[DREI FRAGMENTE ÜBER ELLIPTISCHE MODULFUNCTIONEN.]

[1.]

Ist

$$\frac{n}{m} = \frac{\mu(1-2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}-2e^{-9M\pi}+\cdots)^2}{\mu(1+2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}+2e^{-9M\pi}+\cdots)^2},$$

so kann man statt M setzen

$$\cfrac{1}{2ai+\cfrac{1}{2bi+\cfrac{1}{2ci+\cfrac{1}{2di+\cfrac{1}{2ei+\text{etc.}+\cfrac{1}{M}}}}}},$$

wo a, b, c, d, e u. s. w. eine beliebige ungerade Menge ganzer reeller Zahlen bedeuten; oder auch

$$\frac{pM+2qi}{r+2sMi} = \frac{M+2(qr-psMM)i}{rr+4ssMM},$$

wo p, q, r, s beliebige, der Bedingung

$$pr+4qs = 1$$

Genüge leistende ganze reelle Zahlen sind.

[2.]

DIE REDUCTION VON pM, qM, rM AUF DIE EINFACHSTE FORM.

Es sei $M = \frac{\alpha+\beta i}{\delta-\gamma i}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze reelle Zahlen und Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Factor. Man setze

$$\alpha\alpha+\beta\beta = A, \quad \alpha\gamma+\beta\delta = B, \quad \gamma\gamma+\delta\delta = C, \quad \alpha\delta-\beta\gamma = \sqrt{(AC-BB)} = D.$$

Man suche die einfachste Form des Determinanten $-DD$, welche der Form (A, B, C) aequivalent ist; sie sei (a, b, c).

Dann lassen sich die Functionen von M auf Functionen von

$$\frac{D+bi}{a}$$

zurückführen. Der Algorithmus ist dieser

$$\begin{array}{lll}
\frac{D+Bi}{A} = M, & DD+BB = AA', & B+B' = hA', \\
\frac{D+B'i}{A'} = M', & DD+B'B' = A'A'', & B'+B'' = h'A'', \\
\frac{D+B''i}{A''} = M'', & DD+B''B'' = A''A''', & B''+B''' = h''A''', \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot pM &= pM' \quad \text{für gerades } h, \\
&= qM' \quad \text{für ungerades } h,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^h\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot qM = rM', \qquad \varepsilon = \sqrt{i},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot rM &= qM' \quad \text{für gerades } h, \\
&= pM' \quad \text{für ungerades } h.
\end{aligned}$$

Wenn man aus h, h', h'' u. s. w. die Transformation von (A, B, A') in (a, b, c) ableitet, so werden deren Elemente (ob sie gerade oder ungerade sind) entscheiden, welche Function von $\frac{D+bi}{a}$ mit der gegebnen von M so zusammen-hängt, dass letztere in

$$\varepsilon^{H}\sqrt{\left(\frac{D+Bi}{A}\cdot\frac{D+B'i}{A'}\cdot\frac{D+B''i}{A''}\cdots\right)}$$

multiplicirt werden muss.

Wo M nicht rational ist, mag man $D = -1$ setzen und den Algorithmus ebenso bilden; nemlich, wenn $M = g + hi$, so geht man von der Form $\left(\frac{1}{g}, \frac{h}{g}, \frac{gg+hh}{g}\right)$ (Det. -1) aus, sucht ihre Aequivalente etc.

[3.]

$$pt = 1 + 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} + 2e^{-9\pi t} + \text{etc.}$$

$$qt = 1 - 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} - 2e^{-9\pi t} + \text{etc.}$$

$$rt = 2e^{-\frac{1}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{9}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{25}{4}\pi t} + \text{etc.}$$

Um die Gleichung

$$\frac{qt}{pt} = A$$

aufzulösen, setze man $AA = \frac{n}{m}$ und suche das a.-g. Mittel zwischen m und n; es sei dasselbe $= \mu$. Man suche ferner das a.-g. Mittel zwischen m und $\sqrt{(mm-nn)}$ oder, was dasselbe ist, zwischen $(m+n)$ und $(m-n)$; dieses sei $= \lambda$. Man hat dann $t = \frac{\mu}{\lambda}$.

Man erhält so nur Einen Werth von t; sämmtliche andere werden dann in der Formel

$$\frac{\alpha t - 2\beta i}{\delta - 2\gamma t i}$$

enthalten sein, wo α, β, γ, δ alle ganzen Zahlen bedeuten, die der Gleichung:

$$\alpha\delta - 4\beta\gamma = 1$$

Genüge leisten.

Um aus A abzuleiten

$$B = \frac{q(\frac{1}{2}t)}{p(\frac{1}{2}t)},$$

ist eine biquadratische Gleichung aufzulösen:

$$(B-A)^4 = 4(A-A^3)(B-B^3),$$

oder

$$(1-AB)^4 = (1-A^4)(1-B^4).$$

Den vier Wurzeln correspondiren $\frac{1}{3}t$, $\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}i$, $\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}i$, $3t$.

Für $A = \frac{1}{2}$ suche man zwei a.-g. Mittel

$$m = 4, \qquad n = 1$$

$$\mu = 2{,}2430340, \qquad \lambda = 3{,}9364917.$$

Also

$$\begin{aligned} t &= 0{,}56983, \\ \log t &= 9{,}7557537, \\ \log(\pi \log e) &= 0{,}1349342, \\ \hline &\ 9{,}8906879, \\ \log e^{-\pi t} &= -0{,}7774777, \\ &= 9{,}2225223, \\ pt &= 1{,}33540375, \\ qt &= 0{,}66770187. \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU DEN FRAGMENTEN ÜBER ELLIPTISCHE MODULFUNCTIONEN.

Der durch den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels gegebene Ansatz, vermöge dessen sich GAUSS den Zugang zur Theorie der elliptischen Functionen und der zugehörigen Modulfunctionen gebahnt hat, brachte es mit sich, dass bei GAUSS (entgegen der neuerdings für gewöhnlich befolgten Entwicklungsweise) die Modulfunctionen den allgemeinen elliptischen Functionen voranstehen. Dieser Standpunkt ist insofern der natürliche, als die Modulfunctionen Functionen einer einzigen Variabelen bez. zweier homogener Variabelen sind, während die allgemeinen elliptischen Functionen von zwei Argumenten bez. von drei homogenen Argumenten abhängen.

Der fragliche Algorithmus in richtiger Allgemeinheit ist in Art. 12*) definirt. Aus drei zunächst reellen

---

*) Hier und weiterhin sind die Artikel der aus dem Nachlass herausgegebenen Abhandlung über das arithmetisch-geometrische Mittel (ges. Werke III p. 361—403) gemeint.

Grössen a, b, c werden die beiden Mittel $M(a, b)$ und $M(a, c)$ abgeleitet und in ihrer Abhängigkeit vom gegebenen Tripel a, b, c studirt.

Zwei Gesichtspunkte werden alsdann für die GAUSS'sche Entwicklung fundamental. Erstlich handelt es sich um den auch in der späteren Entwicklung der Theorie der elliptischen Functionen so bedeutungsvollen Gedanken der Inversion, d. i. um das Problem, die ursprünglich gegebenen a, b, c in ihrer Abhängigkeit von $M(a, b)$ und $M(a, c)$ aufzufassen. Andrerseits wird beim Ausbau dieser Auffassung die Annahme der a, b, c bez. $M(a, b)$, $M(a, c)$ als complexer Variabeler natürlich bez. nothwendig.

In erster Hinsicht ist es ein wichtiges Ergebniss, dass GAUSS bereits in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die Reihenentwicklungen für die Nullwerthe der drei geraden ϑ-Functionen gekannt hat. Die hierbei angewendete Überlegung (s. Art. 16) ist sowohl im Hinblick auf die Erfassung des wahren Zieles der Untersuchung, wie auch wegen der im einzelnen befolgten Schlussweisen höchst bemerkenswerth.

Die Zulassung complexer Variabelen erschien namentlich wegen der Entwicklungen in Art. 17 geboten. Es werden daselbst die Grundformeln für die lineare Transformation der ϑ-Nullwerthe aufgestellt. Von hier aus aber hat GAUSS eine Reihe wichtiger Grundsätze der Theorie der Modulfunctionen erkannt, die erst in neuerer Zeit allgemein zugänglich geworden sind.

Man wolle in dieser Hinsicht erstlich die Angaben des Art. 17 vergleichen, demnächst aber die vorstehend abgedruckten Fragmente. Die Grösse t des Fragmentes [3] hängt mit dem Periodenquotienten ω der neueren Theorie vermöge der Gleichung $\omega = it$ zusammen. Die Erzeugenden der Gruppe aller linearen Periodentransformationen werden daraufhin:

$$t' = t + i, \qquad t' = \frac{1}{t}\cdot$$

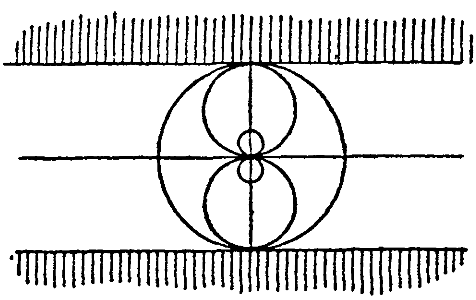
Mit der Zusammensetzung der übrigen Substitutionen der genannten Gruppe aus diesen Erzeugenden hat sich GAUSS wiederholt beschäftigt. Neben den Angaben des Fragmentes [1] sei noch die Formel erwähnt

$$\frac{[\alpha, \beta, \ldots, \nu]\,\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \nu]\,i}{-i\,[\alpha, \beta, \ldots, \mu]\,\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \mu]},$$

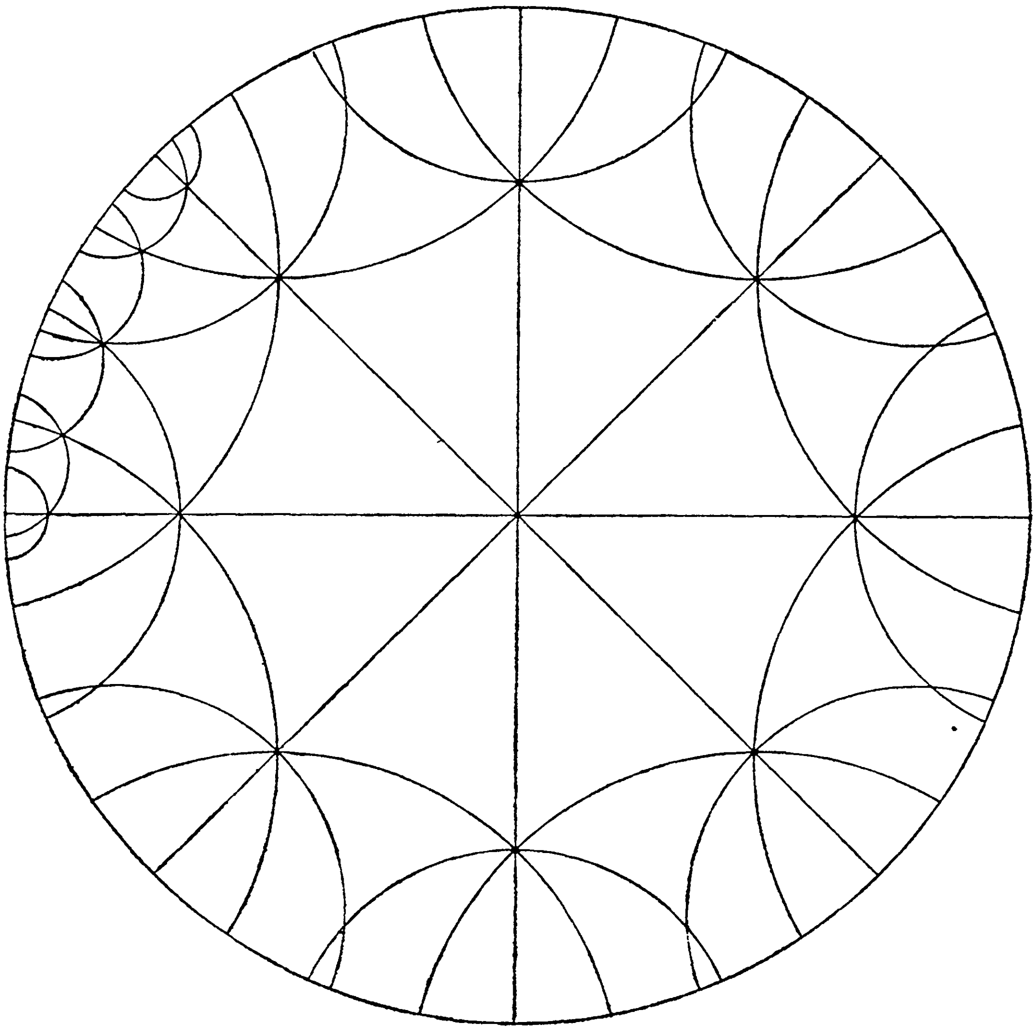
welche sich in einem »Cereri Palladi Junoni sacrum, Febr. 1805« betitelten Hefte findet. Als Beispiele sind ebenda die Kettenbruchentwicklungen der beiden Substitutionen gegeben:

$$\frac{128\theta + 37i}{-45i\theta + 13}, \qquad \frac{121\theta + 36i}{-84i\theta + 25}\cdot$$

Sowohl zur Erläuterung der Kettenbruchentwicklung der Substitutionen als auch zum Vollzug functionentheoretischer Schlüsse hat sich GAUSS derjenigen geometrischen Darstellungsweise bedient, welche zur Grundlage der neueren Theorie der Modulfunctionen geworden ist. In dem eben schon erwähnten Hefte hat GAUSS die hierneben wiedergegebene Figur gezeichnet. Da sich daneben die erwähnten Kettenbruchentwicklungen von Substitutionen finden, so wird GAUSS die Figur als Mittel zur Veranschaulichung dieser Kettenbruchentwicklungen benutzt haben. In der That hat man ja hier den Beginn des wohlbekannten Netzes der Kreisbogendreiecke, welches der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegt.



Dass GAUSS das hierbei in Betracht kommende »Princip der symmetrischen Vervielfältigung von Kreisbogendreiecken« allgemein aufgefasst hat, ja dass ihm sogar der Charakter der »natürlichen Grenze« eines so zu gewinnenden Dreiecksnetzes nicht verborgen blieb, geht auch aus der zweiten hier zum Abdruck kommenden Zeichnung hervor, welche sich im Nachlass auf einem



gesonderten Blatte vorfand. Es handelt sich dabei um Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, bei denen der in der Zeichnung hervorgehobene Orthogonalkreis die natürliche Grenze abgiebt. Neben der Zeichnung finden sich, von GAUSS' Hand geschrieben, folgende Angaben:

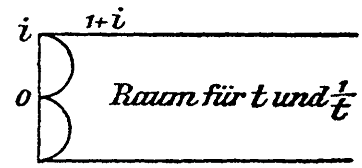
»*Mittelpunkt des ersten Kr.* $\sqrt[4]{2}$,

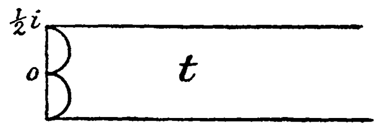
Halbmesser $\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$,

$$\textit{M. d. zw. Kr.}\quad \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right\},$$

$$\textit{Halbmesser}\quad \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right\}.«$$

Einen mehr functionentheoretischen Charakter haben die in Bd. III p. 477 u. f. der ges. Werke kurz angedeuteten Figuren, welche hier etwas ausführlicher nochmals reproducirt sind. Den in der oberen Figur gezeichneten Bereich charakterisirt GAUSS dahin, dass für ihn die imaginären Bestandtheile von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegen. Es handelt sich hier um den »Discontinuitätsbereich der Congruenzgruppe zweiter Stufe« im Sinne der neueren Theorie der Modulfunctionen. GAUSS hat erkannt, dass die Punkte dieses Bereiches eindeutig auf alle diejenigen complexen Werthe der Function





$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^2$$

bezogen sind, welche positiven reellen Bestandtheil haben. Es handelt sich hierbei um die Function k' der neueren Theorie, welche den sogen. complementären Modul des elliptischen Integrals erster Gattung in seiner Abhängigkeit vom Periodenquotienten darstellt. In der a. a. O. von GAUSS angegebenen Gleichung:

$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^2 = A$$

ist übrigens A als complexe Zahl mit einem absoluten Betrage $\leqq 1$ anzunehmen; andrenfalls müsste man den Bereich der t-Ebene in geeigneter Weise verdoppeln.

Hiermit hängen auch die Angaben zu Anfang des Fragmentes [3] unmittelbar zusammen. Es ist dazu nur noch zu bemerken, dass man sogar alle Lösungen der Gleichung:

$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^4 = A^4$$

erhält, falls man in der angegebenen Weise alle der Bedingung $\alpha\delta - 4\beta\gamma = 1$ genügenden ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zulässt.

Nicht direct im Zusammenhang hiermit stehen die gegen Ende des Fragmentes [3] angeschlossenen Bemerkungen über die Berechnung von $B = \frac{q(\frac{1}{3}t)}{p(\frac{1}{3}t)}$ aus A. Die hier mitgetheilte Gleichung hat JACOBI späterhin als Modulargleichung für Transformation dritten Grades wiedergefunden, und sie tritt bekanntlich in besonders eleganter (irrationaler) Gestalt auch bei LEGENDRE auf.

Die am Schlusse des Fragmentes beigefügten numerischen Angaben sind übrigens in den letzten Decimalstellen mehrfach ungenau.

Den Zusammenhang zwischen der Theorie der Modulfunctionen und der Arithmetik der binären quadratischen Formen von negativer Determinante hat GAUSS frühzeitig erkannt. Neben Art. 17 ist für die Reductionstheorie der Formen namentlich das Fragment [2] von Wichtigkeit. Dabei beachte man insbesondere die Schlusszeile; GAUSS hat daselbst ausgesprochen, dass die Reductionstheorie keineswegs an die Voraussetzung ganzzahliger oder rationaler Coefficienten gebunden ist.

FRICKE.