sans la définir. La définition qu'on propose ici est évidemment la plus simple. Je l'ai dejà donnée, avec quelques théorèmes, dans mes *Applicazioni geometriche* p. 302.

On voit tout de suite que:

P 2 et P 3. «L'ensemble des points communs à toutes les classes fh appartient à $f0$».

P 4. «Si la classe variable fh, pour une valeur de h et pour toutes les plus petites, est toujours contenue dans une classe determinée a, alors la limite de fh est contenue dans $\mathrm{C}a$».

P 5. «Si de deux classes variables fh et gh, la première est toujours contenue dans la seconde, la limite de la première est aussi contenue dans la limite de la seconde».

P 6. «La limite de la classe commune à deux classes variables *est contenue* dans la classe commune à leurs limites».

P 6'. «Si f, f_1, f_2 font correspondre, à chaque nombre positif, des classes de $\mathrm{q_n}$, et si, quelque soit le nombre positif h, la classe $f_1 h$ est toujours contenue dans fh, et celle-ci dans $f_2 h$; et si les limites de $f_1 h$ et $f_2 h$ coincident, alors la limite de fh est la valeur commune de ces deux limites».

P 8. «La plus petite classe fermée, qui contient $f0$ est $f0$», ou «$f0$ est une classe fermée».

Comme exercice nous expliquerons ici toutes les formules de la P 9 et de sa démonstration. Les mots entre [ ] ne sont pas contenus dans les formules.

Théorème.

P 9. Soit f le signe d'une fonction qui à chaque quantité positive fait correspondre une classe de q_n. Supposons que, lorsqu'on attribue à la variable deux valeurs quelconques h et k, dont la plus petite est h, la classe fh soit toujours contenue dans fk. Supposons enfin qu'il y ait un nombre positif p, tel que, quelque soit le nombre positif h, il existent toujours des nombres de la classe fh dont le module n'est pas supérieur à p. Alors la classe $f0$ n'est pas nulle [c'est-à-dire, il y a des q_n qui appartiennent à la classe $f0$; la classe fh, lorsque h tend vers 0, tend effectivement vers une limite].

Démonstration.

(1) Dans les hypothèses du théorème, si c est une Kq_n, si h est une quantité positive, [si nul c est un fh, c'est-a-dire] si les classes c et fh n'ont rien de commun, et si k est un nombre non supérieur à h, alors nul c est fk. [Cette proposition est évidente; mais si l'on désire la démontrer à l'aide des axiomes logiques, on aura:

Hp (1) $. \mathrel{\supset} . fk \mathrel{\supset} fh$. «Dans les Hp. de la (1), la fk est contenue dans fh».

$fk \mathrel{\supset} fh . \mathrel{\supset} . c \cap fk \mathrel{\supset} c \cap fh$. «Si fk est contenue en fh, la classe commune à c et fk, est aussi contenue dans $c \cap fh$», par l'axiome désigné par P16 dans *Arithmetices principia* pag. IX.

Hp (1) $. \mathrel{\supset} . c \cap fh = \Lambda . \mathrel{\supset} . c \cap fk = \Lambda$.» Mais on a supposé que $c \cap fh$ soit nulle; donc, par les P7 et P38 des *Arith. pr.*, on déduit la thèse»].

(2) Dans les même Hp, étant c et c' deux Kq_n, et h et h' deux nombres positifs, si nul c est fh, et nul c' est fh'; et si l'on désigne par h'' un nombre positif non supérieur ni à h ni à h', alors la classe formée des deux classes c et c' et la classe fh'' n'ont aucun point commun.

Cela résulte de la proposition précedente. [On peut la prouver comme il suit:

Hp(2) . (1) $: \mathrel{\supset} : c \cap fh'' = \Lambda . c' \cap fh'' = \Lambda$. (Arith. pr. P41 . P30) $: \mathrel{\supset} . (c \cup c') fh'' = \Lambda$. «Des Hp de la (2), et de la proposition (1), on deduit que . . ., et par deux principes de logique on déduit la Ts».]

(3) Et si c et c' sont deux Kq_n, alors affirmer qu'il existe une quantité positive h telle que nul c soit fh, et une autre h' telle que nul c' soit fh', est équivalent à affirmer l'existence d'une quantité po-

sitive h'' telle que nul individu ni de la c ni de la c' appartienne à la classe fh''.

La (3) est conséquence de la (2).

(4) Toujours dans la *même* Hp., appelons u les classes de q_n qui sont des c telles qu'il n'existe aucun nombre positif h tel que nul c soit fh [c'est-à-dire appelons u la propriété des ensembles de points c tels que, quel que soit le nombre positif h, quel que c soit fh]; alors, par la prop. (3) on a:

u est une classe de classes de complexes, ou une propriété dont les ensembles de points sont susceptibles ou non;

si c et c' sont des ensembles de points quelconques, toutes les fois que la plus petite classe contenant c et c' a la propriété u, une au moins des c et c' a la propriété u, et réciproquement, si l'une d'entre elles a cette propriété, leur ensemble $c \cup c'$ a aussi cette propriété. [Cette proposition est la (3), dans laquelle on a pris les négations des deux membres de l'égalité qui constitue la thèse];

l'ensemble des q_n dont le module n'est pas supérieur à ρ a la propriété u.

(5) Mais, par un théorème de Cantor, si u est une propriété des ensembles de points;

et si c et c' sont deux ensembles quelconques, affirmer que $c \cup c'$ a la propriété u équivaut à affirmer que l'une des classes c et c' a cette propriété;

et s'il y a une classe s qui a la qualité u, et si [elle est finie, c'est-à-dire si] la limite supérieure des modules de s est une quantité finie;

alors il existe un x, qui est un point de la classe Cs [c'est-à-dire ou un point de s ou un point de sa dérivée], et tel que, quel que soit le nombre positif k [arbitrairement petit], la sphère (solide) dont le centre est x et le rayon est k a la propriété u [autrement dit, il existe un point de Cs tel que tout ensemble de points qui le contient dans son intérieur à la propriété u].

[L'utilité des notations de Logique est ici évidente. On peut avec elles, écrire en deux lignes l'énoncé d'un théorème qui dans l'original occupe une page. La forme des théorèmes est maintenant d'une précision rémarquable; on voit clairement toutes les conditions restrictives qu'on doit supposer; et il est peu probable dans les développements d'en oublier quelqu' une, plus ou moins cachée dans un énoncé ordinaire. On transforme les théorèmes comme on transforme les formules d'Algèbre, et cela avec une facilité et une sûreté qu'on ne peut pas atteindre avec le langage commun. La prop. (5) dans la publication mentionnée de M. Cantor est appellée Théorème I. Les lettres

$$\curlyvee,\ P_1,\ P_2,\ P,\ \mathrm{G_n},\ g$$

de M. Cantor correspondent ici à

$$u,\ c,\ c',\ s,\ \mathrm{q_n},\ x.$$

Il y a quelque peu de différence entre le théorème de M. Cantor et la proposition (5) dont nous ferons usage].

(6) Dans les Hp. du théorème à démontrer, si u [a la même signification que dans la (4), c'est-à-dire, si u] désigne les classes qui ont quelque point commun avec toutes les classes fh, par les prop. (4) et (5), on déduit l'existence d'un point x, dont le module n'est pas supérieur à p, et tel que, quelque soit le nombre positif k, l'ensemble des $\mathrm{q_n}$ dont la différence à x a un module non supérieur à k, a toujours la propriété u.

(7) Cela signifie qu'il existe un point x, de module θp, tel que, quelque soit le nombre positif k, on a que, quelque soit le nombre positif h, il existe des fh dont la différence à x a un module non supérieur à k. [La (7) s'obtient de la (6) en substituant dans le second membre à la lettre u sa définition].

(8) Donc il existe un point x, de module θp, tel que, quelque soit h, la limite inférieure des modules des différences à x des points de fh est 0, [il existe un point x commun à toutes les $\mathrm{C}(fh)$, quelque soit le nombre positif h].

[Remarquons la transformation par laquelle de (7) on passe à sa équivalente (8). En général, si h, k sont deux variables, et si p, q, r sont trois propositions, dont la première p contient la seule lettre k, la deuxième q la seule h, et la troisième r toutes les deux h et k; alors la proposition:

$p \supset_k . q \supset_h r$ «quelque soit k, pourvu qu'il satisfasse à la condition p, on déduit que quelque soit la valeur de h satisfaisante à la q, on aura la verité de r»

peut aussi s'écrire

$pq \supset_{h,k} r$ «toutes les fois que h et k satisfont aux conditions p et q, sera aussi satisfaite la r»

et, par conséquence, on peut encore lui donner la forme

$q \supset_h . p \supset_k r$ «de la condition q on déduit que: de la condition p on déduit la r».

Or une proposition partielle de (7) est:

$$k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset_k : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset_h . (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \frown fh -= \Lambda.$$

Intervertissons les h et k, en suivant la régle énoncée. On obtient

$$h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset_h : k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset_k . (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \frown fh -= \Lambda.$$

Or par la définition de la limite inférieure, on a:

$$k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset_k . (x + \theta \overline{\mathrm{m}} k) \frown fh -= \Lambda : = . \mathrm{l_1 m}(fh - x) = 0.$$

Et au moyen de ces deux transformations on passe de la (7) à la (8)].

(9) Donc il existe un x appartenant à la classe $f0$.

Ainsi est démontré le théorème.

Deuxième partie.

Réduction du théorème.

1. Pour n'avoir plus à revenir sur les conditions de continuité des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $t, x_1, \ldots, x_n$, on les supposera continues pour toutes les valeurs des variables. Si elles sont seulement continues pour les valeurs appartenant à la variété V définie par les conditions

$$b-k<t<b+k,\ a_1-h_1<x_1<a_1+h_1, \ldots, a_n-h_n<x_n<a_n+h_n,$$

il suffit de poser

$$t' = \operatorname{tang} \frac{2}{\pi} \frac{t-b}{k}, \quad x_1' = \operatorname{tang} \frac{2}{\pi} \frac{x_1-a_1}{h_1}, \ldots$$

pour représenter la variété V dans une autre, dans laquelle les variables $t', x_1', \ldots$ ne sont plus assujetties à aucune condition.

2. Introduisons les nombres complexes, et posons $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(t, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Alors le système donné d'équations se réduit à une seule:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x),$$

entre la fonction complexe x, et la variable réelle t; la $\varphi(t, x)$ est fonction continue des deux variables. Le théorème qu'il s'agit de démontrer dans cette Note s'énonce alors:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{q}_n \cdot b \,\varepsilon\, \mathrm{q} : \supset :: b' \,\varepsilon\, b + \mathrm{Q} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}_n / b^{-}b' \,.\, fb = a : t \,\varepsilon\, b^{-}b' \,.\, \supset_t .\, \frac{dft}{dt} \\ = \varphi(t, ft) \therefore -=_{b', f} \Lambda .$$

«Si a est un complexe d'ordre n, et b un nombre réel, alors on peut déterminer b' et f, où b' est une quantité plus grande que b, et f est un signe de fonction qui à chaque nombre de l'intervalle de b à b' fait correspondre un complexe [en d'autres mots, ft est un complexe fonction de la variable réelle t, définie pour toutes les valeurs de l'intervalle $b^{-}b'$]; la valeur de ft pour $t=b$ est a; et dans tout l'intervalle $b^{-}b'$ cette fonction ft satisfait à l'équation différentielle donnée».

3. On peut supposer les valeurs initiales b et a nulles, car il suffit de poser $t=b+t'$, $x=a+x'$; et alors, pour $t=b$ et $x=a$ on a $t'=0$, $x'=0$.

On peut aussi supposer $\varphi(0,0)=0$; car si l'on pose $x=t\varphi(0,0)+x'$, le second membre de l'équation différentielle en x' et t s'annulle avec les variables.

Enfin, puisque $\varphi(t, x)$ est continue, et $\varphi(0, 0) = 0$, on peut déterminer deux nombres positifs p et t_1 tels que $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta t_1, \theta \overline{\mathrm{m}} p) < 1$. Si k est le plus petit des nombres p et t_1, et que l'on pose $x = kx'$, $t = kt'$, on obtient l'équation différentielle $\frac{dx'}{dt'} = \varphi'(t', x')$, où $\varphi'(t', x') = \varphi(kt', kx')$, et l'on a $\mathrm{l'm}\,\varphi'(\theta, \overline{\mathrm{m}}\theta) < 1$. Si, au lieu de x', t', φ', on écrit x, t, φ, on a l'équation $\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$, où $\varphi(0, 0) = 0$, et $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}}\theta) < 1$.

Donc, sans ôter de généralité à la question, on peut supposer

1°) $\varphi(t, x)$ toujours continue,

2°) $\varphi(0, 0) = 0$,

3°) $\mathrm{l'm}\,\varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}}\theta) < 1$.

Nous supposerons toujours ces conditions satisfaites, bien que plusieurs propositions, comme on voit facilement, en soient indépendantes. Nous voulons démontrer:

Théorème.

$$f \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}/\theta \cdot f0 = 0 : t \,\varepsilon\, \theta \cdot \mathsf{O}_t \cdot \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore - =_f \Lambda \,.$$

«On peut déterminer dans l'intervalle de 0 à 1 une fonction complexe ft de la variable réelle t, qui s'annule pour $t = 0$, et qui dans tout cet intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

Résumé de la démonstration.

La démonstration du théorème, réduite en formules de logique, est contenue dans les § 1—§ 7. Bien que les développements complets soient assez longs, les principes de cette démonstration sont simples et naturels; on peut affirmer qu'on doit nécessairement retrouver les mêmes propositions toutes les fois qu'il s'agit de traiter complètement l'intégrabilité des équations différentielles, sans d'autres hypothèses que celles de la continuité.

§ 1.

On étudie d'abord les fonctions ft qui satisfont à une inégalité de la forme

$$\beta) \qquad \mathrm{m}\left(\frac{dft}{dt} - \varphi(t, ft)\right) < h,$$

où h est un nombre positif; on pourrait dire que ces fonctions satisfont *par approximation* à l'équation différentielle donnée.

P1. «Si t_0 et t_1 sont des nombres réels distincts, et si h est une quantité positive, on appelle $\beta(t_0, t_1, h)$ les signes, ou caractéristiques, des fonctions complexes définies dans l'intervalle $t_0 \overline{\ } t_1$, et qui dans tout cet intervalle satisfont à la condition β».

On voit facilement que (P15), étant t_0 un q, x_0 un q_n, et h un Q, la fonction $ft = x_0 + (t - t_0)\,\varphi(t_0, x_0)$ satisfait à la condition β dans un certain intervalle $t' \overline{\ } t''$, qui contient à son intérieur t_0. Et plus généralement (P16), la fonction $x_0 + (t - t_0)z$, où z est un complexe dont la différence à $\varphi(t_0, x_0)$ a un module moindre que h, satisfait à la même condition, aux environs de $t = t_0$.

P2. «Étant t_0 et t_1 des q, h un Q, et x_0 un q_n, on appelle $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ les complexes x tels qu'on puisse déterminer une fonction ft, satisfaisant dans l'intervalle $t_0 \overline{\ } t_1$ à la condition β, et qui pour $t = t_0$ et $t = t_1$ a les valeurs x_0 et x».

Donc $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ désigne l'ensemble des valeurs que prennent pour $t = t_1$ les fonctions ft, qui pour $t = t_0$ ont la valeur x_0, et qui dans l'intervalle $t_0 \overline{\ } t_1$ satisfont à la β. Évidemment, si l'on donne arbitrairement x_0, t_0, t_1, h, on ne peut pas toujours affirmer l'existence de la classe B correspondante.

De la définition résulte immédiatement que:

P9. Si x_1 est un $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, alors x_0 est un $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_0, h)$.

P10. Si $h < k$, $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ est contenue dans $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, k)$.

P14. Si t_0, t_1, t_2 sont des q, disposés par ordre de grandeur, si x_0, x_2 sont des q_n, et si les classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ et $\mathrm{B}(x_2, t_2, t_1, h)$ ont des points communs, alors x_2 est un $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h)$.

Lorsque $n = 1$, et que par conséquence les q_n se réduisent aux nombres réels q, les classes B sont en général l'ensemble des points qui satisfont à une double inégalité $a < x < b$; quelquefois ces classes s'étendent à l'infini, ou manquent.

§ 2.

P1. «Soient t_0, t_1 deux q, $t_0 < t_1$, x_0 un q_n, et p un Q. Appelons l la limite supérieure des modules des valeurs de $\varphi(t, x)$, lorsque t varie dans l'intervalle $t_0 \overline{\ } t_1$, et x dans la sphère de centre x_0 et de rayon p. Supposons $t_1 - t_0 < \frac{p}{l}$. Alors, h étant une quantité positive, quel que soit t dans l'intervalle $t_0 \overline{\ } t_1$, il y a des points de la classe $\mathrm{B}(x_0, t_0, t, h)$, dont la différence à x_0 a un module non supérieur à $(t - t_0)l$».

P2. «Et, par conséquent, dont la différence à x_0 a un module non supérieur à p».

P3. «Si, dans la P2, à t_0, t_1, x_0, p on substitue 0, 1, 0, 1, on obtient que, quel que soit le nombre positif h, et quel que soit t dans l'intervalle θ, il y a des $\mathrm{B}(0, 0, t, h)$ dont le module est inférieur à l'unité».

P4. «Donc quels que soient la quantité positive h, et t dans θ, la classe $B(0, 0, t, h)$ existe effectivement».

§ 3.

Pour étudier les autres propriétés des B, on démontre d'abord le lemme:

P1. «Si dans un intervalle de t_0 à $t_1 > t_0$ deux fonctions réelles $f_1 t$ et $f_2 t$ satisfont aux inégalités $f_1' t < \psi(t, f_1 t)$, et $f_2' t > \psi(t, f_2 t)$, où $\psi(t, z)$ est une fonction réelle des deux variables réelles t et z; et si les $f_1 t$ et $f_2 t$ ont la même valeur pour $t = t_0$, on aura $f_1 t_1 < f_2 t_1$».

On déduit des théorèmes qui limitent les classes B.

P7. «On peut déterminer une quantité positive h telle que, quel que soit t dans l'intervalle θ, les modules des points de $B(0, 0, t, h)$ soient tous moindres que t», et en conséquence, P8, «moindres que l'unité».

P9. «h et k étant deux quantités positives, alors non seulement $B(x_0, t_0, t_1, h)$ est contenue dans $B(x_0, t_0, t_1, h + k)$, comme dit § 1 P10, mais les points limites de la première classe sont aussi contenus dans la seconde».

Les §§1—3 contiennent les proprietés des classes B, qui se présentent dans la suite. On peut encore noter que les classes B sont *intérieures à elles mêmes* et *continues*.

§ 4.

P1. «Appelons maintenant $A(x_0, t_0, t_1)$ la limite de $B(x_0, t_0, t_1, h)$, pour $h = 0$».

Alors on a:

P4. «Si la fonction ft satisfait dans l'intervalle de t_0 à t_1 à l'équation différentielle donnée, et si sa valeur pour $t = t_0$ est x_0, alors sa valeur pour $t = t_1$ est un des nombres de la classe $A(x_0, t_0, t_1)$». Nous en démontrerons la réciproque dans le § 7.

P7. «Quel que soit t dans l'intervalle θ, la classe $A(0, 0, t)$ existe effectivement». C'est une conséquence du théorème sur les limites des classes, démontré au §e P9.

P9. «La classe $A(x_0, t_0, t)$ est la classe commune à toutes les classes $B(x_0, t_0, t, h)$, lorsque h prend toutes les valeurs positives».

P15. «Quel que soit t dans l'intervalle θ, le module de tout nombre de la classe $A(0, 0, t)$ est inférieur à l'unité».

P19. «Étant x_0 un q_n et t_0 un q, si l'on fixe une quantité positive k [arbitrairement petite], on peut déterminer deux nombres t' et t'', l'un inférieur, l'autre supérieur à t_0, tels que, quel que soit t dans l'intervalle $t'^{-}t''$, mais différent de t_0, et quel que soit le complexe x de la classe $A(x_0, t_0, t)$, on ait toujours:

$$\mathrm{mod}\left[\frac{x-x_0}{t-t_0} - \varphi(t_0, x_0)\right] < k»,$$

P20. «Si t_0 et t_0' sont des q; et si ft est une fonction complexe définie dans tout l'intervalle $t_0^{-}t_0'$; si, étant t et t_1 deux valeurs quelconques dans l'intervalle $t_0^{-}t_0'$, la f a la propriété que ft_1 est un $A(ft, t, t_1)$; alors dans cet intervalle la fonction ft satisfait à l'équation différentielle donnée».

§ 5.

La démonstration, en général, du théorème, est donnée au § 7. Mais dans ce § et dans le suivant nous examinerons deux cas particuliers. Ici nous examinons le cas dans lequel la classe $A(0, 0, t)$, laquelle, lorsque t est un θ, existe effectivement, se réduit à un seul nombre.

P4. «Si, quel que soit t dans l'intervalle θ, $A(0, 0, t)$ est un complexe d'ordre n, et si l'on pose $ft = A(0, 0, t)$; alors ft est une fonction complexe de la variable t, définie dans l'intervalle θ, qui s'annule avec t, et qui dans le même intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

P5. «Et elle est la seule qui satisfasse à ces conditions».

Pour reconnaître des cas, dans lesquels $A(0, 0, t)$ est un q_n, on a la

P3. «S'il existe un nombre positif p, tel que, quelque soit t dans l'intervalle θ, et quelques soient les complexes x et x', de module non supérieur à l'unité, le rapport $\frac{\mathrm{m}[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)]}{\mathrm{m}(x'-x)}$ soit toujours moindre que p, alors, quel que soit t dans θ, la classe $A(0, 0, t)$ se réduit à un nombre».

Mais, pour que $A(0, 0, t)$ se réduise à un q_n, il n'est pas nécessaire que le rapport considéré ait toujours une valeur moindre qu'une quantité finie p.

La condition $\frac{\mathrm{m}[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)]}{\mathrm{m}(x'-x)} < p$ est équivalente à l'existence de n^2 quantités positives $c_{i,j}$, telles que, quels que soient t, x et x' dans la variété considérée, on ait toujours*)

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}\,[\varphi_i(t, x_1', x_2', \ldots, x_n') - \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)] &< c_{i1}\,\mathrm{mod}\,(x_1'-x_1)\\ &+ c_{i2}\,\mathrm{mod}\,(x_2'-x_2) + \cdots + c_{in}\,\mathrm{mod}\,(x_n'-x_n);\end{aligned}$$

car il suffit de poser $p = n \times$ (le maximum des $c_{i,j}$).

*) C'est la condition supposée par M. Lipschitz (*Bulletin de Darboux* X, p. 149; *Annali di Matematica*, serie II, t. II, p. 288; *Differential- und Integralrechnung*, p. 500).

La même condition est une conséquence de l'existence et de la continuité des dérivées partielles des fonctions réelles $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$; car il suffit de poser $c_{ij} = \max \bmod \frac{d\varphi_i}{dx_j}$. Réciproquement, si le rapport considéré a toujours une valeur moindre qu'une quantité finie p, on ne peut pas déduire l'existence des dérivées partielles $\frac{d\varphi_i}{dx_j}$, mais on déduit que les extrêmes oscillatoires de ces fonctions sont toujours finis.*)

On a ainsi démontré les théorèmes de Cauchy et de Lipschitz.

§ 6.

Lorsque $n = 1$, la question se simplifie. Dans ce cas on pourrait démontrer que $A(0, 0, t)$ est un intervalle, c'est-à-dire l'ensemble des points compris entre les limites inférieure et supérieure de $A(0, 0, t)$, y compris ces limites. On démontre:

P8. «Si ft est la limite supérieure de $A(0, 0, t)$, alors ft est une quantité fonction de t, définie dans l'intervalle θ, qui s'annule avec la variable, et qui dans le même intervalle satisfait à l'équation différentielle donnée».

P9. «La limite inférieure de $A(0, 0, t)$ a aussi les mêmes propriétés».

Mais lorsque ces limites ne coïncident pas (le cas de la coïncidence a été étudié au § 5), il y a une infinité d'autres fonctions qui satisfont aux mêmes conditions, et dont l'existence résulte du § suivant.

J'ai donné le théorème, qui est l'objet du § 6 dans ma Note *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine* (Atti Acc. Torino, 1886, t. XXI), avec une démonstration quelque peu différente.

§ 7.

Pour démontrer le théorème en général, formons la fonction $\mathrm{f}t$ définie par les conditions suivantes:

P9. «Posons $\mathrm{f}0 = 0$».

P10. «Posons $\mathrm{f}1$ égal à un nombre arbitraire de la classe $A(0, 0, 1)$».

Alors, quelque soit t dans θ, il y a une classe commune à $A(0, 0, t)$ et à $A(\mathrm{f}1, 1, t)$ (§4 P18). Il peut arriver que cette classe commune se réduise à un seul individu; appellons le $\mathrm{f}t$; alors, en suivant les démonstrations du § 5, on peut prouver que $\mathrm{f}t$ satisfait à l'équation différentielle donnée; et elle est la seule solution qui s'annule

*) V. Volterra, *Sui principii di calcolo integrale*, Giornale di matematiche, t. XIX.

pour $t=0$, et qui pour $t=1$ prend la valeur $\mathrm{f}1$, arbitrairement choisie dans la classe $\mathrm{A}(0, 0, 1)$. Dans ce cas la solution de l'équation différentielle est définie par sa valeur initiale, et par sa valeur finale qu'on doit prendre en $\mathrm{A}(0, 0, 1)$.

Mais si cela n'arrive pas, on peut diviser l'intervalle $0-1$ en deux parties égales et prendre pour $\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)$ un individu arbitraire de la classe $\mathrm{A}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \frown \mathrm{A}\left(\mathrm{f}1, 1, \frac{1}{2}\right)$, et ainsi de suite.

P11. «En général, si $\mathrm{f}t$ est définie pour tous les nombres $0, \frac{1}{2^r}, \frac{2}{2^r}, \ldots, \frac{2^r-1}{2^r}, 1$, qu'on obtient en divisant r fois l'intervalle θ, alors, si t est la moyenne arithmétique de deux nombres successifs t_1 et t_2 de cette suite, prenons pour $\mathrm{f}t$ un individu arbitraire de la classe commune à $\mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t)$ et $\mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t)$».

P12. «Enfin, si t est un nombre de l'intervalle θ, mais non de la forme $\frac{s}{2^r}$, où r et s sont des entiers, prenons $\mathrm{f}t$ égal à l'individu commun à toutes les classes $\mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t)$, où t' est un nombre quelconque dans θ, de la forme $\frac{s}{2^r}$».

Il n'est pas évident *à priori* que les définitions données soient compatibles. On le prouve dans les

P13. «La fonction f ainsi définie fait effectivement correspondre à chaque nombre θ un q_n».

P14. «Quels que soient t et t' dans θ, $\mathrm{f}t'$ est un individu de la classe $\mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$».

Voici quelques explications sur la démonstration de ces deux théorèmes:

(1) (2) (3). «Ils sont vrais pour $r=0$».

(4) (5) (6) (7) (8) (9). «S'ils sont vrais pour une valeur de r, ils le sont aussi pour la valeur $r+1$».

(10) (11) (12). «Donc il sont vrais pour toutes les valeurs de t de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(15). «Si t_0 est un nombre de l'intervalle θ, mais non de la forme $\frac{s}{2^r}$, il existe effectivement des individus communs à toutes les classes $\mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0)$, où t est un nombre quelconque de l'intervalle θ, inférieur à t_0 et de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(16). «Et il n'y a qu'un seul».

(17) (18). «Appelons-le x_0; alors il est aussi commun à toutes les

classes $A(ft', t', t_0)$, où t' est un nombre quelconque de l'intervalle θ, supérieur à t_0, et de la forme $\frac{s}{2^r}$».

(19). «Donc il y a un et un seul individu commun aux classes de la P 12».

(21). «Ainsi est prouvée la P13».

(22) (23) (24). «La prop. 14, déjà démontrée (12) lorsque t et t' ont la forme $\frac{s}{2^r}$, est aussi vraie lorsque un seul a cette forme, ou qu'aucun des deux n'a une telle forme; elle est donc démontrée en général».

P15. «La fonction ft ainsi définie, satisfait dans l'intervalle θ à l'équation donnée, comme il résulte de la P14 et de la 20 du §4».

Nous avons traduit l'expression ωa, où a est une Kq_n, qui se présente dans les P10 et P11, par «un individu arbitraire de la classe a». Mais comme on ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi *arbitraire* avec laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi *déterminée* avec laquelle à chaque classe a, sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe:

P1. «Si a est une Kq_n, nous appellons ωa le complexe $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dont le premier élément x_1 est la limite supérieure des premiers éléments des complexes de la classe a;

le deuxième élément x_2 est la limite supérieure des deuxièmes éléments des complexes qui appartiennent à la classe a, et dont le premier élément est x_1;

le troisième élément x_3 est la limite supérieure des troisièmes éléments des complexes qui sont des a, et qui ont pour premier élément x_1, et pour deuxième x_2;

et ainsi de suite».

P2. «Si a est une Kq_n, non nulle, finie, et fermée, alors ωa est un individu de la classe a».

§ 1.

Sur les classes B.

Définitions.

$$1.\ t_0 \,\varepsilon\, q \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm Q \,.\, h \,\varepsilon\, Q :\supset .\, \beta(t_0, t_1, h) = (q_n / t_0 \,\bar{}\, t_1) \frown \overline{f\,\varepsilon}$$
$$\left\{ t \,\varepsilon\, t_0 \,\bar{}\, t_1 \,.\supset_t .\, \mathrm{m}\left[\frac{dft}{dt} - \varphi(t, ft)\right] < h \right\} *).$$

*) En supposant que la dérivée d'une fonction ft satisfasse à une inégalité, on suppose ici l'existence de la dérivée ordinaire, ou au moins des deux dérivées à droite et à gauche, qui satisfassent à la même inégalité. Naturellement, aux extrêmes de l'intervalle, on considère l'une seulement des dérivées.

2. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 \pm Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n : \supset . \, B(x_0, t_0, t_1, h) = q_n \frown \overline{x \, \varepsilon} \, [f \, \varepsilon \, \beta(t_0, t_1, h) \, . \, ft_0 = x_0 \, . \, ft_1 = x : - =_f \Lambda]$.

3. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n : \supset . \, B(x_0, t_0, t_0, h) = x_0$.

Conséquences immédiates.

4. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 \pm Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q : \supset . \, \beta(t_0, t_1, h) = \beta(t_1, t_0, h)$.

5. „ „ $. \, h, k \, \varepsilon \, Q \, . \, h < k : \supset . \, \beta(t_0, t_1, h) \supset \beta(t_0, t_1, k)$.

6. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, t_2 \, \varepsilon \, t_1 + Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q : \supset . \, \beta(t_0, t_2, h) \supset \beta(t_0, t_1, h)$.

7. $t_0, t_1, t_2 \, \varepsilon \, q \, . \, t_0 < t_1 < t_2 \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, f \, \varepsilon \, \beta(t_0, t_1, h) \, . \, f \, \varepsilon \, \beta(t_1, t_2, h)$
$: \supset . \, f \, \varepsilon \, \beta(t_0, t_2, h)$.

8. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 \pm Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, f \, \varepsilon \, \beta(t_0, t_1, h) : \supset . \, ft_1 \, \varepsilon \, B(ft_0, t_0, t_1, h)$.

9. $x_0 \, \varepsilon \, q_n . \, t_0, t_1 \, \varepsilon \, q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_1 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_1, h) : \supset . \, x_0 \, \varepsilon \, B(x_1, t_1, t_0, h)$
$\{P4 \supset P9\}$.

10. $t_0, t_1 \, \varepsilon \, q \, . \, h, k \, \varepsilon \, Q \, . \, h < k \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n : \supset . \, B(x_0, t_0, t_1, h) \supset B(x_0, t_0, t_1, k)$
$\{P5 \supset P10\}$.

11. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, t_2 \, \varepsilon \, t_1 + Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, x_2 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_2, h)$
$: \supset . \, B(x_0, t_0, t_1, h) \frown B(x_2, t_2, t_1, h) - = \Lambda$ $\{P6 \supset P11\}$.

12. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, t_2 \, \varepsilon \, t_1 + Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, x_1 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_1, h)$
$. \, x_2 \, \varepsilon \, B(x_1, t_1, t_2, h) : \supset . \, x_2 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_2, h)$ $\{P7 \supset P12\}$.

13. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, t_2 \, \varepsilon \, t_1 + Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, x_1 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_1, h)$
$: \supset . \, B(x_1, t_1, t_2, h) \supset B(x_0, t_0, t_2, h)$ $\{P12 = P13\}$.

14. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, t_2 \, \varepsilon \, t_1 + Q \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, x_0, x_2 \, \varepsilon \, q_n \, . \, B(x_0, t_0, t_1, h)$
$\frown B(x_2, t_2, t_1, h) - = \Lambda : \supset . \, x_2 \, \varepsilon \, B(x_0, t_0, t_2, h)$
$\{P12 = P14\}$.

Théorèmes dont dans la suite on ne fera pas d'usage.

15. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, ft = x_0 + (t - t_0) \varphi(t_0, x_0) \, . \, h \, \varepsilon \, Q : \supset \therefore t' \, \varepsilon \, t_0 - Q$
$. \, t'' \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, f \, \varepsilon \, \beta(t', t'', h) : - =_{t', t''} \Lambda$.

16. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, h \, \varepsilon \, Q \, . \, z \, \varepsilon \, q_n \, . \, \mathrm{m}\,[z - \varphi(x_0, t_0)] < h \, . \, ft = x_0 + (t - t_0) z$
$: \supset \therefore t' \, \varepsilon \, t_0 - Q \, . \, t'' \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, f \, \varepsilon \, \beta(t', t'', h) : - =_{t', t''} \Lambda$.

§ 2.

Existence des classes B.

Théorème.

1. $t_0 \, \varepsilon \, q \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + Q \, . \, x_0 \, \varepsilon \, q_n \, . \, p \, \varepsilon \, Q \, . \, l = \mathrm{l'm} \, \varphi(t_0 \smile t_1, \, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p)$
$. \, (t_1 - t_0) l < p \, . \, h \, \varepsilon \, Q : \supset : t \, \varepsilon \, t_0 \smile t_1 \, . \supset_t . \, B(x_0, t_0, t, h) \frown [x_0$
$+ (t - t_0) \theta \overline{\mathrm{m}} l] - = \Lambda$.

Démonstration.

(1) $\mathrm{Hp} \,.\, k', k'' \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, \mathrm{m}(t - t') < k' \,.\, x, x' \varepsilon x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}p$
$\,.\, \mathrm{m}(x - x') < k'' : \supset_{t,t',x,x'} . \mathrm{m}[\varphi(t, x) - \varphi(t', x')] < h :: -$
$=_{k',k''} \Lambda .$

{C'est le théorème connu sous le nom de la continuité équable, gleichmässige Stetigkeit}.

(2) $\mathrm{Hp} \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, \mathrm{m}(t-t') < k \,.\, x, x' \varepsilon x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}p \,.\, \mathrm{m}(x-x')$
$< kl : \supset_{t,t',x,x'} . \mathrm{m}[\varphi(t, x) - \varphi(t', x')] < h :: - =_k \Lambda .$

$\left\{ \mathrm{Hp}(1) \,.\, k = \min\left(k', \frac{k''}{l}\right) : \supset (2) \right\}.$

(3) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, x' \varepsilon x_0 + (t' - t_0)\overline{\mathrm{m}}\theta l \,.\, t'' \varepsilon t'{}^- t_1 \,.\, t'' < t' + k \,.\, ft$
$= x' + (t - t')\varphi(t', x') : \supset : ft'' \varepsilon \mathrm{B}(x', t', t'', h) \,.\, ft'' \varepsilon x_0$
$+ (t'' - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l .$

$\{ \mathrm{Hp} \,.\, t \varepsilon t'{}^- t'' : \supset : t, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, t - t' < k \cdot \mathrm{m}(ft - x') \leq (t-t')l$
$< kl \,.\, ft \varepsilon x' + \theta\overline{\mathrm{m}}p : \supset : \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - \varphi(t', x')] < h \cdot \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t}$
$= \varphi(t', x') : \supset : \mathrm{m}\left[\frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} - \varphi(t, ft)\right] < h .$

$\mathrm{Hp} \,.\, \supset : f \varepsilon \beta(t', t'', h) \,.\, ft' = x'.$ §1 P8 $: \supset . \mathrm{Ts} \}.$

(4) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, x' \varepsilon x_0 + (t' - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l \,.\, t'' \varepsilon t'{}^- t_1 \,.\, t'' < t' + k : \supset$
$. \mathrm{B}(x', t', t'', h) \cap [x_0 + (t'' - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l] - = \Lambda$ {(3) $\supset$ (4)}.

(5) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, t' \varepsilon t_0{}^- t_1 \,.\, x' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t', h) \cap [x_0 + (t' - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l] \,.\, t'' \varepsilon t'{}^- t_1$
$. t'' < t' + k : \supset . \mathrm{B}(x_0, t_0, t'', h) \cap [x_0 + (t'' - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l] - = \Lambda$
{(4) . §1 P13 : $\supset$. (5)}.

(6) $\mathrm{Hp}(2) . z = \overline{t\,\varepsilon} \{ t \varepsilon t_0{}^- t_1 . \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \cap [x_0 + (t - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l] - = \Lambda \} : \supset ::$
$t_0 \varepsilon z \therefore t' \varepsilon z \,.\, t'' \varepsilon t'{}^- t_1 \,.\, t'' < t' + k : \supset_{t',t''} . t'' \varepsilon z$ {(5) $\supset$ (6)}.

(7) $t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, z \varepsilon \mathrm{Kq} \cdot z \supset t_0{}^- t_1 \,.\, t_0 \varepsilon z \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t' \varepsilon z . t'' \varepsilon t'{}^- t_1$
$. t'' < t' + k : \supset_{t',t''} . t'' \varepsilon z :: \supset . z = t_0{}^- t_1$
{Proposition évidente}.

(8) $\mathrm{Hp}(6) . \supset . z = t_0{}^- t_1 .$ {(6) (7) $\supset$ (8)}.

(9) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, t \varepsilon t_0{}^- t_1 : \supset . \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h) \cap [x_0 + (t - t_0)\theta\overline{\mathrm{m}}l] - = \Lambda$
{(8) = (9)}.

(10) Hp $\supset$ Ts {(2) (9) $\supset$ (10) = P1}.

Théorèmes.

2. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, x_0 \varepsilon \mathrm{q_n} \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, l = \mathrm{l'm}\varphi(t_0 \frown t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) \,.\, (t_1 - t_0) l < p \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, t \varepsilon t_0 \frown t_1 : \supset .\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h) \frown (x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - = \Lambda$ $\{\mathrm{P1} \supset \mathrm{P2}\}$.

3. $h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, t \varepsilon \theta : \supset .\, \mathrm{B}(0, 0, t, h) \frown \overline{\mathrm{m}} \theta - = \Lambda$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ t_0 & t_1 & x_0 & p \end{pmatrix} \mathrm{P2} = \mathrm{P3}\right\}.$$

4. $h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, t \varepsilon \theta : \supset .\, \mathrm{B}(0, 0, t, h) - = \Lambda$ $\{\mathrm{P3} \supset \mathrm{P4}\}$.

§ 3.

Propriétés des classes B.

Lemmes.

{Dans les lemmes suivants, $\psi(t, z)$ désigne une fonction réelle des deux variables réelles t et z}.

1. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, f_1, f_2 \varepsilon \mathrm{q}/t_0 \frown t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \,.\!\cdot\!.\, t \varepsilon t_0 \frown t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) :: \supset .\, f_1 t_1 < f_2 t_1$.*)

{(1) $\mathrm{Hp} \,.\, \supset :: f_1' t_0 < f_2' t_0 \,.\, \supset :: t' \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} : t \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t' - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, f_1 t < f_2 t \,.\!\cdot\!.\, - =_{t'} \Lambda$.

(2) $\mathrm{Hp} \,.\, t_2 = \mathrm{l'}\overline{t' \varepsilon}\, [t' \varepsilon t_0 \frown t_1 : t \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t' - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, f_1 t < f_2 t] \,.\, (1) : \supset : t_2 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, t_2 \leq t_1 \,.\, f_1 t_2 \leq f_2 t_2$.

(3) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, f_1 t_2 = f_2 t_2 : \supset \,.\!\cdot\!.\, f_1' t_2 < f_2' t_2 : t \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t_2 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, f_1 t < f_2 t \,.\!\cdot\!.\, \supset .\, \Lambda$.

(4) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, (2) \,.\, (3) : \supset : t_2 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \,.\, t_2 \leq t_1 \,.\, f_1 t_2 < f_2 t_2$.

(5) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, t_2 < t_1 \,.\, f_1 t_2 < f_2 t_2 : \supset :: t_3 \varepsilon t_2 \frown t_1 \,.\, t_3 > t_2 : t \varepsilon t_1 \frown t_3 \,.\, \supset_t .\, f_1 t < f_2 t \,.\!\cdot\!.\, - =_{t_3} \Lambda :: \supset :: t_3 \varepsilon t_0 \frown t_1 \,.\, t_3 > t_2 : t \varepsilon (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t_3 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, f_1 t < f_2 t \,.\!\cdot\!.\, - =_{t_3} \Lambda :: \supset .\, \Lambda$.

(6) $\mathrm{Hp}(2) \,.\, (4) \,.\, (5) : \supset : t_2 = t_1 \,.\, f_1 t_1 < f_2 t_1$.

$\mathrm{Hp} \,.\, (6) : \supset .\, \mathrm{Ts.}$}

2. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} \,.\, t_1 \varepsilon t_0 - \mathrm{Q} \,.\, f_1, f_2 \varepsilon \mathrm{q}/t_0 \frown t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \,.\!\cdot\!.\, t \varepsilon t_0 \frown t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) :: \supset .\, f_1 t_1 > f_2 t_1$.

{Dém. analogue. Il suffit aussi de changer t en $-t$ dans le lemme 1}.

*) Ici f_1' et f_2' désignent les dérivées des f_1 et f_2. Sur leur existence on fait les mêmes suppositions que dans la note au § 1. Les fonctions f_1 et f_2 sont donc nécessairement continues.

3. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, f_1, f_2 \,\varepsilon\, \mathrm{q}/t_0{}^-t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 \therefore t \,\varepsilon\, t_0{}^-t_1 \,.\, \supset_t : f_1' t < \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t > \psi(t, f_2 t) :: \supset \,.\, \frac{f_2 t_1 - f_1 t_1}{t_1 - t_0} > 0$

$\{\mathrm{P1} \frown \mathrm{P2} = \mathrm{P3}\}$.

Théorèmes.

4. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x_0, a \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} : t \,\varepsilon\, t_0{}^-t_1 \,.\, \supset_t . \mathrm{l'm} \{\varphi[t, x_0 + (t - t_0) a + (t - t_0) \overline{\mathrm{m}} (h + k)] - a\} < k : f \,\varepsilon\, \beta(t_0, t_1, h) \,.\, f t_0 = x_0 \therefore \supset \,.\, \mathrm{m}\left(\frac{f t_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < h + k.$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, f_1 t = \mathrm{m}[f t - x_0 - (t - t_0) a] \,.\, f_2 t = (t - t_0)(h + k) \,.\, \psi(t, z) = h + \mathrm{l'm} \{\varphi[t, x_0 + (t - t_0) a + \overline{\mathrm{m}} z] - a\} : \supset :: f_1, f_2 \,\varepsilon\, \mathrm{q}/t_0{}^-t_1 \,.\, f_1 t_0 = f_2 t_0 = 0 \therefore t \,\varepsilon\, t_0{}^-t_1 \,.\, \supset_t \,.\, f_1' t \leq \mathrm{m}(f' t - a) \leq \mathrm{m}[f' t - \varphi(t, f t)] + \mathrm{m}[\varphi(t, f t) - a] < h + \mathrm{l'm} \{\varphi[t, x_0 + (t - t_0) a + \overline{\mathrm{m}} f_1 t] - a\} = \psi(t, f_1 t) \,.\, f_2' t = h + k > \psi(t, f_2 t) \therefore \mathrm{P3} :: \supset :: \frac{f_2 t_1 - f_1 t_1}{t_1 - t_0} > 0 :: \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

5. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x_0, a \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{m}(t_1 - t_0) < \frac{p}{\mathrm{m} a + h + k} \,.\, \mathrm{l'm}[\varphi(t_0{}^-t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < k \,.\, x_1 \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) : \supset \,.\, \mathrm{m}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < h + k.$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} \,.\, t \,\varepsilon\, t_0{}^-t_1 : \supset : x_0 + (t - t_0) a + (t - t_0) \overline{\mathrm{m}} (h + k) \supset x_0 + \theta (t_1 - t_0) \overline{\mathrm{m}} (\mathrm{m} a + h + k) \supset x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p \,.\, \mathrm{l'm} \{\varphi[t, x_0 + (t - t_0) a + (t - t_0) \overline{\mathrm{m}} (h + k)] - a\} \leq \mathrm{l'm}[\varphi(t_0{}^-t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < k.$

(2) $\mathrm{Hp} \,.\, f \,\varepsilon\, \beta(t_0, t_1, h) \,.\, f t_0 = x_0 \,.\, f t_1 = x_1 \,.\, (1) \,.\, \mathrm{P4} : \supset \,.\, \mathrm{Ts}.$

$\mathrm{Hp} \,.\, (2) : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

6. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, x_0, a \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{m}(t_1 - t_0) \times (\mathrm{m} a + h + k) < p \,.\, \mathrm{l'm}[\varphi(t_0{}^-t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < k : \supset : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \supset x_0 + (t_1 - t_0)[a + \theta \overline{\mathrm{m}} (h + k)].$ $\{\mathrm{P5} = \mathrm{P6}\}$.

7. $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \supset_t \,.\, \mathrm{B}(0, 0, t, h) \supset \overline{\mathrm{m}} \theta t \therefore -=_h \Lambda.$

$\{(1)$ $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, h < 1 - \mathrm{l'm} \varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}} \theta) : -=_h \Lambda.$

(2) $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, h < 1 - \mathrm{l'm} \varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}} \theta) : \supset \therefore k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l'm} \varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}} \theta) < k < 1 - h : -=_k \Lambda.$

(3) $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, h < 1 - \mathrm{l'm} \varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}} \theta) \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l'm} \varphi(\theta, \overline{\mathrm{m}} \theta) < k < 1 - h \,.\, t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \begin{pmatrix} 0, & t, & 0, & 0, & 1 \\ t_0, & t_1, & x_0, & a, & p \end{pmatrix} \mathrm{P6} : \supset \,.\, \mathrm{B}(0, 0, t, h) \supset \overline{\mathrm{m}} \theta t.$

$(1)\,(2)\,(3) \supset \mathrm{P7}\}.$

8. $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \supset_t \,.\, \mathrm{B}(0, 0, t, h) \supset \overline{\mathrm{m}} \theta \therefore -=_h \Lambda$ $\{\mathrm{P7} \supset \mathrm{P8}\}$.

Théorème.

9. $x_0 \, \varepsilon \, \mathrm{q}_n \, . \, t_0 \, \varepsilon \, \mathrm{q} \, . \, t_1 \, \varepsilon \, t_0 + \mathrm{Q} \, . \, h, k \, \varepsilon \, \mathrm{Q} : \supset . \, \mathrm{C\,B}(x_0, t_0, t_1, h) \supset \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h+k)$.

*Démonstration.**)

(1) $\mathrm{Hp} \, . \, x_1 \, \varepsilon \, \mathrm{C\,B}(x_0, t_0, t_1, h) \, . \, a = \varphi(t_1, x_1) : \supset \therefore t_2 \, \varepsilon \, (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t_1 - \mathrm{Q}) \, . \, p \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \, . \, \mathrm{l'm}[\varphi(t_2 \bar{\ } t_1, x_1 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) - a] < \frac{1}{3} k : - =_{t_2, p} \Lambda$.

---

*) Nous traduirons en langage ordinaire cette longue démonstration:

(1). Dans les Hp. du Théor., soit x_1 un point de la classe $\mathrm{C\,B}(x_0, t_0, t_1, h)$. [Le cas nous interesse, où x_1 n'appartient pas à la classe $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, mais où il est un point limite de cette classe]. Posons, pour simplifier, $a = \varphi(t_1, x_1)$. Alors [par la définition de la continuité] on peut déterminer un nombre t_2 plus grand que t_0 et plus petit que t_1, et une quantité positive p, de façon que, lorsque t varie dans l'intervalle $t_2 \bar{\ } t_1$, et que x acquiert toutes les valeurs qui différent de x_1 d'une quantité dont le module n'est pas supérieur à p, les valeurs de $\varphi(t, x)$ différent de $a = \varphi(t_1, x_1)$ d'une quantité dont le module soit toujours inférieur à $\frac{1}{3} k$.

(2). x_1 et a ayant la même signification que dans (1), si t_2 et p sont des nombres qui ont les proprietés qu'on vient d'expliquer, et si l'on appelle t_3 le plus grand des nombres t_2 et $t_1 - \frac{p}{\mathrm{m}a + h + k}$; alors t_3 est plus grand que t_0 et plus petit que t_1; lorsque t varie dans l'intervalle $t_3 \bar{\ } t_1$, et x dans la sphère de centre x_1 et de rayon p, les différences entre les valeurs de $\varphi(t, x)$ et a ont des modules toujours moindres que $\frac{1}{3} k$; et le produit de $t_1 - t_3$ par $\mathrm{m}a + h + k$ n'est pas supérieur à p.

(3). Dans les mêmes notations de (1), si p est un nombre positif, et t_3 une quantité entre t_0 et t_1, qui a les proprietés qu'on vient d'énoncer, toute la sphère de centre $x_1 + (t_3 - t_1)a$, et de rayon $(t_1 - t_3)\left(h + \frac{2}{3} k\right)$ est contenue dans $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)$.

En effet soit x_3 un point de cette sphère; posons $ft = x_1 + \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}(x_3 - x_1)$. Alors les valeurs de la fonction ft pour $t = t_1$ et $t = t_3$ sont respectivement x_1 et x_3; quel que soit t dans l'intervalle $t_3 \bar{\ } t_1$, la différence entre ft et x_1 a un module inférieur à p $\Big[$car dans cette différence $\frac{t - t_1}{t_3 - t_1}(x_3 - x_1)$, le premier facteur n'est pas supérieur à l'unité, et puisque x_3 est un point de la sphère, on a:

$$\mathrm{m}[x_3 - x_1 - (t_3 - t_1)a] \leq (t_1 - t_3)\left(h + \frac{2}{3} k\right)$$

d'où

$$\mathrm{m}(x_3 - x_1) \leq (t_1 - t_3)\left(\mathrm{m}a + h + \frac{2}{3} k\right) < (t_1 - t_3)(\mathrm{m}a + h + k) \leq p \Big].$$

Par conséquence la différence entre $\varphi(t, ft)$ et a a un module inférieur à $\frac{k}{3}$. D'autre part $f't = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}$; et $\mathrm{m}[f't - \varphi(t, ft)]$ n'est pas supérieur à la somme

(2) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, t_2 \,\varepsilon\, (t_0+\mathrm{Q}) \frown (t_1-\mathrm{Q}) \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, 1'\mathrm{m}[\varphi(t_2-t_1, x_1+\theta\overline{\mathrm{m}}p)-a] < \frac{1}{3}k \,.\, t_3 = \max\left(t_2, t_1 - \frac{p}{\mathrm{m}a+h+k}\right) : \supset : t_3 \,\varepsilon\, (t_0+\mathrm{Q}) \frown (t_1 - \mathrm{Q}) \,.\, 1'\mathrm{m}[\varphi(t_3-t_1, x_1+\theta\overline{\mathrm{m}}p)-a] < \frac{1}{3}k \cdot (t_1-t_3)(\mathrm{m}a + h + k) < p.$

---

de $\mathrm{m}\left[\frac{x_3-x_1}{t_3-t_1}-a\right]$, qui est inférieur ou égal à $h+\frac{2}{3}k$, et de $\mathrm{m}[\varphi(t, ft)-a]$, inférieur à $\frac{1}{3}k$. Donc, quelque soit t dans $t_3 \text{-} t_1$, on a $\mathrm{m}[f't-\varphi(t, ft)]<h+k$. Cela signifie que la fonction f est une de celles qu'on a appellées $\beta(t_1, t_3, h+k)$; et sa valeur x_3 pour $t=t_3$ est effectivement un point de $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)$.

(4). Maintenant [puisque x_1 est un point limite de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$], on peut déterminer un point x_1' de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$ dont la distance à x_1 soit plus petite que le nombre positif $\frac{1}{3}k(t_1-t_3)$.

(5). x_1, a, p, t_3 ayant toujours la même signification, si x_1' est un point qui a les propriétés qu'on vient de dire, alors toute la classe $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h)$ est contenue dans la sphère de centre $x_1+(t_3-t_1)a$ et de rayon $(t_1-t_3)\left(h+\frac{2}{3}k\right)$, dont on a parlé dans (3).

En effet si dans la P6, à t_0, t_1, k, x_0 on substitue $t_1, t_3, \frac{1}{3}k, x_1'$, on voit que toutes les hypothèses sont satisfaites; on déduit que $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h)$ est contenue dans la sphère de centre $x_1'+(t_3-t_1)a$, et de rayon $(t_1-t_3)\left(h+\frac{1}{3}k\right)$; de là $\left[\text{puisque } \mathrm{m}(x_1'-x_1)<\frac{1}{3}k(t_1-t_3)\right]$ on déduit la prop. à démontrer.

(6). Donc, par les (3) et (5), la classe $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h)$ est contenue dans $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)$.

(7). Dans les Hyp. du Théor., si x_1 est un $\mathrm{CB}(x_0, t_0, t_1, h)$; si p est un nombre positif, et t_3 un nombre plus grand que t_0 et plus petit que t_1, tels que lorsque t varie dans $t_3 \text{-} t_1$ et x dans la sphère de centre x_1 et de rayon p les valeurs des modules des différences entre les valeurs de $\varphi(t, x)$ et $\varphi(t_1, x_1)$ soient toutes moindres que $\frac{1}{3}k$; si $(t_1-t_3)[\mathrm{m}\varphi(t_1, x_1)+h+k]<p$; et si x_1' est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, dont la distance à x_1 est plus petite que $\frac{1}{3}k(t_1-t_3)$;

alors, par la §1P11, il y a des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h)$ et $\mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h)$;

donc il y a aussi des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h)$ et $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)$, car, par la (6), la dernière classe de cette couple contient la deuxième classe de la couple précédente;

donc, il y a aussi des points communs aux deux classes $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h+k)$ et $\mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)$, car par la §1P10, la première de cette couple contient la première de la couple précédente;

et enfin, par la §1P14, x_1 est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h+k)$.

(8). Dans la conclusion de (7) n'entrent plus p, t_3, et x_1'; mais comme dans les (1), (2) et (4) on a démontré leur existence, on a:

Des Hyp. du Théor., si x_1 est un point limite de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h)$, il est un point de $\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h+k)$.

Ainsi est démontré le théorème.

(3) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, t_3 \,\varepsilon\, (t_0 + \mathrm{Q}) \frown (t_1 - \mathrm{Q}) \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m}[\varphi(t_3 - t_1, x_1 + \theta\overline{\mathrm{m}}p) - a] < \frac{1}{3} k \,.\, (t_1 - t_3)(\mathrm{m}a + h + k) < p : \supset : x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta\,\overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3}k\right)\right] \supset \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k).$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, x_3 \,\varepsilon\, x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta\overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3}k\right)\right] \,.\, ft = x_1 + \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}(x_3 - x_1) :: \supset :: ft_1 = x_1 \,.\, ft_3 = x_3 \therefore t \,\varepsilon\, t_3 \,\bar{}\, t_1 : \supset : ft \,\varepsilon\, x_1 + \theta\overline{\mathrm{m}}p \,.\, \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - a] < \frac{k}{3} \cdot \mathrm{m}[f't - \varphi(t, ft)] \leq \mathrm{m}\left[\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} - a\right] + \mathrm{m}[\varphi(t, ft) - a] \leq \left(h + \frac{2}{3}k\right) + \frac{1}{3}k = h + k :: \supset :: f \,\varepsilon\, \beta(t_1, t_3, h+k) \,.\, x_3 \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k)\}.$

(4) $\mathrm{Hp}(3) \,.\, \supset \therefore x_1' \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \,.\, \mathrm{m}(x_1' - x_1) < \frac{1}{3} k(t_1 - t_3) : - =_{x_1'} \Lambda.$

(5) $\mathrm{Hp}(3) \,.\, x_1' \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \,.\, \mathrm{m}(x_1' - x_1) < \frac{1}{3} k(t_1 - t_3) : \supset \,.\, \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) \supset x_1 + (t_3 - t_1)\left[a + \theta\,\overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{2}{3}k\right)\right]$

$\left\{\begin{pmatrix} t_1 & t_3 & \frac{1}{3}k & x_1' \\ t_0 & t_1 & k & x_0 \end{pmatrix} \mathrm{P6} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) \supset x_1' + (t_3 - t_1) \times \left[a + \theta\overline{\mathrm{m}}\left(h + \frac{1}{3}k\right)\right] \,.\, \supset \,.\, (5)\right\}.$

(6) $\mathrm{Hp}(5) \,.\, (3) \,.\, (5) : \supset \,.\, \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) \supset \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k).$

(7) $\mathrm{Hp}(5) \,.\, \S 1\,\mathrm{P}11 : \supset : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h) \frown \mathrm{B}(x_1', t_1, t_3, h) - = \Lambda \,.\, (6) : \supset : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h) \frown \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h + k) - = \Lambda \,.\, \S 1\,\mathrm{P}10 : \supset \mathrm{B}(x_0, t_0, t_3, h+k) \frown \mathrm{B}(x_1, t_1, t_3, h+k) - = \Lambda \,.\, \S 1\,\mathrm{P}14 : \supset : x_1 \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h + k).$

(8) $\mathrm{Hp} \,.\, x_1 \,\varepsilon\, \mathrm{C}\,\mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, (4) \,.\, (7) : \supset \,.\, x_1 \,\varepsilon\, \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h + k).$

$\mathrm{Hp} \,.\, (8) : \supset \,.\, \mathrm{Ts}.$

§ 4.

Sur les classes A.

Définitions.

1. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, t_0 \pm \mathrm{Q} \,.\, x_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} : \supset \,.\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) = \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, 0) = \lim \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h).$

2. $t_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, x_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} : \supset \,.\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t_0) = x_0.$

Théorèmes.

3. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t_1 \varepsilon \mathrm{q} . x_1 \varepsilon \mathrm{q}_n : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \therefore \supset . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1)$ $\{\S e \, \mathrm{P}2 \supset \mathrm{P}3\}$.

4. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t_1 \varepsilon \mathrm{q} . f \varepsilon \mathrm{q}_n / t_0{}^{-}t_1 . f t_0 = x_0 : t \varepsilon t_0{}^{-}t_1 . \supset_t . \frac{d ft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore \supset . f t_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1)$.

$\{\mathrm{Hp} . \supset : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . f \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) . \supset_h . f t_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

5. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t_1 \varepsilon \mathrm{q} : \supset . \mathrm{C}\mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) = \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1)$. $\{\S e \, \mathrm{P}8 \supset \mathrm{P}5\}$.

6. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 \pm \mathrm{Q} . x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . p \varepsilon \mathrm{Q} . l = \mathrm{l'm}\, \varphi(t_0{}^{-}t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) . \mathrm{m}(t_1 - t_0) < \frac{p}{l} . t \varepsilon t_0{}^{-}t_1 : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) -= \Lambda$.

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . \S 1 \, \mathrm{P}10 : \supset \therefore h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k : \supset_{h,k} . \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h) \supset \mathrm{B}(x_0, t_0, t, k)$.

(2) $\mathrm{Hp} . \S 2 \, \mathrm{P}2 : \supset : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h) \cap (x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) -= \Lambda$.

$\mathrm{Hp} . (1) . (2) . \S e \, \mathrm{P}9 : \supset . \mathrm{Ts}\}$.

7. $t \varepsilon \theta : \supset . \mathrm{A}(0, 0, t) -= \Lambda$. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ t_0 & t_1 & x_0 & p \end{pmatrix} \mathrm{P}6 = \mathrm{P}7\right\}$.

8. $t_0, t \varepsilon \theta . t_0 < t . x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . \mathrm{m} x_0 < t_0 : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) -= \Lambda$. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 - t_0 \\ t_1 & p \end{pmatrix} \mathrm{P}6 = \mathrm{P}8\right\}$.

9. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t \varepsilon \mathrm{q} : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \varepsilon}\, [h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . x \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h)]$. $\{\S 3 \, \mathrm{P}8 . \S e \, \mathrm{P}11 : \supset . \mathrm{P}9\}$.

10. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t \varepsilon \mathrm{q} . h \varepsilon \mathrm{Q} : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) \supset \mathrm{B}(x_0, t_0, t, h)$ $\{\mathrm{P}9 \supset \mathrm{P}10\}$.

11. $x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . t_0, t_1 \varepsilon \mathrm{q} . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) : \supset . x_0 \varepsilon \mathrm{A}(x_1, t_1, t_0)$.

$\{\mathrm{Hp} . \mathrm{P}10 : \supset :: h \varepsilon \mathrm{Q} : \supset_h : x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . \S 1 \, \mathrm{P}9 : \supset_h : x_0 \varepsilon \mathrm{B}(x_1, t_1, t_0, h) \therefore \mathrm{P}3 :: \supset \mathrm{Ts}\}$.

12. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . t_2 \varepsilon t_1 + \mathrm{Q} . x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) . x_2 \varepsilon \mathrm{A}(x_1, t_1, t_2) : \supset . x_2 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_2)$.

$\{\mathrm{Hp} . \mathrm{P}10 : \supset :: h \varepsilon \mathrm{Q} : \supset_h : x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . x_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h) . \S 1 \, \mathrm{P}12 : \supset_h . x_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \therefore \mathrm{P}3 :: \supset . \mathrm{Ts}\}$.

13. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . t_2 \varepsilon t_1 + \mathrm{Q} . x_0 \varepsilon \mathrm{q}_n . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) : \supset . \mathrm{A}(x_1, t_1, t_2) \supset \mathrm{A}(x_0, t_0, t_2)$. $\{\mathrm{P}12 \supset \mathrm{P}13\}$.

14. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 \pm \mathrm{Q} . k \varepsilon \mathrm{Q} . x_0, a \varepsilon \mathrm{q_n} . p \varepsilon \mathrm{Q} . l = \mathrm{l'm}\, \varphi(t_0 \smile t_1, x_0 + \theta \overline{\mathrm{m}} p) . \mathrm{m}(t_1 - t_0) < \frac{p}{l} . \mathrm{l'm}[\varphi(t_0 \smile t_1, x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}p) - a] < k . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) : \supset . \mathrm{m}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < k.$

$\{\mathrm{Hp} . h = k - \mathrm{l'm}[\varphi(t_0 \smile t_1, x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}p) - a] : \supset : h \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm} [\varphi(t_0 \smile t_1, x + \theta\overline{\mathrm{m}}p) - a] < k - \frac{h}{2} . \S 3\, \mathrm{P}5 : \supset : x_1 \varepsilon \mathrm{B}\left(x_0, t_0, t_1, \frac{h}{2}\right) . \mathrm{m}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - a\right) < \left(k - \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

15. $t \varepsilon \theta . x \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) : \supset . \mathrm{m}x \leq t.$

$\left\{\begin{pmatrix} 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ t_0 & t_1 & k & x_0 & a & p & x_1 \end{pmatrix} \mathrm{P}14 = \mathrm{P}15\right\}$; ou $\{\S 3\,\mathrm{P}7 . \mathrm{P}10 : \supset . \mathrm{P}15\}.$

16. $t_0, t \varepsilon \theta . t_0 < t . x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) - = \Lambda$

$\{\mathrm{Hp} . \mathrm{P}15 : \supset : \mathrm{m}x_0 \leq t_0 . \mathrm{P}8 : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

17. $t_0, t \varepsilon \theta . t_0 < t . x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0,0,t_0) . x \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t) : \supset . \mathrm{m}(x - x_0) < t - t_0.$

$\left\{\begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 1 - t_0 & x \\ t_1 & k & a & p & x_1 \end{pmatrix} \mathrm{P}14 = \mathrm{P}17\right\}.$

17'. $t_0, t \varepsilon \theta . t_0 < t . x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t) \supset x_0 + \theta\, \overline{\mathrm{m}}(t - t_0)$

$\{\mathrm{P}17 = \mathrm{P}17'\}.$

18. $t_0, t_1, t_2 \varepsilon \theta . t_0 < t_1 < t_2 . x_0 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t_0) . x_2 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_2) : \supset . \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \frown \mathrm{A}(x_2, t_2, t_1) - = \Lambda.$

{(1) $\mathrm{Hp} . fh = \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) \frown \mathrm{B}(x_2, t_2, t_1, h) : \supset . f \varepsilon \mathrm{Kq_n/Q}.$

(2) $\mathrm{Hp}(1) . h \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{P}10 : \supset : x_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) . \S 1\,\mathrm{P}11 : \supset . fh - = \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp}(1) . h, k \varepsilon \mathrm{Q} . h < k . \S 1\,\mathrm{P}10 : \supset . fh \supset fk.$

(4) $\mathrm{Hp}(1) . h \varepsilon \mathrm{Q} . \S 1\,\mathrm{P}13 : \supset . fh \supset \mathrm{B}(0, 0, t_1, h).$

(5) $\mathrm{Hp} . \S 3\,\mathrm{P}8 : \supset \therefore h \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm}\,\mathrm{B}(0, 0, t_1, h) \leq 1 : - =_h \Lambda.$

(6) $\mathrm{Hp}(1) . (1) . (2) . (3) . (4) . (5) . \S e\,\mathrm{P}10 : \supset . f0 - = \Lambda.$

(7) $\mathrm{Hp}(1) . \S e\,\mathrm{P}6 . \supset . f0 \supset \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \frown \mathrm{A}(x_2, t_2, t_1).$

$\mathrm{Hp} . (6) . (7) : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

19. $x_0 \varepsilon \mathrm{q_n} . t_0 \varepsilon \mathrm{q} . k \varepsilon \mathrm{Q} : \supset \therefore t' \varepsilon t_0 - \mathrm{Q} . t'' \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} \therefore t \varepsilon t' \smile t'' . t - = t_0 . x \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t) : \supset_{t,x} . \mathrm{m}\left[\frac{x - x_0}{t - t_0} - \varphi(t_0, x_0)\right] < k :: - =_{t',t''} \Lambda.$

{(1) $\mathrm{Hp} . t_1 \varepsilon t_0 - \mathrm{Q} . t_2 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . p \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{l'm}[\varphi(t_1 \smile t_2, x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}p) - \varphi(t_0, x_0)] < k : - =_{t_1, t_2, p} \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp}(1) \,.\, t' = \max\left(t_1,\, t_0 - \frac{p}{\mathrm{m}\,\varphi(t_0, x_0) + k}\right) \cdot t''$
$= \min\left(t_2,\, t_0 + \frac{p}{\mathrm{m}\,\varphi(t_0, x_0) + k}\right) \cdot t \,\varepsilon\, t' - t'' \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{A}(x_0, t_0, t) \,.\, l$
$= \mathrm{l}'\,\mathrm{m}\,\varphi(t_0 - t,\, x_0 + \theta\,\overline{\mathrm{m}}\,p) : \supset : l < \mathrm{m}\,\varphi(t_0, x_0) + k \,.\, \mathrm{m}(t - t_0)$
$< \frac{p}{l} \cdot \begin{pmatrix} t, & \varphi(t_0, x_0), & x \\ t_1, & a & x_1 \end{pmatrix}$ P14$: \supset$. Ts.

$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) : \supset \,.\, \mathrm{Ts} \}$.

20. $t_0, t_0' \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}/t_0 - t_0' : t, t_1 \,\varepsilon\, t_0 - t_0' \,.\, \supset_{t, t_1} .\, f t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{A}\,(ft, t, t_1) \therefore$
$\supset : t \,\varepsilon\, t_0 - t_1 \,.\, \supset_t . \frac{\mathrm{d} ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft)$.

$\{(1)\, \mathrm{Hp} \,.\, t \,\varepsilon\, t_0 - t_0' \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\,$ P19 $: \supset \therefore\therefore t' \,\varepsilon\, t - \mathrm{Q} \,.\, t'' \,\varepsilon\, t + \mathrm{Q} \therefore t_1 \,\varepsilon$
$t' - t'' \,.\, \supset_{t_1} .\, \mathrm{m}\left[\frac{ft_1 - ft}{t_1 - t} - \varphi(t, ft)\right] < k :: - =_{t', t''} \Lambda$.

$\mathrm{Hp} \,.\, t \,\varepsilon\, t_0 - t_0' \,.\, (1) : \supset . \frac{\mathrm{d} ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft) \}$.

§ 5.

Existence de l'intégrale, lorsque A(0, 0, t) se réduit à un seul nombre complexe.

Lemme.

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}/0 - t_1 : t \,\varepsilon\, 0 - t_1 \,.\, \supset_t . \frac{\mathrm{d} ft}{\mathrm{d}t} < a + b ft : f0 =$
$0 \therefore \supset .\, ft_1 < \frac{a}{b}\,(e^{bt_1} - 1)$.

$\{\mathrm{Hp} \,.\, gt = e^{-bt}\left[ft - \frac{a}{b}\,(e^{bt} - 1)\right] : \supset \therefore g0 = 0 : t \,\varepsilon\, \theta t_1 \,.\, \supset_t . \frac{\mathrm{d} gt}{\mathrm{d}t}$
$= e^{-bt}\left(\frac{\mathrm{d} ft}{\mathrm{d}t} - a - b ft\right) < 0 \therefore \supset \therefore g t_1 < 0 \therefore \supset \mathrm{Ts}\}$.

Théorèmes.

2. $p \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \therefore t \,\varepsilon\, \theta \,.\, x, x' \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{m}}\,\theta : \supset_{t, x, x'} .\, \mathrm{m}\,[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)] < p \times$
$\mathrm{m}(x' - x) \therefore h' \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \supset_t .\, \mathrm{B}(0, 0, t, h') \supset \overline{\mathrm{m}}\,\theta \therefore h \,\varepsilon\, \theta h' \,.\, t_1 \,\varepsilon\, \theta$
$.\, x_1, x_2 \,\varepsilon\, \mathrm{B}(0, 0, t_1, h) :: \supset .\, \mathrm{m}(x_2 - x_1) < \frac{2h}{p}\,(e^{pt_1} - 1)$.

$\{\mathrm{Hp} \,.\, f_1, f_2 \,\varepsilon\, \beta(0, t_1, h) \,.\, f_1 0 = f_2 0 = 0 \,.\, f_1 t_1 = x_1 \,.\, f_2 t_1 = x_2 : \supset$
$\therefore t \,\varepsilon\, \theta t_1 \,.\, \supset_t : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) \leq \mathrm{m}(f_2' t - f_1' t) \leq \mathrm{m}\,[f_2' t$
$- \varphi(t, f_2 t)] + \mathrm{m}[f_1' t - \varphi(t, f_1 t)] + \mathrm{m}[\varphi(t, f_2 t) - \varphi(t, f_1 t)]$
$.\, \mathrm{m}\,[f_2' t - \varphi(t_2, f_2 t)] < h \,.\, \mathrm{m}[f_1' t - \varphi(t, f_1 t)] < h \,.\, f_1 t, f_2 t \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{m}}\,\theta$

$. \mathrm{m}[\varphi(t, f_2 t) - \varphi(t, f_1 t)] < p \times \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) \therefore \supset \therefore t \varepsilon \theta t_1$
$. \supset_t . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) < 2h + p \times \mathrm{m}(f_2 t - f_1 t) : \mathrm{P1} \therefore \supset . \mathrm{Ts}\}.$

3. $p \varepsilon \mathrm{Q} \therefore t \varepsilon \theta . x, x' \varepsilon \overline{\mathrm{m}}\theta : \supset_{t, x, x'} . \mathrm{m}[\varphi(t, x') - \varphi(t, x)] < p \times \mathrm{m}(x' - x)$
$\therefore t \varepsilon \theta :: \supset . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n}.$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . \S 4\mathrm{P7} : \supset . \mathrm{A}(0, 0, t) - = \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp} . \S 3\mathrm{P8} : \supset \therefore h' \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{B}(0, 0, t, h') \supset \overline{\mathrm{m}}\theta : - =_{h'} \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp} . h' \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{B}(0, 0, t, h') \supset \overline{\mathrm{m}}\theta . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . \S 4\mathrm{P10}. \mathrm{P2} : \supset$
$: h \varepsilon \theta h' . \supset_h . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{B}(0, 0, t, h) . \supset_h . \mathrm{m}(x_2 - x_1) < \frac{2h}{p}$
$(e^{p t_1} - 1) : \supset : \mathrm{m}(x_2 - x_1) \leq \mathrm{l}_1 \frac{2\theta h'}{p}(e^{p t_1} - 1) = 0.$

(4) $\mathrm{Hp} . x_1, x_2 \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . (2) . (3) : \supset . x_1 = x_2.$
$\mathrm{Hp} . (1) . (4) : \supset . \mathrm{Ts}.\}.$

4. $t \varepsilon \theta . \supset_t . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n} : ft = \mathrm{A}(0, 0, t) \therefore \supset \therefore f \varepsilon \mathrm{q_n}/\theta . f0 = 0$
$: t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft).$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t . \S 4\mathrm{P18} : \supset : \mathrm{A}(0, 0, t) \frown \mathrm{A}(ft_1, t_1, t) - = \Lambda$
$. ft \varepsilon \mathrm{q_n} : \supset : ft \varepsilon \mathrm{A}(ft_1, t_1, t) . \S 4\mathrm{P11} : \supset : ft_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1).$

(2) $\mathrm{Hp} . t, t_1 \varepsilon \theta . (1) : \supset . ft_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1).$
$\mathrm{Hp} . (2) . \S 4\mathrm{P20} : \supset . \mathrm{Ts}.\}.$

5. $t \varepsilon \theta . \supset_t . \mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q_n} : f \varepsilon \mathrm{q_n}/\theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t,$
$ft) \therefore \supset : t \varepsilon \theta . \supset_t . ft = \mathrm{A}(0, 0, t).$ $\{\S 4\mathrm{P4} . \supset . \mathrm{P5}\}.$

§ 6.

Intégrabilité dans le cas de $n = 1$.

Dans ce § on suppose $n = 1$. Alors les complexes $\mathrm{q_n}$ se réduisent aux nombres réels q.

Théorèmes.

1. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 . h \varepsilon \mathrm{Q} . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h).$
$x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h) . x_1' > x_1 : \supset : x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . x_1$
$\varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h).$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . f, g \varepsilon (\mathrm{q}/t_0 - t_1)$ continues. $ft_0 > gt_0 . ft_1 < gt_1 : \supset \therefore t_2 \varepsilon t_0 - t_1$
$. ft_2 = gt_2 : - =_{t_2} \Lambda.$

(2) $\mathrm{Hp} . f, g \varepsilon \beta(t_0, t_1, h) . ft_0 = x_0 . ft_1 = x_1 . gt_0 = x_0' . gt_1 = x_1'$
$. (1) : \supset \therefore t_2 \varepsilon t_0 - t_1 . ft_2 = gt_2 : - =_{t_2} \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp}(2) . t_2 \varepsilon t_0 - t_1 . ft_2 = gt_2 . \S 1\mathrm{P}8 : \supset : ft_2 \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \frown \mathrm{B}(x_0', t_0, t_2, h) \frown \mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h) \frown \mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h) : \supset : \mathrm{B}(x_0, t_0, t_2, h) \frown \mathrm{B}(x_1', t_1, t_2, h) -= \Lambda . \mathrm{B}(x_0', t_0, t_2, h) \frown \mathrm{B}(x_1, t_1, t_2, h) -= \Lambda . \S 1\mathrm{P}14 : \supset . \mathrm{Ts}.$

$\mathrm{Hp} . (2) . (3) : \supset . \mathrm{Ts}.\}.$

2. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) . x_1' \varepsilon \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1) . x_1' > x_1 : \supset : x_1' \varepsilon \mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x_0', t_0, t_1).$

$\{\mathrm{Hp} . \S 4\mathrm{P}10. \mathrm{P}1 : \supset :: h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h : x_1' \varepsilon \mathrm{B}(x_0, t_0, t_1, h) . x_1 \varepsilon \mathrm{B}(x_0', t_0, t_1, h) .\!\cdot. \S 4\mathrm{P}3 :: \supset . \mathrm{Ts}\}.$

3. $t_0 \varepsilon \mathrm{q} . t_1 \varepsilon t_0 + \mathrm{Q} . x_0, x_0' \varepsilon \mathrm{q} . x_0' < x_0 : \supset : \mathrm{l}'\mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \geq \mathrm{l}'\mathrm{A}(x_0', t_0, t_1) . \mathrm{l}_1\mathrm{A}(x_0, t_0, t_1) \geq \mathrm{l}_1\mathrm{A}(x_0', t_0, t_1).$

$\{\mathrm{P}2 \supset \mathrm{P}3\}.$

4. $t \varepsilon \theta . \supset : \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . \mathrm{l}_1\mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon| \mathrm{A}(0, 0, t).$

$\{\mathrm{Hp}. \S 4\mathrm{P}7. \S 4\mathrm{P}15. \S d\mathrm{P}5\mathrm{P}5' : \supset : \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t), \mathrm{l}_1\mathrm{A}(0, 0, t) \varepsilon \mathrm{q}. \S d\mathrm{P}21. \S 4\mathrm{P}5 : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

5. $t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t . x = \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t) . x_1 = \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset . x_1 = \mathrm{l}'\mathrm{A}(x, t, t_1).$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . \mathrm{P}4 : \supset : x \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . \S 4\mathrm{P}13 : \supset : \mathrm{A}(x, t, t_1) \supset \mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset : \mathrm{l}'\mathrm{A}(x, t, t_1) \leq x_1.$

(2) $\mathrm{Hp} . \S 4\mathrm{P}18 : \supset . \mathrm{A}(0, 0, t) \frown \mathrm{A}(x_1, t_1, t) -= \Lambda.$

(3) $\mathrm{Hp} . x' \varepsilon \mathrm{A}(0, 0, t) . x' \varepsilon \mathrm{A}(x_1, t_1, t) . \mathrm{P}3 : \supset : x' \leq x . x_1 \varepsilon \mathrm{A}(x', t, t_1) . \mathrm{l}'\mathrm{A}(x', t, t_1) \leq \mathrm{l}'\mathrm{A}(x, t, t_1) : \supset . x_1 \leq \mathrm{l}'\mathrm{A}(x, t, t_1).$

(4) $\mathrm{Hp} . (2) . (3) : \supset . x_1 \leq \mathrm{l}'\mathrm{A}(x, t, t_1).$

$\mathrm{Hp} . (1) . (4) : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

6. $t, t_1 \varepsilon \theta . t_1 > t . x = \mathrm{l}_1\mathrm{A}(0, 0, t) . x_1 = \mathrm{l}_1\mathrm{A}(0, 0, t_1) : \supset . x_1 = \mathrm{l}_1\mathrm{A}(x, t, t_1).$ {Dém. analogue à la précédente}.

7. $ft = \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t) . t, t_1 \varepsilon \theta : \supset . ft_1 \varepsilon \mathrm{A}(ft, t, t_1).$

$\{(1)$ $\mathrm{Hp} . t_1 > t . \mathrm{P}5 : \supset : ft_1 = \mathrm{l}'\mathrm{A}(ft, t, t_1) : \supset . \mathrm{Ts}.$

(2) $\mathrm{Hp} . t > t_1 . (1) : \supset : ft \varepsilon \mathrm{A}(ft_1, t_1, t). \S 4\mathrm{P}11 : \supset . \mathrm{Ts}.$

(3) $\mathrm{Hp} . t = t_1 . \S 4\mathrm{P}2 : \supset . \mathrm{Ts}.$

$\mathrm{Hp} . (1) . (2) . (3) : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

8. $ft = \mathrm{l}'\mathrm{A}(0, 0, t) . \supset \therefore f \varepsilon \mathrm{q}/\theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft).$

$\{\mathrm{Hp}. \mathrm{P}7. \S 4\mathrm{P}20 : \supset . \mathrm{Ts}\}.$

9. $ft = l_1 A(0, 0, t) . \supset \therefore f \varepsilon q / \theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft)$.
$\{$Dém. analogue à la précédente$\}$.

10. $f \varepsilon q / \theta . f0 = 0 : t \varepsilon \theta . \supset_t . \frac{dft}{dt} = \varphi(t, ft) \therefore \supset : t \varepsilon \theta . \supset_t$
$. l_1 A(0, 0, t) \leq ft \leq l' A(0, 0, t)$.
$\{$§4 P4 . $\supset$. P10$\}$.

§ 7.

Démonstration de l'intégrabilité en général.

Notations pour les P1 *et* 2.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un q_n, par $E_1 x$, $E_2 x, \ldots, E_n x$ nous désignerons ici le premier, le deuxième, ..., l'n$^{\text{ième}}$ élément de x:

$$E_1 x = x_1, \quad E_2 x = x_2, \ \ldots, \ E_n x = x_n.$$

Les signes $E_1, E_2, \ldots$ sont donc des q / q_n. Ces fonctions sont continues et distributives.

Si $x_1 \varepsilon q$, par la convention de l'inversion (§c), $\overline{E_1} x_1$ signifie «les q_n dont le premier élément est x_1».

Pour simplifier l'écriture, dans la déf. 1, et dans la démonstration du théorème 2 on suppose $n = 3$.

Définition de l'opération ω.

1. $a \varepsilon Kq_3 . x_1 = l' E_1 a . x_2 = l' E_2 (a \frown \overline{E_1} x_1) . x_3 = l' E_3 (a \frown \overline{E_1} x_1 \frown \overline{E_2} x_2)$
$: \supset . \omega a = (x_1, x_2, x_3)$.

Théorème.

2. $a \varepsilon Kq_n . a -= \Lambda . l' m a \varepsilon q . Ca = a : \supset . \omega a \varepsilon a$.
$\{$Hp . §d P22 $: \supset : x_1 \varepsilon E_1 a . a \frown \overline{E_1} x_1 -= \Lambda . C(a \frown \overline{E_1} x_1)$
$= a \frown \overline{E_1} x_1 : \supset : x_2 \varepsilon E_2 (a \frown \overline{E_1} x_1) . a \frown \overline{E_1} x_1 \frown \overline{E_2} x_2$
$-= \Lambda : \supset : x_3 \varepsilon E_3 (a \frown \overline{E_1} x_1 \frown \overline{E_2} x_2) . a \frown \overline{E_1} x_1 \frown \overline{E_2} x_2$
$\frown \overline{E_3} x_3 -= \Lambda : \supset : x_1, x_2, x_3 \varepsilon q . (x_1, x_2, x_3) \varepsilon a : \supset .$ Ts$\}$.

Théorèmes.

3. $t \varepsilon \theta . \supset . \omega A(0,0,t) \varepsilon A(0,0,t)$. $\{$§4 P7 . §4 P15 . §4 P5 . P2 $: \supset .$ P3$\}$.

4. $t_1, t_2 \varepsilon \theta . t_2 > t_1 . x_1 \varepsilon A(0, 0, t_1) . x_2 \varepsilon A(x_1, t_1, t_2) . t \varepsilon t_1 \dotplus t_2 : \supset$
$. \omega[A(x_1, t_1, t) \frown A(x_2, t_2, t)] \varepsilon A(x_1, t_1, t) \frown A(x_2, t_2, t)$.
$\{$§4 P18 . §4 P17 . §d P16 . P2 $: \supset .$ P4$\}$.

Notations.

N = «nombre entier positif ou nul».

$r \, \varepsilon \, N \, . \supset . \, Z_r = \theta \frown \frac{N}{2^r}$ = «l'ensemble des nombres $0, \frac{1}{2^r}, \frac{2}{2^r}, \ldots, \frac{2^{r-1}}{2^r}, 1$».

$Z = \overline{x\varepsilon}(r \, \varepsilon \, N \, . \, x \, \varepsilon \, Z_r : - =_r \Lambda)$ = «les nombres de l'intervalle θ, de la forme $\frac{s}{2^r}$, où r et s sont des N».

Conséquences immédiates.

5. $Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots \supset Z \supset \theta$.

6. $r \, \varepsilon \, N \, . \, t \, \varepsilon \, Z_r : \supset . \, 2^r t \, \varepsilon \, N$.

7. $r \, \varepsilon \, N \, . \, t \, \varepsilon \, Z_{r+1} - Z_r : \supset . \, t - \frac{1}{2^{r+1}}, \; t + \frac{1}{2^{r+1}} \, \varepsilon \, Z_r$.

8. $CZ = \theta$.

Définitions de la fonction f.

9. $f0 = 0$.

10. $f1 = \omega A(0, 0, 1)$.

11. $r \, \varepsilon \, N \, . \, f \, \varepsilon \, q_n / Z_r \, . \, t \, \varepsilon \, Z_{r+1} - Z_r \, . \, t_1 = t - \frac{1}{2^{r+1}} \cdot t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}}$
$: \supset . \, ft = \omega[A(ft_1, t_1, t) \frown A(ft_2, t_2, t)]$.

12. $t \, \varepsilon \, \theta - Z \, . \supset . \, ft = \overline{x\varepsilon}[t' \, \varepsilon \, Z \, . \supset_{t'} . \, x \, \varepsilon \, A(ft', t', t)]$.

Théorèmes.

13. $f \, \varepsilon \, q_n / \theta$.

14. $t, t' \, \varepsilon \, \theta \, . \supset . \, ft' \, \varepsilon \, A(ft, t, t')$.

Démonstration des théorèmes 13 *et* 14.

(1) $f \, \varepsilon \, q_n / Z_0$ $\quad \{P9 \, . \, P10 \, . \, P3 : \supset . \, (1)\}$.

(2) $t, t' \, \varepsilon \, Z_0 \, . \, t' > t : \supset : t = 0 \, . \, t' = 1 \, . \, P10 \, . \, P9 \, . \, P3 : \supset . \, ft' \, \varepsilon$ $A(ft, t, t')$.

(3) $t, t' \, \varepsilon \, Z_0 \, . \, (2) \, . \, §4P11 : \supset . \, ft' \, \varepsilon \, A(ft, t, t')$.

(4) $r \, \varepsilon \, N \, . \, f \, \varepsilon \, q_n / Z_r : t, t' \, \varepsilon \, Z_r \, . \supset_{t,t'} . \, ft' \, \varepsilon \, A(ft, t, t') \, .\!\cdot\!. \supset . \, f \, \varepsilon$ q_n / Z_{r+1}.

{(α) $Hp \, . \, t \, \varepsilon \, Z_{r+1} \frown Z_r : \supset . \, ft \, \varepsilon \, q_n$.

(β) $Hp \, . \, t \, \varepsilon \, Z_{r+1} - Z_r \, . \, t_1 = t - \frac{1}{2^{r+1}} \cdot t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} \, . \, P7 : \supset : t_1, t_2$ $\varepsilon \, Z_r \, . \, ft_1 \, \varepsilon \, A(0, 0, t_1) \, . \, ft_2 \, \varepsilon \, A(ft_1, t_1, t_2) \, . \, P4 : \supset . \, ft \, \varepsilon \, q_n$.

(γ) $\mathrm{Hp} \,.\, t \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} \,.\, (\alpha) \,.\, (\beta) : \supset \,.\, \mathrm{f}t \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}.$

$\mathrm{Hp} \,.\, (\gamma) : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

(5) $\mathrm{Hp}(4) \,.\, t \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r \,.\, t' > t : \supset \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, t_1 = t' - \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, t_1 \geq t \,.\, \mathrm{f}t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_1) \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t') \,.\, \S 4\mathrm{P}12 : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

(6) $\mathrm{Hp}(4) \,.\, t \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r \,.\, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, t' > t : \supset \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t < t_2 \leq t' \,.\, t_2 \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, \mathrm{f}t_2 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_2) \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t') : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

(7) $\mathrm{Hp}(4) \,.\, t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} - \mathrm{Z}_r \,.\, t' > t : \supset \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, t_2 = t + \frac{1}{2^{r+1}} \cdot t_1 = t' - \frac{1}{2^{r+1}} : \supset : t < t_2 \leq t_1 < t' : t_2, t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, \mathrm{f}t_2 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_2) \,.\, \mathrm{f}t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t_2, t_2, t_1) \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t') : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

(8) $\mathrm{Hp}(4) \,.\, t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} \,.\, (5) \,.\, (6) \,.\, (7) : \supset \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

(9) $r \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_r : t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, \supset_{t,t'} .\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t') \therefore \supset \therefore \mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q} / \mathrm{Z}_{r+1} : t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_{r+1} \,.\, \supset_{t,t'} .\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

$\{(4)\,(8) \supset (9)\}.$

(10) $r \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset \therefore \mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}_r : t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_r \,.\, \supset_{t,t'} .\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

$\{(1)\,(3)\,(9) \supset (10)\}.$

(11) $\mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} / \mathrm{Z}.$
(12) $t, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t')$ $\Big\}$ $\{(10) = (11)\,(12)\}.$

(13) $t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{f}t \,\varepsilon\, \mathrm{A}(0, 0, t).$ $\{(12) \supset (13)\}.$

(14) $t_0 \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\, gt = \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0) \,.\, a = \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \S 4\mathrm{P}5 \,.\, \S 4\mathrm{P}16 \,.\, \S 4\mathrm{P}15 \,.\, \S 4\mathrm{P}13 : \supset \therefore g \,\varepsilon\, \mathrm{K}\mathrm{q_n} / a \therefore t \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_t : \mathrm{C}gt = gt \,.\, gt -= \Lambda \,.\, \mathrm{l'm}\, gt \leq 1 \therefore t, t' \,\varepsilon\, a \,.\, t' > t : \supset \,.\, gt' \supset gt \therefore \S e\mathrm{P}12 :: \supset \,.\, \overline{x\varepsilon}\,(t \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_t .\, x \,\varepsilon\, gt) -= \Lambda.$

(15) $t_0 \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\, \supset \,.\, \overline{x\varepsilon}\,[t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, x \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0)] -= \Lambda.$

$\{(14) \supset (15)\}.$

(16) $t_0 \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\, x_1, x_2 \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} : t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, x_1, x_2 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0) \therefore \supset \,.\, x_1 = x_2.$

$\{\mathrm{Hp} \,.\, t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \S 4\mathrm{P}17 : \supset : \mathrm{m}(\mathrm{f}t - x_1) < t_0 - t \,.\, \mathrm{m}(\mathrm{f}t - x_2) < t_0 - t : \supset \,.\, \mathrm{m}(x_2 - x_1) < 2(t_0 - t).$

$\mathrm{Hp} \,.\, \supset : t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, \mathrm{m}(x_2 - x_1) < 2(t_0 - t) : \supset \,.\, \mathrm{Ts}\}.$

(17) $t_0 \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\, x_0 = \overline{x\varepsilon}\,[t \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, \supset_t .\, x \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t_0)] : \supset . x_0 \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}.$
$\{(15)\,(16) \supset (17)\}.$

(18) $\mathrm{Hp}(17) \,.\, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 + \mathrm{Q}) : \supset .\, x_0 \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t_0).$

$\{(\alpha)$ $\mathrm{Hp}.k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, t_1 \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t_0 - \mathrm{Q}) \,.\, t_0 - t_1 < \frac{k}{2} \,.\, \S 4\mathrm{P}17' : \supset : \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t_0)$
$\supset \mathrm{f}t_1 + \theta\overline{\mathrm{m}}\,\frac{k}{2} \,.\, \mathrm{m}(\mathrm{f}t_1 - x_0) < \frac{k}{2} \,.\, \S 4\mathrm{P}18 : \supset : \mathrm{A}(ft_1, t_1, t_0)$
$\supset x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}k \,.\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t_1, t_1, t_0) \frown \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t_0) -= \Lambda : \supset : (x_0 + \theta\overline{\mathrm{m}}k)$
$\frown \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t_0) -= \Lambda.$

$\mathrm{Hp} \,.\, (\alpha) : \supset : x_0 \,\varepsilon\, \mathrm{C}\mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t_0) \,.\, \S 4\mathrm{P}5 : \supset .\, \mathrm{Ts}\}.$

(19) $t \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\supset .\, \overline{x\varepsilon}\,[t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \,.\, \supset_{t'} .\, x \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t)] \,\varepsilon\, \mathrm{q_n}.$
$\{(17)\,(18) \supset (19)\}.$

(20) $\mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} / (\theta - \mathrm{Z}).$ $\{(19) \supset (20)\}.$

(21) $\mathrm{f} \,\varepsilon\, \mathrm{q_n} / \theta.$ $\{(11)\,(20) \supset (21) = \mathrm{P}13\}.$

(22) $t \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\, t' \,\varepsilon\, \mathrm{Z} : \supset : \mathrm{f}t \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t', t', t) : \supset : \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$

(23) $t, t' \,\varepsilon\, \theta - \mathrm{Z} \,.\supset .\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, t'' \,\varepsilon\, \mathrm{Z} \frown (t - t') : \supset : \mathrm{f}t'' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t'') \,.\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t'', t'', t')$
$: \supset .\, \mathrm{Ts}\}.$

(24) $t, t' \,\varepsilon\, \theta \,.\supset .\, \mathrm{f}t' \,\varepsilon\, \mathrm{A}(\mathrm{f}t, t, t').$
$\{(12)\,(22)\,(23) \supset (24) = \mathrm{P}14\}.$

Théorème.

15. $t \,\varepsilon\, \theta \,.\supset .\, \frac{\mathrm{d}\mathrm{f}t}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, \mathrm{f}t).$ $\{\mathrm{P}14 \,.\, \S 4\mathrm{P}20 : \supset .\, \mathrm{P}15\}.$

§ 8.

Observations.

On a ainsi prouvé que, étant donnée l'équation

$$\frac{\mathrm{d}ft}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, ft),$$

où le second membre est une fonction continue, il existe au moins une fonction ft, définie dans les environs de $t = b$, qui pour $t = b$ acquiert la valeur arbitraire a, et qui satisfait à l'équation donnée. La condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit unique est que $\mathrm{A}(a, b, t)$ se réduise à un seul individu.

En supposant seulement la continuité de la fonction φ, la classe $\mathrm{A}(a, b, t)$ peut effectivement contenir plusieurs nombres. Nous en donnerons ici quelques exemples, pour $n = 1$.

Soit l'équation entre les variables réelles x et t

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$$

où le second membre est fonction continue. Les fonctions qui satisfont à cette équation, et s'annulent avec t sont (pour $t > 0$)

1⁰. $$x = t^3 = \text{l}' \text{A}(0, 0, t),$$

2⁰. $$x = 0 = \text{l}_1 \text{A}(0, 0, t),$$

3⁰. les fonctions qui dans un intervalle $0 - t_1$ sont nulles, et qui de t_1 à $+\infty$ ont la valeur $(t - t_1)^3$.

Ces dernières fonctions coïncident entre elles dans un intervalle fini. On arrive à des résultats analogues en considérant des équations qui ont des solutions singulières.

Voici une autre exemple, ou il n'y a pas de solutions singulières, bien que la solution qui s'annule avec t soit indéterminée.

Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4xt^3}{x^2 + t^4}.$$

Si l'on fait tendre x et t à 0, le second membre a pour limite 0, car on peut le réduire à la forme

$$t \cdot \frac{4xt^2}{x^2 + t^4},$$

où le premier facteur a pour limite 0, et le second est toujours compris entre -2 et 2. Si donc on suppose le second membre nul avec x et t, il sera fonction continue des deux variables. Les solutions de cette équation, qui s'annulent avec t, sont

1⁰. $x = t^2 = \text{l}' \text{A}(0, 0, t)$,

2⁰. $x = -t^2 = \text{l}_1 \text{A}(0, 0, t)$,

3⁰. $x = 0$,

4⁰. $x = c - \sqrt{c^2 + t^4}$ et $x = \sqrt{c^2 + t^4} - c$, où c est une constante positive.

Ces fonctions, égales pour $t = 0$, sont différentes pour toutes les autres valeurs de t. Les autres intégrales de l'équation proposée sont

$$x = \pm (c + \sqrt{c^2 + t^4}).$$

La condition de l'existence et continuité de la dérivée de $\varphi(t, x)$ par rapport à x, ou au moins d'une limite supérieure finie pour le rapport $\frac{\varphi(t, x') - \varphi(t, x)}{x' - x}$, suffisante pour déduire l'existence d'une solution unique qui a une valeur initiale donnée, comme on a vu dans le §5, n'est pas nécessaire. Considérons en effet l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est continue et jamais nulle pour les valeurs de x dans l'intervalle $a-b$. Alors, si x_0 est une valeur dans cet intervalle, et que l'on pose

$$t_0 - \int_a^{x_0} \frac{dx}{\varphi(x)} = a' \quad \text{et} \quad t_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{\varphi(x)} = b',$$

il existe une et une seule fonction x de t, définie dans l'intervalle $a'-b'$ qui satisfait à l'équation donnée, et qui pour $t = t_0$ a la valeur x_0; comme cela résulte de l'intégration de cette équation. Et sur la dérivée de $\varphi(x)$, on n'a pas fait d'hypothèses.

Lorsque $\varphi(t, x)$ a une dérivée $\varphi_1(t, x)$ par rapport à x finie et continue, alors, en supposant t_0 et t_1 suffisamment proches, $A(x_0, t_0, t_1)$ est la valeur, pour $t = t_1$, de la fonction qui satisfait à l'équation différentielle, et qui pour $t = t_0$ a la valeur x_0. Sa dérivée par rapport à x_0 est

$$\frac{d\,A(x_0, t_0, t_1)}{d x_0} = e^{\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1[t, A(x_0, t_0, t)]\, dt}.$$