Ueber die sogenannte H-Curve.

Von

Ludwig Boltzmann in Wien.

Es sei mir gestattet die Eigenschaften dieser Curve, welche ich zur Versinnlichung gewisser gastheoretischer Sätze benutzte*), hier unabhängig von ihrer wärmetheoretischen Bedeutung kurz zu behandeln. Diese Eigenschaften treten am klarsten und in der einfachsten Weise hervor, wenn man die Construction der Curve an ein ganz triviales Beispiel der Wahrscheinlichkeitsrechnung anknüpft.

Wir betrachten zunächst folgenden einfachen Fall: In einer Urne seien gleich viel weisse und schwarze Kugeln von sonst vollkommen gleicher Beschaffenheit. Wir machen aus der Urne, vom Zufalle geleitet, eine beliebige ungerade Anzahl $(2N+1)$ von Zügen, welche wir der Reihe nach mit

$$Z_{-N},\ Z_{-N+1},\ \ldots\ Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots\ Z_N$$

bezeichnen. Nach jedem Zuge werfen wir die gezogene Kugel wieder in die Urne zurück.

Es sei ferner n eine beliebige gerade ganze Zahl, die kleiner als $2N+2$ ist. Wir bezeichnen mit a_k die Anzahl der weissen Kugeln, welche zusammen bei den n Zügen Z_k, $Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ gezogen wurden, wobei k eine beliebige der $2N-n+2$ positiven oder negativen ganzen Zahl inclusive der Null sein kann, welche zwischen $-N$ und $N-n+1$ inclusive liegen.

Wir construiren nun in der Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Jedem Werthe des k soll derjenige Punkt B_k entsprechen, dessen Abcisse

$$OA_k = x = k/n$$

und dessen Ordinate $A_k B_k = y$ gleich dem stets mit positiven Zeichen zu nehmenden Zahlenwerthe des Ausdruckes $1 - \frac{2a_k}{n}$ ist. Bezeichnen

---

*) Nature 51, S. 413, 28. Febr. 1895. Wied. Ann. Bd. 60, S. 392, 1897. Daselbst findet sich sogar eine Figur einer H-Curve.

wir diesen Zahlenwerth mit einem darüber gesetzten Striche, so ist also

$$(1) \qquad y = \overline{1 - \frac{2a_k}{n}}\,{}^{*)}.$$

Wir erhalten so zunächst eine Reihe von $2N - n + 2$ discreten Punkten B_{-N}, B_{-N+1}, ... B_{N+1-n}. Wir wollen nun sowohl die Zahl n als auch die Zahl N sehr gross gegenüber 1 werden lassen, aber die letztere Zahl in noch weit höherem Masse, so dass der Quotient N/n ebenfalls sehr gross gegen 1 wird, wobei wir zwar an beliebig grosse aber immer endliche (nicht im metaphysischen Sinne unendliche) Zahlen denken. Dann werden je zwei benachbarte Punkte B_k und B_{k+1} sehr nahe an einander rücken, denn die Differenz ihrer Abscissen sowie ihrer Ordinaten verschwindet mit wachsendem n; erstere ist nämlich gleich $1/n$, letztere hat höchstens den Zahlenwerth $2/n$.

Wir wollen daher die Reihe der mit B bezeichneten Punkte eine Curve und zwar die H-Curve des Lottos nennen, ohne damit behaupten zu wollen, dass sie auch wirklich alle Eigenschaften besitzt, welche sonst in der Geometrie von Curven gefordert werden. Es fehlt nämlich die Eigenschaft, dass die Lage jedes Punktes durch eine unveränderliche analytische Formel definirt ist. Diese Lage ist vielmehr vom Resultate eines wirklichen von unbekannten Ursachen abhängigen Vorganges bestimmt, man könnte fast sagen dem Zufall überlassen. Trotzdem lässt sich nicht läugnen, dass man, wenn N eine noch so grosse Zahl ist, wirklich $2N + 1$ Züge in der geschilderten Weise machen und wenn man auch noch für n einen bestimmten Werth annimmt, der klein gegen N aber gross gegen 1 ist, die betreffende H-Curve d. h. die betreffenden $2N - n + 1$ Punkte B zeichnen könnte. Würde man nochmals $2N + 1$ und dann wiederum $2N + 1$ Züge machen, so könnte man beliebig viele andere H-Curven zeichnen, welche zwar durchaus nicht untereinander gleich wären, aber doch gewisse gemeinsame Eigenthümlichkeiten hätten, um deren Auffindung es sich eben handelt.

Da n sehr gross angenommen wird, so ist a_k höchst wahrscheinlich d. h. für die weitaus grösste Mehrzahl der Werthe von k sehr nahe gleich $\frac{1}{2}n$, daher y sehr nahe gleich Null. Die H-Curve fällt

*) Man könnte auch $y = \left(1 - \frac{2a_k}{n}\right)^b$ setzen und unter b die Zahl 2 oder eine andere positive Zahl verstehn. Man würde dann eine grössere Mannigfaltigkeit von H-Curven erhalten. Da es mir aber gegenwärtig keineswegs auf eine erschöpfende geometrische Discussion aller möglichen der H-Curve verwandten Gebilde, sondern nur auf eine möglichst kurz gehaltene Versinnlichung der in der Physik Anwendung findenden Eigenschaften derselben ankommt, so beschränke ich mich auf den im Texte betrachteten Fall.

also nahezu an allen Stellen fast mit der Abscissenaxe zusammen. Wenn man aber nur N gross genug wählt, so wird man auch Stellen der H-Curve erhalten, wo sich dieselbe um ein endliches Stück von der Abscissenaxe entfernt. Wir wollen solche Stellen Buckel nennen.

Wenn wir z. B. $N = 1000 \, . \, 2^n$ setzen, wobei schon n eine sehr grosse Zahl ist, so haben wir Chance, dass im ganzen Verlaufe aller $2N + 1$ Züge von Z_{-N} bis Z_N 2000 Mal der Fall vorkommt, dass in einer Reihe von n sich folgenden Zügen jedes Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. Ist k der Index des ersten Zuges in dieser Reihe, so ist $a_k = 0$, daher $A_k B_k = y = 1$. Ebenso wird die Ordinate der H-Curve gleich 1, wenn n Mal hintereinander eine weisse Kugel gezogen wird, was für $N = 1000 \, . \, 2^n$ im Verlaufe aller $2N + 1$ Züge ebenfalls ungefähr 2000 Mal vorkommen wird. Der grösstmögliche Buckel, dessen höchste Ordinate gleich 1 ist, wird daher im Verlaufe aller $2N + 1$ Züge etwa 4000 Mal vorkommen. Noch weit grösser ist die Anzahl der Buckel von geringerer aber um Endliches von Null verschiedener Höhe.

Die im Bisherigen betrachtete H-Curve besitzt trotz ihrer Stetigkeit keine Tangente in des Wortes strengster Bedeutung d. h. die Richtung der von einem bestimmten Punkte der Curve zu einem sehr nahen Punkte gezogenen Sehne nähert sich nicht unbedingt einer bestimmten Grenze, wenn der letztere Punkt dem ersteren immer näher rückt.

Lassen wir z. B. k um eine Einheit wachsen, gehen also vom Punkt B_k zum Punkte B_{k+1} über, so wächst die Abscisse um $1/n$. Ferner ist a_k die Anzahl der in den Zügen Z_k, $Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ gezogenen weissen Kugeln. Lassen wir k um eine Einheit wachsen, so scheidet von diesen Zügen der Zug Z_k aus, dagegen kommt der Zug Z_{k+n} dazu. Wurde bei jedem dieser Züge die gleiche Farbe gezogen, so ändert sich der Werth von a_k, daher auch der von y nicht. Die Gerade $B_k B_{k+1}$ ist also der Abscissenaxe parallel. Würden dagegen Kugeln von verschiedener Farbe gezogen, so ändert sich der Werth von a_k um eine Einheit. Die Aenderung der Ordinate beim Uebergang vom Punkte B_k zum Punkte B_{k+1} hat also nach Gleichung 1 den Zahlenwerth $2/n$ und ist doppelt so gross als der Abscissenzuwachs, so dass die Gerade $B_k B_{k+1}$ mit der Abscissenaxe nach der einen oder andern Seite einen Winkel bildet, dessen Tangente 2 ist.

Trotzdem nähert sich die vom Punkte B_k zum Punkte B_{k+l} gezogene Sehne in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle einer Limite, welche wir die Quasitangente nennen wollen, wenn l gross gegen die Einheit aber kleiner als n gemacht wird.

Sei z. B. die Ordinate von $B_k = 1$, so dass B_k die grösste Ordinate eines Buckels von der höchsten möglichen Höhe ist. Dann ist das dazu gehörige a_k gleich Null oder n. Wir betrachten den ersten

Fall $a_k = 0$, d. h. bei den Zügen Z_k, $Z_{k+1}, \ldots Z_{k+n-1}$ wurde keine einzige weisse Kugel gezogen. Gehen wir zum Punkte B_{k+l} über, lassen also k um l wachsen, so sind die l Züge $Z_k \ldots Z_{k+l-1}$ hievon wegzulassen, dagegen die l Züge $Z_{k+n} \ldots Z_{k+n+l-1}$ hinzuzunehmen. Wir wissen, dass in den ersten l Zügen keine einzige weisse Kugel gezogen wurde; in den letzteren werden, wenn l eine grosse Zahl ist, wahrscheinlich nahezu $\frac{1}{2} l$ weisse Kugeln gezogen worden sein. Daher ist a_{k+l} wahrscheinlich um $^1/_2\, l$ grösser als a_k. Nach Formel (1) ist also die Ordinate des Punktes B_{k+l} um l/n kleiner als die des Punktes B_k und da die Abscisse des ersteren Punktes um ebensoviel grösser ist als die des letzteren, so ist die Gerade $B_k B_{k+l}$ unter einem Winkel von 45^0 gegen die Abscissenaxe geneigt. In ähnlicher Weise lässt sich auch die Richtung der Quasitangente berechnen, wenn die Ordinate von B_k einen andern um Endliches von Null verschiedenen Werth hat. Wenn B_k eine nur sehr wenig von Null verschiedene Ordinate hat, also jener Mehrzahl von Curvenpunkten angehört, welche sehr wenig von der Abscissenaxe entfernt sind, so ist die Quasitangente der Abscissenaxe parallel.

Ich rathe vielleicht nicht fehl, wenn ich glaube, dass die Geometer von Fach der H-Curve spotten werden. Dem gegenüber möchte ich nur erinnern, dass die von Meteorographen, Barometergraphen, Thermometergraphen etc. gezeichneten Curven einen Habitus zeigen, der an die Eigenschaften der H-Curve erinnert. Es ist auch keineswegs ausgeschlossen, dass bei den letztern Curven in jedem Momente die Lage des zu erwartenden Punktes durch vielerlei sich entgegenwirkende Ursachen bestimmt ist, welche nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen bald etwas höher bald etwas tiefer gelegene Punkte bedingen, aber im Verlaufe langer Zeit doch Regelmässigkeiten zeigen, so dass die nach einem etwas entfernteren Punkte gezogene Sehne an jeder Stelle eine ziemlich fixe Neigung gegen die Abscissenaxe zeigt, unbeschadet der zahllosen kleinen Zacken der Curve. Ja es kann sogar öfter als wir meinen der Fall eintreten, dass eine Kraft, die uns constant scheint, es nur im Mittel in einem längeren Intervalle ist, während sie, wenn man ihren Verlauf in den kleinsten Zeittheilen beobachten könnte, daselbst den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Oscillationen aufweisen würde.

Ich will nur noch auf eine einzige Eigenschaft der H-Curve etwas näher eingehen. Es ist offenbar gleichgiltig, ob wir die $2N+1$ Züge in der Reihenfolge Z_{-N}, $Z_{-N+1}, \ldots Z_N$ oder in der umgekehrten $Z_N, Z_{N-1}, \ldots Z_{-N}$ anordnen. Es braucht zwar nicht jede einzelne H-Curve bezüglich der Ordinatenaxe vollkommen symmetrisch zu sein, aber durchschnittlich verläuft jede H-Curve in der Richtung der wachsenden Abscissen nach dem gleichen Gesetze wie in der Richtung der abnehmenden. Es kann nicht möglich sein zu beweisen, dass sie eine Eigenschaft für wachsende Abscissen, nicht aber eben so gut für abnehmende besitze.

Wir wollen nun eine Curve J zeichnen, welche dieselbe Symmetrie bezüglich der positiven und negativen Abscissen aber in jedem Punkte eine Tangente im gewöhnlichen Sinne hat. Dieselbe soll, wie die H-Curve grösstentheils sehr nahe der Abscissenaxe verlaufen, nur an einzelnen Stellen soll sie sich um Endliches darüber erheben. Wir wollen alle Punkte P der Curve J zeichnen, denen eine bestimmte ungewöhnlich grosse Ordinate y_1 zukömmt. Wenn wir von jedem dieser Punkte aus um ein endliches Stück in der positiven oder negativen Abscissenrichtung fortschreiten, so werden wir wohl auch in der Regel zu Punkten mit kleineren Abscissen gelangen, allein der Differentialquotient dy/dx wird für ebensoviele der Punkte P positiv als negativ sein. Der Mittelwerth dieses Differentialquotienten für alle Punkte P ist Null.

Dies gilt jedoch nicht für die H-Curve. Wir wollen auf derselben wieder alle Punkte Q verzeichnen, denen eine um Endliches von Null verschiedene Ordinate y_1 zukömmt. Lassen wir für alle diese Punkte die Abscisse um $\Delta x = 1/n$ wachsen, so werden zu diesen Zuwächsen des x zwar theils positive theils negative Zuwächse der Ordinate gehören. Setzen wir dagegen für die gleichen Punkte den Zuwachs Δx der Abscisse gleich l/n, wobei l eine grosse Zahl ist, so ist der dazu gehörige Zuwachs Δy der Ordinate nicht nur fast ausnahmslos negativ, sondern es eilt der Mittelwerth des Quotienten $\Delta y/\Delta x$ für alle Punkte Q sogar einer bestimmten Limite zu, wenn l immer mehr wächst, so lange es nur kleiner als n bleibt.

Natürlich gilt dasselbe beim Fortschreiten in der positiven und negativen Abscissenrichtung. Die Limite des Quotienten $\Delta y/\Delta x$ ist also der Grösse nach gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet für positive und negative Δx.

Für die Lage des Punktes Q sind 3 Fälle möglich. Erstens: derselbe kann auf der höchsten Spitze eines Buckels der H-Curve liegen, so dass diese von ihm aus nach beiden Seiten abfällt. Zweitens: er kann der höchsten Spitze eines Buckels so nahe liegen, dass die Curve zwar nach der einen oder andern Seite oder sogar nach beiden noch ansteigt, wenn man in der Abscissenrichtung um $1/n$ oder ein kleines Vielfache davon vorwärts geht, aber sobald man die Abscisse um l/n wachsen oder abnehmen lässt, nimmt die Ordinate ab, wenn l eine sehr grosse Zahl ist, die noch immer klein gegen n sein kann. Der dritte Fall ist der, dass der Buckel, auf dem sich der Punkt Q befindet, in endlicher Entfernung gleich hoch oder um ein endliches

Stück grösser als y_1 ist. Es ist nun die charakteristische Eigenschaft der H-Curve, dass die Häufigkeit ihrer Buckel mit wachsender Höhe derselben so rasch abnimmt, dass unter allen Punkten Q nur verschwindend wenige vorkommen, für welche der dritte Fall eintritt.

Die eben auseinandergesetzten charakteristischen Eigenschaften der H-Curve erfahren keine Beeinträchtigung, wenn man von den mit B bezeichneten Punkten je 2 benachbarte durch eine beliebige sehr kleine Curve verbindet. Algebraisch können solche kleine Verbindungscurven in folgender Weise construirt werden. Wir nehmen an, der Zug Z_0 geschehe zur Zeit Null, der Zug Z_1 zur Zeit $\tau = 1/n$, Z_2 zur Zeit $2\tau = 2/n \ldots Z_k$ zur Zeit $k\tau$. Ferner verstehen wir unter $f_k(t)$ eine Function, welche immer den Werth Null hat, wenn beim Zuge Z_k eine schwarze Kugel gezogen wurde. Wurde dagegen beim Zuge Z_k eine weisse Kugel gezogen, so soll sein

für $t \leqq (k-n-\nu)\tau : f_k(t) = 0$,

„ $(k-n-\nu)\tau \leqq t \leqq (k-n)\tau : f_k(t) = \varphi[t-(k-n-\nu)\tau]$,

„ $(k-n)\tau \leqq t \leqq k\tau : f_k(t) = 1$,

„ $k\tau \leqq t \leqq (k+\nu)\tau : f_k(t) = \varphi[(k+\nu)\tau - t]$,

„ $(k+\nu)\tau \leqq t : f_k(t) = 0$.

Den einfachsten Fall erhält man, wenn man $\nu = 1$ annimmt. Man kann aber auch ν gleich 2 oder 3 ja selbst gleich einer Zahl setzen, die gross gegen 1 ist, wenn sie nur klein gegen n ist. $\varphi(u)$ kann dabei eine beliebige Function u sein, welche für $u = 0$ den Werth Null, für $u = \nu\tau$ den Werth 1 hat und vom ersteren bis zum letzteren Werthe continuirlich wächst. Setzt man dann

$$y = \sum_{k=-N+n}^{k=n} f_k(t)$$

und trägt auf der Abscissenaxe die Werthe von t, auf der Ordinatenaxe die dazu gehörigen Werthe von y auf, so erhält man eine im mathematischen Sinne continuirliche Curve. Für $\nu = 1$ fallen sämmtliche Ordinaten dieser Curve, welche zu Werthen des t gehören, die ganze Vielfache von τ sind, exact mit den Ordinaten der einzelnen Punkte zusammen, aus denen früher die H-Curve bestand. Für andere Werthe des ν weichen sie nur um Verschwindendes ab.

Die neue H-Curve, welche wir die continuirlich gemachte H-Curve des Lotto's nennen wollen, hat also sogar gewissermassen eine Tangente im gewöhnlichen Sinne des Wortes, wenn der Abscissenzuwachs kleiner als $1/n$ ist. Ist dagegen der Abscissenzuwachs Δx gross gegen $1/n$ aber noch immer klein gegen 1, so nähert sich der Quotient $\Delta y/\Delta x$ nochmals einer andern Limite, welche der Quasitangente entspricht.

Es kann natürlich hier bloss meine Absicht sein zu zeigen, dass Curven von diesen Eigenschaften überhaupt geometrisch construirbar sind und dass es daher keinen Widerspruch involviren kann, jener H-Curve analoge Eigenschaften zuzuschreiben, welche in der Theorie von Gasen vorkommt, die aus einer sehr grossen endlichen Zahl vollkommen abgeschlossener Moleküle bestehen. Für solche Gase nimmt die Grösse H, welche das Mass der Wahrscheinlichkeit oder Ungeordnetheit eines Zustandes darstellt, mit ausserordentlicher Wahrscheinlichkeit zu, wenn man von einem geordneten Zustande ausgeht, d. h. von einem solchen, für den H um Endliches von seinem Maximalwerthe verschieden ist. Später bleibt dann H durch enorm lange Zeit gleich seinem grössten Werthe, nimmt aber nach noch weit längerer Zeit abermals einen Werth an, der um Endliches von seinem Maximalwerthe verschieden ist.

Die H-Curve gleicht der zuerst betrachteten, wenn die Stösse unendlich kurze Zeit dauern, da dann der Werth der Grösse H nur im Momente des Stosses eine plötzliche Aenderung erfährt; sie gleicht aber der continuirlich gemachten H-Curve des Lotto's, wenn die Stösse eine kurze aber endliche Zeit dauern. Die umgekehrte Zeitfolge der Zustände des Gases ist immer auch möglich. Es wird also auch möglich sein, dass H zu Anfang noch sehr nahe seinem Maximalwerthe ist und in verhältnissmässig kurzer Zeit davon bedeutend abweicht; allein die Aufgabe einen Anfangszustand sämmtlicher Gasmoleküle zu finden (wir wollen ihn einen kritischen Anfangszustand nennen), welcher der letzteren Bedingung genügt, ist gewissermassen mehrdeutig. Denn ein solcher Anfangszustand ist nicht durch den dazu gehörigen Werth des H bestimmt, sondern nur dadurch, dass die Anfangslagen und Anfangsbewegungen sämmtlicher Moleküle einander in bestimmter Weise angepasst sind.

Natürlich können sich wirkliche Körper niemals absolut wie Systeme verhalten, die aus einer grossen endlichen Zahl von Gasmolekülen bestehen. Dies gilt schon desshalb, weil ja erstere niemals ganz ausser Contakt mit allen übrigen Körpern gebracht werden können. Dass sich wirkliche Körper häufig angenähert wie Systeme verhalten, welche aus einer endlichen Zahl von Gasmolekülen bestehen, die anfangs einen geordneten Zustand haben, für den H wesentlich von seinem Maximalwerthe verschieden ist, dagegen niemals wie Systeme von Gasmolekülen, die sich anfangs in einem kritischen Zustande befinden, für den also H anfangs noch seinen Maximalwerth hat, aber bald wesentlich kleiner wird, erklärt die mechanische Naturanschauung daraus, dass der Anfangszustand der Welt einem geordneten Zustande von Molekülen entspricht.

Da wir nun die Körper, mit denen wir experimentiren, immer dieser Welt entnehmen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich anfangs in einem geordneten Zustande befinden, eine sehr grosse und dieser Zustand geht, wenn wir äussere Einflüsse möglichst fern halten, jedesmal in einen ungeordneten über. Dass eine Welt ebensogut denkbar wäre, in welcher alle Naturvorgänge in verkehrter Zeitfolge ablaufen würden, unterliegt keinem Zweifel; jedoch hätte ein Mensch, welcher in dieser verkehrten Welt leben würde, keineswegs eine andere Empfindung als wir. Er würde eben das, was wir Zukunft nennen, als Vergangenheit und „umgekehrt“ bezeichnen.

Wien, Weihnachten 1897.