GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ÜBER DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE.]

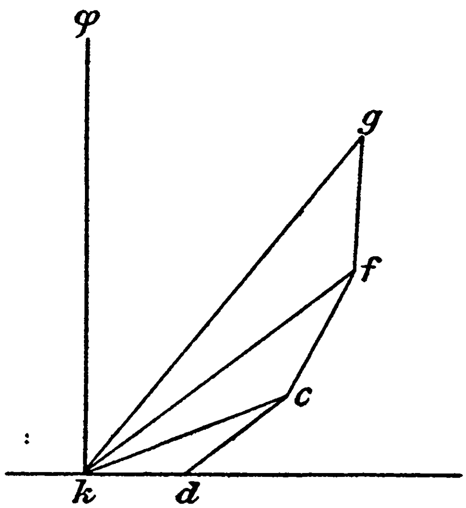
Gauss an Bolyai. Helmstedt, 16. December 1799.

.... Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann, so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desideriren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewohl mir meine andern ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wohl zu dem Ziele, das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweist, z. B. wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, dass, so entfernt man auch die drei Endpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach' doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grossen Publikums (worunter auch mancher gehört, der für einen geschickten Mathematiker gehalten wird) einernten, denn ich überzeuge mich immer mehr, dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiss den Dank aller derer, deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann. — In Braunschweig ist ein Emigrant Namens Chauvelot, ein nicht schlechter Geometer, welcher vorgibt, die Theorie der Parallellinien ganz begründet zu haben und seine Arbeit nächstens wird drucken lassen, aber ich verspreche mir eben nichts von ihm. In Hindenburgs Archiv, 9tes Stück, befindet sich gleichfalls ein neuer Versuch über denselben Gegenstand, von einem gewissen Hauff, welcher unter aller Kritik ist. . . . . . .

Gauss an Bolyai. Braunschweig, 25. November 1804.

. . . . Ich habe Deinen Aufsatz mit grossem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen, und mich recht an dem ächten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermassen schon darum parteiisch scheinen könnte, weil Dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Ähnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knoten versuchte, und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges unverholenes Urtheil. Und diess ist, dass Dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstosses, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben Gruppe von Klippen gehört, woran meine Versuche bisher scheiterten) mit so vieler Klarheit, als mir möglich ist, ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, so viel in meinen Kräften steht. Ich komme nun sogleich zur Sache.

Bei allen übrigen Schlüssen finde ich gar nichts wesentliches einzuwenden: was mich nicht überzeugt hat, ist bloss das Räsonnement im XIII Artikel. Du denkst Dir daselbst eine ins Unbestimmte fortgeführte Linie $\Pi \ldots : kdcfg \ldots$, die aus lauter geraden und gleichen Stücken besteht: kd, dc, cf, fg etc., und wo die Winkel kdc, dcf, cfg etc. einander gleich sind, und willst beweisen, dass Π über kurz oder lang nothwendig über $k\varphi$ hinaus gehen werde. Zu dieser Absicht lässest Du die gerade Linie $kd\infty = Q$ sich nach der Seite zu, wo Π liegt, um k herumbewegen, so dass sie nach und nach von einer Seite des Polygons Π zur folgenden kommt. Du zeigst vortrefflich, dass Q so, wie es stufenweise durch d, c, f, g etc. geht, jedesmal näher an $k\varphi$ kommt: gegen alles diess lässt sich Nichts einwenden: aber nun fährst Du fort



>»Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque dum in $k\varphi$, $\varphi\infty$ pervenerit« etc.

und diese Schlussfolge ist es, die mir nicht einleuchtet. Aus Deinem Räsonnement folgt, meiner Einsicht nach, noch gar nicht, dass der Winkel, um den Q, beim Durchlaufen einer Seite von Π (nach oben herum), der $k\varphi$ näher kommt, nicht etwa immer unbedeutender werde, so dass das Aggregat aller successiven Annäherungen, so oft sie auch wiederholt werden, dennoch immer noch nicht gross [genug] werden könnte, um Q in $k\varphi$ zu bringen. Könntest Du beweisen, dass $dkc = ckf = fkg$ etc., so wäre die Sache gleich aufs Reine. Aber dieser Satz ist zwar wahr, allein schwerlich ohne die Theorie der Parallelen schon vorauszusetzen, strenge zu beweisen. Man könnte also immer noch besorgen, dass die Winkel dkc, ckf, fkg etc. successive abnehmen. Geschähe diess (bloss exempli gratia) in einer geometrischen Progression, so dass $ckf = \psi \times dkc$, $fkg = \psi \times dkc$ etc. (so dass ψ kleiner als 1), so würde die Summe aller Annäherungen, so viele male man sie auch fortsetzte, doch immer kleiner als $\frac{1}{1-\psi}\times ckf$ bleiben, und diese Grenze könnte denn immer noch kleiner als der rechte Winkel $dk\varphi$ sein. Du hast mein aufrichtiges Urtheil verlangt: ich habe es gegeben, und ich wiederhole nochmals die Versicherung, dass es mich innig freuen soll, wenn Du alle Schwierigkeiten überwindest.

. . . .

BEMERKUNGEN.

Gauss und Wolfgang Bolyai aus Bolya in Siebenbürgen haben vom Herbst 1796 bis Herbst 1798 zusammen in Göttingen studirt und freundschaftlich verkehrt. Vor Bolyais Heimreise sind sie noch einmal am 25. Mai 1799 in Clausthal zusammengetroffen; der Brief vom 16. December 1799, von dem hier ein Stück mitgetheilt wird, ist der erste, den Gauss nach dem Abschiede an seinen Freund gerichtet hat.

Bolyai hat seine »Göttingische Theorie der Parallelen« erst im Jahre 1804 an Gauss geschickt, dessen Kritik der Brief vom 25. November 1804 enthält.

Was Gauss' Untersuchungen über die ersten Gründe der Geometrie betrifft, so werden die vorstehenden Äusserungen ergänzt durch die Notizen:

»*Plani possibilitatem demonstravi.* [*1797*] *Jul. 28. Gotting.*«

und

»*In principiis Geometriae egregios progressus fecimus. Br*[*unovici 1799*] *Sept.*«

die sich in dem bereits S. 20 dieses Bandes erwähnten Tagebuche finden.

Stäckel.

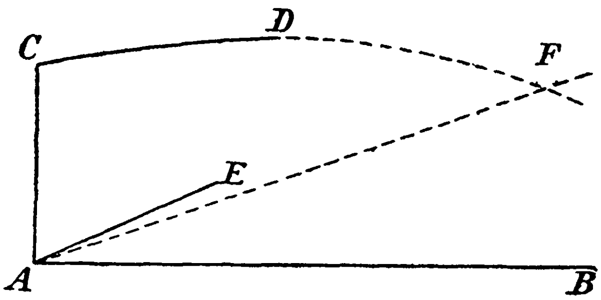
EINIGE SÄTZE
DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE BETREFFEND.

---

1) Parallellinie mit einer Geraden heisst die, von welcher die Senkrechten auf letztere überall von gleicher Grösse sind.

2) Ob die Parallellinie selbst gerade ist, bleibt noch unentschieden.

3) AB gerade, [AC senkrecht auf AB,] CD mit ihr parallel; AE gerade, unter gegebenem Winkel BAE, wird weit genug fortgesetzt gewiss CD schneiden. Beweis so zu führen:

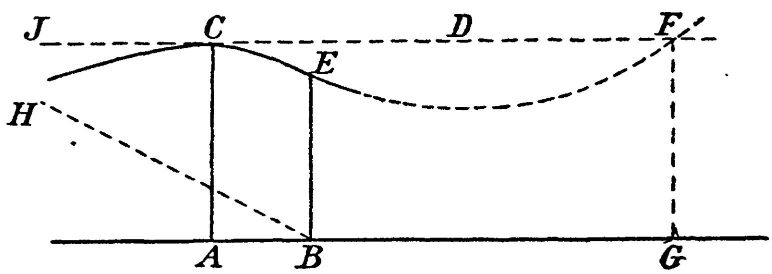


Es sei

$$2^n > \frac{90^\circ}{BAE}, \qquad BAF = \frac{90^\circ}{2^n}, \qquad AF \geqq 2^n AC,$$

so liegt gewiss F jenseits CD, also schneidet AF die CD und a potiori schneidet AE die CD.

4) BE und AC auf AB senkrecht, CD parallel, CE gerade. [ACE ein Rechter.] Falls BEC stumpf ist, wird $BE < AC$: alsdann liegt CE ganz unterhalb CD.



Gesetzt, CD würde von CE in F geschnitten, so sei FG auf AB senkrecht und GFE wird $= ACF$ sein, aber $< BEF$. Q[uod]. E[st]. A[bsurdum].

5) Man mache iisdem suppositis $EBH = BEF$, so wird BH die EC nicht schneiden, wohl aber die Parallele CJ, welches absurd ist.

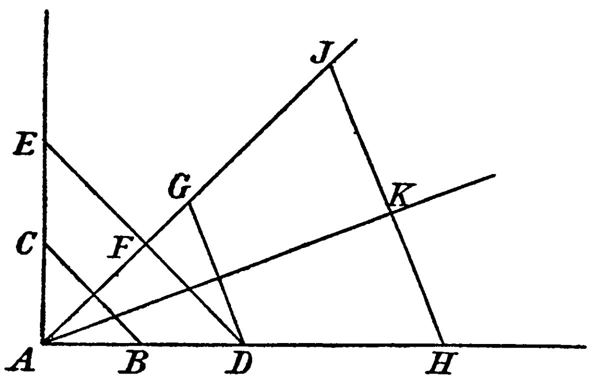
BEMERKUNGEN.

Die vorstehende Notiz findet sich auf der letzten Seite eines Handbuches, das den Titel trägt: Mathematische Brouillons. October 1805. Lässt sich auch die Zeit der Abfassung nicht genau feststellen, so zeigt doch der Inhalt der Notiz, dass sie an den Anfang von GAUSS' Untersuchungen über die ersten Gründe der Geometrie gehört.

Der in 3) angedeutete Beweis beruht auf dem Hülfssatze: Trägt man auf dem einen Schenkel eines Winkels der Grösse

$$\frac{90^\circ}{2^n}$$

vom Scheitelpunkte aus die Strecke $2^n . l$ ab, so ist das vom Endpunkte dieser Strecke auf den andern Schenkel gefällte Loth grösser als l.



Es sei nemlich BAC ein rechter Winkel und $AB = AC = l$. Dann ist $BC > l$. Halbirt man den Winkel BAC durch AF und macht $AD = AE = 2l$, so wird $DE > 2l$, folglich ist das von D auf AF gefällte Loth $DF > l$.

Trägt man jetzt auf der Halbirungslinie AF des rechten Winkels BAC die Strecke $AG = 2l$ ab, so ist a fortiori $DG > l$. Halbirt man den Winkel DAG durch AK und macht $AH = AJ = 4l$, so wird $HJ > 2l$, folglich ist das von H auf AK gefällte Loth $HK > l$.

Wird diese Construction n-mal hintereinander ausgeführt, so ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung. STÄCKEL.

[ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN.]

[1.]

GAUSS an OLBERS. Braunschweig, 30. Juli 1806.

..... Hr. VON ZACH schreibt mir noch, dass Sie Sich zur Recension von LEGENDRES Werk über die Kometenbahnen erboten hätten. Mit Vergnügen werde ich Ihnen also das mir von Hrn. VON ZACH zugeschickte Exemplar nach Bremen senden, doch erlauben Sie wohl, dass ich es erst noch einige Wochen behalte. Bei vorläufigem Durchblättern scheint es mir sehr viel Schönes zu enthalten. Vieles von dem, was ich in meiner Methode besonders in ihrer ersten Gestalt Eigenthümliches hatte, finde ich auch in diesem Buche wieder. Es scheint mein Schicksal zu sein, fast in allen meinen theoretischen Arbeiten mit LEGENDRE zu concurriren. So in der höhern Arithmetik, in den Untersuchungen über transcendente Functionen, die mit der Rectification der Ellipse zusammenhangen, bei den ersten Gründen der Geometrie und nun wieder hier. So ist z. B. auch das von mir seit 1794 gebrauchte Princip, dass man, um mehrere Grössen, die man nicht alle genau darstellen kann, am besten darzustellen, die Summe der Quadrate zu einem Minimum machen müsse, auch in LEGENDRES Werke gebraucht und recht wacker ausgeführt. ......

[2.]

[*Aus* SCHUMACHERS *Tagebuch: »Gaussiana«. Göttingen, November 1808.*]

{GAUSS hat die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsste, welches absurd ist. Doch hält er selbst diese Arbeit noch nicht für hinreichend.}

[3.]

Ideen.

Die schärfste Bestimmung der Declinationen der Sterne würde in der Nähe des Äquators durch gute Repetitionstheodolithen gemacht werden können, indem ihre Azimuthalunterschiede mit terrestrischen Objecten zur Zeit der grössten östlichen und westlichen Digressionen beobachtet würden. 1813 April 21.

In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Diess ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss. 1813 April 27.

Eben so wie eine Classe von Wahrheiten der höhern Arithmetik, auf reelle Zahlen beschränkt, in inniger Verbindung mit den Kreisfunctionen steht, eben so werden sich die allgemeinern Wahrheiten der H. A., auf imaginäre Grössen ausgedehnt, in den Lemniscatischen Functionen gleichsam spiegeln. Diese Ideen öffnen die Pforte zu einem höchst reichhaltigen Felde der Analyse.

Das Krystallprisma an den Fernröhren vergrössert deren Länge etwa um $\frac{1}{3}$ der Seite des Prisma, stört aber etwas die vollkommene Farbenlosigkeit.

BEMERKUNG.

SCHUMACHER hat sich während des Winters 1808 bis 1809 in Göttingen aufgehalten. Über GAUSS' Gespräche mit ihm hat er Aufzeichnungen in einem »GAUSSIANA« betitelten Hefte gemacht. Aus diesem Hefte ist die Notiz [2.] entnommen, während die Notiz [3.] auf einem einzelnen Zettel verzeichnet ist.

STÄCKEL.

BRIEFWECHSEL.

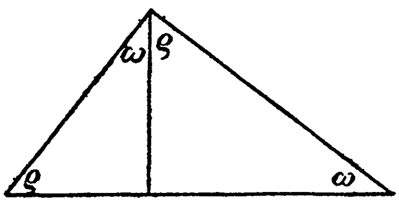
[LEGENDRES THEORIE DER PARALLELEN.]

[GERLING *an* GAUSS. *Kassel, 11. März 1816.*]

{. . . . . . Am Schlusse dieses fällt mir ein, dass ich schon oft vergessen habe, Sie um Ihr Urtheil über LEGENDRES Theorie der Parallelen in seinen élémens de géom. zu bitten. — Er definirt die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten, und beweist mit Hülfe dieser Definition, dass die Summe 3er Winkel im Dreieck nicht grösser sein kann als $2R$, nachher beweist er, dass sie auch nicht kleiner sein könne als $2R$, wobei aber vorausgesetzt wird, dass man eine Linie durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels der $< \frac{2}{3}R$ ist, immer so legen könne, dass beide Schenkel geschnitten werden. Diese Voraussetzung rechtfertigt er in einer Anmerkung (pag. 280, 6te edit. 1806) durch das Einholen und Überholen des Punktes durch Verbindungslinien zwischen gleich weit vom Scheitel abliegenden Punkten auf den Schenkeln. — In diesem letzten scheint mir aber derselbe Fehler zu stecken, dessen Sie mich bei meinem letzten Aufenthalt in Göttingen überführten. Er erklärt es für assez évident, und glaubt, man könne es zu keiner grössern Strenge bringen, ohne von einer andern Erklärung der geraden Linie auszugehen. — Hinterher aber zeigt er, dass die Summe der 3 Winkel im Dreieck $= 2R$ sein müsse, noch auf eine andere mir neue und, wie mir scheint, stringente Weise; etwa so: durch 2 Winkel und die zwischenliegende Seite A, B, c ist das ganze Dreieck bestimmt, also

$$C = \varphi(A, B, c).$$

Setzt man nun den rechten Winkel $= 1$, so sind C, A, B Zahlen, es muss also



c aus der Function wegfallen, weil sonst

$$c = \psi(C, A, B) = \text{einer Zahl},$$

q[uod] e[st] a[bsurdum]. Demnach im rechtwinkligen Dreiecke die Summe der beiden spitzen Winkel $= 1\,R$, woraus das andere weiter folgt.

Ich hatte diesen Satz im LEGENDRE schon gelesen, als ich in G[öttingen] studirte, und ärgerte mich auf meiner letzten Rückkehr von Göttingen nicht wenig, dass er mir nicht eingefallen war, als ich die Freude hatte, Sie damals darüber sprechen zu hören. Jetzt finde ich bei nochmaligem Nachlesen, dass er gegen den Einwurf der sphärischen Dreiecke, »der ihm gemacht sei«, erwiedert, bei ihnen sei nicht $C = \varphi(A, B, c)$, sondern $C = \varphi(A, B, c, \text{rad.})$ »ou seulement

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$$

en vertu de la loi des homogènes«. — Dieses letzte will mir nicht recht klar werden, und ich wünsche sehr gelegentlich die ganze Sache mit ein Paar Worten von Ihnen erwähnt zu sehen.}

GAUSS an GERLING. Göttingen, 11. April 1816.

.... Sie wünschen mein Urtheil über LEGENDRES Beweis der Parallelen zu haben. Ich gestehe, dass für mich gar keine Beweiskraft in seinem Schlusse liegt. Er schliesst, dass $c = \psi(A, B, C)$, also $=$ einer Zahl, welches absurd. Aber dieses also folgt nicht, denn die Gleichung $c = \psi(A, B, C)$ sagt nichts weiter aus, als dass c bestimmt ist, sobald A, B, C bestimmt sind, schliesst aber nicht aus, dass noch eine constante Linie mit in der Form ψ vorkomme. Aus der Gleichung $C = \varphi(A, B, c)$ braucht c nicht wegzufallen, sondern jene kann recht gut bestehen, sobald in der Function φ eine constante Linie $= m$ mit vorkommt, so dass eigentlich

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{m}\right).$$

Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn Euklids Geometrie nicht die wahre ist, es gar keine ähnliche Figuren gibt: die Winkel in einem gleichseitigen Dreieck sind dann auch nach der Grösse der Seite verschieden, wobei ich gar nichts absurdes finde. Es ist dann der Winkel Function der Seite und die Seite Function des Winkels, natürlicher Weise eine solche Function, in der zugleich eine constante Linie vorkommt. Es scheint etwas paradox, dass eine constante Linie gleichsam a priori möglich sein könne; ich finde aber darin nichts widersprechendes. Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel = $59^{0}\,59'\,59'',99999$. . . . . . .

ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1816 April 20.

Stuttgart.

Typis J. F. Steinkopf: *Commentatio in primum elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali.* 1814. 65 Seiten in Octav.

Mainz.

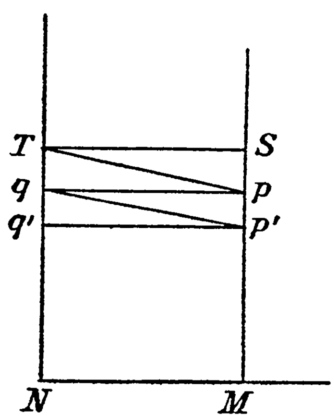
Auf Kosten des Verfassers und in Commission bei Florian Kupferberg: *Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst einem Anhange, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von* Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* 1815. 44 Seiten in Octav.

Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

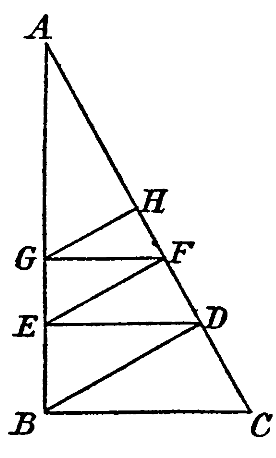
Der Verfasser der erstern Schrift hatte bereits vor 15 Jahren in einer kleinen Abhandlung: »Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae« einen ähnlichen Versuch gemacht, indem er alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Er definirt Parallellinien als solche gerade Linien, die einerlei Lage haben, und schliesst daraus, dass solche Linien von jeder dritten geraden Linie nothwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden müssen, weil diese Winkel nichts anderes seien, als das Mass der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallellinien. Diese Beweisart ist in der vorliegenden neuen Schrift wiederholt, ohne dass wir sagen könnten, dass sie durch die eingewebten philosophischen Betrachtungen an Stärke gewonnen hätte. Der Behauptung S. 24: »Notionem situs e geometria adeo non excludi posse, ut potius notionibus ejus fundamentalibus annumeranda sit, dudum omnes agnovere geometrae« muss in dem Sinne, in welchem der Verf. den Begriff Lage in seinem Beweise gebraucht, jeder Geometer widersprechen. Wenn wir von des Verfassers Definition: »Situs est modus, quo plura coëxistunt vel juxta se existunt in spatio« ausgehen, so ist Lage ein blosser Verhältnissbegriff, und man kann wohl sagen, dass zwei gerade Linien A, B eine gewisse Lage gegen einander haben, die mit der gegenseitigen Lage zweier andern C, D einerlei ist. Aber der Verf. gebraucht das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht coincidirenden geraden Linien spricht. Diese Bedeutung ist offenbar so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen, was wir uns bei einer solchen Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit einer dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie Statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit jeder andern geraden Linie das Criterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage ohne Coincidenz möglich ist. Wir stehen mithin nach des Verf. Beweise noch gerade auf demselben Punkte, wo wir vor demselben standen.

Ein grosser Theil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant, dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das »Principium identitatis« und das »Principium contradictionis« gründe. Dass von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht läugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüthen treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist. Hrn. Schwabs Widerspruch scheint übrigens zum Theil nur auf Missverständniss zu beruhen: wenigstens scheint uns, nach dem 16ten Paragraph seiner Schrift, welcher von Anfang bis zu Ende gerade das Anschauungsvermögen in Anspruch nimmt, und am Ende beweisen soll, »postulata Euclidis in generaliora resolvi posse, non sensu et intuitione sed intellectu fundata«, dass Hr. Schwab sich bei diesen Benennungen verschiedener Zweige des Erkenntnissvermögens etwas anderes gedacht haben müsse, als der Königsberger Philosoph.

Obgleich der Verfasser der zweiten Schrift seinen Gegenstand auf eine ganz andere und wirklich mathematische Art behandelt hat, so können wir doch über das Resultat derselben nicht günstiger urtheilen. Wir haben nicht die Absicht, hier den ganzen Gang seines versuchten Beweises darzulegen, sondern begnügen uns, dasjenige hier herauszuheben, worauf im Grunde alles ankommt.



Man denke sich zwei im Punkte N unter rechten Winkeln einander schneidende gerade Linien, und fälle von einem Punkte S, der ausserhalb dieser geraden Linien, aber in derselben Ebene liegt, Senkrechte auf dieselben: ST und SM. Es kommt nun darauf an zu beweisen, dass MST ein rechter Winkel wird. Der Verf. sucht dies apagogisch zu beweisen; zuvörderst nimmt er an, MST sei spitz, fällt von T auf MS das Perpendikel Tp, und beweist, dass p zwischen S und M fallen muss. Hierauf fällt er wieder aus p auf NT das Perpendikel pq, wo q zwischen T und N fallen wird. Dann fällt er abermals aus q auf MS das Perpendikel qp', wo p' zwischen p und M liegen wird. Sodann abermals aus p' auf NT das Perpendikel $p'q'$ u. s. w. Diese Operationen lassen sich ohne Aufhören fortsetzen, und so werden von der Linie MS nach und nach die Stücke Sp, pp' u. s. w. abgeschnitten, die jedes eine angebliche Grösse haben, und deren Zahl unbegrenzt ist. Der Verfasser meint nun, dass diess widersprechend sei, weil auf diese Weise nothwendig MS zuletzt erschöpft werden müsste. Es ist kaum begreiflich, wie er sich auf eine solche Weise selbst täuschen konnte. Er macht sich sogar selbst den Einwurf, dass die Summe der Stücke Sp, pp' u. s. w., wenn diese Stücke immer kleiner und kleiner werden, doch ungeachtet ihre Anzahl ohne Aufhören zunehme, nicht über eine gewisse Grenze hinauswachsen könnte, und meint diesen Einwurf damit zu heben, dass jene Stücke, auch wenn sie immer kleiner und kleiner werden, doch immer grösser bleiben, als eine angebliche Grösse; nemlich jene Stücke sind Katheten von rechtwinkligen Dreiecken, und folglich immer grösser als der Unterschied zwischen Hypotenuse und der andern Kathete. Fast scheint es, dass eine grammatische Zweideutigkeit den Verf. irre geleitet hat, nemlich der zwiefache Sinn des Artikels eine angebliche Grösse. Der Schluss des Verf. würde nur dann richtig sein, wenn sich zeigen liesse, dass die Stücke Sp, pp' u. s. w. immer grösser bleiben als Eine bestimmte angebliche Grösse, z. B. als der Unterschied zwischen der Hypotenuse pT und der Kathete ST. Aber das lässt sich nicht beweisen, sondern nur, dass jedes Stück immer grösser bleibt, als eine angebliche Grösse, die aber selbst für jedes Stück eine andere ist, nemlich Sp grösser als der Unterschied zwischen pT und ST, ferner pp' grösser als der Unterschied zwischen qp' und qp u. s. w. Hiermit verschwindet nun aber die ganze Kraft des Beweises.



Auf dieselbe Art, wie er seinen Beweis führen zu können geglaubt hat, könnte er auch beweisen, dass in einem ebenen Dreiecke ABC, worin B ein rechter Winkel ist, C nicht spitz sein könne; er brauchte nur aus B ein Perpendikel BD auf die Hypotenuse AC zu fällen, dann wieder das Perpendikel DE auf AB und so ohne Aufhören die Perpendikel EF, FG, GH u. s. w. wechselsweise auf AC und AB.] Die Stücke CD, DF, FH u. s. w.

sind immer grösser als der angebliche Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete desjenigen rechtwinkligen Dreiecks, worin jede der Reihe nach die andere Kathete ist, demungeachtet erschöpft ihre Summe offenbar die Hypotenuse AC nie, so gross auch ihre Anzahl genommen wird.

Wir müssten fast bedauern, bei so bekannten und leichten Dingen so lange verweilt zu haben, wenn nicht diese Schrift, deren Verf. es übrigens wirklich um Wahrheit zu thun zu sein scheint, durch die Art, wie sie schon vor ihrer Erscheinung in öffentlichen Blättern angekündigt wurde, eine mehr als gewöhnliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Wir bemerken daher hier nur noch, dass der Verf. nachher auf eine ganz ähnliche, und daher eben so nichtige Art beweisen will, dass der Winkel MST nicht stumpf sein kann: allein hierbei ist doch ein wesentlicher Unterschied, weil in der That die Unmöglichkeit dieses Falles in aller Strenge bewiesen werden kann, welches weiter auszuführen aber hier nicht der Ort ist.

BEMERKUNG.

Diese bereits in Band IV, Seite 364 bis 368 abgedruckte Anzeige ist hier der Vollständigkeit wegen reproducirt worden. Zwei Figuren, die sich weder beim Originale noch bei dem ersten Abdrucke finden, sollen das Verständniss des Textes erleichtern. STÄCKEL.

BRIEFWECHSEL.

[DIE TRANSCENDENTE TRIGONOMETRIE.]

[WACHTER *an* GAUSS. *Danzig, 12. December 1816.*]

{. . . . . . . Also die anti-Euklideische oder Ihre Geometrie wäre wahr. Die Constante in ihr aber bleibt unbestimmt: warum? liesse sich vielleicht durch Folgendes begreiflich machen. . . . .

. . . . Das Resultat des Bisherigen wäre also so auszusprechen:

Die Euklideische Geometrie ist falsch; aber dennoch muss die wahre Geometrie mit demselben elften Euklideischen Axiom oder mit dem Postulat von Linien und Flächen anfangen, welche die in jenem Axiom behauptete Eigenschaft haben. Statt der geraden Linie und Ebene sind nur die grössten Kreise jener mit unendlichem Radius beschriebenen Kugel nebst ihrer Oberfläche zu setzen. Es entsteht zwar die eine Unbequemlichkeit daraus, dass die Theile dieser Fläche bloss symmetrisch, nicht, wie bei der Ebene, congruent sind; oder dass der Radius nach der einen Seite hin unendlich, nach der andern imaginär ist; allein wie jene Unbequemlichkeit durch viele andere Vortheile, welche die Construction auf einer Kugelfläche darbietet, wieder aufgewogen werde, ist klar: so dass vielleicht auch dann noch, wenn die Euklideische Geometrie wahr wäre, zwar nicht mehr die Nothwendigkeit obwaltete, die Ebene als eine unendliche Kugelfläche zu betrachten, aber doch noch die Fruchtbarkeit dieser Ansicht dieselbe empfehlen könnte.

Allein, als ich alles diess durchdacht, als ich mich über das Resultat schon völlig beruhigt hatte, theils weil ich glaubte, der Grund (la métaphysique) jener der Geometrie nothwendig anhaftenden Unbestimmtheit, — auch selbst der vollendeten Unentschiedenheit in dieser Sache, dann, wenn jener Beweis gegen die Euklideische Geometrie, wie ich nicht erwarten durfte, nicht für stringent zu halten sei — [sei von mir erkannt worden]; theils, weil doch alle die vielen bisherigen Untersuchungen aus der ebenen Geometrie nicht für verloren zu achten: sondern mit wenigen Modificationen zu gebrauchen wären, und denn doch wenigstens bis zu einer ziemlich weiten Grenze hin, die sich vielleicht noch näher bestimmen liesse, auch die Sätze der körperlichen Geometrie und der Mechanik näherungsweise Gültigkeit hätten; fand ich heute Abend — eben mit einem Versuch beschäftigt, einen Eingang zu Ihrer transcendenten Trigonometrie zu finden, und weil es mir nicht gelingen wollte, in der Ebene dafür hinreichende, bestimmte Functionen zu erhalten, zu räumlichen Constructionen fortgehend, zu meiner nicht geringen Überraschung folgenden Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie. . . . . .

. . . . . . Gerade im Begriff zu schliessen bemerke ich noch, dass der obige Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie fehlerhaft ist. . . . . . Also wäre auch hier die Hoffnung verschwunden, zu einem völlig entschiedenen Resultat zu kommen, und ich muss mich wieder bei dem vorhin Angeführten beruhigen. Übrigens glaube ich auf jenem Wege wenigstens einen Schritt zu Ihrer transcendenten Trigonometrie gethan zu haben, indem ich, mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, die Verhältnisse aller Constanten, wenigstens durch Construction der rechtwinkligen Dreiecke angeben kann. Es fehlt mir noch die wirkliche Berechnung der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Seite, wofür ich suchen werde vom gleichseitigen Dreieck auszugehen. . . .}

BEMERKUNG.

In dem Briefe vom 12. December 1816, von dem hier Stücke mitgetheilt sind, bezieht sich WACHTER wiederholt auf ein Gespräch mit GAUSS, das während seines »letzten Aufenthalts in Göttingen« stattgefunden und die antieuklidische Geometrie zum Gegenstand gehabt hatte. Aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom 4. Juni 1816 geht hervor, dass dieser Besuch WACHTERS in den April 1816 zu setzen ist.

STÄCKEL.

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 28. April 1817.

.... WACHTER hat eine kleine Piece drucken lassen über die ersten Gründe der Geometrie, wovon Sie durch LINDENAU vermuthlich ein Exemplar erhalten werden. Obgleich W. in das Wesen der Sache mehr eingedrungen ist, als seine Vorgänger, so ist sein Beweis doch nicht bündiger als alle andern. Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom **menschlichen** Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen. ......

[ASTRALGEOMETRIE.]

[GERLING an GAUSS. *Marburg, 23. Juli 1818.*]

{. . . . . . Mir steht im künftigen Semester eine Arbeit bevor, für welche ich schon jetzt so frei bin Sie um Rath zu bitten, und diess zu thun, wahrscheinlich öfter so frei sein werde. — FLECKEISEN hat mich nemlich gebeten, die Besorgung einer neuen Auflage von LORENZ' reiner Mathematik zu übernehmen; und ich kann diess um so lieber thun, da ich hier nach diesem Buch selbst lese; und es nun schon 6 Jahre immer beim Unterricht gebraucht habe.

. . . . In der Geometrie habe ich weniger Anstösse, möchte aber besonders gern Ihre Meinung wissen, wie es mit der Parallelentheorie wohl am besten zu halten ist. Was LORENZ darüber hat, ist theils falsch, theils ungründlich. — Dass die Euklidische Manier vorzutragen sei, dabei aber der Mangel derselben einzugestehen, halte ich für Recht; das quomodo aber ist mir nicht klar. Ich habe gedacht, es sei am besten, den Satz: Eine gerade Linie kann durch einen Punkt nur eine Parallele haben, als Axiom hinzustellen, und in einer Anmerkung zu sagen, dass man einen Beweis für diesen Satz noch nicht habe finden können, und deshalb ihn so lange bis einer gefunden, oder die Unwahrheit des Satzes bewiesen sei, als Axiom annehmen müsse, wie im Grunde schon Euklides gethan. — Haben Sie doch die Güte mir auch hierüber Ihr Urtheil zu eröffnen. . . . . . .}

GAUSS an GERLING. Göttingen, 25. August 1818.

...... Von Ihren Fragen wegen des LORENZischen Lehrbuchs kann ich heute nur auf einige antworten. ......

...... Ich freue mich, dass Sie den Muth haben sich so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, dass unsere Parallelentheorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen. ......

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 25. Januar 1819.*]

{........ Die Stelle über die Parallelentheorie habe ich nun so gefasst: »Der Satz § 72 ist in Euklids Elementen (1. Buch, 11. Grundsatz) als Grundsatz aufgestellt. Dass er aber kein Grundsatz sei, sondern eines Beweises bedürfe, lehrt die Betrachtung: dass zwei wesentlich verschiedene Anschauungen (Winkel zweier Linien mit einer dritten und Zusammentreffen derselben unter sich) darin vorkommen, deren nothwendiger Zusammenhang durch einen Beweis nachgewiesen werden muss. — Dieser Beweis (die Parallelentheorie) ist auf mannichfaltige Weise von scharfsinnigen Mathematikern versucht, bis jetzt aber noch nicht vollkommen genügend aufgefunden worden. Solange er fehlt, bleibt der Satz, so wie alles was sich auf ihn stützt, eine Hypothese, deren Gültigkeit für unser Leben freilich durch die Erfahrung dargethan wird, deren allgemeine, nothwendige Richtigkeit aber ohne Absurdität bezweifelt werden könnte«.

Ad vocem Parallelentheorie muss ich Ihnen noch etwas erzählen, und eines Auftrags mich entledigen. Ich erfuhr im vorigen Jahr, dass mein College SCHWEIKART (Prof. juris, jetzt Prorector) sich ehedem mit Mathematik viel beschäftigt und namentlich auch über Parallelen geschrieben habe. Ich bat ihn also mir sein Buch zu leihen. Indem er mir diess versprach, sagte er mir, dass er jetzt wohl einsehe, wie in seinem Buche (1808) Fehler vorgekommen (er hatte z. B. Vierecke mit gleichen Winkeln als einen ursprünglichen Begriff gebraucht), dass er aber nicht abgelassen habe, sich mit dem Gegenstande zu beschäftigen, und jetzt beinahe überzeugt sei, dass ohne irgend ein datum der Euklidische Satz nicht zu beweisen sei, dass es ihm auch nicht unwahrscheinlich sei, dass unsere Geometrie nur ein Kapitel einer allgemeinern sei. Ich erzählte ihm darauf, wie Sie vor einigen Jahren öffentlich geäussert hätten, dass man seit Euklids Zeiten im Grunde hiermit nicht weiter gekommen sei; ja dass Sie gegen mich mehrmals geäussert hätten, wie Sie durch vielfältige Beschäftigung mit diesem Gegenstand, auch nicht zum Beweise von der Absurdität einer solchen Annahme gekommen seien. — Als er mir darauf das verlangte Buch schickte, lag der beigehende Zettel bei, und er bat mich kurz darauf (Ende December) mündlich, Ihnen doch gelegentlich diesen seinen Zettel beizuschliessen, und Sie in seinem Namen zu ersuchen, gelegentlich ihm Ihr Urtheil über seine Ideen wissen zu lassen.

Das Buch selbst hat, abgesehen von allem übrigen, das angenehme, dass eine reichhaltige Literatur des Gegenstandes sich darin findet; welche er auch, wie er mir sagt, ferner zu sammeln nicht abgelassen hat. . . . . .}

[*Beilage: Notiz von* SCHWEIKART. *Marburg, December 1818.*]

{Es gibt eine zwiefache Geometrie, — eine Geometrie im engern Sinn — die Euklidische; und eine astralische Grössenlehre.

Die Dreiecke der letztern haben das Eigene, dass die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist.

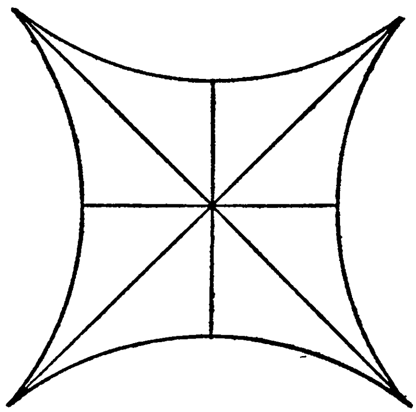
Diess vorausgesetzt, lässt es sich auf das strengste beweisen:

a) dass die Summe der 3 Winkel in dem Dreieck kleiner als 2 Rechte sei;

b) dass diese Summe immer kleiner werde, je mehr Inhalt das Dreieck umfasst;

c) dass die Höhe eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zwar immer zunimmt, je mehr man die Schenkel verlängert, dass sie aber eine gewisse Linie, die ich die Constante nenne, nicht übersteigen könne.

Die Quadrate haben daher folgende Gestalt:



Ist diese Constante für uns die halbe Erdaxe (wonach jede im Weltraume von einem Fixstern zum andern, die 90^0 von einander entfernt sind, gezogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde), so ist sie in Beziehung auf die, im täglichen Leben vorkommenden, Räume unendlich gross.

Die Euklidische Geometrie gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Constante unendlich gross sei. Nur dann ist es wahr, dass die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechten gleich seien; auch lässt sich diess, so wie man sich den Satz, dass die Constante unendlich gross sei, geben lässt, leicht beweisen.

SCHWEIKART.}

GAUSS an GERLING. Marburg, 16. März 1819.

...... Die Notiz von Hrn. Prof. SCHWEIKART hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht, und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben. Nur bloss bei dem einen Artikel der so anfängt:

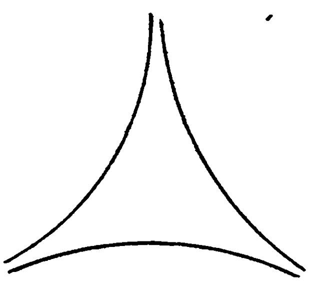
Ist diese Constante für uns die halbe Erdaxe u. s. w., muss ich drei Bemerkungen machen:

1) sehe ich die Möglichkeit nicht ein, dass eine Constante bloss für uns gelten könne, und für andere Wesen eine andere. Ich weiss auch nicht, ob Hr. SCHW. diess so gemeint habe, nur hat er das für uns selbst unterstrichen.

2) fährt er fort: »wonach jede im Weltraum von einem Fixstern zum andern, die 90^0 von einander entfernt sind, gezogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde«. Hierbei ist die Entfernung der Fixsterne verglichen mit der Constante als unermesslich gross betrachtet, aber demungeachtet hat das um 90^0 von einander entfernt sein dann nur einen bestimmten Sinn, in so fern es auf einen bestimmten Scheitelpunkt des Winkels bezogen wird, z. B. den Mittelpunkt der Erde, was ohne Zweifel auch Hr. Prof. SCH. tacite vorausgesetzt hat.

3) hat ohne Zweifel diess Hr. Prof. SCH. bloss Beispielshalber als Erläuterung gesagt, denn obgleich ich mir recht gut die Unrichtigkeit der Euklidischen Geometrie denken kann, so müsste doch nach unsern astronomischen Erfahrungen die besagte Constante unermesslich viel grösser sein, als der Erdradius.

Ich vermuthe, dass Hr. SCH. mit allem diesen einverstanden sein wird, was mich bei dem gänzlichen Zusammentreffen seiner Ansicht mit der meinigen sehr freuen wird. Ich bemerke nur noch, dass ich die Astralgeometrie so weit ausgebildet habe, dass ich alle Aufgaben vollständig auflösen kann, sobald die Constante $= C$ gegeben wird. Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180^0 ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthaltenen Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist



$$\text{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{\{\log \operatorname{hyp}(1+\sqrt{2})\}^2}.$$

Auch jedes andere Polygon von einer bestimmten Seitenzahl $= n$ hat in Beziehung auf seinen Flächeninhalt eine bestimmte Grenze, der es so nahe man will kommen, aber sie nie erreichen kann,

$$= \frac{(n-2)\pi CC}{(\log \operatorname{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}.$$

Theilen Sie gefälligst diess Hrn. SCHW. mit. . . . . .

ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1822 October 28.

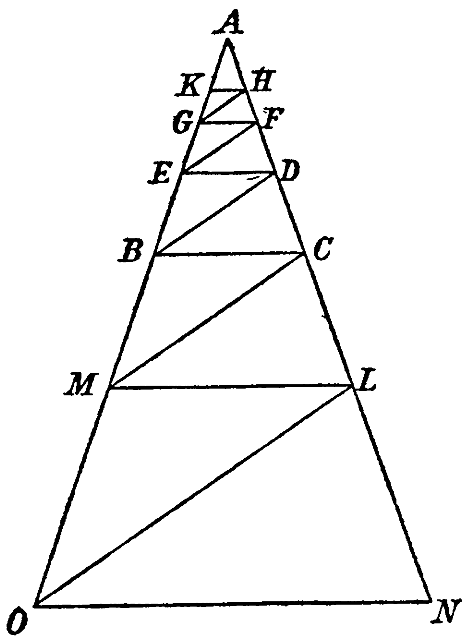
Marburg.

Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik* u. s. w. 1822. 40 Seiten in Quart.

Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, dass alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben, und kann nicht anders, als dieses Urtheil auch auf alle spätern ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solcher Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesenen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswerth, und Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemachte kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen. Den ganzen sinnreichen Ideengang des Verf. hier ausführlich darzulegen, wäre für unsere Blätter zu weitläuftig und auch überflüssig, da die Schrift selbst gelesen zu werden verdient: aber sie hat ihre schwache Stelle, wie alle übrigen Versuche, und diese herauszuheben, ist der Zweck dieser Anzeige.

Wir finden diese schwache Stelle S. 15 in dem Beweise des Lehrsatzes des 15. Artikels. Dieser Lehrsatz ist der wahre Nerv der ganzen Theorie, welche fällt, sobald jener nicht streng bewiesen werden kann. Wir führen daher zuvörderst diesen Lehrsatz hier auf; die dazu gehörige Figur wird jeder leicht selbst zeichnen können.

Wenn jeder Winkel an der Grundlinie ON eines gleichschenkligen Dreiecks grösser ist, als der Winkel an der Spitze A, und man setzt in O an die Seite OA



einen Winkel von der Grösse des Winkels A, dessen anderer Schenkel OL die AN in dem Punkte L zwischen A und N trifft, schneidet alsdann von AO ein Stück $OM = NL$ ab und zieht ML; wenn man ferner in M an MA abermals einen Winkel von der Grösse des Winkels A setzt, dessen anderer Schenkel MC die AN in dem Punkte C zwischen A und L trifft, hierauf von AM ein Stück $MB = LC$ abschneidet und BC zieht, und sodann diese Construction auf ähnliche Art fortsetzt, so dass auf der Linie OA die Punkte O, M, B, E, G, K u. s. w., auf der Linie NA hingegen die Punkte N, L, C, D, F, H u. s. w. liegen, so wird behauptet, dass die Stücke OM, MB, BE, EG, GK u. s. w. oder die ihnen resp. gleichen NL, LC, CD, DF, FH u. s. w. eine abweichende Progression bilden.

Den Beweis dieses Lehrsatzes sucht der Verf. apagogisch so zu führen, dass er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzählt, und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versucht. Der Verf. behauptet nemlich, dass unter jener Voraussetzung einer von folgenden fünf Fällen Statt haben müsste. Die auf einander folgenden Stücke, von OM an gerechnet, wären

1) alle einander gleich, oder
2) jedes nachfolgende grösser als das vorhergehende, oder
3) einige einander gleich und das darauf folgende grösser oder kleiner, oder
4) einige auf einander folgende nähmen fortschreitend ab, und die darauf folgenden fortschreitend zu, oder
5) sie würden abwechselnd grösser und kleiner.

In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, dass die Stücke anfangs fortschreitend zu- und dann fortschreitend abnähmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigentliche Auflösung des Gordischen Knotens. Inzwischen kann man zugeben, dass diese Auslassung hier in so fern wenig auf sich hat, als die Beweisart des Verf. für die Unstatthaftigkeit des dritten Falls, wenn sie zulässig wäre, auch auf diesen Fall von selbst erstreckt werden könnte. Allein eben diesem angeblichen Beweise der Unstatthaftigkeit des dritten Falls können wir keine Gültigkeit zugestehen. Der Verf. stellt die Sache so vor. Wenn z. B. in dem dritten Falle angenommen wird, die beiden ersten Stücke seien gleich, das dritte aber grösser, so wäre DC also grösser als CL. Da nun aber AML gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, dem dieselbe Grundbedingung zukommt, wie dem ursprünglichen Dreieck AON, so müsste, wenn jener dritte Fall mit seiner angenommenen Unterabtheilung der gültige wäre, $DC = CL$ sein, in Widerspruch mit dem vorher Gefundenen.

Wir haben, wie wir glauben, bei diesem Moment des Beweises das, worauf es ankommt, noch etwas klarer und bestimmter nach der Ansicht des Verf. angedeutet, als er es selbst gethan hat, wodurch dann aber auch die Schwäche desselben, wie uns scheint, leichter erkannt wird. Denn offenbar ist hier ganz willkürlich angenommen, dass bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel A an der Spitze und grösserm Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die im Lehrsatz angezeigte Construction vorgenommen wird, die Folge der abgeschnittenen Stücke in Rücksicht auf ihr Gleichbleiben, Grösser- oder Kleinerwerden, allemal, unabhängig von der Grösse der Seiten, nothwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident betrachtet werden darf. Da sich nun aber hierauf allein der versuchte Beweis der Unstatthaftigkeit des dritten (wie auch vierten und fünften) Falls stützt, und der ganze Artikel auch keine andere Ressourcen zum Beweise der Unstatthaftigkeit des übergangenen Falls darbietet, so glauben wir hierdurch das oben ausgesprochene Urtheil hinlänglich gerechtfertigt zu haben, wobei wir aber gern der ganzen übrigen sinnreichen Durchführung in den folgenden Artikeln volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

BEMERKUNG.

Diese bereits in Band IV, Seite 368 bis 370 abgedruckte Anzeige ist hier der Vollständigkeit wegen reproducirt worden. Die Figur, die sich weder beim Originale noch bei dem ersten Abdrucke findet, soll das Verständniss des Textes erleichtern. STÄCKEL.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ZUR PARALLELENTHEORIE.]

Gauss an Taurinus. Göttingen, 8. November 1824.

Ewr. Wohlgeboren

gefälliges Schreiben vom 30. Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatz habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien [machen,] gar keine Spur von wahrem geometrischen Geiste anzutreffen. Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als dass er unvollständig ist. Zwar lässt Ihre Darstellung des Beweises, dass die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks nicht grösser als 180^0 sein kann, in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein diess würde sich ergänzen lassen, und es leidet keinen Zweifel, dass jene Unmöglichkeit sich auf das allerstrengste beweisen lässt. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2^n. Theil, dass die Summe der Winkel nicht kleiner als 180^0 sein kann; diess ist der eigentliche Knoten, die Klippe, woran alles scheitert. Ich vermuthe, dass Sie Sich noch nicht lange mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, dass jemand sich eben mit diesem 2ⁿ. Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals darüber etwas bekannt gemacht habe. Die Annahme, dass die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigene, von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geometrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Theil paradox, und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, dass sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man nur die Seiten gross genug nehmen darf, dennoch kann der Flächeninhalt eines Dreiecks, wie gross auch die Seiten genommen werden, nie eine bestimmte Grenze überschreiten, ja sie nicht einmal erreichen. Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen, und das Einzige, was unserm Verstande darin widersteht, ist, dass es, wäre sie wahr, im Raum eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargrösse geben müsste. Aber mir deucht, wir wissen, trotz der nichtssagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raums, als dass wir etwas uns unnatürlich vorkommendes mit Absolut Unmöglich verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäussert, dass die Euklidische Geometrie nicht die wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Mass a priori haben würden.

Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, dass er das Vorstehende missverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Öffentlichkeit führen könnender Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmal mehr Musse gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Untersuchungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen den 8. November 1824.

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

Gauss an Olbers. Göttingen, 3. Mai 1827.

.... Vor etwa 6 Wochen hatte ich das Vergnügen, Hrn. Dirichlet, von dem ich, glaube ich, Ihnen schon einmal geschrieben habe, hier persönlich kennen zu lernen. Ich erwähnte gegen ihn des schlechten Aufsatzes von Ivory; er kannte ihn nicht selbst, sagte mir aber, Hr. Fourier habe ihm gesagt, dass er »Unsinn« sei, und dass er (F.) sehr über einen lobhudelnden Artikel darüber im Férussac gelacht habe. Ungefähr eben so wie ich habe er auch über sein Mémoire von der Gleichgewichtsgestalt einer rotirenden homogenen Flüssigkeit geurtheilt. Es war mir überraschend noch in mehrern andern Beziehungen, über Personen und Sachen, eine ausserordentliche Übereinstimmung Hrn. Fouriers mit meinem Urtheile zu erfahren; z. B. über imaginäre Grössen, über die Unbeweisbarkeit der Geometrie a priori u. s. w. Nachdem ich Hrn. Dirichlet z. B. über letztere meine Ansicht kurz angedeutet hatte, sagte er, dass ihm Fourier die seinige fast mit den nemlichen Worten gesagt habe. ......

BEMERKUNG.

In einem Notizbuche von GAUSS ist unter Aufzeichnungen aus den Jahren 1824 bis 1828 vermerkt:

»*Journal de l'École Normale. Fouriers Defin. der Ebene. Lacroix I. p. 503.*«

In der That enthalten die Séances des Écoles Normales T. I (Séance du 25 pluviose an III (1795)), Nouvelle Édition, Paris 1800, S. 28 Äusserungen FOURIERS, in denen er neue Erklärungen der Geraden und der Ebene vorschlägt; FOURIER beginnt dabei, ähnlich wie BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ, mit der Kugel. Weitere Veröffentlichungen FOURIERS über die Grundlagen der Geometrie scheinen nicht zu existiren.

Der Discours préliminaire der Éléments de Géométrie von LACROIX (Quatrième édition. Paris, An VIII [1804] S. XV.) enthält einen Hinweis auf das *Journal des Séances de l'École Normale*; wenn dabei nicht FOURIER, sondern LAPLACE genannt wird, so erklärt sich das daraus, dass jener seine Theorie in den von diesem geleiteten geometrischen Übungen der École Normale vorgetragen hatte.

STÄCKEL.

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 11. October 1827.

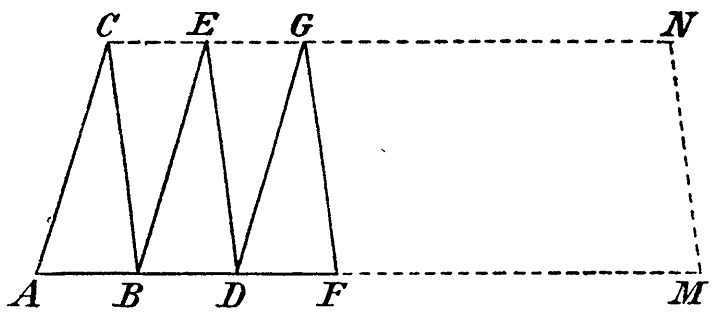
. . . . Wer ist wohl Hr. KOCH auf dem Cremon Nr. 83? Er hat mir seine Parallelentheorie [*)] zugeschickt, an der freilich nichts ist; aber etwas seltenes ist, dass er meine Anzeige der Blösse sogleich anerkannt hat; eben so wie meine Bemerkungen über seine nachher mir schriftlich zugesandten, aber eben so erfolglosen Versuche. . . . . .

[*) Christian Adolf KOCH, *Über Parallellinien.* Ein Versuch, dem Urtheil Sachkundiger gewidmet. Hamburg 1827. 8°. 12 S.]

[ÜBER DIE WINKEL DES DREIECKS.]

[1.]

Der Beweis, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grösser sein kann als 180^0, ist unabhängig vom 11. Axiom so zu führen.



Es sei $A+B+C > 180^0$; man verlängere AB in infin. und wiederhole das vorige Dreieck; dann ist per hyp.

$$CBE < ACB \quad \text{also} \quad (\text{Elemente I. } 24) \quad CE < AB.$$

Eben so $EG = CE$ u. s. w. Man leitet daraus leicht ab, dass, wenn das Dreieck nur oft genug wiederholt wird, die gerade [Linie] AM grösser ist als die gebrochene $ACEG \ldots . NM$, worin sich das Widersprechende leicht nachweisen lässt. Eine $n$malige Wiederholung reicht hin, wenn

$$AC + CB - AB < n(AB - CE).$$

(gefunden 1828 Nov. 18).

[2.]

[*Satz 1* = Euklid I. 13: Die Winkel, die eine Gerade mit einer andern bildet, auf der sie steht, sind entweder beide Rechte oder zusammen gleich zwei Rechten.

Satz 2 = Euklid I. 5: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Satz 3 = Euklid I. 6: Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Satz 4: In einem Dreieck können nicht zwei Winkel gleich Rechten sein.]

5. Lehrsatz. Kein Winkel eines Dreiecks kann dem Nebenwinkel eines andern Winkels desselben Dreiecks gleich sein.

Es ist nicht möglich, dass $ACB = ABD$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $ACB = ABD$ und unterscheiden drei Fälle.

I. Es sei $AB = AC$. Fig. 1. Also (Satz 2) $ABC = ACB$, folglich $ABC = ABD$; es sind daher ABC, ACB rechte Winkel [Satz 1], welches unmöglich ist (Satz 4).

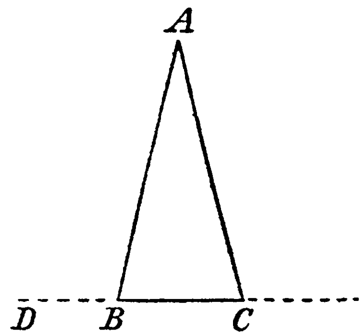


Fig. 1.

II. Es sei AB kleiner als AC. (Fig. 2.) Es liegt daher B innerhalb einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt A, Halbmesser $= AC$. Die gerade Linie CB über B hinaus verlängert muss folglich die Kugelfläche schneiden; das geschehe in E. Es ist also $AE = AC$, daher $AEB = ACB$ (Satz 2), dann $AEB = ABD = ABE$, ferner (Satz 3) $AB = AE = AC$ gegen die Voraussetzung.

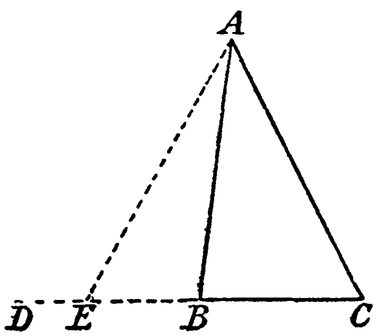


Fig. 2.

III. Es sei AB grösser als AC. Es liegt also C innerhalb einer Kugelfläche, Centrum A, Halbmesser AB, diese Kugelfläche werde von der über C fortgesetzten BC in E geschnitten. Es ist also

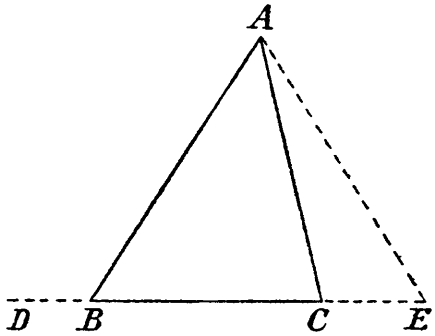
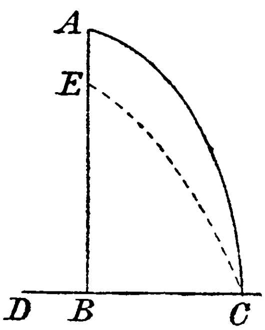


Fig. 3.

$AB = AE$, $ABE = AEB$; folglich ist nun aus der Voraussetzung $ACB = ABD$ sogleich (Satz 1) $ACE = ABC = ABE = AEB$. Also ist $AC = AE = AB$ gegen die Voraussetzung.

6. Lehrsatz. Kein Winkel eines Dreiecks kann grösser sein als der Nebenwinkel eines andern Winkels in demselben Dreieck. ACB kann nicht grösser sein als ABD.



Beweis. Man beschreibe eine Kegelfläche, Axe CB, Spitze C, Winkel dem ABD gleich. Wäre nun ABD kleiner als ACB, so würde die Linie CA ausserhalb des Kegels liegen (Definition) und da B, als Punkt in der Axe, innerhalb liegt, so muss die Gerade AB die Kegelfläche schneiden. Das geschehe in E. Es wird also $ECB = EBD$, welches nicht möglich ist (Satz 5).

BEMERKUNG.

Das Princip des Aneinanderreihens congruenter Dreiecke, auf dem der Beweis in der Notiz [1] beruht, den GAUSS auf der hintern Seite des Titelblatts seines Exemplars von BAERMANN, Elementorum Euclidis Libri XV, Leipzig 1769 notirt hat, war bereits von LEGENDRE im Jahre 1798 angewandt worden (Éléments de géométrie, 2ième édition, Proposition XIX); genau derselbe Beweis findet sich auch bei LOBATSCHEFSKIJ in der Abhandlung Новыя начала геометріи (Neue Anfangsgründe der Geometrie) Kap. VI, § 90 vom Jahre 1836.

Die Notiz [2] befindet sich auf einem einzelnen, nicht datirten Zettel. Der darin enthaltene *Lehrsatz 6* ist gleichbedeutend mit Euklid I. 17.

STÄCKEL.

[ZUR THEORIE DER GERADEN LINIE UND DER EBENE.]

[1.]

[Euklids Elemente Buch I. Lehrsatz 7: »Sind von den Endpunkten einer Geraden nach einem Punkt ausserhalb zwei Gerade gezogen, so ist es unmöglich, von diesen Endpunkten aus nach einem andern Punkt auf derselben Seite jener Geraden zwei Gerade zu ziehen, die den ersten beziehungsweise gleich sind.]

Um Euklids Beweis I. 7 stringent zu machen, ohne vorher die Ebene anders definirt zu haben, als »die Fläche, welche durch Umdrehung einer Geraden um eine Axe [entsteht], mit der sie rechte Winkel macht«, muss man in der 2. und 3. Figur CD in M halbiren und durch M ein Planum legen, gegen welches CD normal ist, *in* diesem liegen A und B, während C und D ausserhalb liegen. Es braucht also nur bewiesen zu werden, dass kein Punkt von AD und BC (AD für die Fig. 2 indefinite verlängert) in dem Planum liegt, was keine Schwierigkeit hat. Es folgt dann von selbst, dass die Voraussetzung absurd ist, sobald AD und BC einander schneiden.

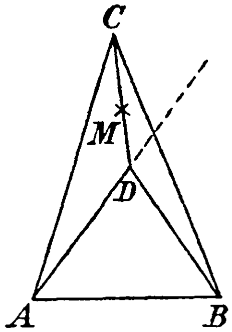


Fig. 2.

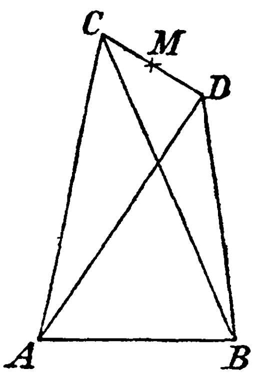
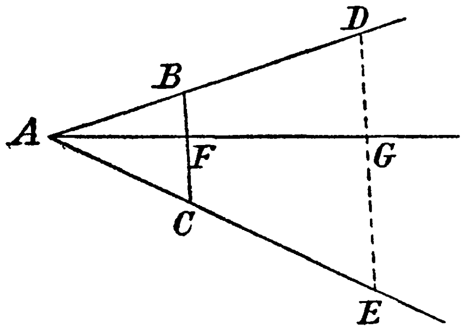


Fig. 3.

[2.]

Es gibt viele solche Dinge, selbst in der Elementargeometrie, die eines strengen Beweises bedürfen, z. B. die Möglichkeit der Ebene, deren Definition eigentlich schon ein Theorem involvirt; z. B. wenn ABD, AFG, ACE, BFC gerade Linien sind, dass dann die gerade Linie durch DE nicht oberhalb oder unterhalb G weggehen kann.



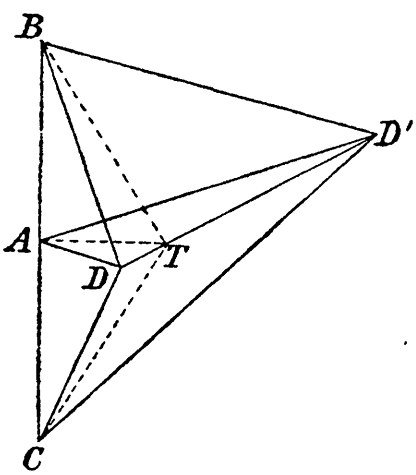
Der Beweis ist zwar nicht sehr schwer, aber doch auch nicht ganz leicht, und auf jeden Fall in dieser oder einer andern Form unerlässlich.

[3.]

BEGRÜNDUNG DES PLANUM.

1. Ebene nennen wir die Fläche, in der jede durch einen gegebenen Punkt A gehende Gerade AD liegt, die mit der gegebenen Geraden AB einen rechten Winkel macht. Eine solche Ebene wird also beschrieben, wenn AD sich um AB als Axe dreht.

2. Wird AB rückwärts nach C fortgesetzt, so macht auch AC mit jeder AD rechte Winkel.



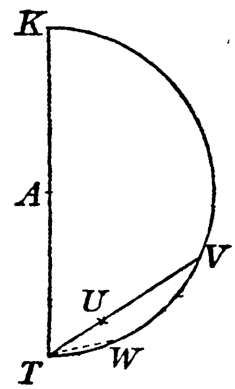
3. Es seien nun AD, AD' zwei im Planum liegende Gerade und $AD = AD'$; es sei ferner $AC = AB$: es deckt dann das Vierpunkt-System $ACD'D$ das Vierpunkt-System $ABDD'$; also das Dreieck $CD'D$ das Dreieck BDD'; allein auch das Dreieck $BD'D$ deckt BDD'; also deckt auch $CD'D$ $BD'D$. Ist also T ein beliebiger Punkt in der Geraden DD', so decken sich auch BDT, CDT, also BT und CT. Es ist also BCT gleichschenklig, also decken sich BCT und CBT, also BAT und CAT, folglich sind die Winkel BAT und CAT Rechte und T liegt im Planum.

4. *Theorem.* Eine durch zwei im Planum P liegende Punkte T, U gezogene Gerade liegt ganz in jenem.

Beweis. I) Liegt A in der Geraden $\ldots TU \ldots$, so ist der Satz aus der Definition des Planum von selbst klar. Liegt A nicht in der Geraden TU, so machen AT, AU einen Winkel mit einander; ist nun

II) $AT = AU$, so folgt der Satz aus 3; sind hingegen

III) AT und AU ungleich, so sei $AT > AU$. Man verlängere AT rückwärts bis $AK = AT$; die Kreislinie, welche T durch Drehung um A beschreibt, wird dann durch K gehen, und die Kreisfläche, die ein Theil des Planum P ist, wird durch KT in zwei Theile getheilt, in deren einem U liegt.



Indem nun eine Gerade TK sich so bewegt, dass ihr einer Endpunkt in T, der andere in der Peripherie KVW bleibt, beschreibt sie das Planum, vollendet die Figur immer vollkommener und hat sie ganz erschöpft, wenn W in T angekommen ist. In einer Lage der beweglichen Geraden ist sie also durch U gegangen, es sei diess die Lage TV. Die Gerade TU ist also nur ein Theil der Geraden TV, letztere aber liegt ganz in der Ebene, dasselbe gilt also auch von TU.

Dass übrigens auf vorbeschriebene Art die Fläche des Halbkreises ganz ausgefüllt wird, kann leicht mit vollkommener Strenge bewiesen werden. Gesetzt Ein Theil könne nicht erreicht werden und U sei ein Punkt in demselben. Mit einem Radius kleiner als TU beschreibe man [um T] eine Kugelfläche, wodurch jener Halbkreis in die Theile M, M' getheilt wird, so dass M ausserhalb, M' innerhalb der Kugelfläche liege; offenbar ist dann U in M. Es sei ferner W der Punkt der Peripherie des Halbkreises, wo dieselbe von der Kugelfläche geschnitten wird; die gerade Linie TW liegt dann innerhalb M', also U innerhalb der Figur $KTWK$, diese aber wird beschrieben, indem die bewegliche Linie sich von der Lage TK bis zu der Lage TW dreht. Also ist die Voraussetzung, dass U nicht getroffen werde, absurd.

[4.]

[Bei LÜBSEN, *Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, Hamburg 1851, Seite 11 heisst es:]

{Erklärung: Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, indem sie sich um ihre beiden festen Endpunkte dreht *).}

{*) So ungefähr hörten wir einmal GAUSS bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigen Gebrauchs den Begriff der geraden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; ausserdem ist das angegebene Merkmal praktisch wichtig, z. B. bei der Justirung eines Fernrohrs, richtigen Bohrung eines Cylinders etc.}

[5.]

THEORIE DES VORTRAGS VON LEHREN, DIE RAUMVERHÄLTNISSE BETREFFEN.

1) Alle die Gegenstände, die bei einem Satz relevant sind, zeichne man, und bezeichne sie durch Buchstaben oder Ziffern, Punkte durch einen, Linien durch 2, Flächen durch 3, Körper allenfalls durch 4, welches jedoch öfters auch durch einen geschehen kann.

2) Relativ bewegliche Räume, deren Bewegung ohne Stetigkeit bei dem Geschäft in Frage kommt, zeichne man besonders.

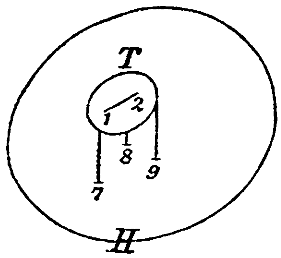
3) Die Grössenrelationen, die relevant sind, bezeichne man auch durch Buchstaben.

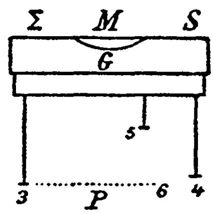
4) Man stelle sich das, was man beweisen will, in Form einer Gleichung vor und gehe successive auf deren Gründe zurück.

So wird das ganze Geschäft in seine Elemente gleichsam zerlegt, die man nachher rückwärts wieder zusammensetzt. Dabei bemerkt man dann leicht, was beim wirklichen Vortrag zusammengezogen werden kann.

Beispiel an der Theorie des Nivellirens einer Ebene.

[H(orizont) und T(isch)] [Libelle]





Man will bewirken, dass Eine Linie 1 2 horizontal wird und zuletzt beweisen, dass die gemachten Operationen diess bewirken. Man nenne also die Richtung von 1 2 gegen H[orizont]: v.

Es soll also bewiesen werden, dass das letzte $v = 0$. Überlegt man die Quelle der Gewissheit, so findet man, dass sie darauf beruht, dass die beiden vorletzten Werthe einander entgegengesetzt waren.

Weshalb waren sie einander entgegengesetzt? Weil eine andere Linie, die beidemale gleiche Neigung gegen H hatte, mit ihr in entgegengesetzten Lagen zusammenfiel. Diese andere Linie ist 3 6. Es heisse ihre Neigung gegen H[orizont]: u. Es muss also bewiesen werden, dass u in den Experimenten gleich war. Woran erkannte man diess? An der gleichen Stellung der Libelle.

Die Stellung der Libelle muss also u bestimmen. Wie wird diess bewiesen? Fragt sich erst: ist diess wahr? Man sieht ein, dass es nicht genau wahr ist, sondern nur im Fall einer berichtigten Libelle.

Man suche also eine Zwischengrösse, die 0 sein muss, wenn die Libelle wirklich berichtigt ist. Diess ist die Neigung von G gegen P, welche i heisst. Nennt man die Neigung von G gegen H[orizont]: g, so ist klar, dass die Stellung der Libelle von g abhängt, und dass sehr nahe

$$g = i + u$$

ist. Jetzt bezeichne man die Experimente mit:

I

Umgestellt

II

An 7 geschraubt

III

An 7 halb zurückgeschraubt

IV

An 3 geschraubt, wenn zugleich die Libelle berichtigt werden soll.

V

Die Schlüsse rückwärts sind also:

(1) $v^4 = 0$, weil (2) $v^3 = -v^2$ und kleine gleiche Bewegungen von 7 das v gleich viel verändern.

(2) $v^3 = -v^2$, weil $v^2 = u^1$, $v^3 = -u^3$ und (3) $u^1 = u^3$.

(3) $u^1 = u^3$, weil $S^1 = S^3 = u$ von u abhängig, also $u^1 = u^3$.

Da also S^1 hier in Consideration kommt, so ist klar, dass man vor I schon die Ebene T in die Lage gebracht haben muss, dass die Enden der Blase sichtbar sind.

Soll nun noch die Berichtigung der Libelle bewirkt werden, so ist zu zeigen, dass $i^5 = 0$.

Diess erkennt man an der Normalstellung von S, aber offenbar hängt sie nicht unmittelbar mit $i = 0$, sondern nur mit $g = 0$ zusammen.

Die Synthesis geht nun am besten von den ursprünglichen Werthen aus:

$$S = M + h + i + u,$$
$$\Sigma = M - h + i + u,$$

	u	v	i
[I]	v^1	v^1	i^1
[II]	$-v^1$	v^1	i^1
[III]	v^1	$-v^1$	i^1
[IV]	0	0	i^1
[V]	0	0	0

Da v bei 5 verschiedenen Stellungen nur 1 mal $= +u$ und 4 mal $= -u$ ist, so kann man v als Zeichen ganz ignoriren und [nur] von u sprechen.

Man kann also den Vortrag so einkleiden: Die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} S \\ \Sigma \end{matrix}\right\} = M \pm h + i + u$$

lehrt, dass gleiche Stellungen der Blase, bei ungeändertem Werth von i, gleiche Werthe von u anzeigen. Nun sind die Werthe von u in I und II entgegengesetzt; hat [die Blase] also in II dieselbe Stellung wie in I, so ist $u' = u'' = 0$.

Im entgegengesetzten Fall schliesst man, dass u nicht $= 0$ war und jetzt den entgegengesetzten Werth vom vorigen hatte. Bringt man also durch stetiges Schrauben an 7 das u wieder auf den vorigen Werth, so geht es dabei durch 0, und das halbe Schrauben zurück bringt 0 hervor. Dann ist also die Linie 1 2 oder 2 1 oder 3 4 horizontal, aber die Blase hat sich ihrerseits wieder gleichfalls der 2^{ten} Stellung um die Hälfte genähert. Man ändert nun i durch Schrauben an 3, bis $\left.\begin{matrix} S \\ \Sigma \end{matrix}\right\} = M \pm h$ wird.

BEMERKUNGEN.

Die erste der vorstehenden Notizen findet sich auf dem hintern Schmutzblatte des Werkes: *Mathematische Abhandlungen* von Jacob Wilhelm Heinrich LEHMANN, Zerbst 1829 und stammt vermuthlich aus diesem Jahre. Die Notiz [2] steht auf einem einzelnen Blatte; die Zeit ihrer Abfassung lässt sich nicht genau angeben, doch darf man vermuthen, dass sie zwischen 1820 und 1830 fällt. Die Notiz [3] hat GAUSS in einem Handbuche verzeichnet, höchst wahrscheinlich im März 1832, denn sie bezieht sich auf GAUSS' Brief an BOLYAI vom 6. März 1832. Die Notiz [4] beruht auf einer mündlichen Mittheilung von GAUSS an LÜBSEN, der im Jahre 1830 bei ihm Vorlesungen hörte (vergl. LÜBSEN, *Ausführliches Lehrbuch der Analysis*, Hamburg 1853, S. 171). Endlich ist die Notiz [5] auf einem Zettel verzeichnet, der nicht datirt ist, jedoch deutet die Handschrift auf eine spätere Periode aus GAUSS' Leben, etwa die Zeit zwischen 1840—1850; wahrscheinlich hat GAUSS die Notiz bei der Vorbereitung für eine Vorlesung über praktische Astronomie niedergeschrieben. Für ihre Unterbringung an dieser Stelle ist lediglich ihr Inhalt massgebend gewesen.

Dass GAUSS sich schon sehr früh mit der Definition der Ebene beschäftigt hat, zeigt die bereits S. 162 dieses Bandes abgedruckte Stelle aus seinem Tagebuche vom 28. Juli 1797.

Die beiden Figuren in der Notiz [1] sind dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.

[ÜBER DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 27. Januar 1829.

.... Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiss nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine s e h r a u s g e d e h n t e n Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht g a n z aussprechen wollte. — Seltsam ist es aber, dass a u s s e r der bekannten Lücke in Euklids Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie ausfüllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt, den meines Wissens niemand bisher gerügt hat, und dem abzuhelfen keinesweges leicht (obwohl möglich) ist. Diess ist die Definition des P l a n u m als einer Fläche, in der die, i r g e n d z w e i Punkte verbindende, gerade Linie g a n z liegt. Diese Definition enthält m e h r, als zur Bestimmung der Fläche nöthig ist, und involvirt tacite ein T h e o r e m, welches erst bewiesen werden muss. ......

[BESSEL *an* GAUSS. *Königsberg i. Pr., 10. Februar 1829.*]

{. . . . . Ich würde sehr beklagen, wenn Sie Sich »durch das Geschrei der Böotier« abhalten liessen, Ihre geometrischen Ansichten aus einander zu setzen. Durch das, was LAMBERT gesagt hat, und was SCHWEIKART mündlich äusserte, ist mir klar geworden, dass unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist und, wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks $= 180^0$ ist, verschwindet. Das wäre die wahre Geometrie, die Euklidische die praktische, wenigstens für Figuren auf der Erde. . . . . . .}

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 9. April 1830.

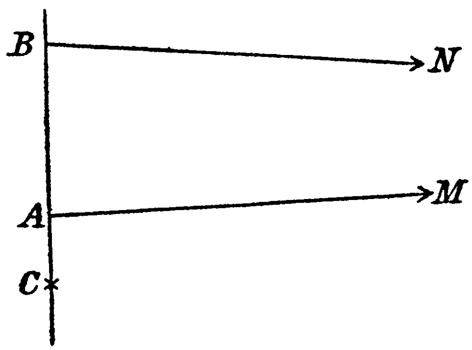
. . . . Wahre Freude hat mir die Leichtigkeit gemacht, mit der Sie in meine Ansichten über die Geometrie eingegangen sind, zumal da so wenige offenen Sinn dafür haben. Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre in unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass, wenn die Zahl bloss unsers Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können. . . . .

[ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN.]

[1.]

PARALLELLINIEN.

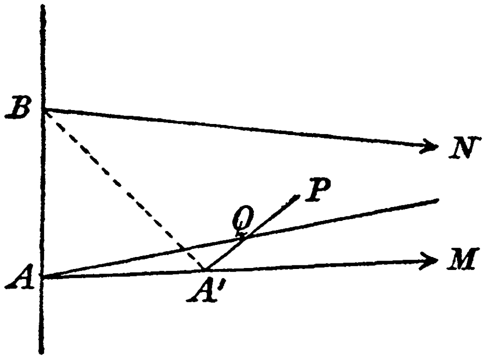
1. Wenn die Geraden $AM\ldots$, $BN\ldots$ einander nicht schneiden, jede durch A zwischen $AM\ldots$ und $AB\ldots$ gelegte Gerade hingegen die $BN\ldots$ schneidet: so heisst $AM\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel.



2. Geht eine Gerade beständig durch den Punkt A, und gelangt durch Drehung aus der Lage $AB\ldots$ auf der Seite, wo BN liegt, zuletzt in die Lage $AC\ldots$, die der ersten entgegengesetzt ist, so ist sie anfangs schneidend, zuletzt nicht schneidend, also muss es gewiss Eine und nur Eine Lage geben, die die Scheidung der schneidenden und nicht schneidenden [Geraden] ist, und zwar wird diess die erste nicht schneidende sein, also nach unserer Definition die Parallele $AM\ldots$, da es offenbar keine letzte schneidende geben kann.

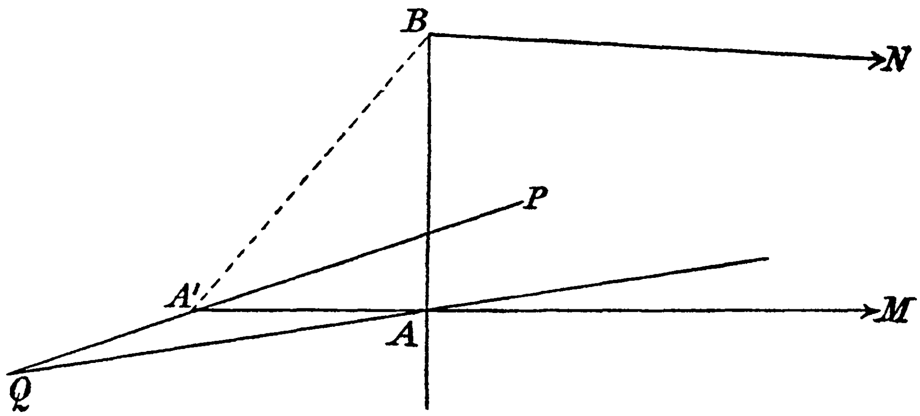
3. In unserer Definition sind in beiden Linien bestimmte Anfangspunkte A, B vorausgesetzt. Man sieht aber leicht, dass der Parallelismus davon unabhängig ist, in so fern nur der Sinn der Richtungen, nach welchen die Linien als unbegrenzt betrachtet werden, derselbe bleibt. Nimmt man nemlich statt B einen andern Anfangspunkt B', sei es auf der Linie $BN\ldots$, oder wo immer

auf ihrer Fortsetzung rückwärts, so ist von selbst klar, dass diess keinen Unterschied macht.



Nimmt man dagegen anstatt A einen andern Anfangspunkt A' auf der Linie $AM\ldots$, zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B$ die Gerade $A'P$ in beliebiger Richtung, und durch einen Punkt Q zwischen A' und P die Gerade $AQ\ldots$, so wird solche (Definition) die $BN\ldots$ schneiden, woraus von selbst klar ist, dass auch $QP\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden wird.

Nimmt man aber A' auf der rückwärts fortgesetzten $AM\ldots$ und zieht



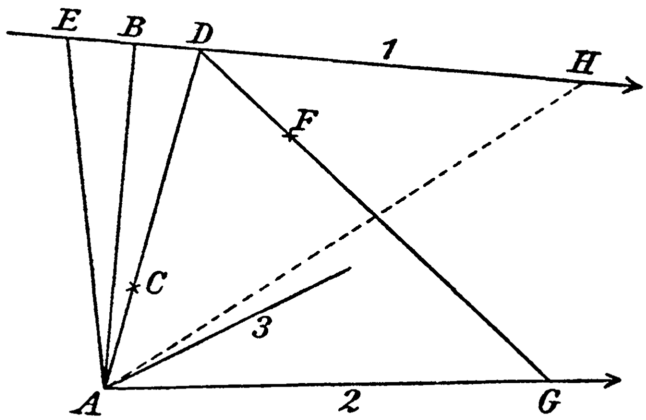
durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B\ldots$ in beliebiger Richtung die Gerade $A'P$, verlängert solche rückwärts und nimmt darauf einen beliebigen Punkt Q, so wird $QA\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden (Definition), z. B. in R. $A'P$ ist also in der geschlossenen Figur $A'ARB$ und wird daher eine der vier Seiten $A'A$, AR, RB, BA' schneiden, offenbar muss diess aber die dritte RB sein, daher also auch $A'M\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel ist.

4. Nicht ganz so evident ist die Reciprocität des Parallelismus. Es sei die Gerade 1 parallel mit 2. Von einem beliebigen Punkte in 2, A, fälle man ein Perpendikel AB auf 1. Es sei 3 eine beliebige Gerade durch A zwischen AB und 2, und AC eine Gerade zwischen denselben Grenzen, so dass der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2}(3,2).$$

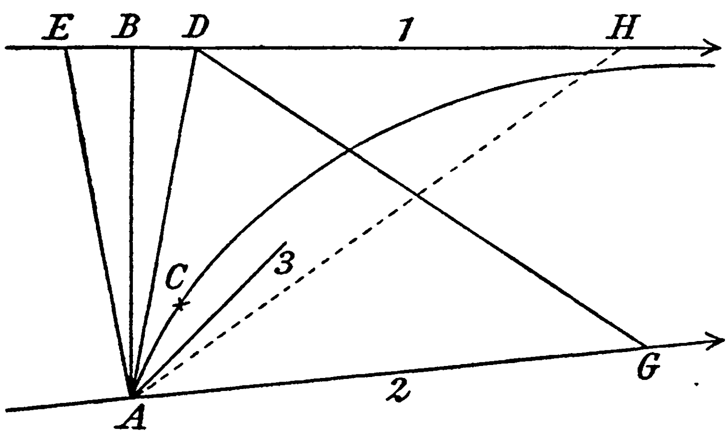
Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Schneidet $AC\ldots$ die Linie 1 in D, so mache man $BE = BD$, indem



E in 1 auf der entgegengesetzten Seite von D genommen wird. Durch D ziehe man zwischen 1 und DA die Gerade $DF\ldots$, so dass $ADF = AED$. Diese Gerade wird also 2 in G schneiden. Man mache [auf 1] $EH = DG$ und verbinde AH. Die Dreiecke ABD, ABE werden congruent sein, also $AE = AD$; folglich auch die Dreiecke ADG, AEH congruent, also $EAH = DAG$. [Mithin ist] $GAH = DAE = (2,3)$, [d. h.] AH ist mit 3 identisch oder 3 schneidet 1 in H und folglich ist, weil 3 jede beliebige zwischen 2 und AB liegende Gerade bedeuten kann, 2 mit 1 parallel.

II. Schneidet AC die 1 nicht, so sei D ein beliebiger Punkt auf 1. Es

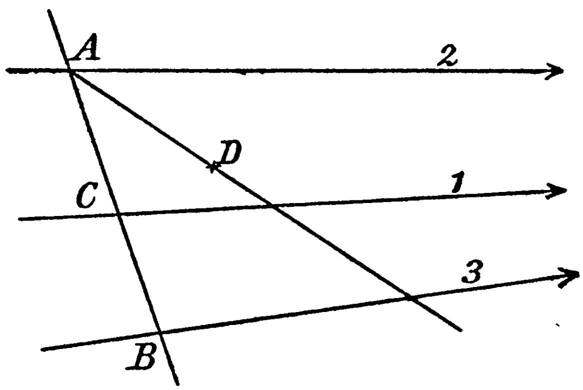


gelten dann dieselben Schlüsse wie vorher bis zu dem Resultat $GAH = DAE$.

Allein in diesem Fall ist $DAB < CAB$ oder $DAE < (2,3)$. Also $(2,3) > GAH$ und 3 wird folglich in der geschlossenen Figur AHD liegen, also DH schneiden. Das übrige wie in I.

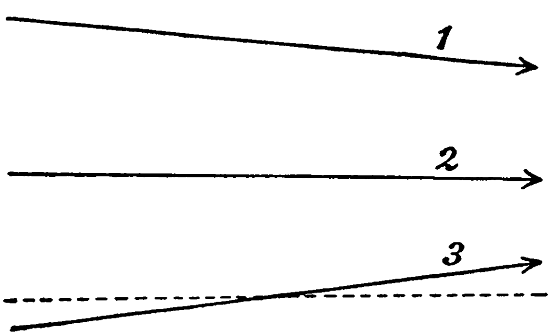
5. *Lehrsatz.* Ist die Gerade 1 sowohl mit 2 als mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

Beweis. Erster Fall, wenn 1 zwischen 2 und 3 liegt. Es seien A, B



Punkte auf 2 und 3 und AB schneide die 1 in C. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade $AD\ldots$ zwischen 2 und AB, welche also 1 schneiden wird; weiter fortgesetzt wird sie also auch 3 schneiden; da diess von jeder $AD\ldots$ gilt, so ist 2 mit 3 parallel.

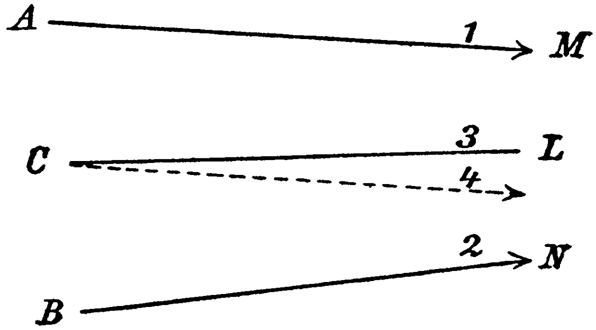
Zweiter Fall, wenn 1 ausserhalb 2 und 3 liegt. Es liege 2 zwischen 1



und 3. Wäre 2 mit 3 nicht parallel, so lässt sich durch einen beliebigen Punkt von 3 eine von 3 verschiedene Gerade ziehen, die mit 2 parallel ist. Diese ist also vermöge des ersten Falls auch mit 1 parallel, welches absurd ist. (Lehrsatz oben nachzusehen.)

6. *Lehrsatz.* Eine Gerade $CL\ldots$ oder 3, die sich zwischen zwei Parallelen $AM\ldots$ oder 1, $BN\ldots$ oder 2 befindet, und keine von beiden schneidet, ist mit denselben parallel.

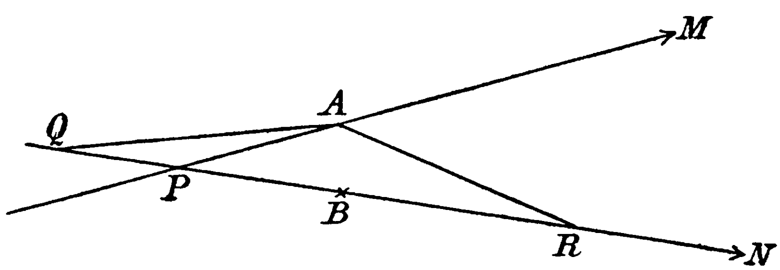
Beweis. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt C in der Geraden 3



eine Parallele 4 mit 2; wäre diese von 3 verschieden, so müsste 3 entweder zwischen 1 und 4 oder zwischen 2 und 4 fallen; in jenem Fall würde sie (Definition der Parallelen) die 1, im andern die 2 schneiden müssen, gegen die Voraussetzung.

7. *Lehrsatz.* Zwei Parallellinien, rückwärts fortgesetzt, können einander auf dieser Seite nicht schneiden.

Beweis. Gesetzt $AM\ldots$, $BN\ldots$ schnitten einander auf ihren Fortsetzungen rückwärts in P, so sei Q ein beliebiger Punkt in der noch über P hinaus rückwärts geführten Fortsetzung von $BN\ldots$. Man verbinde QA, welche Gerade noch weiter fortgesetzt PN in einem Punkt R schneiden wird. Wir haben also durch die Punkte Q, R zwei verschiedene gerade Linien, welches absurd ist.

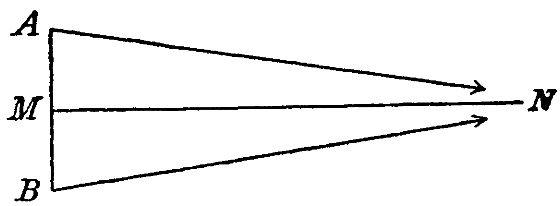


[2.]

[CORRESPONDIRENDE PUNKTE IN PARALLELLINIEN.]

1. *Definition.* Correspondirende Punkte in Parallellinien, auf den gleichen Winkeln an der Verbindungslinie beruhend.

2. Sind A, B correspondirende Punkte und M in der Mitte von AB,



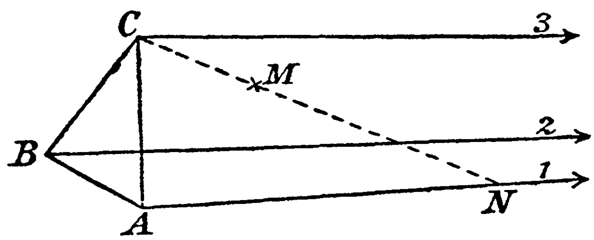
MN senkrecht auf AB, so wird 1) MN mit beiden parallel sein, 2) jeder Punkt, welcher mit A auf Einer Seite von MN liegt, wird dem A näher sein als [dem] B.

. . . .

4. *Theorem.* Sind A, B correspondirende Punkte auf den Parallelen 1, 2 und A', B' desgleichen, so ist $AA' = BB'$ und vice versa.

5. *Theorem.* Sind A, B, C Punkte auf den Parallelen 1, 2, 3 und A mit B, B mit C correspondirend; so ist auch A mit C correspondirend.

Beweis. Im entgegengesetzten Fall sei der Winkel $C > A$; man nehme



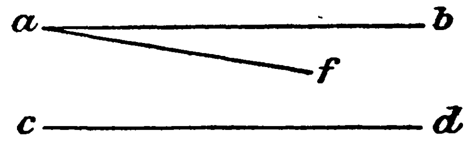
$ACM = A$, so wird CM die AN in N schneiden. Man hat also $AN = CN$; allein vermöge *Th. Th.* ist $AN < BN$ und $BN < CN$, welches also ein Widerspruch ist.

Setzte man voraus, dass $A = B$; $A = C$, und wäre B nicht $= C$, so sei $B = C'$, woraus $A = C'$ folgen würde.

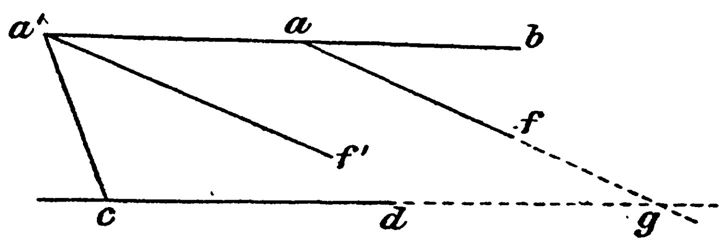
[3.]

PARALLELISMUS.

1. $ab*$ ist mit $cd*$ parallel, wenn
   1) beide in einer Ebene sind,
   2) einander nicht schneiden,
   3) jede Linie $af*$ innerhalb des Raumes $*bacd*$ die $cd*$ schneidet.

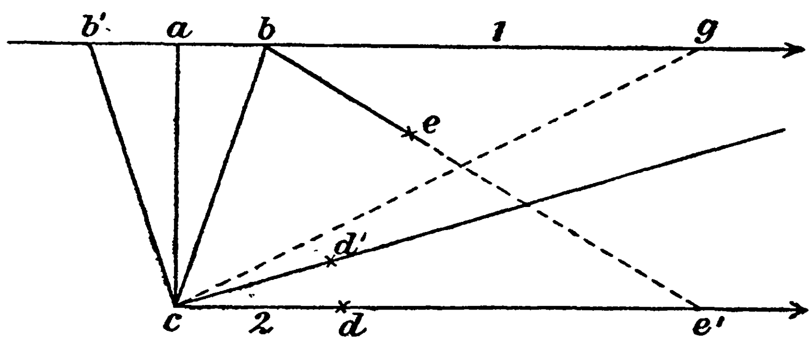


2. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $cd*$.
3. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $ab*$.
   I. Es ist auch $a'b*$ parallel mit $cd*$, wenn a' auf $ab*$.
   Beweis. $af*$ schneidet $cd*$; so wird auch $a'f*$ schneiden.
   II. [Es ist auch $a'b*$ parallel mit $cd*$,] wenn a' ausserhalb $ab*$.



Man mache $baf = ba'f'$; es schneide $af*$ die $cd*$ in g, so wird $a'f'$ die $af*$ nicht schneiden, also cg.

4. Es ist verstattet $ab*$ und $cd*$ zu vertauschen.



Es sei 1 und 2 parallel. Wäre nun nicht 2 mit 1 parallel, so sei cd' mit 1 parallel. Es sei ca senkrecht auf 1 und $acb = acb' = \frac{1}{2} dcd'$. Ferner

$\sphericalangle cbe = cb'b$. Es wird also be die 2 schneiden, in e'. Macht man nun $b'g = be'$, so wird cg und cd' mit cb' einerlei Winkel machen. Welches absurd ist.

5. Wenn 1 mit 2 und 1 mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

6. Was correspondirende Punkte auf zwei Parallelen sind.

7. Aequidistanz der correspondirenden Punkte.

8. Der Punkt auf einer dritten Parallelen correspondirt correspondirenden Punkten auf den beiden ersten.

9. Trope ist die L[inie, die von correspondirenden Punkten gebildet wird, wenn man alle Parallelen zu einer Geraden betrachtet.]

BEMERKUNG.

In dem Briefe an SCHUMACHER vom 17. Mai 1831 (S. 213 dieses Bandes) sagt GAUSS, dass er von seinen Meditationen über die Theorie der Parallellinien, die schon gegen 40 Jahr alt seien, früher nie etwas aufgeschrieben habe, dass er jedoch vor einigen Wochen begonnen habe, einiges aufzuschreiben; auch in dem Briefe an BOLYAI vom 6. März 1832 erwähnt GAUSS solche Aufzeichnungen. Man wird daher nicht fehlgehen, wenn man annimmt, dass die vorstehenden nicht datirten Notizen, die sich auf einzelnen Zetteln befinden, aus dem Jahre 1831 stammen.

Die Figuren in der Notiz [1], sowie die erste Figur in der Notiz [3] sind dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.

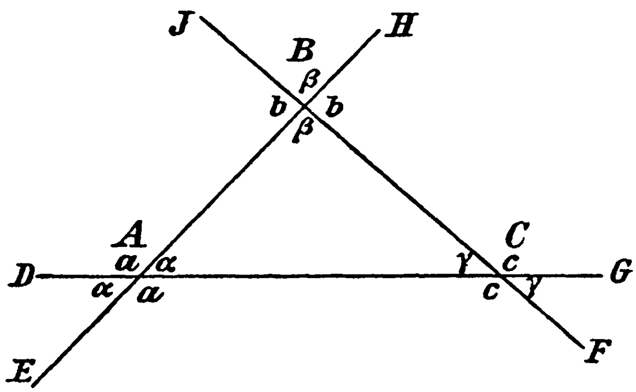
[ZUR PARALLELENTHEORIE.]

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Copenhagen, 3. Mai 1831.*]

{. . . . . . . Ich bin so frei Ihnen anbei einen Versuch zu senden, ohne Parallellinien und ihre Theorie zu gebrauchen, den Satz zu beweisen, dass die Summe aller drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks $= 180^0$ sei, aus dem dann der Beweis des Euklidischen Axioms folgen würde. Ich setze nichts voraus, als dass die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel $= 360^0 = 4R$, und dass die Wechselwinkel sich gleich sind.

Da ich aus Erfahrung weiss, wie sonderbar blind man (ich wenigstens) mitunter in Bezug auf eigene Arbeiten ist, so fürchte ich sehr, dass eine petitio principii dabei zum Grunde liegt. Ich bin aber jetzt nicht im Stande sie zu entdecken, und erwarte Belehrung von Ihnen.

[Beilage.] Man verlängere die Seiten eines geradlinigen Dreiecks ABC



[Fig. 1.]

unbestimmt, oder man betrachte ein System von drei geraden Linien in einer

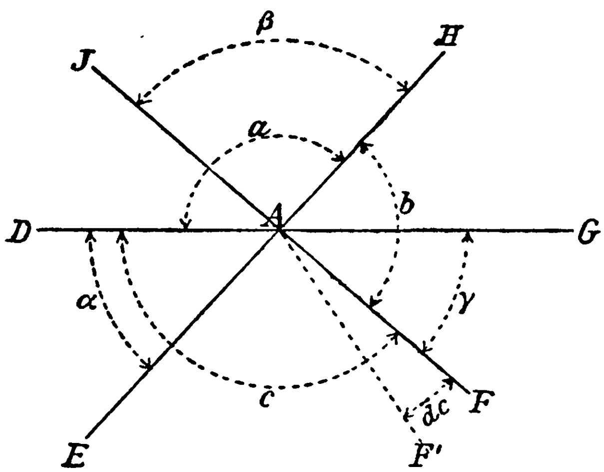
Ebene, deren Durchschnitte das Dreieck ABC bilden, so geben die drei Winkelpunkte uns die Gleichungen:

$$2a+2\alpha = 4R,$$
$$2b+2\beta = 4R,$$
$$2c+2\gamma = 4R,$$

also

$$\alpha+\beta+\gamma = 6R-(a+b+c).$$

Da diese Relationen bestehen, wie auch die Punkte A, B, C liegen mögen, oder, was einerlei ist, wie auch die drei Linien im Raume gezogen sind, so lasse man die Linien $\overline{DG}$, $\overline{EH}$ unverrückt, und ziehe $\overline{JF}$ durch den Punkt A, so dass sie denselben Winkel als in ihrer vorigen Lage mit EH macht oder, da



[Fig. 2.]

dieser Winkel beliebig ist, überhaupt nur so, dass sie innerhalb des Winkels a fällt, so haben wir

$$a+b+c = 4R,$$

also

$$\alpha+\beta+\gamma = 2R.$$

Kann man dagegen sagen, dass freilich

$$b\ [\text{1ste Figur}] = b\ [\text{2te Figur}]$$

nach der Annahme, dass aber der Satz

$$c\ [1\text{ste Figur}] = c\ [2\text{te Figur}]$$

dann bewiesen werden müsse?

Mir scheint bei der Willkürlichkeit der Winkel dieser Beweis nicht nothwendig.

Diess sind die Grundzüge des Beweises und ich erwarte Ihre Entscheidung. Ich füge nur, um meinen Beweis zu rechtfertigen, hinzu, dass freilich durch die zweite Operation das Dreieck ABC verschwindet, aber nicht die Winkel des Dreiecks. Wie die Linien auch liegen, so ist immer

$$J\widehat{B}H = \beta, \qquad G\widehat{C}F = \gamma, \qquad D\widehat{A}E = \alpha$$

im endlichen, so wie im verschwindenden Dreiecke, mithin die Summe

$$J\widehat{A}H + G\widehat{A}F + D\widehat{A}E$$

immer gleich der Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks.

Soll man also den Satz von einem beliebigen Dreiecke (dessen Winkel A, B, C) beweisen, so zieht man die Linien DG, EH, so dass

$$\alpha = A,$$

man nimmt ferner den Winkel $J\widehat{A}H = B$, $G\widehat{A}F = C$.

Ist dann JAF keine gerade, sondern eine gebrochene Linie JAF', so ist freilich der Winkel c dadurch um dc kleiner, der Winkel b aber um eben so viel grösser geworden, mithin ihre Summe unverändert geblieben, oder wir haben, was zur Stringenz des Beweises gehört:

$$b + c\ [\text{Fig. } 1] = b + c\ [\text{Fig. } 2].\}$$

Gauss an Schumacher. Göttingen, 17. Mai 1831.

.... Bei dem, was Sie über die Parallellinien schreiben, haben Sie, genau besehen, in Ihren Syllogismen einen Zwischensatz gebraucht, ohne ihn ausdrücklich auszusprechen, der so lauten müsste:

Wenn zwei einander schneidende gerade Linien (1) und (2) mit einer dritten (3), von der sie geschnitten werden, respective die Winkel A', A'' machen, und dann eine vierte (4) in derselben Ebene liegende Gerade von (1) gleichfalls unter dem Winkel A' geschnitten wird, so wird (4) von (2) unter dem Winkel A'' geschnitten werden.

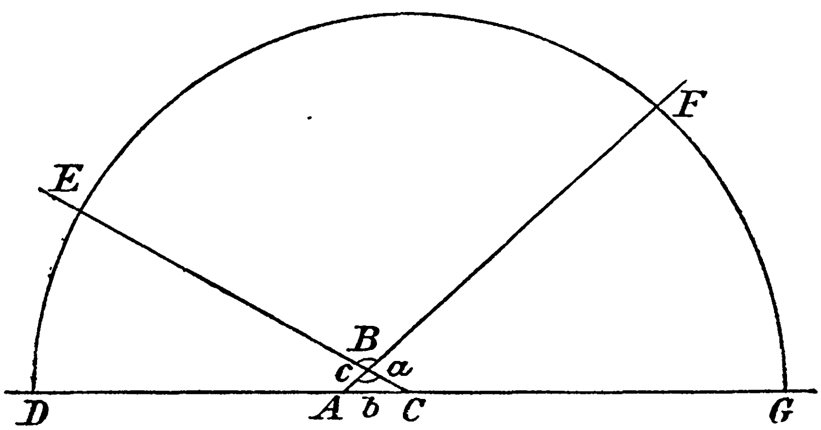
Allein dieser Satz ist nicht bloss eines Beweises bedürftig, sondern man kann sagen, dass er im Grunde der zu beweisende Satz selbst ist.

Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Lübeck, 25. Mai 1831.*]

{Ich falle Ihnen, mein theuerster Freund! noch einmal mit der Parallelentheorie beschwerlich.

Man verlängere die Seiten des geradlinigen Dreiecks unbestimmt, und



nehme einen Radius R so gross, dass $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden. Mit diesem Radius beschreibe man aus C den Halbkreis $DEFG$.

Weil in Bezug auf diesen Halbkreis a, b, c als verschwindend zu betrachten sind, also die Punkte A, B als in C fallend, so ist dieser Halbkreis das Mass der drei Winkel des Dreiecks, die mithin weniger als jede gegebene Grösse von 180^0 differiren.

Mir scheint, wenn man den Begriff des endlos Wachsenden nicht ausschliesst, so zeigt dieser Beweis sehr einfach, dass in jedem endlichen geradlinigen Dreiecke die Summe der Winkel $= 180^0$ ist, oder eigentlich, dass die Constante, die, wenn Euklids Geometrie nicht wahr wäre, zu der Summe der Winkel kommt, um die Gleichheit mit 180^0 zu bewirken, kleiner als jede gegebene Grösse ist, und da sich diess für jedes Dreieck beweisen lässt, so kann diese Constante eben so wenig von der Grösse des Dreiecks abhängen. . . . . . }

[Schumacher an Gauss. *Altona, 29. Juni 1831.*]

{. . . . . . . Nur etwas habe ich in Ihrem Briefe vermisst — Ihr Urtheil über meinen Beweis, dass die Summe der Winkel in einem geradlinigen Dreiecke nur um eine Grösse, die kleiner als jede gegebene ist, von 180^0 verschieden sei. Sie können leicht denken, dass mir Ihr Urtheil sehr wichtig ist, da Sie jede Schwäche eines Beweises so leicht entdecken. Ausser Ihnen, meinem Gehülfen, und Professor Hansen vom Seeberg habe ich noch niemandem etwas mitgetheilt. Keiner von uns kann einen Paralogismus entdecken.

Sollte jemand den Satz, dass man die Winkelpunkte eines endlichen Dreiecks als coincidirende Mittelpunkte eines Kreises von unendlichem (brevitatis causa unendlich genannt) Halbmesser betrachten könne, eines Beweises bedürfend halten, obgleich ich diess nicht glaube, so lässt sich dieser Beweis strenge führen.

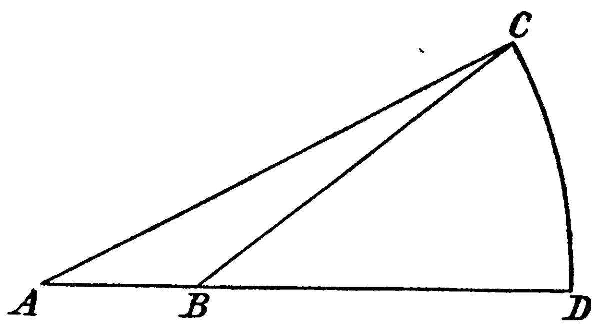
Mir scheint, wenn zwei Punkte eine endliche Entfernung von einander haben, so wird diese Entfernung in Bezug auf eine unendliche Linie $= 0$ zu setzen sein, sie coincidiren mithin in Bezug auf diese unendliche Linie betrachtet. . . . . . . }

Gauss an Schumacher. Göttingen, 12. Juli 1831.

.... Was die Parallellinien betrifft, so würde ich Ihnen mein Urtheil sehr gern schon auf Ihren ersten Brief geschrieben haben, wenn ich nicht hätte voraussetzen müssen, dass Ihnen mit demselben ohne vollständige Entwickelungen wenig gedient sein würde. Zu solchen vollständigen Entwickelungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen, würden aber vielleicht Bogenlange Auseinandersetzungen in Erwiederung auf das, was Sie in wenigen Zeilen im Grunde nur angedeutet haben, nöthig sein, zu welchen Auseinandersetzungen mir aber gegenwärtig die erforderliche Geistesheiterkeit fehlt. Um Ihnen jedoch meinen guten Willen zu bethätigen, will ich folgendes hersetzen.

Die eigentliche Pointe richten Sie sogleich auf jedes Dreieck; allein Sie würden im Grunde Ihr nemliches Räsonnement anwenden, wenn Sie das Geschäft zuerst auf den einfachsten Fall anwendeten und den Satz aufstellten:

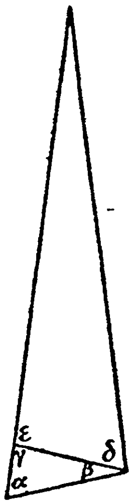
1) In jedem Dreieck, dessen eine Seite endlich, die zweite und folglich auch die dritte hingegen unendlich ist, ist die Summe der beiden Winkel an jener $= 180^0$.



Beweis nach Ihrer Manier:

Der Kreisbogen CD ist eben so gut das Mass des Winkels CAD als CBD, weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verrückung des Mittelpunkts für 0 zu achten ist. Also

$$CAD = CBD, \qquad CAD + CBA = CBD + CBA = 180^0.$$



Das Übrige ergibt sich dann leicht von selbst. Es ist nemlich nach diesem Lehrsatze

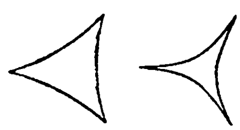
$$\alpha+\beta+\delta = 180^0$$
$$180^0 = \varepsilon+\delta$$
$$\gamma+\varepsilon = 180^0.$$

Also addendo

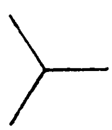
$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0.$$

Was nun aber Ihren Beweis für 1) betrifft, so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nicht-Euklidische Geometrie durchaus nichts widersprechendes, wenn gleich diejenigen[, die sie kennen lernen,] viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühen Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.

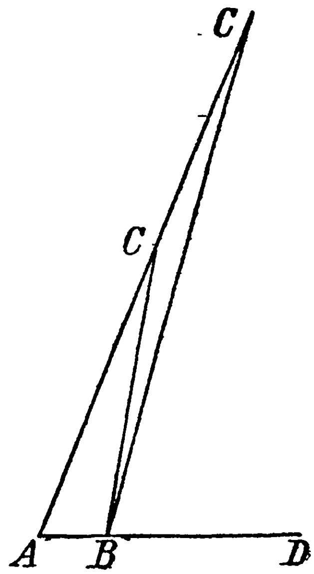
In der Nicht-Euklidischen Geometrie gibt es gar keine ähnlichen Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $\frac{2}{3}R$, sondern auch [bei verschiedenen Dreiecken] nach Massgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. Es ist daher schon an sich widersprechend, ein solches Dreieck durch ein kleineres zeichnen zu wollen, man kann es im Grunde nur bezeichnen:



Die Bezeichnung des unendlichen Dreiecks in diesem Sinne wäre am Ende:

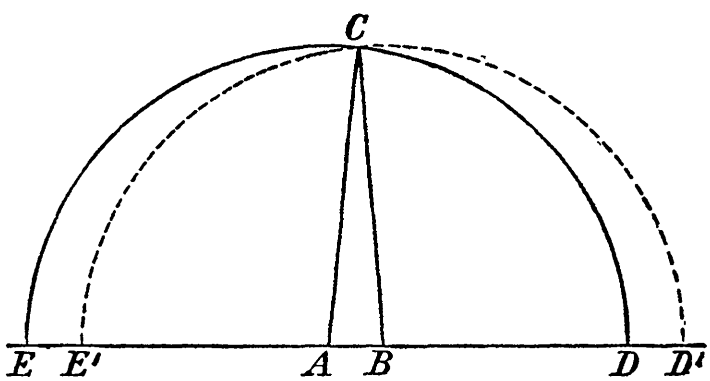


In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, diess ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die diess nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie; aber, wie gesagt, nach meiner Überzeugung ist diess blosse Selbsttäuschung.



Für den fraglichen Fall ist nun durchaus nichts widersprechendes darin, dass, wenn die Punkte A, B und die Richtung AC gegeben sind, während C ohne Beschränkung wachsen kann, dass dann, obgleich so DBC dem DAC immer näher kommt, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche Differenz heruntergebracht werden könne.

Ihr Hineinziehen des Bogens CD macht allerdings den Schluss um vieles captiöser, allein wenn man, was Sie nur angedeutet haben, klar entwickeln will, so müsste es so lauten:



Es ist

$$CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$$

und indem AC ins Unendliche wächst, kommen CD und CD' einerseits und ECD, $E'CD'$ andererseits der Wahrheit immer näher.

Beides ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter versteht, dass ihre geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen wie man will. In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$:

$$= \tfrac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right),$$

wo k eine Constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuer gross sein muss. In Euklids Geometrie wird sie unendlich.

In der Bildersprache des Unendlichen würde man also sagen müssen, dass die Peripherien zweier unendlichen Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Grösse verschieden sind, selbst um eine Grösse verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältniss hat.

Hierin ist aber nichts widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.

Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Altona, 19. Juli 1831.*]

{Meinen herzlichsten Dank statte ich Ihnen, mein theuerster Freund, für Ihren letzten Brief ab. Ich kann nicht sagen, dass er mich schon überzeugt hätte. Ich glaube die unendliche Grösse nicht als geschlossen gebraucht zu haben. Mir scheint, man kann zeigen, dass mit dem Wachsen des Halbmessers die Differenz der Winkelpunkte des Dreiecks immer mehr verschwindet, und sich der Grenze des Zusammenfallens, so viel man immer will, nähert. Sagt man also, der Kürze halber, sie fallen für einen unendlichen Radius wirklich zusammen, so wird diess eben so wie gewöhnlich verstanden, und es folgt daraus, dass, in Bezug auf die Peripherie, die von den geraden Linien intercaptirten Bögen, sich ohne Grenze dem Masse der Winkel nähern. Indessen gebe ich gern zu, dass ich mich täusche, und werde theils selbst die Sache reiflicher durchdenken, theils und vorzüglich den Augenblick erwarten, wo mündliche Belehrung von Ihrer Seite möglich wird. Warum man bei Linien nicht, wie bei allgemeinen Grössen, Schlüsse brauchen soll, die sich auf ohne Ende wachsende Linien gründen, sehe ich nicht ein, vorausgesetzt, dass man die Grenzen bestimmen kann, denen man sich dabei, so weit man will, nähert. . . . .}

[JOHANN BOLYAIS APPENDIX.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 14. Februar 1832.

.... Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Concentrirung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse. ......

Gauss an Wolfgang von Bolyai. Göttingen, 6. März 1832.

.... Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange, »dass ich solche nicht loben darf«: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein

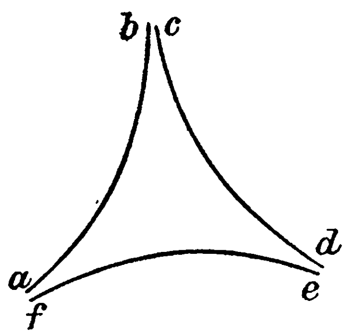
Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderm Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird, für manche Hauptbegriffe nicht bloss Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an Einige solcher Namen gedacht. So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit Andern verständigen will. So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche, oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heissen, die von einer Geraden, mit der sie in Einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; eben so Hypersphäre. Doch das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen: als ein Specimen füge ich einen rein geometrischen Beweis (in den Hauptzügen) von dem Lehrsatze bei, dass die Differenz der Summe der Winkel eines Dreiecks von 180^0 dem Flächeninhalte des Dreiecks proportional ist.

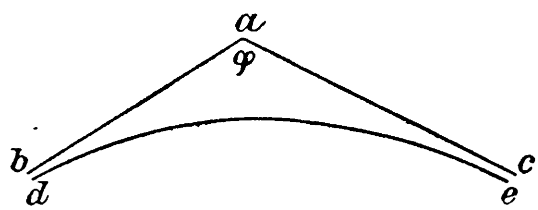
I. Der Complexus dreier Geraden ab, cd, ef, die so beschaffen sind, dass $ab \parallel\!| dc$, $cd \parallel\!| fe$, $ef \parallel\!| ba$, bildet eine Figur, die ich T nenne. Es lässt



sich beweisen, dass solche immer in einem Planum liege.

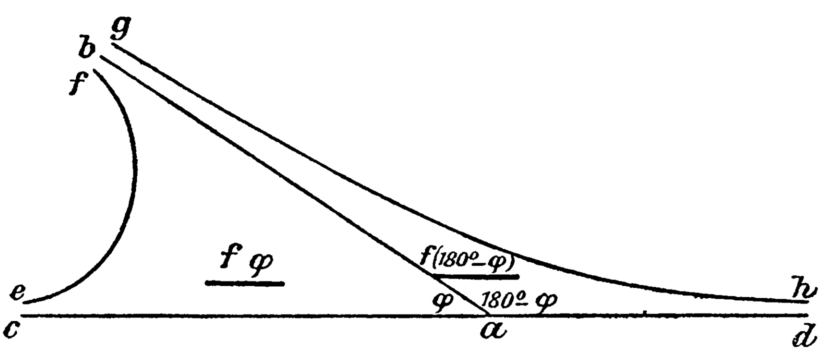
II. Derjenige Theil des Planums, welcher zwischen*) den drei Geraden ab, cd, ef liegt, hat eine bestimmte endliche Area: sie heisse t.

III. Indem zwei Geraden ab, ac sich in a unter dem Winkel φ schneiden, möge eine dritte Gerade de so beschaffen sein, dass $ab \,|||\, ed$, $ac \,|||\, de$: es liegt dann auch de mit ab und ac in Einem Planum, und die Area der Fläche zwi-



schen diesen Geraden ist endlich, und nur von dem Winkel φ abhängig; offenbar bilden in S de und bac nur Eine gerade Linie, wenn $\varphi = 180^0$ ist, und folglich verschwindet der Werth jener Area mit $180^0 - \varphi$: man setze also allgemein die Area $= f(180^0 - \varphi)$, wo f ein Functionalzeichen bezeichnet.

IV. Lehrsatz. Es ist allgemein $f\varphi + f(180^0 - \varphi) = t$.



Den Beweis gibt die Figur, wo $bac = \varphi$, $bad = 180^0 - \varphi$, $ac \,|||\, fe$, $ef \,|||\, ab$ $ab \,|||\, hg$, $ad \,|||\, gh$, und wo der Flächeninhalt roth eingeschrieben ist.

---

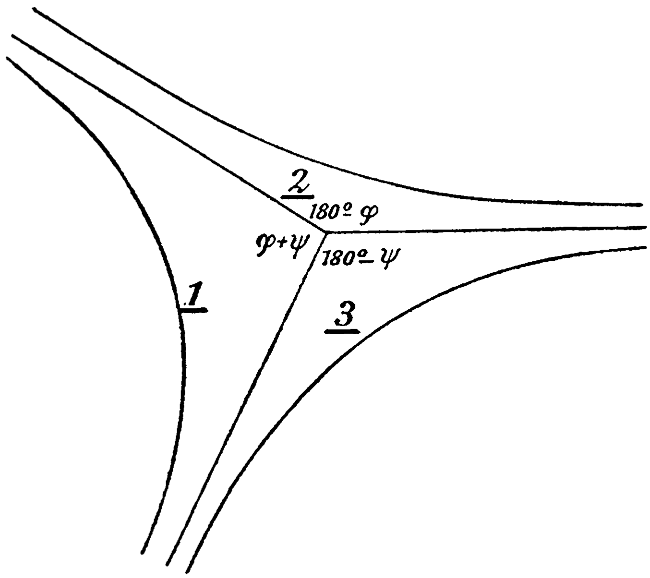
*) Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte, wie »zwischen«, auch erst auf klare **Begriffe** gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.

V. Lehrsatz. Es ist allgemein $f\varphi + f\psi + f(180^0 - \varphi - \psi) = t$.

Der Beweis erhellt leicht aus der Figur, wo die drei Flächentheile $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$ die Werthe haben

$$\underline{1} = f(180^0 - \varphi - \psi),$$
$$\underline{2} = f\varphi,$$
$$\underline{3} = f\psi$$

und ihre Summe $= t$ wird.



VI. Corollarium. Es ist also

$$f\varphi + f\psi = t - f(180^0 - \varphi - \psi)$$
$$= f(\varphi + \psi),$$

woraus leicht folgt, dass

$$\frac{f\varphi}{\varphi} = Constans,$$

und zwar

$$= \frac{t}{180^\circ}$$

ist.

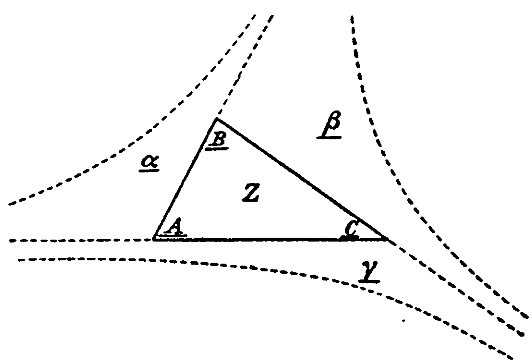
VII. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Winkel A, B, C sind, ist

$$= \frac{180^\circ - (A + B + C)}{180^\circ} \times t.$$

Den Beweis gibt die Figur. Es ist nemlich

der Inhalt $\alpha = fA = \frac{A}{180^\circ} \cdot t$,

$$\beta = fB = \frac{B}{180^\circ} \cdot t,$$
$$\gamma = fC = \frac{C}{180^\circ} \cdot t,$$
$$t = \alpha + \beta + \gamma + Z$$
$$= \frac{A + B + C}{180^\circ} \cdot t + Z.$$



Ich habe hier bloss die Grundzüge des Beweises angeben wollen, ohne alle Feile oder Politur, die ich ihm zu geben jetzt keine Zeit habe. Es steht Dir frei, es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüssen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

»Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen«.

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben lässt: so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerlässlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muss sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener [Natur] mit der Schwierigkeit zwischen Σ und S zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. Wahrscheinlich finde ich mich auch schon durch Dein Buch hierüber befriedigt.

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen andern ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64, pag. 625. Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G.G.A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter andern auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Grössen auf ein Paar Seiten dargelegt ist. . . . . . .

BEMERKUNGEN.

Bereits im Juni 1831 hatte WOLFGANG BOLYAI das »Werkchen« seines Sohnes JOHANN an GAUSS abgeschickt, es war jedoch wegen der Choleraepidemie nicht an diesen gelangt (Briefe von BOLYAI an GAUSS vom 20. Juni 1831 und 16. Januar 1832). Der Titel des Exemplares, das sich in GAUSS' Nachlass befindet, ist von WOLFGANG BOLYAI eigenhändig geschrieben und lautet:

Appendix prima.

Scientia Spatii, a veritate aut falsitate Axiomatis XI^{mi} Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore, Auctoris filio JOHANNE BOLYAI, de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Locumtenente Primario.

De eadem bedeutet: de Bolya; Bolya war das in der Nähe von Maros Vásárhely gelegene Stammgut der Familie Bolyai (vergl. auch S. 235, Z. 18 und Fussnote).

Die nur 26 Seiten lange klassische Abhandlung JOHANN BOLYAIS erschien als Anhang zu dem ersten Bande des Werkes seines Vaters:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Maros Vásárhelyini 1832.

und führt daselbst einen etwas abweichenden Titel (vergl. den Brief von GAUSS an GERLING vom 4. Februar 1844 S. 235 dieses Bandes).

Zur Erläuterung sei noch bemerkt, dass JOHANN BOLYAI das Zeichen /// für *parallel* (im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie) anwendet und dass er mit Σ das System der Euklidischen, mit S das System seiner absoluten Geometrie bezeichnet.

Das Original des Briefes von GAUSS vom 6. März 1832, das WOLFGANG seinem Sohne JOHANN geschenkt hatte, ist verloren gegangen. In GAUSS' Nachlass befindet sich nur eine von JOHANN angefertigte Abschrift, die dessen Vater am 26. August 1856 an SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN geschickt und dieser dem GAUSS'schen Nachlass einverleibt hat.

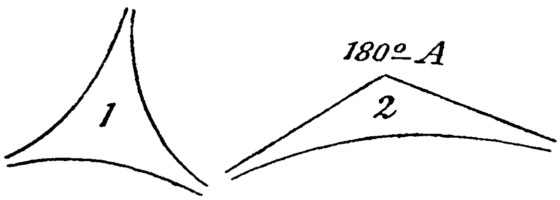
Die Abschrift hat S. 222 Z. 18—19 *wo folglich* statt *und folglich*, S. 224 Z. 18 Σ *in* S statt Σ *und* S. Da GAUSS häufig als Abkürzung für *und* ein undeutliches *uð* schreibt, so ist ein Irrthum des Abschreibers sehr wahrscheinlich. Die unterstrichenen Zeichen $\underline{f\varphi}$ und $\underline{f(180^\circ-\varphi)}$ auf S. 222, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ auf S. 223 waren im Originale mit rother Tinte geschrieben und sind in der Abschrift mit Bleistift wiedergegeben.

STÄCKEL.

ZUR ASTRALGEOMETRIE.

[I.]

Die Hauptmomente des Beweises, dass die Summe der Dreieckswinkel von 180^0 um eine dem Flächeninhalt proportionale Differenz verschieden ist, beruhen auf Folgendem:



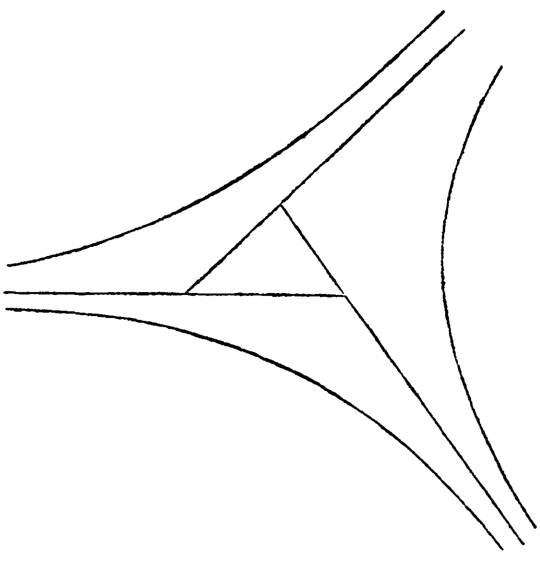
Inhalt des unendlichen Dreiecks 1 $= T$.

Inhalt des unendlichen Dreiecks 2 $= \varphi A$.

Dann ist

1. $\varphi A + \varphi(180^0 - A) = T$,
2. $\varphi B + \varphi C + \varphi(180^0 - B - C) = T$,

beides durch Construction.



Also wenn man $A = B + C$ setzt:

3. $\varphi B + \varphi C = \varphi(B + C)$,

mithin $\varphi t = a t$, wo a ein constanter Factor und

$$a \cdot 180^0 = T.$$

Sind nun ferner A, B, C die drei Winkel eines Dreiecks, dessen Inhalt $= Q$, so ist durch Construction

$$\begin{aligned} T &= Q + \varphi A + \varphi B + \varphi C \\ &= Q + a(A + B + C), \end{aligned}$$

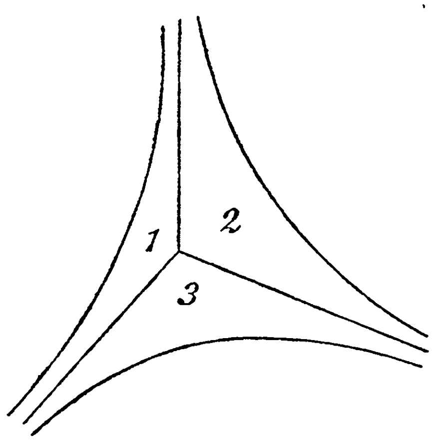
woraus das zu Beweisende sogleich von selbst folgt.

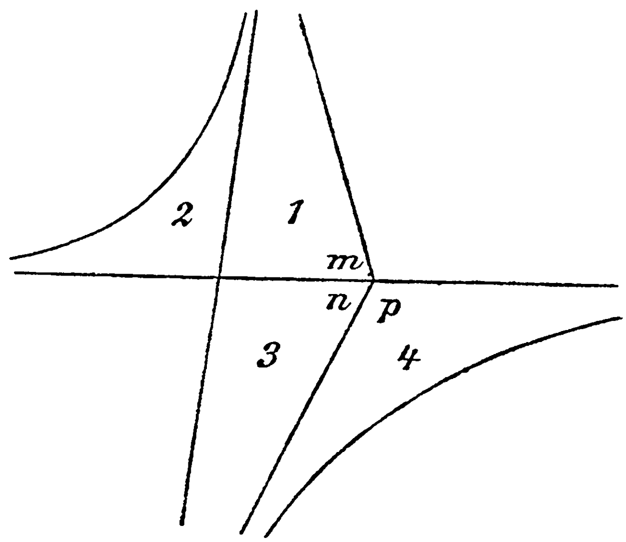
[II.]

Die Construction für 2 ist:

$$1 = 180^0 - B$$
$$2 = 180^0 - C$$
$$3 = 180^0 - \{180^0 - (B + C)\}.$$

Man kann aber den Satz 3 mit Einem Schlage durch folgende Construction beweisen:





Hier ist $2 = 3 + 4$, weil beides Asymptotenräume auf gleichen Winkeln, also

$$(1 + 2) = (1 + 3) + (4).$$

Aber	$1 + 2$	ist ein Asymptotenraum	zu $180^0 - m$
	$1 + 3$		zu $180^0 - (m + n)$
	4		zu $180^0 - p \quad = n,$

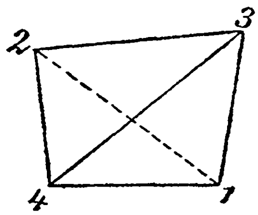
woraus

$$f(180^0 - m) = f(180^0 - m - n) + fn$$

folgt.

[III.]

CUBIRUNG DER TETRAEDER.



Im Tetraeder 1 2 3 4 sind die Seitenflächen 1 2 4 gegen 1 3 4 senkrecht. Der Inhalt $= \Delta$.

$$\partial\Delta = -24.\partial 341,$$

in so fern die Winkel an 3 constant sind, wo also

$$\alpha\alpha \operatorname{cotg} 341^2 - \beta\beta\left(\frac{\operatorname{tg} i.24}{i}\right)^2 = 1$$

und

$$\alpha = \operatorname{cotg} 431$$

$$\beta = \operatorname{cotg} 234.$$

BEMERKUNGEN.

Die Notizen [I] und [III] stehen in einem Handbuche unmittelbar hinter einander und sind höchst wahrscheinlich niedergeschrieben worden, als GAUSS den Seite 221—224 dieses Bandes abgedruckten Brief an BOLYAI concipirte, also im März 1832; die Notiz [II] stammt aus späterer Zeit; sie ist in demselben Handbuche verzeichnet.

Während die Notizen [I] und [II] keiner Erläuterung bedürfen, ist das bei der Notiz [III] um so mehr erforderlich, als bei der Formel für $\partial\Delta$ der Factor $\frac{1}{2}$ fehlt.

GAUSS denkt sich ein Tetraeder 1 2 3 4 in der Weise construirt, dass die Seitenflächen 1 2 4 und 1 3 4 auf einander senkrecht stehen und dass auch die Kanten 1 3 und 2 4 die Schnittlinie 1 4 dieser beiden Seitenflächen auf rechtem Winkel treffen. Alsdann steht 2 4 auf 1 4 und 3 4, 1 3 auf 1 2 und 1 4 senkrecht, und das Tetraeder hat vier rechtwinklige Dreiecke zu Seitenflächen:

1 2 3, 1 3 4, 4 1 2, 4 2 3,

wo der Eckpunkt mit einem rechten Winkel stets an erster Stelle vermerkt ist.

In dem rechtwinkligen Dreieck 1 3 4 ist:

$$\cos(i.34) = \cot(431).\cot(341),$$

in dem rechtwinkligen Dreieck 4 2 3:

$$\sin(i.34) = \cot(234).\operatorname{tg}(i.24),$$

woraus durch Elimination der den beiden Dreiecken gemeinsamen Seite 3 4 die Relation hervorgeht:

$$\cot(431)^2.\cot(341)^2 - \cot(234)^2.\left(\frac{\operatorname{tg} i.24}{i}\right)^2 = 1,$$

oder wenn man

$$\cot(4\,3\,1) = \alpha, \qquad \cot(2\,3\,4) = \beta$$

setzt:

$$\alpha^2 \cot(3\,4\,1)^2 - \beta^2 \left(\frac{\operatorname{tg} i\,.\,2\,4}{i}\right)^2 = 1.$$

Das Tetraeder $1\,2\,3\,4$, dessen Volumen Δ heisse, möge nunmehr dadurch einen unendlich kleinen Volumenzuwachs $1\,2\,4\,1'2'4' = \partial\Delta$ erfahren, dass man die Kante $3\,1$ um das unendlich kleine Stück $1\,1' = d(1\,3)$ verlängert und durch $1'$ senkrecht zu $3\,1'$ die Ebene $1'\,2'\,4'$ legt, die die Kanten $3\,2$ und $3\,4$ beziehungsweise in $2'$ und $4'$ schneidet. Die Winkel an der Ecke 3, also auch die Grössen α und β, bleiben hierbei unverändert. Der Winkel $(3\,4\,1)$ geht in den Winkel

$$(3\,4'\,1') = (3\,4\,1) + d(3\,4\,1)$$

über, und zwar wird, wie die Betrachtung des Vierecks $1\,1'4'4$ mit der unendlich kleinen Grundlinie $1\,1' = d(1\,3)$ und rechten Winkeln bei 1 und $1'$ sofort erkennen lässt:

$$d(3\,4\,1) = -\frac{\sin(i\,.\,1\,4)}{i}\cdot d(1\,3).$$

Der Volumenzuwachs $1\,2\,4\,1'2'4' = \partial\Delta$ wird seitlich von den Dreiecken $1\,2\,4$ und $1'2'4'$ begrenzt, deren Ebenen beide auf $1\,1'$ senkrecht stehen, mithin ist (vergl. S. 233 dieses Bandes):

$$\partial\Delta = \tfrac{1}{2}\, d(1\,3)\cdot(2\,4)\cdot\frac{\sin(i\,.\,1\,4)}{i},$$

folglich

$$\partial\Delta = -\tfrac{1}{2}(2\,4)\, d(3\,4\,1),$$

und das ist, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}$, die GAUSS'sche Formel. Setzt man also

$$(2\,4) = x, \qquad (3\,4\,1) = \varphi,$$

so ergibt sich für das Volumen des Tetraeders $1\,2\,3\,4$ der Ausdruck

$$\Delta = -\tfrac{1}{2}\int_0^x x\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx;$$

dabei hat man $\dfrac{d\varphi}{dx}$ vermöge der Gleichung

$$\alpha^2\cos\varphi^2 - \beta^2\left(\frac{\operatorname{tg} i x}{i}\right)^2 = 1$$

zu berechnen.

STÄCKEL.

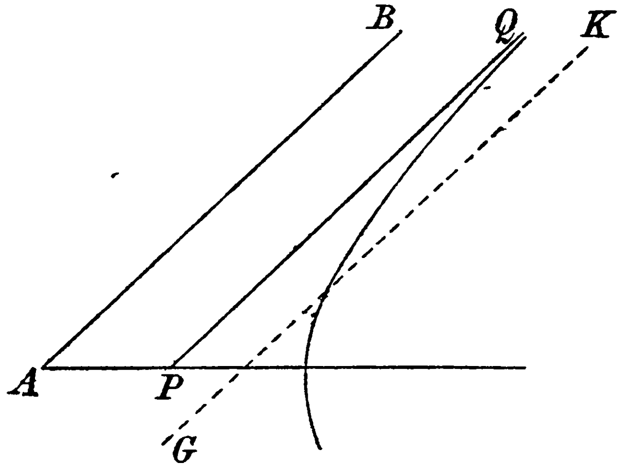
[LÜBSENS PARALLELENTHEORIE.]

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Altona, 31. December 1835.*]

{. . . . . LÜBSEN quält mich sehr mit seiner Parallelentheorie (wahrscheinlich tritt die Nemesis hier ein, um mir meine eigenen Versuche zu vergelten). Ich lege Ihnen seinen Beweis bei. Ich habe ihm vergebens bemerkt, dass das Schieben der Linien besser am Parallellineal, als in der Theorie auszuführen sei; er bleibt doch bei seiner Überzeugung, den geometrischen Beweis gefunden zu haben. Vielleicht wäre es gut, da er sonst doch ein gescheuter und bescheidener Mann ist, wenn Sie ihn mit ein Paar Worten aus dem Irrthum rissen. Es muss wohl daran liegen, dass ich ihm seinen Irrthum nicht so deutlich vorstellen kann, wie ich ihn selbst erkenne. . . . . . .}

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 2. Januar 1836.

. . . . Die Pointe des Fehlers von Hrn. LÜBSEN besteht darin, dass Euklids Geometrie falsch sein kann, ohne dass es in seiner Construction bei der parallelen Fortbewegung von GK nach AB einen letzten Punkt N in ED



zu geben braucht, der beiden gemein ist, eben so wenig wie es in der Hyperbel einen solchen letzten Punkt gibt, den sie mit GK gemein hat, wenn GK und AB beide mit der zwischen ihnen liegenden Asymptote [PQ] parallel sind. . . . .

[VOLUMENBESTIMMUNGEN IN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE.]

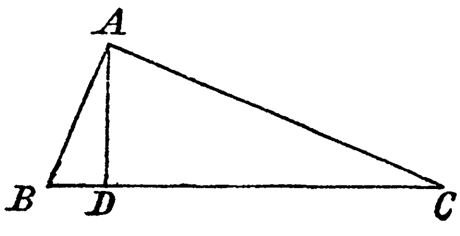
[1.]

GAUSS an ENCKE. Göttingen, 1. Februar 1841.

. . . . . . Ich fange an, das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. Hr. KNORRE hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von LOBATSCHEWSKY (in Kasan) geschickt und dadurch so wie durch eine kleine Schrift in deutscher Sprache über Parallellinien (wovon eine höchst alberne Anzeige in GERSDORFS Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden, mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen. Wie mir KNORRE sagte, enthalten die (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen der Universität Kasan eine Menge Aufsätze von ihm. . . .

[2.]

ASTRALGEOMETRIE.



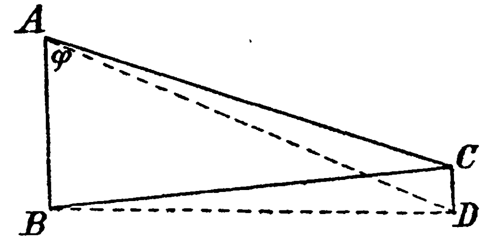
Aa, Bb, Cc normal gegen die Ebene, worin das Dreieck ABC. Durch a, b, c eine zweite Ebene.

Aa kleinster Abstand der beiden Ebenen, und selbst unendlich klein. AD normal gegen BC.

Dann ist:

$$\text{Volumen } ABCabc = \tfrac{1}{2} Aa \cdot BC \cdot \frac{\sin iAD}{i}.$$

Noch zierlicher: Inhalt der Pyramide $ABCD$ [, bei welcher der Winkel ABC $= 90^0$ und ein] unendlich kleiner diedrischer Winkel an $AB = \theta$.



$$AB = x,$$

$$AC = r.$$

$$\text{Volumen} = \tfrac{1}{2}(x - r\cos\varphi).\theta.$$

BEMERKUNGEN.

Die in dem Briefe an ENCKE erwähnte Abhandlung in russischer Sprache ist höchst wahrscheinlich die im ersten Hefte des Jahrganges 1836 der Kasaner Gelehrten Schriften erschienene Arbeit: **Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ** (Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale), von der sich ein mit eigenem Titelblatte versehener Sonderabdruck in GAUSS' Nachlass befindet; einzelne Randbemerkungen sowie ein darin liegender Zettel, der die Notiz [2] enthält, zeigen, dass GAUSS in dieser Arbeit wirklich gelesen hat.

Die kleine Schrift in deutscher Sprache sind die *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin 1840, die in GERSDORFS Repertorium der gesammten deutschen Literatur, Jahrgang 1840, Bd. 3, S. 147 besprochen wurden; durch diese Anzeige scheint GAUSS darauf aufmerksam geworden zu sein.

Statt KNORRE muss es höchst wahrscheinlich KNORR heissen, denn der mit LOBATSCHEFSKIJ engbefreundete Physiker ERNST KNORR war von 1832 bis 1846 Professor in Kasan und hat im Jahre 1840 eine längere Reise nach Westeuropa gemacht, während der Astronom K. F. KNORRE in Nikolajew keine Beziehungen zu LOBATSCHEFSKIJ hatte und vor 1841 nur einmal in Deutschland gewesen ist, ohne jedoch GAUSS in Göttingen anzutreffen.

Eine einfache Herleitung der Formel für das Element dP einer Pyramide hatte LOBATSCHEFSKIJ im Jahre 1830 in der Abhandlung: **О началахъ геометріи** (Über die Anfangsgründe der Geometrie) (Gl. 62) gegeben. Er schreibt:

$$dP = \tfrac{1}{2} d\psi (r\cos\varphi - h).$$

In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie $r\cos\varphi$ grösser als h oder x. Dagegen findet sich bei ihm die Formel für das Volumen $ABCabc$ nicht ausdrücklich hervorgehoben, in deren Besitz GAUSS schon im Jahre 1832 gewesen zu sein scheint (vgl. S. 229 dieses Bandes). Sie lässt sich auch so aussprechen, dass das Volumen $ABCabc$ gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie BC und dem Inhalt des unendlich kleinen Vierecks $ADda$ ist.

STÄCKEL.

[BOLYAI UND LOBATSCHEWSKY.]

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 18.—21. December 1843.*]

{. . . . . . . Ein Paar Ungarsche Stipendiaten aus Maros Vásárhely brachten ein Präsentations-Schreiben von dortiger Universität, was mir auffiel, weil ich unter den übrigen Unterschriften auch den Namen WOLFGANGUS BOLYAI fand. Sie übergaben mir nun in diesen Tagen auch einen Privat-Brief von einem andern dortigen Professor, der früher mein Zuhörer gewesen, und diese Gelegenheit benutzte ich, um zur Mittheilung an Sie mich nach W. B. zu erkundigen. Sie schildern ihn als einen ziemlich wohlbeleibten rüstigen und freundlichen Greis, der in der Mitte seiner Gärten ein heiteres Alter zu verleben scheine. Seine Wirksamkeit als akademischer Lehrer sei ununterbrochen, aber nur dadurch gehemmt, dass es den meisten Zuhörern zu schwer falle ihm zu folgen. Sein Sohn (von welchem Sie mir mittheilten, dass er ein gutes Buch geschrieben) sei als erst 32jähriger Officier als Rittmeister pensionirt worden, und lebe, wenn ich recht verstanden habe, bei seinem Vater. — Muthmasslich hat er mit mathematischen Ketzereien also Anstoss erregt. — Jener ehemalige Zuhörer hatte mir damals versprochen, Anstalt zu machen, dass ich die Bücher von Vater und Sohn (denn auch vom Vater habe ich einmal ein Buch bei Ihnen gesehen, was Sie interessant nannten) hierher bekäme. Er scheint diess aber in Gnaden vergessen zu haben, denn sein Brief enthält kein Wort davon. Auch kann ich nirgends (selbst in Berlin nicht) die Titel mir ausforschen. — Da nun die jetzt neu angekommenen jungen Leute sich erbieten, für die Sache zu sorgen; so möchte ich Sie wohl bitten, mir diese Titel gelegentlich aufschreiben zu lassen. . . . .}

GAUSS an GERLING. Göttingen, 4. Februar 1844.

.... So ist es zugegangen, dass ich vergessen habe, einen **andern** Punkt Ihres Briefes zu beantworten, an den ich eben heute durch eine ganz zufällige Veranlassung wieder erinnert bin.

Der Titel des Buchs meines alten Universitätsfreundes VARKAS (i. e. Wolfgang) VON BOLYAI, Vater, ist wörtlich folgender:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiâque huic propria, introducendi cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus primus. Mar[o]s Vásárhelyini 1832. Typis Collegii Reformatorum per Josephum, et Simeonem Kali de felsö Vist. LXVI u. 502 Seiten 8vo. Tomus secundus 1833. XVI u. 400 S., viele Kupfertafeln. Den Namen des Verfassers finde ich nicht angegeben.

Die eine, beim ersten Bande befindliche Appendix hat den Titel:

Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem*), Geometrarum in exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Diese Appendix ist besonders paginirt (p. 1—26); da aber auf der Titelseite weder Ort noch Jahr angegeben ist, so präsumire ich, dass diese Schrift, welche gerade die in Rede stehende ist, nicht für sich, sondern nur als Anhang des Werkes des Vaters ins Publicum gekommen ist.

Übrigens hat in den letzten Decennien ein Russe (LOBATSCHEWSKY, Staatsrath und Professor in Kasan) einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Er nennt die Nicht-Euklidische die imaginäre Geometrie (wie Ihr ehemaliger Kollege [SCHWEIKART] Astralgeometrie) und hat darüber in russischer Sprache viele sehr ausgedehnte Abhandlungen gegeben (meistens in den **Записки Казанскаго Университета**, Memoiren der Kasanschen Universität), zum Theil auch in besondern Brochuren, die ich, glaube ich, alle besitze, aber ihre genaue Lecture noch verschoben habe,

*) *of that ilk*, wie es gewöhnlich bei WALTER SCOTT heisst. — [*Vergl. auch S. 225.*]

bis ich mich einmal mit Musse wieder in dieses Fach werfen kann, und das Lesen russischer Bücher mir noch geläufiger ist als jetzt. Irre ich nicht, so ist auch ein Aufsatz des p. LOBATSCHEWSKY, vielleicht eine Übersetzung aus den Записки, in CRELLES Journal, was ich aber in diesem Augenblick nicht nachsehen kann. . . . .

GAUSS an GERLING. Göttingen, 8. Februar 1844.

Es wird Ihnen, mein theuerster Freund, vielleicht nicht unlieb sein, wenn ich zu den literarischen Notizen, welche ich in meinem letzten Briefe mittheilte, noch eine oder die andere hinzufüge: in die Sache selbst kann ich freilich jetzt nicht tiefer eingehen.

LOBATSCHEWSKYS Aufsatz in CRELLES Journal steht Band 17 pag. 295 ff. Ich finde, dass derselbe nur eine freie Übersetzung des russischen Aufsatzes [Воображаемая геометрія] im Jahrgang 1835 der Gelehrten Schriften der Kasanschen Universität ist, wo man eben da auch anstossen wird, wo diess in dem deutschen Aufsatze der Fall ist. In diesem stossen Sie an S. 296 Zeile 10 bei den Worten J'ai démontré etc., womit dem Leser, der weiter nichts hat wie diesen Aufsatz, wenig gedient ist. Ebenso S. 303 oben J'ai prouvé ailleurs etc., wozu man dieselbe Bemerkung machen muss. Der frühere Aufsatz, worauf sich diess zu beziehen scheint, wird wohl derselbe sein, der in einer Note des erwähnten russischen Aufsatzes angeführt wird als unter dem Titel: Über die Anfänge oder Principe der Geometrie stehend in Казанскомъ Вѣстникѣ (Kasanschen Boten) für 1829 und 1830. Zugleich wird dabei bemerkt, dass eine sehr kränkende Kritik dieser Abhandlung in No. 41 eines andern russischen, wie ich vermuthe in Petersburg erscheinenden, Journals »Sohn des Vaterlandes« Сынъ Отечества von 1834 stehe, wogegen LOBATSCHEWSKY eine Antikritik eingeschickt habe, die aber bis Anfang 1835 nicht aufgenommen sei.

Mit diesen literarischen Notizen ist uns nun freilich auch wenig geholfen, da in Deutschland schwerlich ein Exemplar des Kasanschen Boten von 1829—

1830 zu finden sein möchte. Dagegen aber kann ich Ihnen den Titel einer andern Schrift nachweisen, die Sie ohne Zweifel sehr leicht durch den Buchhandel erhalten können, und die nur 4 Bogen stark ist:

»Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallel-Linien
von NICOLAUS LOBATSCHEWSKY Kais. Russischem Staatsrath etc.
Berlin 1840 in der G. Finckeschen Buchhandlung.«

Ich erinnere mich, in GERSDORFS Repertorium damals eine sehr wegwerfende Recension dieses Buchs gelesen zu haben, die (nemlich die Recension) übrigens für jeden etwas kundigen Leser das Gepräge hatte, von einem ganz unwissenden Menschen herzurühren. Seitdem ich Gelegenheit gehabt habe, diese kleine Schrift selbst einzusehen, muss ich ein sehr vortheilhaftes Urtheil darüber fällen. Namentlich hat sie viel mehr Concinnität und Präcision, als die grössern Aufsätze des LOBATSCHEWSKY, die mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden.

Über die CRELLE 17 p. 303 angeführte experimentelle Begrenzung habe ich aber nichts in der Schrift von 1840 gefunden und ich werde mich daher wohl entschliessen müssen, einmal deswegen an Hrn. LOBATSCHEWSKY selbst zu schreiben, dessen Aufnahme als Correspondent unserer Societät ich vor einem Jahre veranlasst habe. Vielleicht schickt er mir dann den Kasanschen Boten. Doch wäre es möglich, dass sich in den folgenden Jahrgängen der Kasanschen gelehrten Schriften von 1836—1838, wo auch lange Aufsätze von LOBATSCHEWSKY stehen, etwas darüber findet. Ich besitze diese zwar, habe aber bisher, aus dem in meinem vorigen Briefe erwähnten Grunde, mich bisher nicht näher mit ihnen bekannt gemacht.

In seinem Danksagungsschreiben wegen Aufnahme in die Societät schrieb mir übrigens LOBATSCHEWSKY damals, dass seine vielen administrativen Geschäfte (er scheint Rector perpetuus der Universität zu sein) ihn jetzt aus den wissenschaftlichen Arbeiten ganz herausgebracht hätten.

Für heute schliesse ich mit der Bitte bald wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen

Ihren treu ergebenen

C. F. GAUSS.

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 26. Februar 1844.*]

{. . . . . . . Die Notiz über das Buch von BOLYAI habe ich bereits benutzt, um das Buch zu verschreiben. Unsere Bibliothek hat sich, mit diesem ausführlichen Titel ausgerüstet, unmittelbar an die Buchhändler wenden können. Gleichzeitig ist auch das Buch von LOBATSCHEWSKY aus Berlin verschrieben und so werden wir denn wohl hoffentlich nach nicht allzu langer Zeit in den Besitz kommen. Ich wiederhole meinen herzlichen Dank für Ihre gütige Bemühung. Die russischen Abhandlungen sind mir freilich unzugänglich, da ich selbst das Buchstabiren, was ich als Student gelernt, wieder vergessen habe. Den Aufsatz in CRELLE Band 17 habe ich inzwischen auch nachgesehen und hängt darin allerdings alles an dem j'ai démontré. — Das russische Steppenland scheint demnach doch ein geeigneter Boden für diese Speculationen, denn SCHWEIKART (jetzt in Königsberg) ersann seine »Astral-Geometrie«, während er in Charkow war. . . . .}

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 28. November 1846.

. . . . Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von LOBATSCHEWSKY (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840, bei G. Fincke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist. Ein gewisser SCHWEIKART*) nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, LOBATSCHEWSKY imaginäre Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen spätern Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will); materiell für mich Neues habe ich

*) Früher in Marburg, jetzt Professor der Jurisprudenz in Königsberg.

also im LOBATSCHEWSKYschen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von LOBATSCHEWSKY auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird. . . . . . .

GAUSS an W. STRUVE. Göttingen, 11. December 1846.

. . . . Gleichermassen bin ich für die übrigen Zusendungen zu dem verbindlichsten Danke verpflichtet; für die russischen Sachen von LOBATSCHEWSKY wahrscheinlich zunächst Ihrem Herrn Sohne, gegen den ich vor einigen Jahren bei seinem Hiersein meinen Wunsch ausgesprochen hatte; ich lasse mich seinem freundlichen Andenken angelegentlich empfehlen. Mit meiner russischen Sprachkenntniss werde ich wohl etwas zurückgekommen sein, da ich seit länger als einem Jahre nicht dazu habe kommen können, auch nur einen russischen Buchstaben anzusehen, ich hoffe jedoch in der ersten freien Zeit das Versäumte schnell nachzuholen, und werde dann der Lecture jener interessanten Aufsätze meine besondere Aufmerksamkeit widmen. Die kleine deutsche Schrift von LOBATSCHEWSKY besass ich schon vorher selbst. . . . .

[CONGRUENZ UND SYMMETRIE.]

[GERLING *an* GAUSS. *Cassel, 25. März 1813.*]

{...... Im Decemberheft der monatlichen Correspondenz vom vorigen Jahr erklärt Professor MOLLWEIDE den gewöhnlichen Beweis für die Oberfläche der sphärischen Dreiecke für unstatthaft, indem dabei zwei Dreiecke als gleich gebraucht werden, die 3 gleiche Seiten haben, aber wegen verschiedener Lage derselben nicht congruent sein können, dieser Satz aber in den sphärischen Trigonometrien nicht vorkommt. Ich habe von diesem Satz einen Beweis gefunden, der mir sehr einfach zu sein scheint. Es ist folgender: Zwei solche Dreiecke entstehen immer, wenn man die das eine bildenden Kugelradien, jenseits des Mittelpunkts, verlängert. Legt man nun durch die Winkelpunkte beider Dreiecke Ebenen, so erhellt sehr leicht, dass sie parallel sind, und daraus folgt dann gleichfalls sehr leicht, dass sie gleich weit vom Mittelpunkte abstehen. — Sie beschreiben also auf der Kugel congruente kleine Kreise, und congruente Oberflächensegmente, und die Dreiecke entstehen, wenn man von diesen congruenten Oberflächensegmenten die 3 Zweiecke abzieht, die von gleichen Bögen der kleinen Kreise, und von den gleichen Dreiecksseiten begrenzt werden; diese Zweiecke sind aber congruent, wie aus der Construction leicht erhellt, also auch die Dreiecke gleich. ....}

[GERLING an GAUSS. *Marburg, 26. Februar 1844.*]

{. . . . . Seitdem ich 1813 auf die symmetrischen Dreiecke und die Fläche des sphärischen Dreiecks kam, ist mir immer das Desiderium geblieben, dass mir eigentlich eine scharfe Definition oder ein scharfes Kriterium der Symmetrie fehlte, im Gegensatz gegen die Congruenz. Seit vorigem Winter bin ich nun darauf gekommen, die Sache auch im Vortrag, denn früher kam ich schon bei anderer Gelegenheit für mich darauf (1834), so darzustellen:

Jedes Gebilde in der Ebene beziehen wir auf zwei Dimensionen (rechtwinklige Coordinaten), jedes räumliche auf drei. Denken wir nun die Coordinaten als dem Wechsel des Zeichens unterworfen, so wird allgemein congruent, was in zwei Dimensionen das Zeichen ändert; symmetrisch aber, was in einer oder in drei Dimensionen das Zeichen ändert. — Hieraus ergibt sich dann als Corollar,

1) dass bei Coordinaten aus einem Punkt durch Wechsel aller radii vectores (sit venia verbo) Symmetrie entstehen muss bei körperlichen Constructionen, Congruenz aber bei ebenen,

2) dass die Symmetrie in die Congruenz übergeht, wenn das Gebilde durch eine gerade Linie oder durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften theilbar ist. —

Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir gelegentlich Ihr Urtheil über diese Darstellungsweise mittheilten.}

GAUSS an GERLING. Göttingen, 8. April 1844.

. . . . Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als eine wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höhern Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben. Ihr Beweis in etwas anderer Gestalt findet sich auch bei LOBATSCHEWSKY, ohne dass erhellt, ob er Ihren Aufsatz gekannt habe. Jedes sphärische Dreieck lässt sich nemlich in drei gleichschenklige Dreiecke zerlegen, und diese Zerlegung auf zwei symmetrische Dreiecke angewandt, gibt bei beiden gleiche und nur in ungleicher Ordnung liegende Dreiecke. (Es versteht sich, dass um vollständig zu sein, man drei Fälle unterscheiden müsste, wovon der zweite und dritte auch so ausgesprochen werden können, dass je eins der Partialdreiecke negativ oder 0 sein kann.) ....

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 15. April 1844.*]

{Obwohl ich Ihren Brief vom 8. d. M., den ich vorläufig herzlich verdanke, eigentlich noch gar nicht beantworten kann, weil ich bis jetzt noch nicht dazu habe kommen können, ihn so zu studiren und in mich aufzunehmen, als sein reichhaltiger Inhalt und mein Interesse für den Gegenstand erfordert; so kann ich mir doch das Vergnügen nicht versagen, Ihnen in Beziehung auf eine einzelne Äusserung darin ein Paar Zeilen zu schreiben.

Sie sagen: »Es ist schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt« etc.

Erlauben Sie, dass ich Ihnen hier eine solche Demonstration mittheile mit der Bitte, mir gelegentlich Ihr Urtheil darüber zu schreiben.

Lehrsatz: Zwei beliebige symmetrische Polyeder sind von gleichem körperlichen Inhalt.

Beweis: I. Dieselben lassen sich durch angemessen durchgelegte Ebenen in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche paarweise in beiden Körpern symmetrisch sind.

II. Um jede dreiseitige Pyramide lässt sich eine Kugel construiren, deren 4 Halbmesser, mittelst durch je zwei gelegte Ebenen, dieselbe in je 4 gleichseitige Pyramiden zerlegen. (Vorbehaltlich, dass auch negative Pyramiden dabei sein können.)

III. Macht man diese Construction bei jedem Paar der ad I. erwähnten dreiseitigen Pyramiden, so entstehen lauter gleichseitige Pyramiden, welche wieder paarweise symmetrisch sind.

IV. Jede gleichseitige Pyramide lässt sich mittelst eines Perpendikels von der Spitze auf die Grundfläche und durchgelegter Ebenen in drei dreiseitige Pyramiden zerfällen, deren Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck und deren eine Kante, welche von der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks ausgeht, senkrecht auf der Grundfläche steht.

V. Zwei Pyramiden der letztbeschriebenen Art, die in beiden Polyedern analog liegen, sind nicht nur symmetrisch, sondern auch congruent, weil sich jede einzelne durch eine Ebene in zwei einander symmetrische Hälften spalten lässt.

VI. Demnach sind beide Polyeder als die (algebraischen) Summen von lauter congruenten Pyramiden zu betrachten, und haben also gleiches Volumen. Q.E.D.

Ich muss noch hinzufügen, dass der Beweis mir nicht ganz eigenthümlich ist. Ich war im Nachdenken über Ihre Äusserung dahin gekommen, dass ich die Theile III—V klar übersah, fand aber anfangs Schwierigkeit, jede dreiseitige Pyramide auf gleichseitige zu reduciren; und hätte vielleicht die Sache gehen lassen, wenn nicht in einem Gespräch mit Dr. STEGMANN die Rede zufällig darauf gekommen, wo dieser den glücklichen Einfall hatte, die Kugel um die dreiseitige [Pyramide] zu Hülfe zu nehmen, wodurch dann der Schlüssel eigentlich gefunden war.

So viel ich sehe, ist kein Fehlschluss in dem Obigen; Sie verbinden aber mich sehr, wenn Sie den Beweis einer scharfen Prüfung unterwerfen und mir gelegentlich Ihr Urtheil darüber schreiben. . . . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 17. April 1844.

Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloss symmetrischer, nicht zugleich congruenter, Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, dass man sagt,

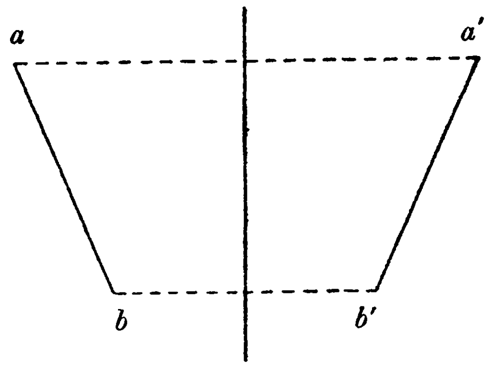
1) dass man auf diejenigen Pyramiden aufmerksam macht, deren symmetrische Gegenstücke mit ihnen zugleich congruent sind, welches nemlich diejenigen sind, an denen zwei Seitenflächen zu einer dritten normal sind und in ihren Durchschnitten mit dieser gleiche Kanten geben, und
2) dass man nachweist, wie jede Pyramide in 12 Pyramiden von der eben bezeichneten Art zerlegt werden kann.

Ob die Beweisart neu ist, kann ich übrigens mit Gewissheit nicht verbürgen. Sehen Sie wenigstens Legendres Geometrie nach, worin versucht ist, mehreres strenger oder einfacher als sonst geschehen, zu beweisen. Mir selbst ist in diesem Augenblick das Buch, welches ich nicht selbst besitze, nicht zur Hand.

Mein Bedauern muss ich nun, da jener Satz nicht mehr davon getroffen ist, auf die andern Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch von der Exhaustionsmethode abhängig sind wie Euklid XII. 5. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen. . . . . .

[Gerling *an* Gauss. *Marburg, 7. Juli 1844.*]

{. . . . . . Was zuerst die Symmetrie betrifft, wo ich im vorletzten Brief nur die »Thatsache« angab; so scheint mir der Grund in unserer Anschauung der geraden Linie und Ebene zu liegen, vermöge deren wir in der Ebene auf einer geraden Linie nur ein Perpendikel in einem Punkt denken können, dieses aber nach beiden Seiten hin ins Unendliche verlängert, und eben so auf der Ebene nur eins, mit zwei Seiten; so muss es also für a in der Ebene einen symmetrischen Punkt a' und für b ein b' geben; und muss ab mit $a'b'$ zusammenfallen, wenn ich umklappe, und, im allgemeinen, nur durch Umklappen. Symmetrisches von Symmetrischem wird hier congruent. Kommt nun die dritte Dimension hinzu, und liegen beiderseits c und c' über a und a', so fallen beim Umklappen auch c und c' auf verschiedene Seiten der Ebene u. s. w. — Ich meine, auf diesem Wege liesse sich eine anschauliche Überzeugung gewinnen.



Für solche Gebilde, die sich mittelst einer durchgelegten Linie oder einer durchgelegten Ebene in zwei symmetrische Hälften zerfällen lassen, wie z. B. das gleichschenklige Dreieck, die dreiseitige Pyramide mit gleichschenkliger Grundfläche und in den Schenkeln gleichgeneigten Seitenflächen u. s. w., fehlt es meines Wissens noch an einem angemessenen Kunst-Ausdruck, den ich zu kurzer Darstellung dieser Dinge sehr desiderire.

Legendres Geometrie habe ich bei der ersten Herausgabe des Lorenz fleissig benutzt, und meines Wissens manches in der Stereometrie schärfer dargestellt [gefunden], als in frühern Büchern, für Euklid XII. 5 habe ich aber bis jetzt noch nichts besseres gefunden, als meinen § 330, wo ich mich von der Exhaustionsmethode nicht los machen konnte. . . . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 14. Juli 1844.

. . . . Ich habe unlängst einen jungen Mathematiker, Eisenstein aus Berlin, kennen gelernt, der mit einem Empfehlungsschreiben von Humboldt hierher kam. Dieser noch sehr junge Mann zeigt sehr ausgezeichnetes Talent, und wird gewiss Grosses leisten. Ich erwähnte gegen ihn Ihrer eleganten Art, die Gleichräumigkeit symmetrischer Körper zu beweisen, wogegen er behauptete, dass ein ähnlicher Beweis sich schon in LEGENDRES Geometrie finde. Ich habe diess noch nicht verificiren können.

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 21. Juli 1844.*]

{....... Wegen der Bemerkung des Hrn. EISENSTEIN über die Volumina symmetrischer Körper habe ich im LEGENDRE nachgesehen. Ich selbst habe noch die Ausgabe von 1806, hatte aber Gelegenheit, CRELLES Übersetzung (1844) der 12ten Auflage jetzt einzusehen; wo ich allerdings gegen 1806 in diesen Materien einiges abgeändert finde. — LEGENDRE hat den Satz quaestionis aber nicht unabhängig von der Exhaustionsmethode bewiesen. Er geht nemlich von dem Satz aus: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich. — Diesen beweist er nach der Exhaustionsmethode (im Wesentlichen jetzt ganz so wie mein LORENZ § 330, statt dass er sich früher näher an Euklid gehalten). Nun zerlegt er die symmetrischen Polyeder in symmetrische dreiseitige Pyramiden, und schliesst auf ihre Gleichheit vermöge jenes Satzes. Der Unterschied besteht also darin, dass LEGENDRE eine weitere Zerlegung in je 12 Pyramiden, die paarweise congruent sind, nicht ausführt. —

Wie ich den Satz LORENZ § 330 gelernt habe, weiss ich selbst nicht mehr. Wenn ich ihn aber auch selbstständig erfunden habe; so haben mir jedenfalls Bemerkungen von PFAFF die Erfindung sehr nahe gelegt. Ich erinnere mich namentlich, dass er mir (1809) mit Bedauern, dass man hier nicht tiefer eindringen könne, von dem »Segnerschen Axiom« sprach.}

Gauss an Schumacher. Göttingen, 8. Februar 1846.

.... Der Unterschied zwischen Rechts und Links lässt sich aber nicht definiren, sondern nur vorzeigen, so dass es damit eine ähnliche Bewandtniss hat, wie mit Süss und Bitter. Omne simile claudicat aber; das letztere gilt nur für Wesen, die Geschmacksorgane haben, das erstere aber für alle Geister, denen die materielle Welt apprehensibel ist; zwei solche Geister aber können sich über Rechts und Links nicht anders unmittelbar verständigen, als indem Ein und dasselbe materielle individuelle Ding eine Brücke zwischen ihnen schlägt, ich sage unmittelbar, da auch A sich mit Z verständigen kann, indem zwischen A und B eine materielle Brücke, zwischen B und C eine andere u. s. w. geschlagen werden, oder worden sein kann. Welche Geltung diese Sache in der Metaphysik hat, und dass ich darin die schlagende Widerlegung von Kants Einbildung finde, der Raum sei BLOSS die Form unserer äussern Anschauung, habe ich succinct in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831, S. 635 ausgesprochen. ....

[Gerling an Gauss. *Marburg, 20. Juni 1846.*]

{........ Zum erstenmal kam ich in den Fall, eine rechtsgewundene Schraube für den Druck [der neuen Ausgabe des »Lorenz«] definiren zu müssen. Ich weiss nicht besser als so zu sagen: so gewunden, dass jeder Punkt der vertical stehenden Schraube ausser der Axe in die Tiefe nur gelangen kann, wenn er von Ost durch Süd nach West geht. — Gibt es eine bessere Definition, so verpflichten Sie mich sehr durch die Mittheilung.......}

Gauss an Gerling. Göttingen, 23. Juni 1846.

.... Die Unterscheidung der Schrauben hängt in letzter Instanz wie die Unterscheidung des Rechts und Links davon ab, dass

drei von einem Punkt A ausgehende und nicht in Einer Ebene liegende gerade Linien AB, AC, AD mit drei andern ab, ac, ad in der Ordnung, wie sie aufgezählt sind,

gleiche oder verkehrte Lage haben können.

Nemlich im ersten Fall wird die Pyramide $ABCD$ bloss durch allmählige quantitative Änderungen in die Pyramide $abcd$ dergestalt übergehen können, dass A in a, B in b u. s. w. übergehe. Im zweiten Fall ist ein solcher Übergang nicht anders möglich, als dass dazwischen die veränderte Pyramide einmal verschwindet ($ABCD$ in Einer Ebene). Ähnliche Lagen haben

$$\begin{array}{lll} AB, & AC, & AD \\ AC, & AD, & AB \\ AD, & AB, & AC, \end{array}$$

aber verkehrte dagegen AB, AD, AC u. s. w.

Diesen Unterschied zweier Systeme von je drei geraden Linien kann man aber nicht auf Begriffe bringen, sondern nur aus dem Anhalten an wirklich vorhandene räumliche Dinge vorzeigen. Zwei Geister können sich nicht anders darüber verständigen, als dass sie ihre Anschauungen an Ein und dasselbe in der wirklichen Welt vorkommende System knüpfen. Wählt man also für das 1te System die [Ordnung:]

Süd West Zenith,

so ist für jedes andere Dreisystem feststehend, ob es mit diesem gleich oder ob es entgegengesetzt sei. Mit jenem gleiche so:

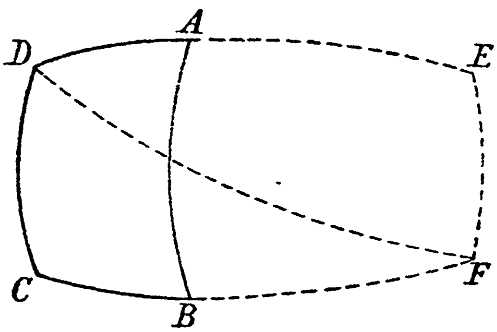
Vorne	Rechts	Oben	
Links	Vorne	Oben	
Vorne	Links	Unten	
Rechts	Vorne	Unten	
Rechts	Hinten	Oben	u. s. w.

Die Anwendung dieses Princips auf die Schrauben hat keine Schwierigkeit und begreiflicher Weise wird es eine grosse Menge verschiedener Einkleidungen geben können. Gegen die von Ihnen gewählte wird nichts zu erinnern sein. . . . .

. . . . . . Dass, was ich oben über Links und Rechts angeführt habe, nur ein Kernstück eines viel ausgedehntern Systems ist, brauche ich wohl nicht zu erinnern.

THEOREM AUS DER SPHÄROLOGIE.

[1.]



Ist $ABCD$ ein sphärisches Viereck mit rechten Winkeln in A, B, C; und verlängert man DA, CB, bis DE und CF Quadranten werden, so ist E ein rechter Winkel und [, die Bogen als Winkel gerechnet, so dass der Quadrant $= 90^0$ wird,] $F = 90^0 + CD$, $EF = D - 90^0$.

Beweis. Es wird DF ein Quadrant, woraus alles von selbst folgt.

[2.]

Wir bezeichnen mit

R den rechten Winkel, mit

ρ den Quadranten des grössten Kreises [, so dass der Bogen x zu $\frac{R}{\rho}x$ Grad zu rechnen ist], mit

λ den achten Theil der Kugelfläche. Ferner mit

$F(a, b)$ den Flächeninhalt eines sphärischen Vierecks [$ACBD$] mit drei rechten Winkeln [A, B, C], dessen mittelstem [C] die Seiten a, b anliegen; die diesen gegenüber liegenden seien α, β; der vierte Winkel $= R + \omega$.

Für unendlich kleine a sei

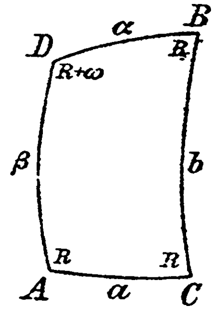


Fig. 1.

$$F(a, b) = a f b,$$

und für unendlich kleine b sei

$$f b = k . b,$$

wo k eine Constante [bedeutet].

[Da der Flächeninhalt des Vierecks $ACBD$ dem Überschuss seiner Winkelsumme über 4 Rechte proportional ist, so hat man

$$F(a, b) = C . \omega.$$

Es ist aber, wie die Figur 2 zeigt,

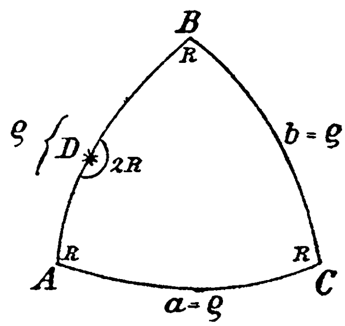


Fig. 2.

$$\lambda = F(\rho, \rho) = CR,$$

also

$$F(a, b) = \frac{\lambda}{R} \cdot \omega.]$$

Man hat [daher]:

1) $$\omega = \frac{R}{\lambda} F(a, b).$$

[Wendet man diese Gleichung auf das Viereck $ACFE$ an (Fig. 3), so wird

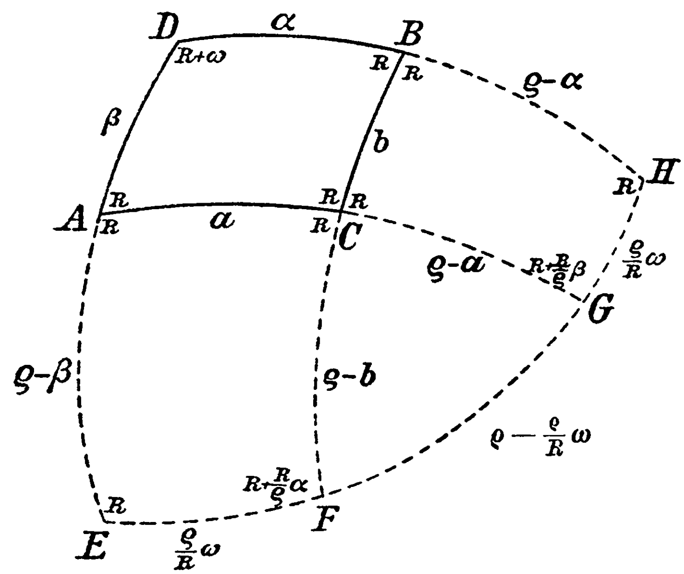


Fig. 3.

$$\frac{R}{\rho}a = \frac{R}{\lambda}F(a, \rho-\beta)$$

oder]

2) $$a = \frac{\rho}{\lambda}F(a, \rho-\beta).$$

[Ebenso ergibt das Viereck *BHGC*:]

3) $$\beta = \frac{\rho}{\lambda}F(b, \rho-a).$$

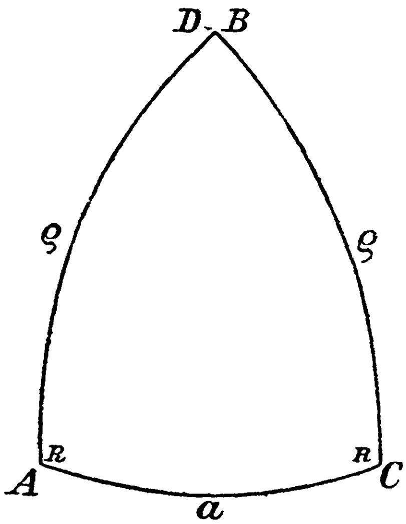


Fig. 4.

[Ferner ist nach Fig. 4:]

4) $$a\frac{\lambda}{\rho} = F(a, \rho),$$

[und für unendlich kleine a ist

$$F(a, \rho) = af\rho = a\frac{\lambda}{\rho},$$

also]

5) $$\frac{\lambda}{\rho} = f\rho.$$

Für unendlich kleine a ist

$$a = \frac{\rho}{\lambda}\cdot af(\rho-\beta)$$

also selbst unendlich klein, daher dann aus 3) β unendlich wenig von

$$\frac{\rho}{\lambda}F(b, \rho)$$

d. i. von b verschieden.

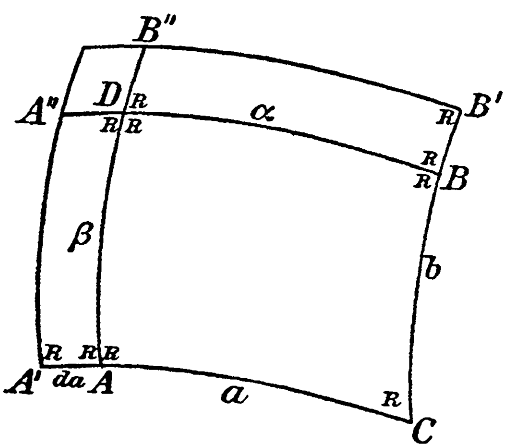


Fig. 5.

Ferner [ergibt Fig. 5] die vollständige allgemeine Differentialgleichung

6) $$dF(a, b) = F(da, \beta) + F(db, a) = da.f\beta + db.fa.$$

Mithin, wenn bloss b veränderlich,

$$dF(a, b) = db.fa.$$

Ist also a unendlich klein, so ist

$$d(afb) = db.fa$$
$$= db.ka = db\cdot\frac{\rho}{\lambda}ak.f(\rho-\beta)$$

oder, da hier $\beta = b$ gesetzt werden muss,

$$dfb = db \cdot \frac{\rho k}{\lambda} f(\rho - b), \tag{7}$$

aus welcher Gleichung die Natur von fb abgeleitet werden muss. Es wird durch Vertauschung [von b mit $\rho - b$:]

$$df(\rho - b) = -db \cdot \frac{\rho k}{\lambda} fb. \tag{8}$$

Setzt man also

$$f(\rho - b) + ifb = B,$$
$$f(\rho - b) - ifb = B',$$

so wird

$$dB = iB \cdot db \cdot \frac{\rho k}{\lambda}, \qquad dB' = -iB' \cdot db \cdot \frac{\rho k}{\lambda},$$

also

$$B = Ce^{ib\frac{\rho k}{\lambda}}, \qquad B' = C'e^{-ib\frac{\rho k}{\lambda}},$$

wo C, C' Constanten, welche sich aus der Bedingung bestimmen, dass für $b = 0$ B und B' nach 5) [und weil $f0$ verschwindet] $= \frac{\lambda}{\rho}$ werden, also

$$B = \frac{\lambda}{\rho} e^{ib\frac{\rho k}{\lambda}}, \qquad B' = \frac{\lambda}{\rho} e^{-ib\frac{\rho k}{\lambda}}.$$

Es ist folglich

$$fb = \frac{\lambda}{\rho} \sin\left(\frac{\rho k}{\lambda} \cdot b\right), \qquad f(\rho - b) = \frac{\lambda}{\rho} \cos\left(\frac{\rho k}{\lambda} \cdot b\right),$$

[mithin für $b = \rho$ nach 5):]

$$1 = \sin \frac{\rho \rho k}{\lambda},$$

woraus

$$\frac{\rho \rho k}{\lambda} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$fb = \frac{\lambda}{\rho} \sin\left(\frac{\pi}{2\rho} \cdot b\right)$$

[folgt. Für unendlich kleine a hat mithin das Viereck $ACBD$ den Flächeninhalt

$$a \frac{\lambda}{\rho} \sin\left(\frac{\pi}{2\rho} b\right).]$$

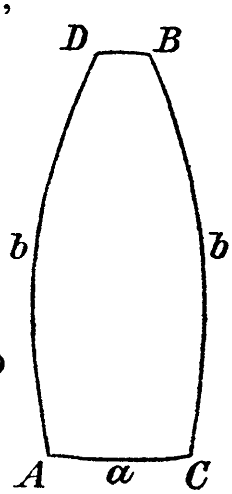


Fig. 6.

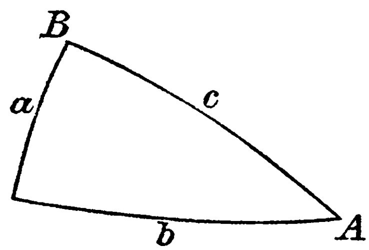
BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz befindet sich in einem Handbuche. Wenn auch das Datum ihrer Abfassung nicht angegeben ist, so berechtigt doch der sonstige Inhalt dieses Handbuches zu der Annahme, dass sie zwischen 1840 und 1846 entstanden ist.

Zur Erleichterung des Verständnisses sind in [2] die Figuren 1, 2, 4, 5 und 6 der Figur des Originals beigefügt worden.

STÄCKEL.

[DIE SPHÄRISCHE UND DIE NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE.]



I. $\quad ga\,.\,\partial b - \sin B\,.\,\partial c + fc\,.\cos B\,.\,\partial A = 0$

II. $\quad gb\,.\,\partial a - \sin A\,.\,\partial c + fc\,.\cos A\,.\,\partial B = 0$

durch Construction;

III. $\quad \sin B\,.\,\partial a - ga\,.\cos B\,.\,\partial b - fc\,.\,\partial A = 0$

IV. $\quad gb\,.\cos A\,.\,\partial a - \sin A\,.\,\partial b + fc\,.\,\partial B = 0$

gleichfalls durch Construction.

Aus Verbindung von I und III folgt $\frac{\mathrm{I} + \mathrm{III}\cos B}{\sin B}$:

$$\cos B\,.\,\partial a + ga\,.\sin B\,.\,\partial b - \partial c = 0,$$

wonach sein muss:

V. $$\cos B\,.\,\partial a + \cos A\,.\,\partial b - \partial c = 0,$$

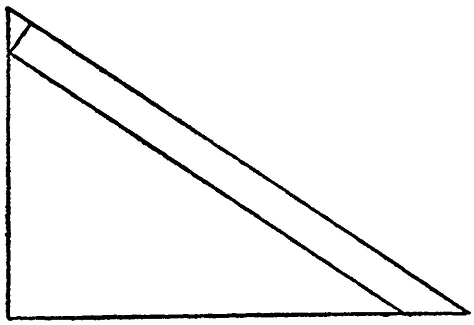
$$1)\quad \cos A = ga\,.\sin B$$

$$2)\quad \cos B = gb\,.\sin A.$$

VI. $$\partial a - \cos B\,.\,\partial c - fc\,.\sin B\,.\,\partial A\ [= 0]$$

VII. $$\partial b - \cos A\,.\,\partial c - fc\,.\sin A\,.\,\partial B\ [= 0]$$

durch Construction.



Ferner folgt durch Construction dass für $A = \text{const.}$:

$$\sin B \,.\, \partial a = gc \,.\, \sin A \,.\, \partial b,$$

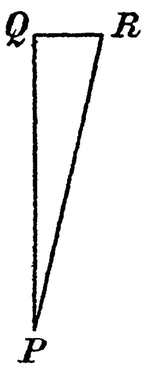
also durch Verbindung von III. und 2)

$$ga \,.\, \cos B = gc \,.\, \sin A$$

und

3) $ga \,.\, gb = gc$

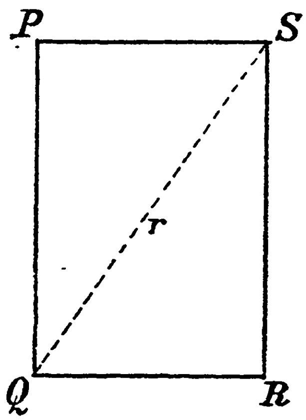
4) $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \,.\, gc = 1.$



Aus 1) folgt leicht, dass für ein unendlich kleines P, wenn $Q = 90^0$:

$$R = 90^0 - gPQ \,.\, P.$$

Eben so, wenn P, Q, R rechte Winkel sind, und PQ unendlich klein, wird:



$$PSQ = \tfrac{PQ}{fr},$$

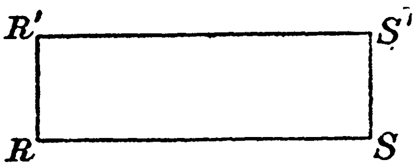
$$RQS = gr \,.\, PSQ = \tfrac{gr}{fr} \cdot PQ,$$

$$RSQ = 90^0 - gr \,.\, RQS = 90^0 - gr^2 \,.\, PSQ$$

$$= 90^0 - \tfrac{gr^2}{fr} \cdot PQ,$$

also

$$PSR = 90^0 + \tfrac{1 - gr^2}{fr} \cdot PQ.$$



Hieraus ferner

$$R'S' = RS - fRR' \cdot \tfrac{1 - gr^2}{fr} \cdot PQ,$$

$$dgx = -fdx \,.\, \tfrac{1 - gx^2}{fx} \,.$$

Eben so

$$dfx = fdx \,.\, gx.$$

Es sei

$$fdx = adx, \qquad fx = y;$$

so ist

$$\tfrac{dy}{dx} = agx,$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\alpha\alpha\frac{1-\frac{dy^2}{\alpha\alpha dx^2}}{y},$$

$$\frac{yddy}{dx^2} - \frac{dy^2}{dx^2} + \alpha\alpha = 0.$$

Multiplicirt mit $\frac{2dy}{y^3}$:

$$\frac{2\frac{dy}{dx}\cdot d\frac{dy}{dx}}{yy} - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dy}{y^3} + \frac{2\alpha\alpha dy}{y^3} = 0.$$

Integrirt

$$\frac{1}{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha\alpha}{yy} = \text{Const.} = -kk,$$

$$-kkyy + \alpha\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - kkyy)}} = \frac{\frac{k}{\alpha}dy}{k\sqrt{\left(1-\frac{kk}{\alpha\alpha}yy\right)}},$$

$$kx = \text{Arc.}\sin\frac{k}{\alpha}y + \text{Const.},$$

$$y = \frac{\alpha}{k}\sin(kx+\lambda),$$

$$fx = \frac{\alpha}{k}\sin kx,$$

$$gx = \cos kx.$$

BEMERKUNGEN.

GAUSS hat die vorstehende Notiz auf einem Zettel (4 Seiten 8°) niedergeschrieben, der sich als Einlage in seinem Exemplare der »*Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* von Nicolaus LOBATSCHEWSKY, Berlin 1840« vorgefunden hat; als Abfassungszeit darf daher 1840 bis 1846 angenommen werden.

Der Zweck der Notiz ist, unter der Voraussetzung, dass für Dreiecke, deren drei Seiten unendlich klein sind, die Euklidische Geometrie gilt, die Gleichungen herzuleiten, die zwischen den Seiten und Winkeln eines endlichen Dreiecks bestehen; es genügt, diese Beziehungen für ein rechtwinkliges Dreieck herzuleiten. Die Durchführung dieses Gedankens gestaltet sich auf Grund des vorstehenden Textes folgendermassen.

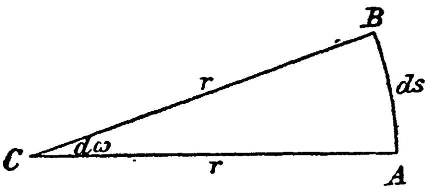


Fig. 1.

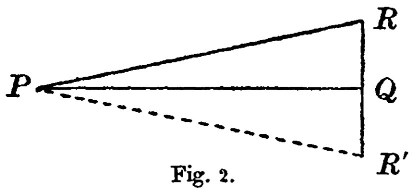


Fig. 2.

1. Ist $d\omega$ ein unendlich kleiner Centriwinkel ACB eines Kreises vom Radius $AC = BC = r$, so ist der zugehörige unendlich kleine Bogen $AB = ds$ proportional $d\omega$, und der Proportionalitätsfactor hängt nur von r ab. Man hat daher:

$$ds = f(r)\,d\omega. \tag{A}$$

Die Sehne AB lässt sich bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung durch den Bogen AB ersetzen.

Ist in dem Dreieck PQR der Winkel bei Q ein rechter und der Winkel bei P unendlich klein, so hat man

$$QR = f(PR)\,.\,QPR, \tag{A'}$$

denn wird RQ um $QR' = RQ$ verlängert, so ist nach (A)

$$RR' = f(PR)\,.\,RPR'.$$

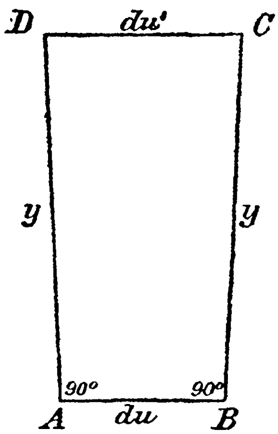


Fig. 3.

2. Es sei $ABCD$ ein Viereck mit der unendlich kleinen Grundlinie $AB = du$. Die Winkel in A und B seien rechte und $AD = BC = y$. Dann ist die Länge der vierten Seite $CD = du'$ proportional du, und der Proportionalitätsfactor hängt nur von y ab. Man hat daher

$$du' = g(y)\,du. \tag{B}$$

3. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a, b und

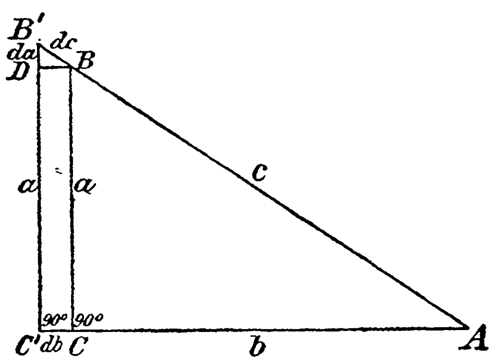


Fig. 4.

der Hypotenuse c lasse man b um ein unendlich kleines Stück $CC' = db$ wachsen, während der Winkel A unverändert bleibt. Die Senkrechte $C'B'$, die in C' auf AC' errichtet ist, schneide AB in B', sodass ein rechtwinkliges Dreieck $AB'C'$ mit den Katheten $a + da$, $b + db$ und der Hypotenuse $c + dc$ entsteht. Macht man auf $C'B'$ $C'D = a$, so wird nach (B):

$$BD = g(a)\,.\,db.$$

Andererseits ist, da in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ die Euklidische Geometrie gilt und die Winkel bei D und B' sich nur unendlich wenig von einem Rechten und von B unterscheiden:

$$BD = \sin B\,.\,dc,$$

folglich hat man:

$$g(a)\,.\,db = \sin B\,.\,dc. \tag{1}$$

4. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC lasse man den Winkel A um $BAB' = dA$ wachsen, während $AB' = c$ bleibt. Fällt man von B' auf AB das Loth $B'C'$, so entsteht das rechtwinklige Dreieck $AB'C'$ mit den Katheten $a + da$, $b + db$ und der Hypotenuse c; dabei ist db negativ. Macht man auf $B'C'$ $C'D = a$, so wird die Länge von BD:

$$BD = -g(a).db.$$

Andererseits ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$:

$$B'D = da$$

und nach (A):

$$BB' = f(c).dA,$$

während die Winkel bei D und B' sich nur unendlich wenig von einem Rechten und $90^\circ - B$ unterscheiden. Mithin ist

$$BD = \cos B f(c).dA,$$

und man hat

2) $$g(a).db = -\cos B f(c).dA.$$

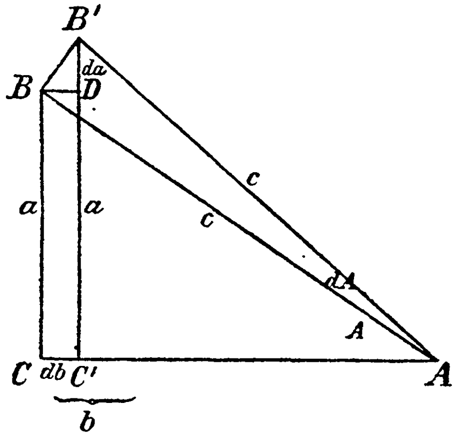


Fig. 5.

5. Durch Verbindung von 1) und 2) folgt, dass bei dem Übergange von dem Dreieck $a, b, c; A, B$ zu dem Dreieck $a + da, b + db, c + dc; A + dA, B + dB$ zwischen db, dc und dA die Relation:

I. $$g(a).db - \sin B.dc + f(c)\cos B.dA = 0$$

besteht. Da man aber gleichzeitig a mit b und A mit B vertauschen darf, so gilt auch die Gleichung:

II. $$g(b).da - \sin A.dc + f(c)\cos A.dB = 0.$$

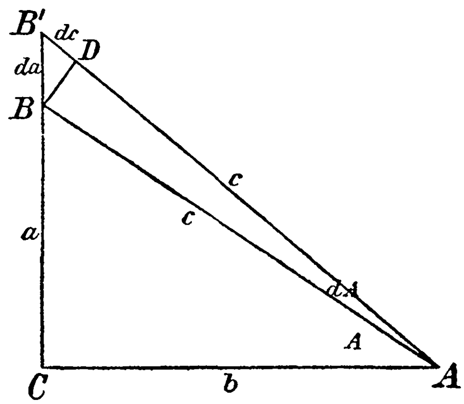


Fig. 6.

6. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC lasse man A um $BAB' = dA$ wachsen; verlängert man BC bis zum Schnitt mit AB', so entsteht das rechtwinklige Dreieck ACB' mit den Katheten $a + da$ und b. Macht man auf AB' $AD = c$, so wird in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$:

$$BB' = da, \qquad BD = f(c).dA,$$

folglich ist

3) $$f(c).dA = \sin B.da.$$

7. Man lasse wiederum A um $BAB' = dA$ wachsen, behalte aber die Kathete $B'C' = a$ bei. Verlängert man AB' bis $AD = c$, so entsteht das unendlich kleine Dreieck $BB'D$ mit

$$BD = f(c).dA$$

und

$$BB' = -g(a).db,$$

folglich ist:

4) $$f(c).dA = -\cos B g(a).db.$$

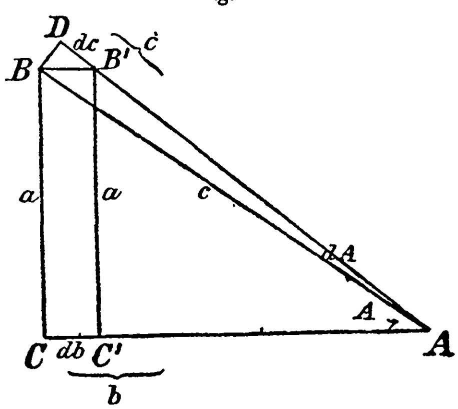


Fig. 7.

8. Durch Verbindung von 3) und 4) ergibt sich die Relation:

$$\text{III.} \qquad \sin B \,.\, da - \cos B g(a) \,.\, db - f(c) \,.\, dA = 0,$$

aus der durch gleichzeitige Vertauschung von a mit b und A mit B:

$$\text{IV.} \qquad \cos A \,.\, db - \cos A g(b) \,.\, da - f(c) \,.\, dB = 0$$

hervorgeht.

9. Aus I. und III. erhält man durch Elimination von dA die Gleichung:

$$\cos B \,.\, da + g(a) \sin B \,.\, db - dc = 0.$$

Ebenso ist auch

$$\cos A \,.\, db + g(b) \sin A \,.\, da - dc = 0,$$

folglich muss

$$(\cos B - g(b) \sin A)\, da + (\cos A - g(a) \sin B)\, db = 0$$

sein. Da aber da und db von einander unabhängig sind, so ist das nur möglich, wenn gleichzeitig

$$\text{V. 1)} \qquad \cos A = g(a) \sin B,$$

$$\text{V. 2)} \qquad \cos B = g(b) \sin A$$

wird. Aus diesen Gleichungen folgt die Relation:

$$\text{V.} \qquad \cos B \,.\, da + \cos A \,.\, db - dc = 0.$$

10. Verfährt man wie in No. 3, so ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ (Fig. 4):

$$5) \qquad da = \cos B \,.\, dc,$$

während $dA = 0$ wird. Verfährt man aber wie in No. 4, so ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ (Fig. 5):

$$6) \qquad da = \sin B f(c) \,.\, dA,$$

während $dc = 0$ wird. Mithin ergibt die Verbindung von 5) und 6) die allgemein gültige Formel:

$$\text{VI.} \qquad da - \cos B \,.\, dc - \sin B f(c) \,.\, dA = 0,$$

und entsprechend ist:

$$\text{VII.} \qquad db - \cos A \,.\, dc - \sin A f(c) \,.\, dB = 0.$$

11. Man verlängere CA um $AA' = db$ und trage in A' an CA' den Winkel A an, dessen anderer Schenkel die Verlängerung der Kathete CB in B' schneide, sodass $BB' = da$ wird. Von A fälle man auf $A'B'$ das Lot AD und trage auf $A'B'$ nach B' hin $DE = c$ ab. Dann wird $A'D = \cos A \,.\, db$, und da nach Fig. 8 und Gleichung V.:

$$dc = A'D + EB'$$
$$= \cos B \,.\, da + \cos A \,.\, db$$

ist, $EB' = \cos B \,.\, da$, folglich $BE = \sin B \,.\, da$. Das Viereck $ADEB$ hat aber in A und D rechte Winkel, während $AB = DE = c$ ist, mithin ist nach (A):

$$BE = g(c) \,.\, AD$$

oder

$$\sin B \,.\, da = g(c) \sin A \,.\, db.$$

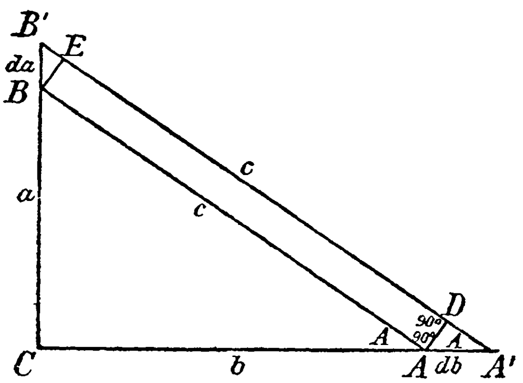


Fig. 8.

Auf der andern Seite ist für $dA = 0$ nach III.:

$$\sin B \,.\, da = \cos B\, g(a) \,.\, db,$$

also

$$g(c) \sin A = g(a) \cos B,$$

oder mit Hilfe von V. 2):

V. 3) $$g(c) = g(a)\, g(b).$$

Ferner ergibt sich aus V. 1) und V. 2) durch Multiplication:

$$\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, g(a)\, g(b) = 1,$$

was vermöge V. 3) in

V. 4) $$\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, g(c) = 1$$

übergeht.

Man erkennt leicht, dass die Relationen V. 1), 2) und 3) ausreichen, um sämmtliche 10 Gleichungen herzuleiten, die zwischen je drei Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks bestehen, nemlich der Reihe nach zwischen

$$a,\ b,\ c \qquad A,\ a,\ c;\quad B,\ b,\ c$$
$$A,\ b,\ c;\quad B,\ a,\ c \qquad A,\ B,\ a;\quad A,\ B,\ b$$
$$A,\ a,\ b;\quad B,\ a,\ b \qquad A,\ B,\ c.$$

Es wird also alles darauf ankommen, die in diesen Relationen auftretende noch unbekannte Function $g(x)$ zu bestimmen, wozu man mittelst folgender Überlegungen gelangt.

12. In dem Dreieck PQR sei der Winkel bei Q ein Rechter, der Winkel bei P unendlich klein, sodass sein Sinus durch den Bogen ersetzt werden kann. Dann unterscheidet sich der Winkel bei R unendlich wenig von einem Rechten, und die Relation V. 1), in der man A, B durch R, P zu ersetzen hat, geht über in

$$90^\circ - R = g(PQ) \,.\, P$$

oder

(C) $$R = 90^\circ - g(PQ) \,.\, P.$$

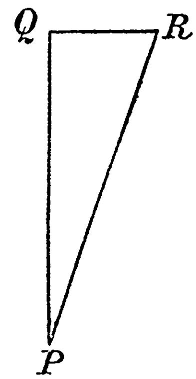


Fig. 9.

13. Das Viereck $PQRS$ habe in P, Q und R rechte Winkel, während die Seite PQ unendlich klein ist. Die Diagonale QS sei gleich r. Dann hat man nach (A'):

$$PQ = f(r) \,.\, PSQ$$

oder

$$PSQ = \frac{PQ}{f(r)},$$

und ebenso ist

$$RQS = \frac{RS}{f(r)}.$$

Verlängert man jetzt PQ um $QT = PQ$, SR um $RU = SR$, so hat das Viereck $PTUS$ in P und T rechte Winkel, und die Seiten PS und TU sind einander gleich. Mithin ist nach (B):

$$SU = g(PS) \,.\, PT$$

oder, da RS unendlich klein ist, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung:

$$RS = g(r) \,.\, PQ$$

und mit derselben Genauigkeit:

7) $$RQS = \frac{g(r)}{f(r)} \cdot PQ.$$

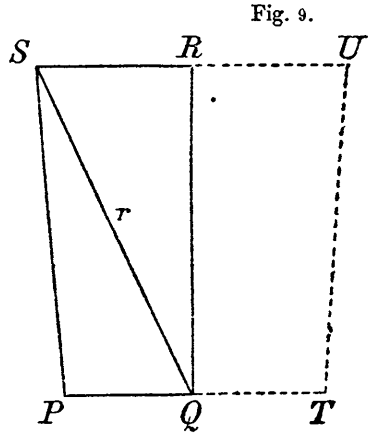


Fig. 10.

Endlich wird nach (C):

$$QSR = 90^\circ - g(PQ).RQS,$$

demnach vermöge 7):

$$QRS = 90^\circ - \frac{g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ$$

und daher

(D)
$$PSR = PSQ + QSR$$
$$= 90^\circ + \frac{1-g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ.$$

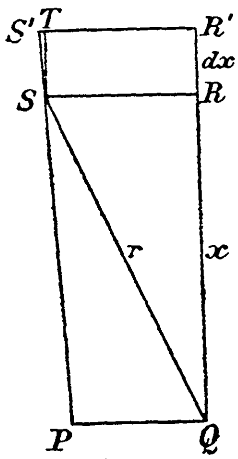


Fig. 11.

14. In dem Viereck $PQRS$ (Fig. 11) verlängere man QR um das unendlich kleine Stück RR', errichte auf QR' in R' das Loth $R'S'$, das die Verlängerung von PS in S' treffen möge, und trage auf $R'S'$ die Strecke $R'T = RS$ ab.

Da die Winkel des unendlich kleinen Vierecks $RR'TS$ als rechte angesehen werden dürfen, so ist nach (A'):

$$TS' = f(SS').S'ST$$
$$= f(SS').(90^\circ - PSR)$$

oder

$$R'S' - RS = f(SS').(90^\circ - PSR)$$

oder vermöge (D):

8)
$$R'S' - RS = -f(RR') \cdot \frac{1-g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ.$$

Bezeichnet man jetzt QR mit x, RR' mit dx, so ist nach (B):

$$RS = g(x).PQ,$$

demnach

9)
$$R'S' - RS = dg(x).PQ,$$

und die Vergleichung der beiden Werthe von $R'S' - RS$ liefert die Relation:

(E)
$$dg(x) = -f(dx) \cdot \frac{1-g(x)^2}{f(x)}.$$

15. Hat das Dreieck ABC, mit einem unendlich kleinen Winkel $d\omega$ in A und einem rechten Winkel in C, die Hypotenuse $AB = x + dx$, so ist nach (A'):

$$BC = f(x+dx).d\omega$$

oder

10)
$$BC = f(x).d\omega + df(x).d\omega.$$

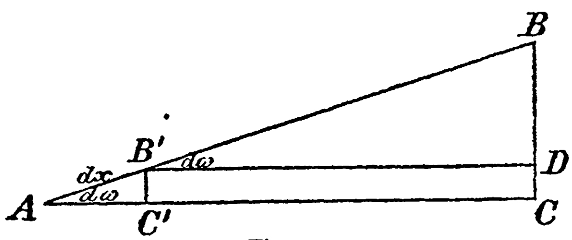


Fig. 12.

Trägt man auf AB die Strecke $AB' = dx$ ab und fällt von B' auf AC das Loth C', so ist wieder nach (A'):

$$BD = f(x).d\omega, \qquad C'B' = f(dx).d\omega.$$

Errichtet man endlich auf $B'C'$ in B' das Loth $B'D$, das BC in D trifft, so ist nach (B):

$$CD = g(C'C).C'B',$$

also, da $C'C$ sich von $B'B$ nur unendlich wenig unterscheidet:

11)
$$CD = g(x).f(dx).d\omega,$$

folglich mit Benutzung von 10):

(F) $$df(x) = f(dx)g(x).$$

16. Aus der geometrischen Bedeutung von $f(x)$ geht hervor, dass $f(0) = 0$ ist. Mithin darf man

12) $$f(dx) = \alpha dx$$

setzen, wo α eine Constante bedeutet. Wird zur Abkürzung

$$f(x) = y$$

gesetzt, so ist nach (F)

13) $$\frac{dy}{dx} = \alpha g(x),$$

also

14) $$g(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Aus 13) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha\frac{dg(x)}{dx},$$

mithin nach (E), 12) und 14):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2\frac{1-\frac{1}{\alpha^2}\frac{dy^2}{dx^2}}{y},$$

oder.

15) $$y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \alpha^2 = 0.$$

Um diese Differentialgleichung zu integriren, multiplicire man sie mit

$$\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx},$$

wodurch sie in

$$\frac{2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{y^2} - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{y^3} + 2\alpha^2\frac{\frac{dy}{dx}}{y^3} = 0$$

übergeht. Mithin ist

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{y^2} = \text{Const.}$$

Wird die Constante mit $-k^2$ bezeichnet, so kommt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \alpha^2 + k^2y^2 = 0,$$

woraus

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2-k^2y^2}} = \frac{\frac{k}{\alpha}dy}{k\sqrt{1-\frac{k^2}{\alpha^2}y^2}}$$

und

$$kx = \arcsin\frac{k}{\alpha}y + \text{const.}$$

folgt. Die Constante ist jedoch gleich Null zu setzen, da y für $x = 0$ verschwindet, sodass schliesslich

$$y = \alpha \cdot \frac{\sin kx}{k}$$

wird. Demnach ist:

$$f(x) = \alpha \frac{\sin kx}{k}$$

und nach 14):

$$\text{(G)} \qquad g'(x) = \cos kx.$$

17. Setzt man für $g(x)$ den Ausdruck $\cos kx$ in den Relationen V. 1), 2), 3) und 4) ein, so ergeben sich daraus die 10 Relationen:

$$\cos kc = \cos ka \,.\, \cos kb,$$

$$\operatorname{tg} kb = \operatorname{tg} kc \,.\, \cos A, \qquad \operatorname{tg} ka = \operatorname{tg} kc \,.\, \cos B,$$

$$\operatorname{tg} ka = \operatorname{tg} A \,.\, \sin kb, \qquad \operatorname{tg} kb = \operatorname{tg} B \,.\, \sin ka,$$

$$\sin ka = \sin A \,.\, \sin kc, \qquad \sin kb = \sin B \,.\, \sin kc,$$

$$\cos A = \cos ka \,.\, \sin B, \qquad \cos B = \cos kb \,.\, \sin A,$$

$$\cos kc = \cot A \,.\, \cot B,$$

und das sind die bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, wenn der Radius der Kugel gleich $\frac{1}{k}$ gesetzt wird, die sich in die Gleichungen der Nicht-Euklidischen Trigonometrie verwandeln, wenn man für k einen rein imaginären Werth $k = ik'$ wählt.

Es ist auffallend, dass GAUSS die Constante, die bei der Integration der Differentialgleichung 15) auftritt, mit k bezeichnet; ob er dadurch einen Zusammenhang mit dem Krümmungsmass andeuten wollte, das er in den Disquisitiones generales circa superficies curvas ebenfalls k nennt, lässt sich freilich nicht mit Bestimmtheit behaupten. Bemerkt zu werden verdient bei dieser Gelegenheit eine Äusserung von MINDING in seiner Abhandlung: *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen,* die 1840 in CRELLES Journal für die reine und angewandte Mathematik (Bd. 20. S. 323—327) erschienen war:

»Dass auf jeder Fläche von unveränderlichem positivem Krümmungsmasse zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks die Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten, folgt sogleich, wenn man sich erinnert, dass jede Fläche dieser Art sich auf eine Kugel abwickeln lässt. Ist das Krümmungsmass negativ, so gelten dieselben Formeln mit der Änderung, dass die hyperbolischen Functionen der Seiten an die Stelle der trigonometrischen treten. Sind nemlich a, b, c die Seiten des Dreiecks, A der Gegenwinkel von a und k das unveränderliche Krümmungsmass, gleichviel ob positiv oder negativ, so ist es nicht schwer, die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

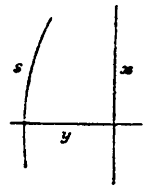
$$\cos a\sqrt{k} = \cos b\sqrt{k} \,.\, \cos c\sqrt{k} + \sin b\sqrt{k} \,.\, \sin c\sqrt{k} \,.\, \cos A.«$$

Die Rotationsflächen von constantem negativen Krümmungsmasse hatte MINDING bereits 1839 bestimmt (CRELLES Journal, Bd. 19). Man vergleiche dazu folgende Notiz von GAUSS, die sich in einem Handbuche findet und aus der Zeit zwischen 1823 und 1827 stammt:

Gar keine Schwierigkeit hat übrigens die Umformung der Oberfläche eines Revolutionskörpers in die eines andern. Man hat nemlich $(m = const.)$:

$$dy = ds\,.\,\sin\varphi \qquad dy' = ds'\,.\,\sin\varphi'$$

$$dx = ds\,.\,\cos\varphi \qquad dx' = ds'\,.\,\cos\varphi'$$



$$s = s'$$

$$my = y'$$

$$m\sin\varphi = \sin\varphi'$$

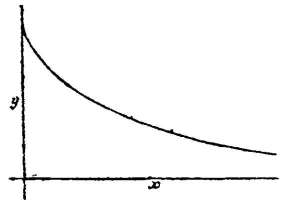
$$x' = \int dx \sqrt{\left(1 + (1 - mm)\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\,.$$

Für die Curve, durch deren Revolution das Gegenstück der Kugel entsteht, ist:

$$y = R\sin\varphi$$

$$x = R\cos\varphi + \log tang\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$s = R\log\frac{1}{\sin\varphi}\,.$$



φ	y	x	s
0^0	0.0000	∞	∞
10^0	0.1736	1.45144	1.75072
20^0	0.3420	0.79572	1.07289
30^0	0.5000	0.45095	0.69315
40^0	0.6428	0.24464	0.44194
50^0	0.7660	0.12012	0.26652
60^0	0.8660	0.04931	0.14384
70^0	0.9397	0.01436	0.06220
80^0	0.9848	0.00178	0.01531
90^0	1.0000	0.00000	

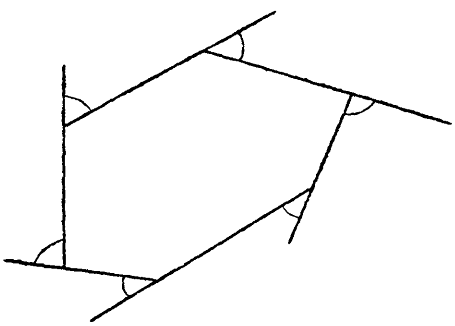
Bei der Tabelle beachte man, dass die Logarithmen natürliche, nicht BRIGGische sind.

STÄCKEL.

[ÜBER DIE SUMME DER AUSSENWINKEL EINES POLYGONS.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 2. October 1846.

...... Der Satz, den Ihnen Hr. SCHWEIKART erwähnt hat, dass in *jeder* Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von 360^0 um eine Grösse verschieden ist (nemlich kleiner als 360^0 in der Astralgeometrie, wie SCHW. sie aufgefasst hat), welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als nothwendig erkannte. Zu weitern Bemerkungen fehlt mir aber diessmal alle Zeit.



BEMERKUNG.

In SCHWEIKARTS Astralgeometrie ist die Summe aller äussern Polygonwinkel nicht kleiner, sondern grösser als 360^0.

STÄCKEL.

[METAPHYSIK DER GEOMETRIE.]

[W. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN. *Gauss zum Gedächtniss. Leipzig 1856. S. 80—81.*]

{. . . . . In seiner frühsten Jugend habe ihm [GAUSS] die Geometrie wenig Interesse eingeflösst, welches sich erst später bei ihm in hohem Masse entwickelt habe.

Es war besonders merkwürdig und überaus lehrreich, von GAUSS die Fundamente, auf denen die Mathematik basirt ist, blossgelegt und sie gegen die Metaphysik scharf abgegrenzt zu erblicken. Obgleich er über diese Fragen nie etwas veröffentlicht hat, so steht doch zu vermuthen, dass sich darüber in seinem wissenschaftlichen Nachlass einiges vorfinden wird. In früherer Zeit, als seine Lebensrichtung noch nicht entschieden war und er daran denken musste, dass er vielleicht als Lehrer der Mathematik irgendwo aufzutreten habe, hatte er sich in dieser Aussicht ein Papier ausgearbeitet, welches noch in seinen letzten Jahren vorhanden gewesen sein soll und auf dem er die Anfänge der Mathematik philosophisch entwickelt hatte. Ob dasselbe sich jetzt noch vorfinden wird, ist zweifelhaft.

Die Geometrie betrachtete GAUSS nur als ein consequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indess zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohehagen, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbstständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.

GAUSS, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht, betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine specifische Eigenthümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche diess nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen Böotier. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte.}

BEMERKUNG.

Das von SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN erwähnte Papier hat sich in GAUSS' Nachlass vorgefunden, es bezieht sich jedoch im Wesentlichen nur auf die Erklärung des Zahlbegriffs und der vier Species.

STÄCKEL.