Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*).

Von Fräulein *Emmy Noether* in Erlangen.

Einleitung.

Mit dem Formensystem der ternären biquadratischen Form beschäftigen sich Arbeiten von *Gordan, Maisano* und *Pascal***). Herr *Gordan* stellt das vollständige, aus 54 Bildungen bestehende, Formensystem der speziellen automorphen Form: $f \equiv x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ unter Zugrundelegung ähnlicher Prinzipien auf, wie er sie für die Formensysteme im binären Gebiet gegeben hat.

Bei Herrn *Maisano* sind für die allgemeine biquadratische Form die Formen bis zur 5. Ordnung***) einschließlich aufgestellt, sowie einige Invarianten, Kovarianten und Kontravarianten höherer Ordnung, nach der von Herrn *Gordan* in Band I der Math. Annalen für die ternäre kubische Form angewandten Methode. Herr *Pascal* beschäftigt sich, unter Benutzung

---

*) Ein kurzer Auszug aus Einleitung und Kapitel I ist in den „Sitzungsber. der phys.-med. Sozietät Erlangen 1907", S. 176 bis 179, erschienen.

**) *P. Gordan*, über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (Math. Annalen, Bd. XVII (1880), S. 217—233.)

G. Maisano, 1) Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl' invarianti, covarianti e contravarianti di sesto grado. (Giorn. di Battaglini XIX.)

2) Sui covarianti indipendenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria. (Rend. Circ. Mat. di Palermo I, 1887.)

E. Pascal, Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. (Memoria premiata dalla R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. 1905.)

***) Unter „Ordnung" soll die Dimension in den Koeffizienten, unter „Grad" die in den Variablen verstanden werden.

der *Maisano*schen Resultate, hauptsächlich mit der Frage nach dem Zerfallen der biquadratischen Form in Faktoren*).

*Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Aufstellung des Formensystems für die allgemeine ternäre biquadratische Form; und zwar werden in dieser Arbeit nur die Hauptgrundlagen gegeben, ein sogenanntes „relativ vollständiges System"**) aufgestellt.*

Die Arbeit schließt sich eng an die *Gordan*sche Arbeit an; doch waren die dort nur ganz im allgemeinen gegebenen Prinzipien erst im einzelnen auszuarbeiten. Mit Hilfe eines Satzes über den Zusammenhang der Faltungen und durch Einführung der „Formenreihe" (§ 1) werden die Reduktionssätze scharf formuliert und vervollständigt (§ 3), während die rekurrierende Aufstellung spezieller Reihenentwicklungen (§ 2) das rechnerische Mittel zur wirklichen Durchführung der Reduktionen gibt.

Der Grundgedanke der Systembildung ternärer Formen ist derselbe wie im binären Gebiet. Ausgehend von einem ersten relativ vollständigen System — dem System der aus dem Binären übernommenen Formen —, gelangt man nach bestimmter Gesetzmäßigkeit zu Systemen mit immer höherem Modul, solange bis das System eines Moduls — der Modul als Grundform genommen — endlich und bekannt wird, oder auch bis ein Modul sich reduzieren läßt auf Formen, die Invarianten zum Faktor haben. Durch Überschiebung des relativ vollständigen Systems über das System des Moduls entsteht im ersten Fall das absolut vollständige System, während im zweiten Fall relativ vollständiges und absolut vollständiges System identisch werden. Infolge der durch Herrn *Hilbert* allgemein bewiesenen Endlichkeit der Formensysteme muß dies Verfahren notwendig zu einem Abschluß führen.

In unserm Fall wird der Modul (abc) des ersten relativ vollständigen Systems (§ 4) zurückgeführt auf die Moduln $\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2$ und $\nu = (abu)^4$

---

*) In der zweiten kurzen Note versucht Herr *Maisano* eine lineare Abhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades nachzuweisen. Im Gegensatz zu diesem nicht ganz vollständigen Beweis glaubt Herr *Pascal* die lineare Unabhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung, ebenso wie diejenige der drei Invarianten 9. Ordnung bewiesen zu haben. Daß aber in der Tat eine lineare Relation zwischen den drei Kovarianten einerseits, den drei Invarianten andererseits existiert, zeigen die Formeln (13), § 11 und (22), § 17 Anmerkung, der vorliegenden Arbeit, wo diese Relationen explizit gegeben sind. Nach einer Mitteilung des Herrn *Pascal* erklärt sich der Widerspruch durch einen numerischen Fehler im Ausdruck seiner Kontravariante p (hier ϱ genannt) S. 46 seiner Abhandlung.

**) Für die Bezeichnung vgl. § 3a.

(§ 5), und sodann das relativ vollständige System mod ν gefunden (§ 6). Diese Resultate sind schon in der *Gordan*schen Arbeit für die allgemeine biquadratische Form gegeben; unsere Art der Ableitung läßt sich jedoch leichter auf Formen höheren Grades übertragen.

Als Reihe der Moduln wählen wir nun die Formen (§ 7):

$$\nu, \quad \nu(\nu) = (\nu\nu_1 x)^4 = s_x^4, \quad \nu(s) = (ss'u)^4, \dots .$$

Bei der Bildung des relativ vollständigen Systems mod s werden zwei im System auftretende quadratische Formen, u_ϱ^2 und t_x^2, als Moduln adjungiert (§ 9 und 10) und demzufolge das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t) gebildet; es wird sodann gezeigt (§ 17), daß der Modul $(ss'u)^4$ reduzibel ist auf die Moduln ϱ und t. Dadurch geht das nächsthöhere System über in ein relativ vollständiges System mod (ϱ, t). Da aber das simultane System zweier quadratischen Formen endlich und bekannt ist, im allgemeinen Fall aus 20 Bildungen besteht*), ist mit der Aufstellung des relativ vollständigen Systems mod (ϱ, t) der oben gekennzeichnete Abschluß erreicht. Die Überschiebung dieses Systems über das System von (ϱ, t) zur Bildung des absolut vollständigen Systems bleibt vorbehalten.

Als relativ vollständiges System mod (ϱ, t) werden 331 Bildungen gefunden, die in der beigefügten Tabelle nach ihrem Grad in den Variablen x und u geordnet sind.

Zum Schluß geben wir noch eine Übersicht über die eingeführten Symbole:

$$f = a_x^4, \quad \theta = \theta_x^4 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2, \quad K = K_x^6 u_k^3 = (a\theta u) u_\vartheta^2 a_x^3 \theta_x^3, \quad j = u_j^6 = (a\theta u)^4 u_\vartheta^2,$$

$$\varDelta = \varDelta_x^6 = a_\vartheta^2 a_x^2 \theta_x^4 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad N = N_x^8 u_n = (a \varDelta u) a_x^3 \varDelta_x^5,$$

$$\nu = u_\nu^4 = (abu)^4, \quad H = H_x^2 u_\eta^4 = (\nu\nu_1 x)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2, \quad L = L_x^3 u_l^6 = (\nu\eta x) H_x^2 u_\nu^3 u_\eta^3,$$

$$g = g_x^6 = (\nu\eta x)^4 H_x^2, \quad \sigma = u_\sigma^6 = H_\nu^2 u_\nu^2 u_\eta^4,$$

$$s = s_x^4 = (\nu\nu_1 x)^4, \quad Z = Z_x^4 u_\zeta^2 = (ss'u)^2 s_x^2 s_x'^2,$$

$$\varrho = u_\varrho^2 = \theta_\nu^4 u_\vartheta^2, \quad t = t_x^2 = a_\eta^4 H_x^2,$$

$$i = a_\nu^4, \quad J = s_\nu^4.$$

---

*) Vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie. (Bd. I, S. 288 ff.). System zweier kogredienter Formen.

Gordan, Über Büschel von Kegelschnitten. (Math. Ann. Bd. XIX. S. 530). System zweier kontragredienter Formen.

Kapitel I. Allgemeine Sätze über ternäre Formen.

§ 1. *Faltungsprozeß. Formenreihen.*

Der Grundprozeß zur Erzeugung von Formen ist der *Faltungsprozeß*, der sich im ternären Gebiet folgendermaßen definieren läßt. Gegeben sei ein symbolisches Produkt:

$$s_x^m \, t_x^n \, u_\sigma^\mu \, u_\tau^\nu .$$

Ersetzt man die Faktorenpaare

	$s_x t_x$	$u_\sigma u_\tau$	$s_x u_\sigma$ oder $s_x u_\tau$	$t_x u_\tau$ oder $t_x u_\sigma$
bzw. durch				
	$(s\,t\,u)$	$(\sigma\,\tau\,x)$	s_σ oder s_τ	t_τ oder t_σ
Faltung	I	II	III	IV,

so sind die entstehenden Formen durch Faltung aus der ursprünglichen hervorgegangen*).

Dabei läßt sich der Ausdruck $s_x^m \, t_x^n \, u_\sigma^\mu \, u_\tau^\nu$ entweder als wirkliches Produkt zweier Formen $S \cdot T$ auffassen, oder auch als einzige Form mit mehreren Reihen von Symbolen: $s_x^m \, t_x^n \, u_\sigma^\mu \, u_\sigma^\nu = A_x^{m+n} u_\lambda^{\mu+\nu}$. Im ersten Fall sprechen wir von der Faltung der Form S mit T, im zweiten Fall von der „Faltung der Form A in sich". Der Kürze halber nehmen wir im folgenden immer an (was in der Tat bei allen später zu betrachtenden Formen der Fall ist)

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} s_\sigma^\lambda &= 0, \\ t_\tau^\varkappa &= 0 \end{aligned}$$

für beliebiges von 0 verschiedenes λ und $\varkappa$ und vereinigt mit beliebigen anderen Faltungen. Es sagt dies aus, daß die Form $s_x^m \, t_y^n \, u_\sigma^\mu \, v_\tau^\nu$ eine sogenannte „Normalform" ist, d. h. bei Anwendung des Ω-Prozesses, sowohl nach den Variablen x und u, wie nach den Variablen y und v, verschwindet.

*) *Gordan*, Math. Annalen Bd. XVII S. 219.

Die Bedingung (a) stellt also keine Einschränkung dar, sondern läßt sich stets erreichen*).

Für den Zusammenhang der einzelnen Faltungen gilt nun folgender Satz:

Satz I. *Die Faltungen* I *und* II *sind Grundfaltungen, aus denen sich, unabhängig von der Reihenfolge der Zusammensetzung, die Faltungen* III *und* IV *zusammensetzen lassen. In anderen Worten: Um alle aus einem gegebenen Ausdruck durch Faltung entstehenden Formen zu bilden, hat man nur die Faltung* I *und* II *anzuwenden.*

Beweis: Nach dem Identitätssatz, bzw. Produktsatz für Matrizen, folgt unter Berücksichtigung von (a):

$$(\widehat{st}\,\sigma x) = -t_\sigma, \qquad (\widehat{\sigma\tau}\,su) = -s_\tau,$$

$$(\widehat{st}\,\tau x) = s_\tau, \qquad (\widehat{\sigma\tau}\,tu) = t_\sigma,$$

$$(stu)(\sigma\tau x) = s_\tau + t_\sigma - u_x \cdot s_\tau\, t_\sigma.$$

Durch Zusammensetzung von Faltung I und II entstehen also Faltung III und IV, und zwar ebenso bei Anwendung von Faltung II auf Faltung I, d. h. auf die Faktoren $(stu)\, u_\sigma u_\tau$, wie bei Anwendung von Faltung I auf Faltung II, auf die Faktoren $(\sigma\tau x)\; s_x t_x$.

Als *Formenreihe***) definieren wir eine Anfangsform mit allen durch Faltung in sich aus dieser hervorgegangenen Formen und bezeichnen die Formenreihe durch die Anfangsform. Als „höhere Form" soll hierbei jede Form mit mehr Faltung in sich gelten, während unter den gleichberechtigten Faltungen s_τ und t_σ eine als höher normiert werden muß. Nach dem Bildungsgesetz der Formenreihe folgt:

1) Jede Form der Formenreihe ist linear in den Symbolen der Anfangsform.

---

*) Vgl. *Gordan*, Math. Annalen Bd. V S. 104.

**) Vgl. *Clebsch*, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. Bd. XVII): § 17 und § 18 Schluß. Die „Formenreihe" unterscheidet sich von dem dort eingeführten „eigentlich reduzierten äquivalenten System" durch das Prinzip der Anordnung nach höheren Formen.

2) Die Formenreihe ist bei Anfangsformen mit je zwei Reihen kontragredienter Symbole eindeutig bestimmt; bei Anfangsformen mit mehr Symbolreihen ist sie eindeutig zu normieren durch Auszeichnung spezieller unter den durch den Identitätssatz verbundenen Faltungen.

Nach Satz I. läßt sich eine Formenreihe $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu (m > n;\ \mu > \nu)$ nach folgendem rechteckigen Schema anordnen:

$s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$	(stu)	$(stu)^2$	.	❋
$(\sigma\tau x)$	$t_\sigma,\ s_\tau$	$t_\sigma(stu),\ s_\tau(stu)$	.	
$(\sigma\tau x)^2$	$t_\sigma(\sigma\tau x),\ s_\tau(\sigma\tau x)$	$t_\sigma^2,\ t_\sigma s_\tau,\ s_\tau^2$	.	
.	. .	. . .	.	.
$(\sigma\tau x)^\nu$	$t_\sigma(\sigma\tau x)^{\nu-1},\ s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-1}$	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^{\nu-2},\ t_\sigma s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-2},\ s_\tau^2(\sigma\tau x)^{\nu-2}$	.	.
.	$t_\sigma(\sigma\tau x)^\nu$	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^{\nu-1},\ t_\sigma s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-1}$	.	.
.	. .	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^\nu$	.	.

❋ *)	$(stu)^n$	. .	.
	$t_\sigma(stu)^{n-1},\ s_\tau(stu)^{n-1}$	$s_\tau(stu)^n$	.
	$t_\sigma^2(stu)^{n-2},\ t_\sigma s_\tau(stu)^{n-2},\ s_\tau^2(stu)^{n-2}$	$t_\sigma s_\tau(stu)^{n-1},\ s_\tau^2(stu)^{n-1}$	$s_\tau^2(stu)^n$

Man erhält hier, wenn man

1) um eine Kolonne nach rechts fortschreitet, alle durch Faltung I aus den nebenstehenden Formen entstehenden Formen,

2) um eine Zeile nach unten fortschreitet, alle durch Faltung II aus den obenstehenden Formen entstehenden Formen,

und somit alle durch Faltung entstehenden Formen.

Eine beliebige Form der Gesamtformenreihe: $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (stu)^\mu$ oder $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (\sigma\tau x)^\nu$ bildet den Anfang einer neuen Formenreihe, die aus all denjenigen Formen des rechteckigen Schemas mit der Form $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (stu)^\mu$ oder $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (\sigma\tau x)^\nu$ als linkem oberem Eckpunkt besteht, die den Faktor $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda$ haben.

Nachbemerkung. Eine Ausnahme erleidet Satz I in dem Fall, wo die Zahlen n und μ (bzw. m und ν) gleich Null werden, Faltung I, II und IV also nicht mehr existieren, wohl aber Faltung III (bzw. IV). Als Formenreihe bezeichnen wir in diesem Fall das Diagonalglied des Schemas:

---

*) Hier, und ähnlich im folgenden, ist der mit ❋ bezeichnete unten stehende Teil an die ebenso bezeichnete rechts oben befindliche Stelle des Schemas anzusetzen.

$$\begin{array}{lllll} s_x^m u_\tau^\nu & & & & \\ & s_\tau & & & \\ & & s_\tau^2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & s_\tau^\nu . \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{lllll} t_x^n u_\sigma^\mu & & & & \\ & t_\sigma & & & \\ & & t_\sigma^2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & t_\sigma^\mu \end{array}$$

In Übereinstimmung mit dem Fehlen von Faltung I und II reduziert sich in diesem Fall die Reihenentwicklung nach Polaren der Formenreihe stets auf das Anfangsglied; es gelten aber die Sätze über Reduzenten.

§ 2. *Reihenentwicklungen nach Polaren der Formenreihe**).

Für Formen mit n Variablen sind zwei Arten von Reihenentwicklungen explizit aufgestellt**):

1) für Formen mit je einer Reihe kontragredienter Variablen: $s_x^m u_\tau^\nu$ eine nach Potenzen von u_x fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten „Normalformen" sind;

2) für Formen mit zwei Reihen kogredienter Variablen $s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$ eine Entwicklung nach Polaren der Elementarkovarianten (Polaren der Formenreihe $s_x^m t_x^n$), die ternär folgendermaßen lautet:

$$\text{(I.)} \qquad s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda = \sum_\varrho \frac{\binom{m}{\varrho}\binom{\lambda}{\varrho}}{\binom{m+n-\varrho+1}{\varrho}} \cdot \left[(st\widehat{xy})^\varrho s_x^{m-\varrho} t_x^{n-\varrho}\right]_{y^{\lambda-\varrho}}.$$

Wir kombinieren beide Entwicklungen, indem wir für Formen mit je zwei Reihen kontragredienter Variablen:

$$s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda u_\sigma^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa$$

*) Vgl. *Study*, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Teubner 1889) II. § 7. Unsere Ableitung gibt im Unterschied von der dortigen die Methode zur raschen rechnerischen Bestimmung der numerischen Koeffizienten $C_{pr\varrho}$. Die *Clebsch-Study*sche Entwicklung würde bei Spezialisierung a), a′) lauten:

$$(stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda = \sum_{pr\varrho} C'_{pr\varrho} \left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu+r-\varrho}\right]_{\widehat{uv}^{\lambda-r+\varrho}\, v^{\varkappa-\varrho},\; w^p}, (w = x\widehat{uv}),$$

läßt also nicht die Vereinfachung zu, die bei unserer Entwicklung schon im Laufe der Rechnung eintritt, wenn man weiß, daß alle Glieder mit dem Faktor u_x auszulassen sind.

**) *Gordan*, Über Kombinanten. § 2 und 5 (Math. Ann. Bd. V).

Entwicklungen nach Potenzen von u_x aufstellen, deren Koeffizienten zusammengesetzte Polaren der Formenreihe $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$ sind, genommen nach den Variablen x und u.

Es genügt, die Reihe für je zwei kontragrediente Symbol- (bzw. Variablen-) reihen aufzustellen, da sich durch Zusammenfassen von je zwei Symbol- (Variablen-) reihen zu einer einzigen neuen Reihe Formen mit mehr Symbol- (Variablen-) reihen auf diesen Fall zurückführen lassen.

Um zu erreichen, daß alle Formen der Formenreihe nur je zwei Symbol- bzw. Variablenreihen enthalten, spezialisieren wir:

$$\text{a)}\ \sigma = \widehat{st}, \qquad \text{a}')\ y = \widehat{uv},$$
$$\text{b)}\ s = \widehat{\sigma\tau}, \qquad \text{b}')\ v = \widehat{xy}$$

und führen die Entwicklung für die Spezialisierung a), a′) durch.

Durch direkte Übertragung der Entwicklung I erhält man zusammengesetzte Polaren für Formen $(stu)^\mu s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$, während für Formen $(stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$ anstatt zusammengesetzter Polaren Glieder solcher entstehen, deren Auswertung die Einführung immer neuer, erst am Schlusse gleichzusetzender Hilfsvariablen nötig macht, wodurch die Rechnung unnötig kompliziert wird.

Wir schlagen deshalb einen indirekten Weg ein, indem wir die zusammengesetzten Polaren aller Formen der Formenreihe, also Ausdrücke

$$\left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r}\right]_{y^\lambda} \; v^\varkappa$$

darstellen durch die Anfangsglieder dieser Polaren und durch Umkehrung des entstehenden rekurrierenden Gleichungssystems die gewünschte Entwicklung nach Polaren erhalten.

Nach dem Übertragungsprinzip gilt für die λ-te Polare einer Form $s_x^m t_x^n$: $\left[s_x^m t_x^n\right]_{y^\lambda}$ $(\lambda \leqq n)$ folgende Entwicklung*) (der Fall $\lambda > n$ führt durch die Entwicklung von $\left[s_y^m t_y^n\right]_{x^{m+n-\lambda}}$ auf den ersten zurück):

*) *Gordan*, Die Resultante binärer Formen (Kap. I, § 5). Rend. Circ. Mat. di Palermo XXII. 1906.

$$\left[s_x^m t_x^n\right]_{y^\lambda} = \sum_r (-1)^r \frac{\binom{m}{r}\binom{\lambda}{r}}{\binom{m+n}{r}} \cdot (st\widehat{xy})^r s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} t_y^{\lambda-r}$$

und entsprechend für die $\varkappa$-te Polare von $u_\sigma^\mu u_\tau^\nu : [u_\sigma^\mu u_\tau^\nu]\, v^\varkappa$

$$[u_\sigma^\mu u_\tau^\nu]\, v^\varkappa = \sum_\varrho (-1)^\varrho \frac{\binom{\mu}{\varrho}\binom{\varkappa}{\varrho}}{\binom{\mu+\nu}{\varrho}} (\sigma\tau\widehat{uv})^\varrho u_\sigma^{\mu-\varrho} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho}.$$

Durch Multiplikation folgt, unter Einführung von Spezialisierung a) und a')

$$\left[s_x^m t_x^n (stu)^\mu u_\tau^\nu\right]_{\widehat{uv}^\lambda} v^\varkappa = \sum_{r,\varrho} c_{r\varrho} \cdot (st\widehat{x\widehat{uv}})^r (\widehat{st\tau}\,\widehat{uv})^\varrho s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r} (stu)^{\mu-\varrho} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho}$$

und daraus, durch Entwicklung nach Potenzen von u_x unter Auszeichnung des ersten Gliedes ($\sum_{r,\varrho}'$ bedeutet, daß das Glied $r=0$, $\varrho=0$ auszulassen ist) und Berücksichtigung von (a) S. 26

$$
\text{(II.)}\quad
\begin{aligned}
s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa &= \left[s_x^m t_x^n (stu)^\mu u_\tau^\nu\right]_{\widehat{uv}^\lambda} v^\varkappa \\
&- \sum_{r,\varrho}' c_{r\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r+\varrho} \cdot v_x^r \\
&+ u_x \cdot \sum_\varrho \cdot \sum_{r=1}^{\lambda} c_{r\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r-1} (stv)\, u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r+\varrho} \cdot v_x^{r-1} \\
&\;\vdots \\
&- (-1)^\lambda u_x^\lambda \cdot \sum_\varrho c_{\lambda\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho} (stv)^\lambda u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-\lambda} t_x^{n-\lambda} (tuv)^\varrho,
\end{aligned}
$$

$$c_{r\varrho} = (-1)^{r+\varrho} \cdot \frac{\binom{m}{r}\binom{\lambda}{r}}{\binom{m+n}{r}} \cdot \frac{\binom{\mu}{\varrho}\binom{\varkappa}{\varrho}}{\binom{\mu+\nu}{\varrho}} \qquad \text{für } \begin{array}{l} \lambda \leqq n \\ \varkappa \leqq \nu \end{array}$$

und entsprechend für die übrigen Zusammenstellungen der Zahlen λ, n; $\varkappa, \nu$. Der Ausdruck $s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa$ ist also zurückgeführt auf eine zusammengesetzte Polare, und, unter Anwendung der Identität

$$(stv)\, u_\tau = (stu)\, v_\tau - s_\tau (tuv),$$

auf eine Summe von analog gebildeten Ausdrücken, die höheren Formen der Formenreihe entsprechen.

Durch Iteration gelangt man zu der Entwicklung:

$$\text{(III.)} \quad s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa = \sum_{p,r,\varrho} u_x^p \cdot C_{pr\varrho} \cdot \left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r} \right]_{\widehat{uv}}^{\lambda-r+\varrho} v^{\varkappa-\varrho+p} \cdot v_x^{r-p}.$$

Die numerischen Koeffizienten $C_{pr\varrho}$ berechnen sich eindeutig und rekurrierend aus den Koeffizienten $c_{r\varrho}$, $c'_{r\varrho}$ des durch Iteration von (II.) entstehenden Gleichungssystems (vgl. das Beispiel S. 42). Analoge Entwicklungen ergeben sich bei den übrigen Spezialisierungen.

§ 3. *Reduktionssätze.*

Die bekannten Sätze über die Reduktion von Formen und Formensystemen sollen nun mit den Paragraphen 1 und 2 in Zusammenhang gebracht werden, wozu einige aus der Theorie der binären Formen übernommene Definitionen nötig sind.

a) Wir bezeichnen als *relativ vollständiges System* modulo einer vorgegebenen Reihe von Formen, ein System von Formen von der Eigenschaft, daß alle durch Faltung eines beliebigen Produktes dieser Formen entstehenden Bildungen sich ausdrücken lassen als ganze rationale Funktionen der Formen des Systems, bis auf ein additives Glied von Ausdrücken, die durch Faltung der Systemformen mit dem System des Moduls entstanden sind*).

b) Wir nennen eine Form dann *reduzibel*, wenn sie sich ausdrücken läßt durch Formen, die Invarianten zum Faktor haben oder durch „höhere Formen"; d. h. durch höhere Formen der Gesamtformenreihe, der die Form angehört, oder durch Formen, die die Symbole des Moduls in höherer Ordnung enthalten.

Die Sätze über Reduzenten**) lassen sich nun in ihrer allgemeinsten Form in folgender Weise aussprechen:

Definition: *Ein Reduzent ist eine reduzible Formenreihe.*

Satz II. *Ist die Anfangsform einer Formenreihe reduzibel dadurch, daß eines ihrer Glieder durch Faltung mit einem Reduzenten hervorgegangen ist (einen Reduzenten zum Faktor hat), und ist die Schlußform der Formen-*

---

*) *Gordan-Kerschensteiner*, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II. S. 227.

**) *Gordan*, Math. Annalen Bd. XVII. S. 222.

*reihe aus eben diesem Glied durch Faltung entstanden, so ist die Gesamtformenreihe reduzibel**).

Beweis: Die Formenreihe entsteht aus dem Anfangsglied durch Faltung in sich, also durch höhere Faltung mit dem Reduzenten einerseits, durch Faltung des Reduzenten in sich andererseits. In beiden Fällen lassen sich, nach § 2, alle Formen der Formenreihe darstellen als Polaren (Überschiebungen) über die Formenreihe des Reduzenten.

Der Schluß von der Anfangsform auf die Gesamtformenreihe hat nicht mehr statt bei den übrigen Reduktionsmethoden. Es sind dies

1) die sogenannte *„doppelte Reduktion"*.

Wir verstehen darunter die Reduktion eines Ausdrucks, der zwei voneinander unabhängige Reduzenten zum Faktor hat, auf doppelte Art, wodurch Relationen zwischen den höheren Formen entstehen, auf die reduziert wurde.

Durch systematische Anwendung der „doppelten Reduktion" muß man einerseits alle Relationen erhalten**), andrerseits hat man, wenn die „doppelte Reduktion", auf verschiedene Ausdrücke angewandt, keine neuen Relationen liefert, sowohl ein Kriterium für die Unabhängigkeit der höheren Formen wie eine Kontrolle der Rechnung.

2) *Faltung mit zerfallenden Formen.*

Unter „zerfallenden Formen" sollen — mit geringer Verallgemeinerung des gebräuchlichen Begriffs — Formen verstanden werden, die sich ausdrücken lassen durch Produkte von Formen niedrigeren Grades und durch „höhere" Formen. Produkte von Formen gehen bei einmaliger Faltung

---

*) Die Vereinfachung, die durch Satz II eintritt, läßt sich an folgendem Beispiel zeigen: Für die spezielle Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ ist $a_\nu^2 a_x^2 u_\nu^2$ Reduzent. Daraus folgt nach Satz II die Reduktion der Formenreihe $\theta_\nu(\vartheta\nu x)\theta_x^3 u_\vartheta u_\nu^2 = a_\nu^2(abu) - a_\nu \underbrace{b_\nu(abu)}_{0}$,

da $\theta_\nu^4 = a_\nu^2 b_\nu^2 (abu)^2$ aus dem Glied $a_\nu^2(abu)$ durch Faltung entstanden. Bei *Gordan*, a. a. O. S. 231, wird hingegen die Reduktion der Formen

$$\theta_\nu(\vartheta\nu x),\ \theta_\nu(\vartheta\nu x)^2,\ \theta_\nu^2,\ \theta_\nu^2(\vartheta\nu x),\ \theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$$

einzeln durchgeführt.

**) So wurden beispielsweise durch „doppelte Reduktion" gefunden: die Reduktion der Form a_η^3 (§ 10), der einzigen bei *Maisano* überflüssig ins System aufgenommenen Form; sodann die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnten Relationen zwischen den 3 Kovarianten und den 3 Invarianten.

in Produkte über; ebenso Produkte von *nichtlinearen* Formen bei zweimaliger Faltung bei den Spezialisierungen a′) und b′) (§ 2) nach dem Produktsatz:

$$a_y\, b_y\, a_x\, b_x = \frac{1}{2}\, a_y^2 \cdot b_x^2 + \frac{1}{2}\, b_y^2 \cdot a_x^2 - \frac{1}{2}\,(a\, b\, \widehat{yx})^2.$$

Erste Polaren (Überschiebungen) und gewisse zweite Polaren zerfallender Formen sind also wieder zerfallende Formen. Es folgt:

Ein durch einmalige (bzw. zweimalige) Faltung mit einer zerfallenden Form entstandenes *Glied* einer einmaligen (zweimaligen) Überschiebung über eine zerfallende Form wird selbst eine zerfallende Form:

a) wenn die nächsthöheren Formen in der Formenreihe der zerfallenden Form zerfallen oder reduzibel werden, oder auch wenn bei einmaliger Faltung die Spezialisierungen $y = \widehat{uv}$ oder $v = \widehat{xy}$ eintreten;

b) wenn die übrigen einmaligen Faltungen auf höhere Formen führen (vgl. § 12, *B.* H_k und $H_k(k\eta x)$).

Ein solches Glied einer Überschiebung kann auch zerfallen:

c) wenn die übrigen einmaligen Faltungen auf niedrigere Formen führen, die unabhängig von der Faltung mit der zerfallenden Form zerfallen, d. h. sich ausdrücken lassen durch Produkte und durch die zu reduzierende Form, wobei man sich aber jeweils erst durch Rechnung überzeugen muß, daß der numerische Koeffizient des betreffenden Gliedes nicht identisch verschwindet. Es ist dies nichts weiter als „doppelte Reduktion" der niederen Form (vgl. § 23, *C.* $H_\vartheta\,(\theta H u)\,(\theta s u)$).

Zerfallende Formen entstehen durch alle einmaligen Faltungen mit Funktionalindetermanten*), außerdem durch gewisse höhere Faltungen. Es wird

$$(s\, t\, \widehat{yx})\, s_y = \frac{1}{2}\, t \cdot s_y^2 - \frac{1}{2}\, s \cdot t_y^2 + \frac{1}{2}\,(s\, t\, \widehat{yx})^2,$$

$$(s\, t\, \widehat{yx})\, s_y^2 = \frac{1}{3}\, t \cdot s_y^3 - \frac{1}{3}\, s \cdot t_y^3 + s_y\,(s\, t\, \widehat{yx})^2 - \frac{1}{3}\,(s\, t\, \widehat{yx})^3.$$

Analoge Formeln gelten für die dualistischen Formen

$$(\sigma\tau\, \widehat{vu})\, v_\sigma \quad \text{und} \quad (\sigma\tau\, \widehat{vu})\, v_\sigma^2.$$

*) vgl. *Gordan*, a. a. O. § 3.

Nach den Sätzen dieses Paragraphen ergibt sich für die Aufstellung aller irreduziblen Formen, die aus der Faltung von S mit T entstehen, folgende Regel:

Man gehe, bei den niedrigsten Faltungen beginnend, auf beliebigem, vorher festgelegtem Wege (z. B. zeilenweise oder symmetrisch zum Diagonalglied) so weit in der Bildung der Formenreihe ST voran, bis man an eine Form gelangt, die einen Reduzenten zum Faktor hat. Die durch diese Form definierte Formenreihe ist auszulassen, sobald die Schlußform die in Satz II aufgestellte Bedingung erfüllt. Nach Ausscheidung aller reduziblen Formenreihen sind durch Anwendung der doppelten Reduktion alle übrigen reduziblen, ebenso alle zerfallenden Formen zu entfernen. Stellen der Gesamtformenreihe, die durch unabhängig voneinander reduzible Formenreihen doppelt überdeckt sind, geben Anlaß zur Reduktion von höheren Formen (vgl. § 11, D).

Kapitel II. Relativ vollständige Grundsysteme.

§ 4. *Erstes relativ vollständiges System.*

Wir beschränken uns im folgenden auf die biquadratische Form, mit Ausnahme des ersten Satzes. Doch lassen sich, bei passender Wahl der Moduln, die Resultate der §§ 5 und 6 leicht auf Formen höheren Grades übertragen, ebenso wie sie für die kubische Form gelten*).

Man erhält ein erstes relativ vollständiges System für Formen beliebigen Grades nach dem bekannten Satze:

---

*) Für die kubische Form lauten die entsprechenden, analog abgeleiteten Formeln:

$$(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 = \frac{1}{3}(sxy)(sxz)(syz) + \frac{2}{3}\Delta_x \Delta_y \Delta_z \cdot (xyz), \qquad \text{(IV.)}$$

$$s = (abc)(abu)(acu)(bcu), \qquad \Delta = (abc)^2\, a_x b_x c_x,$$
$$t = \Delta_\vartheta (\Delta\theta u)^2 u_\vartheta = \theta_s^2 u_s u_\vartheta^2, \qquad T = a_t^3.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} & (a\theta u)^2 = \frac{1}{3} u_x s, & \\ a_\vartheta = \frac{1}{3} u_x \cdot \Delta, & a_\vartheta (a\theta u) = 0, & a_\vartheta (a\theta u)^2 = s, \\ & a_\vartheta^2 = \Delta, & a_\vartheta^2 (a\theta u) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.)$$

Satz III. *Die aus dem binären Gebiet übernommenen Formen, d. h. diejenigen Formen, die aus den Systemformen der entsprechenden binären Form nach dem Clebschschen Übertragungsprinzip durch Ränderung entstehen, bilden ein relativ vollständiges System mod (abc).*

Beweis: Einer binären Relation, die aussagt, daß die Formen $Q'_1, \dots Q'_n$ ein vollständiges System einer binären Grundform bilden:

$$Q' - F(Q') = 0 = \sum_\lambda \{(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x\}\varphi_\lambda{}^{*})$$

entspricht durch Ränderung die ternäre Relation:

$$Q - F(Q_i) = \sum_\lambda u_x \cdot (abc)\varphi_\lambda .$$

Dies ist aber die Definitionsgleichung für ein relativ vollständiges System mod (abc). Für die biquadratische Form besteht das System der übernommenen Formen aus folgenden Formen:

$$f = a_x^4;\quad \theta = \theta_x^4 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2;\quad K = K_x^6 u_k^3 = (a\theta u)\, u_\vartheta^2 a_x^3 \theta_x^3;$$
$$j = u_j^6 = (a\theta u)^4 u_\vartheta^2;\quad \nu = u_\nu^4 = (abu)^4,$$

unter denen die vier ersten ein relativ vollständiges System mod $((abc), \nu)$ bilden.

§ 5. *Zurückführung des Moduls (abc) auf die Moduln Δ und ν.*

Der nur durch einen Klammerfaktor gegebene Modul (abc) ist in Übereinstimmung mit der Definition (§ 3, a) auf Formen des Systems zurück-

---

$$a_s^2 a_x u_s = \frac{1}{3} a_s^3 \cdot u_x = \frac{1}{3} S \cdot u_x. \quad (2.)$$

$$\left.\begin{aligned}(a\Delta u)^2 &= a_s - \frac{S}{6} u_x^2,\\ (a\Delta u)^3 &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

$$\left.\begin{aligned}\theta(s) &= (s\,s_1\,x)^2 = 2a_t + \frac{1}{3} S\cdot\theta - \frac{1}{3} T u_x^2,\\ \theta(t) &= (t t_1 x)^2 = -\frac{1}{3} S\cdot a_t + \frac{2}{3} T\cdot a_s + \frac{1}{18} S^2\cdot\theta - \frac{1}{18} u_x^2 \cdot S \cdot T.\end{aligned}\right\} \quad (4.)$$

Reihe der Moduln: (abc); Δ; s; t (das System des Moduls t besteht aus der einzigen Form t).

*) *Gordan-Kerschensteiner*, a. a. O. S. 134.

zuführen. In anderen Worten: die Formenreihe (abc) ist eindeutig zu normieren (vgl. § 1).

Es wird sich zeigen, daß die Formen:

$$\varDelta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad \nu = (abu)^4$$

als Modul genügen, d. h. daß die Formen

$$\varDelta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad a_\nu = (abc)(bcu)^3 a_x^3, \quad a_\nu^2 = (abc)^2 (bcu)^2 a_x^2, \quad i = a_\nu^4 = (abc)^4$$

die Formenreihe (abc) definieren.

In der Formenreihe a_ν fehlt die Form a_ν^3 nach der Identität:

$$a_\nu^3 = (abc)^3 a_x (bcu) = \frac{1}{3} u_x \cdot (abc)^4 = \frac{1}{3} i \cdot u_x.$$

Zur Zurückführung eines Moduls auf einen höheren haben wir nach der Definition die allgemeinsten Faltungen oder auch alle speziellen in Betracht kommenden Faltungen mit dem Modul auf Faltungen mit dem höheren Modul zurückzuführen.

Die allgemeinsten Faltungen entstehen in unserm Fall aus den Ausdrücken:

$$(abc)\, a_x^3 b_y^3 c_z^3, \quad (abc)\, a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x$$

(aus den kubischen Formen übernommen),

$$(abc)\, a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2$$

(aus den quadratischen Formen übernommen) und durch Polarisation dieser Ausdrücke.

Zur Berechnung dieser Ausdrücke durch die Polaren von $\varDelta$ und der Formenreihe a_ν, bzw. deren Anfangsglieder, schlagen wir, wie in § 2, den indirekten Weg ein. Wir entwickeln die Polarenglieder

$$(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2, \quad a_\nu (\nu xy)(\nu yz)(\nu zx)\, a_x a_y a_z = (abc)(bc\widehat{xy})(bc\widehat{yz})(bc\widehat{zx})\, a_x a_y a_z \text{ usw.}$$

als lineare Aggregate von Ausdrücken mit dem symbolischen Faktor (abc) und erhalten durch Umkehrung des Gleichungssystems die gesuchten Relationen, sowie eine Relation zwischen den nach verschiedenen Kombinationen der Variablen genommenen Polaren. Zur Auswertung dient der Identitätssatz und der Produktsatz für Determinanten.

Das Gleichungssystem lautet für $(abc)a_x^3 b_y^3 c^3$:

1) $\sum_3 a_\nu (\nu y z)^3 a_x^3 = 6(abc) a_x^3 b_y^3 c_z^3 - 6\sum_3 (abc) a_x^3 b_y^2 b_z c_z^2 c_y$ *),

2) $$3(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2 \cdot (xyz) - \frac{1}{2}\sum_3 a_\nu^2 (\nu y z)^2 a_x^2 \cdot (xyz) = 2\sum_3 (abc) a_x^3 b_y^2 b_z c_z^2 c_y - 4\sum_3 (abc) a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x,$$

3) $$a_\nu (\nu x y)(\nu y z)(\nu z x) a_x a_y a_z = 2\sum_3 (abc) a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x,$$

4) $$\sum_3 a_\nu (\nu y z)^3 a_x^3 - \frac{3}{2}\sum_3 a_\nu^2 (\nu y z)^2 a_x^2 \cdot (xyz) + \frac{1}{6} i \cdot (xyz)^3 = 6\sum_3 (abc) a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x.$$

Daraus folgt für $(abc)a_x^3 b_y^3 c_z^3$, und durch analoge Rechnung für $(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x$, $(abc) a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2$:

$$(abc) a_x^3 b_y^3 c_z^3 = \frac{3}{2}(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2 \cdot (xyz) + \frac{3}{2} a_\nu (\nu x y)(\nu y z)(\nu z x) a_x a_y a_z - \frac{1}{12} i \cdot (xyz)^3,$$

(IV.) $$(abc) a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x = \frac{2}{3}(abc)^2 a_x^2 b_y b_x c_z c_x \cdot (xyz) + \frac{1}{3} a_\nu (\nu x y)(\nu y z)(\nu z x) a_x^3 - \frac{1}{6} a_\nu^2 (\nu x y)(\nu z x) a_x^2 \cdot (xyz),$$

$$(abc) a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2 = \frac{1}{6}(abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 \cdot (xyz).$$

Wir haben somit ein relativ vollständiges System mod (Δ, ν) erhalten, bestehend aus den vier Formen: f, θ, K, j.

Es folgt daraus: Alle nicht aus dem binären Gebiet übernommenen Überschiebungen von f über θ, ebenso wie die im Binären auf $(ab)^4$ reduzible Überschiebung $(a\theta u)^2$ lassen sich ausdrücken durch Symbole Δ und ν.

---

*) $\sum_3$ bezieht sich auf die durch zyklische Vertauschung der Variablen aus dem Anfangsglied entstehende Summe über drei Glieder. Die Gleichungen gelten auch einzeln für jedes Glied der Summe.

Wir erhalten die für das Folgende grundlegenden Reduktionsformeln, durch Spezialisierung von Entwicklung IV, oder kürzer durch direkte Rechnung (Vertauschen der Symbole), für $a_\vartheta(a\theta u)^2$, $a_\vartheta^2(a\theta u)^2$, $(a\theta u)^2$ nach folgendem Ansatz:

$$a_\vartheta(a\theta u)^2 = (abc)(bcu)(abu)^2 - \frac{1}{3}(abc)(bcu)\{(bcu)a_x - u_x\cdot(abc)\}^2,$$

$$a_\vartheta^2(a\theta u)^2 = (abc)^2(abu)^2 - \frac{1}{3}(abc)^2\{(bcu)a_x - u_x\cdot(abc)\}^2$$

für $(a\theta u)^2$ *): $(abu)a_y^3 b_x^3 = \frac{3}{2}u_\vartheta(\vartheta y x)\theta_y^2 + \frac{1}{4}(\nu y x)^3,$

$$(abu)(acu)^3 b_x^3 = \frac{3}{2}u_\vartheta(\vartheta \widehat{au} x)(\theta a u)^2 + \frac{1}{4}(\nu \widehat{au} x)^3:$$

(1.)

$$\underline{a_\vartheta} = \frac{1}{3}u_x\cdot\Delta \quad \left|\begin{array}{l} \underline{(a\theta u)^2} = \frac{1}{6}\nu\cdot f - \frac{2}{3}u_x\cdot a_\nu + \frac{2}{3}u_x^2\cdot a_\nu^2 - \frac{i}{18}u_x^4 \\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)} = 0 \\ \underline{a_\vartheta^2} = \Delta \end{array}\right| \text{✻}$$

$$\text{✻}\left|\begin{array}{l} \underline{(a\theta u)^3} = 0 \\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)^2} = -\frac{5}{6}a_\nu + \frac{7}{6}u_x\cdot a_\nu^2 - \frac{i}{9}u_x^3 \\ \underline{a_\vartheta^2(a\theta u)} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \underline{(a\theta u)^4} = j \\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)^3} = 0 \\ \underline{a_\vartheta^2(a\theta u)^2} = \frac{2}{3}a_\nu^2 - \frac{i}{9}u_x^2 \end{array}$$

Wir nehmen dazu die ebenfalls aus der Reduktion des Moduls (abc) entstandene Formel:

(2.) $$a_\nu^3 a_x u_\nu = \frac{1}{3}i\cdot u_x.$$

Aus den Formeln (1.) *und* (2.) *und den für die Grundform* ν *analog gebildeten Formeln leiten sich alle späteren Reduktionsformeln durch Polarisation ab,* ausgenommen die Relationen für die zerfallenden Formen. Aus den Formeln (1.) sehen wir:

*) *Gordan-Kerschensteiner,* a. a. O. S. 92.

Es führt die Formenreihe: $a_\vartheta (a\theta u)^2$ auf Symbole ν allein,

a_ϑ auf Symbole Δ und ν,

$(a\theta u)^2$ auf Symbole j, Δ und ν,

$(a\theta u)^2$ bei Faltung I auf Symbole j und ν,

$(a\theta u)^2$ bei Faltung II auf Symbole Δ und ν.

Wir können also ersetzen:

1) mod (Δ, ν): Faltungen mit j durch entsprechende mit $(a\theta u)^2$ oder $(a\theta u)^3$;

2) mod (ν): Faltungen mit Δ durch entsprechende mit a_ϑ oder $a_\vartheta(a\theta u)$ oder auch durch spezielle mit $(a\theta u)^2$ (die nur zu einmaliger Faltung I führen).

Es wird insbesondere:

$$(a\theta u)^2 a_y^2 \theta_x^2 = \frac{1}{3}(jyx)^2 \bmod \nu, \qquad (a\theta u)^2 a_y \theta_y = -\frac{1}{6}(jyx)^2 \bmod \nu,$$

$$(a\theta u)^2 v_\vartheta^2 = \frac{1}{3}(\Delta uv)^2 \bmod \nu, \qquad (a\theta u)(a\theta v) u_\vartheta v_\vartheta = -\frac{1}{6}(\Delta uv)^2 \bmod \nu,$$

$$(a\theta u)^2 a_y v_\vartheta^2 = \frac{1}{3}(\Delta uv)^2 \Delta_y \bmod \nu.$$

§ 6. *Zurückführung des Moduls (Δ, ν) auf den Modul (ν).*

Die Reduktionsformeln des letzten Paragraphen geben uns das Mittel, direkt das relativ vollständige System mod ν aufzustellen; wir werden sehen, daß wir dem System der übernommenen Formen nur die Formen Δ und $(a\Delta u) = N$ beizufügen haben (analog wie bei der kubischen Form und überhaupt allgemein gültig).

Wir betrachten zur Reduktion des Moduls Δ alle speziellen in Betracht kommenden Faltungen, d. h. die Faltungen des relativ vollständigen Systems mod (Δ, ν) mit dem System von Δ, und gehen aus von den in den Koeffizienten niedrigsten Formen, den Faltungen von f mit Δ.

Zur Reduktion der Formen $(a\varDelta u)^2$, $(a\varDelta u)^3$, $(a\varDelta u)^4$ ersetzen wir nach § 5 die Symbole $\varDelta$ durch niedrigere Formen der Formenreihe, d. h. wir entwickeln die Ausdrücke

$$a_\vartheta b_\vartheta (b\theta u)^2, \quad a_\vartheta (a\theta u) b_\vartheta (b\theta u)^2, \quad a_\vartheta (a\theta u)\, b_\vartheta (b\theta u)^3$$

1) nach Polaren der Formenreihe a_ϑ (Symbole $\varDelta$ und ν),

2) nach Polaren der Formenreihe $b_\vartheta (b\theta u)^2$ (Symbole ν)

und erhalten die Reduktionsformeln (Rechnung siehe unten):

$$\text{a)}\quad \underline{(a\varDelta u)^2} = \frac{1}{2}(\vartheta\nu x)^2 - \frac{2}{5} f\cdot a_\nu^2 - \frac{4}{5} u_x \cdot \theta_\nu (\vartheta\nu x)^2 + u_x^2 \left\{\frac{1}{6} i f - \frac{1}{40} s\right\},$$

$$(3.)\quad \text{b)}\quad \underline{(a\varDelta u)^3} = -\frac{3}{10}\theta_\nu (\vartheta\nu x),$$

$$\text{c)}\quad \underline{(a\varDelta u)^4} = \frac{21}{10}\theta_\nu^2 - \frac{3}{10} H - \frac{6}{5} u_x \cdot \theta_\nu^3 + \frac{1}{10} u_x^2 \cdot \varrho.$$

(Zu den gleichen Resultaten führt auch die doppelte Reduktion der Ausdrücke $a_\vartheta^2 (b\theta u)^2$, $a_\vartheta^2 (b\theta u)^3$, $a_\vartheta^2 (a\theta u)^2 (b\theta u)^2$ und $a_\vartheta^2 (a\theta u)(b\theta u)^3$ nach Elimination von a_j^2).

Aus den Formeln (3.) folgt, daß $(a\varDelta u)^2$ Reduzent ist in bezug auf den Modul ν. Daraus ergibt sich:

1) Die Reduktion des Systems von $\varDelta$: Die Formenreihe $(\varDelta\varDelta' u)^2 \equiv a_\vartheta^2 (a\varDelta u)^2$ hat den Reduzenten $(a\varDelta u)^2$ zum Faktor.

2) Die Reduktion des durch Faltung mit dem Modul $\varDelta$ entstandenen Systems:

Die Formenreihe $(\theta\varDelta u)^2$ hat den Reduzenten $(a\varDelta u)^2$ zum Faktor.

Für die Formen $(\theta\varDelta u)$ und $\varDelta_\vartheta$ ergibt sich:

$$(a\varDelta u)^2 (a b u) = (\theta\varDelta u) - u_x \cdot \varDelta_\vartheta (\theta\varDelta u),$$

$$(a\varDelta u)(a\varDelta b) = -\frac{1}{2}\varDelta_\vartheta + \frac{1}{2} u_x \cdot \varDelta_\vartheta^2.$$

Aus dem Reduzenten $(\theta\varDelta u)$ folgt aber die Reduktion des durch Faltung mit dem Modul $\varDelta$ entstehenden Systems.

Das relativ vollständige System mod ν besteht also aus den sechs Formen:

$$f,\ \theta,\ K,\ j,\ \Delta,\ N.$$

Als Beispiel zur Reihenentwicklung in § 2 geben wir die Ableitung der Formel (3.)a ausführlich, bei späteren Rechnungen soll direkt die Schlußformel III aufgestellt werden. (Polaren verschwindender Formen sind schon während der Rechnung ausgelassen; die erste Zeile gibt die nach Entwicklung II eingetragenen Werte, die zweite Zeile die, mit der letzten Gleichung des Systems beginnend, rekurrierend gefundenen Schlußwerte.)

Es folgt nach Entwicklung II:

1) $m=3.\quad n=4.\quad \lambda=2.\quad \mu=0.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta b_\vartheta (b\theta u)^2} = [a_\vartheta]_{\widehat{u b^2}}\, b + \frac{6}{7}\left\{a_\vartheta b_\vartheta (a\theta u)(b\theta u) - u_x \cdot a_\vartheta b_\vartheta (a\theta b)(b\theta u)\right\}$$

$$-\frac{1}{7}\left\{a_\vartheta (a\theta u)^2 b_\vartheta - 2u_x \cdot a_\vartheta (a\theta u)(a\theta b)\, b_\vartheta + u_x^2 \cdot a_\vartheta (a\theta b)^2 b_\vartheta\right\}$$

$$= \frac{2}{3}(a\Delta u)^2 + \frac{1}{5}[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{30} f\cdot [a_\vartheta^2 (a\theta u)^2] - \frac{2}{5} u_x \cdot [a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^2$$

$$-\frac{1}{15} u_x \cdot [a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{5} u_x^2 \cdot [a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^3 + \frac{1}{30} u_x^2 \cdot [a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b^2.$$

2) $m=2.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta (a\theta u)\, b_\vartheta (b\theta u)} = \frac{2}{5}\left\{a_\vartheta (a\theta u)^2 b_\vartheta - u_x \cdot a_\vartheta (a\theta u)(a\theta b)\, b_\vartheta\right\} + \frac{1}{2} a_\vartheta^2 (b\theta u)^2$$

$$-\frac{1}{5}\left\{a_\vartheta^2 (b\theta u)(a\theta u) - u_x \cdot a_\vartheta^2 (a\theta b)(b\theta u)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(a\Delta u)^2 + \frac{2}{5}[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{15}[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\cdot f$$

$$-\frac{2}{5} u_x \cdot [a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^2 - \frac{1}{10} u_x \cdot [a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{30} u_x^2 \cdot [a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b^2.$$

3) $m=2.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=1.\quad \varkappa=2.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta b)\, b_\vartheta(b\theta u)} = \frac{2}{5}\{a_\vartheta(a\theta b)(a\theta u)\, b_\vartheta - u_x\cdot a_\vartheta(a\theta b)^2\, b_\vartheta\}$$

$$= \frac{2}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b^2 + \frac{1}{30}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b - \frac{2}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b^3$$

$$- \frac{1}{30}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b^2.$$

4) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta u)^2\, b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b + \frac{2}{3}a_\vartheta^2(a\theta u)(b\theta u)$$

$$= [a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{6}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - \frac{1}{6}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b.$$

5) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=1.\quad \varkappa=2.\quad (\varkappa>\nu).$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta u)(a\theta b)\, b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b^2 + \frac{1}{3}a_\vartheta^2(a\theta b)(b\theta u)$$

$$= [a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b^2 + \frac{1}{12}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b - \frac{1}{12}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b^2.$$

6) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=1.\quad \varkappa=3.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta b)^2\, b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\, b^3.$$

7) $m=2.\quad n=4.\quad \lambda=2.\quad \mu=\nu=\varkappa=0.$ (Nach Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(b\theta u)^2} = [a_\vartheta^2]_{\widehat{ub^2}} + \frac{1}{10}\{[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - 2\,u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b + u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b^2\}.$$

8) $m=1.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=\varkappa=0.$ (Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(a\theta u)(b\theta u)} = \frac{1}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - \frac{1}{4}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b.$$

9) $m=1.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=\varkappa=1.\quad \nu=0.$ (Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(a\theta b)(b\theta u)} = \frac{1}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b - \frac{1}{4}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\, b^2.$$

Aus 1) und 4) folgt:

$$(a\Delta u)^2 = \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b + \frac{1}{5}f\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2] + \frac{3}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^2 - \frac{3}{20}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b$$

$$-\frac{3}{10}u_x^2\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^3 - \frac{1}{20}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2,$$

$$(a\Delta u)^2 = -a_\nu b_\nu + \frac{3}{5}f\cdot a_\nu^2 + \frac{4}{5}u_x\cdot a_\nu^2 b_\nu - \frac{3}{20}u_x^2\cdot a_\nu^2 b_\nu^2 - \frac{1}{12}u_x^2\cdot i\cdot f.$$

(Zur Umrechnung in Symbole θ vgl. § 8 und 9.)

Formel (3.)a ließe sich noch kürzer durch direkte Übertragung von Entwicklung I unter Einführung der Hilfsvariablen $w = x\widehat{ub}$ berechnen, während schon bei Formel (3.)b und (3.)c der von uns eingeschlagene Weg der einfachere wird; bei (3.)b weiß man im voraus, nach § 9, daß alle Glieder mit dem Faktor u_x auszulassen sind. Man erhält zur Berechnung von (3.)b und (3.)c:

(3.)b) 1) $a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta\,(b\theta u)^2 = \frac{1}{2}(a\Delta u)^3 + \frac{4}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}}\,b + \frac{77}{360}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}},$

2) $a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta\,(b\theta u)^2 = [a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}}\,b + \frac{13}{36}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}};$

(3.)c) 1) $a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta\,(b\theta u)^3 = \frac{1}{2}(a\Delta u)^4 + \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b + \frac{53}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}$

$-\frac{6}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b^2 - \frac{3}{5}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b + \frac{19}{120}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b^2,$

2) $a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta\,(b\theta u)^3 = \frac{3}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}.$

Nachbemerkung: Analog berechnen sich die nach § 5 reduziblen Überschiebungen von f über j. Es wird

(4.)
$$a_j = -\theta_\nu + u_x\cdot\left\{\frac{9}{2}\theta_\nu^2 - \frac{1}{2}H\right\} - 3u_x^2\cdot\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}u_x^3\cdot\varrho,$$

$$a_j^2 = \frac{21}{10}\theta_\nu^2 - \frac{3}{10}H - 2u_x\cdot\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}u_x^2\cdot\varrho,$$

$$(4.)\qquad \begin{aligned} a_j^3 &= -\frac{7}{10}\,\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}\,u_x\cdot\varrho, \\ a_j^4 &= \frac{3}{5}\,\varrho. \end{aligned}$$

Aus (3.) und (4.) folgt, durch Übertragung aus dem binären Gebiet, $(\theta\theta' u)^2 = \frac{1}{3} j\cdot f \bmod \nu$*). Die übrigen Formen der Formenreihe $(\theta\,\theta' u)^2$ und die Form θ'_ϑ sind reduzibel auf Symbole ν. Wir können also ersetzen:

mod ν: Faltungen mit $f\cdot j$ durch entsprechende mit $(\theta\theta' u)^2$.

Es wird ferner:

$$(\vartheta\,\vartheta' x)^2 = \frac{4}{3} f\cdot \varDelta. \qquad \theta_{\vartheta'}(\vartheta\,\vartheta' x) = -N.$$

Kapitel III. Das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t).

§ 7. *Überblick über die Bildung des Systems.*

Um von dem relativ vollständigen System mod ν zu dem relativ vollständigen System mit nächsthöherem Modul überzugehen, hat man nach der Definition § 3 das System von ν in bezug auf diesen höheren Modul zu bilden und mit den Formen des relativ vollständigen Systems mod ν zu falten. Nun aber steht $\nu = u_\nu^4$ als Kontravariante 4. Grades der Form f dualistisch gegenüber. Betrachten wir daher ν als Grundform, so erhalten wir ein relativ vollständiges System von sechs Formen mod $\nu(\nu) = (\nu\nu_1 x)^4 = s_x^4$.

Wir haben also zur Bildung des relativ vollständigen Systems mod s (System III) zu überschieben

System I: f, θ, K, j, $\varDelta$, N über

System II: ν, $H = (\nu\nu_1 x)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2$, $L = (\nu\eta x) H_x^2 u_\nu^3 u_\eta^3$, $g = (\nu\eta x)^4 H_x^2$, $\sigma = H_\nu^2 u_\nu^2 u_\eta^4$, $(\nu\sigma x)$.

Es wird sich zeigen (Formel (13.)), daß die Form g reduzibel ist, daß also System II nur aus fünf Formen besteht.

---

*) *Gordan-Kerschensteiner*, a. a. O. S. 181.

Im Laufe der Rechnung werden die quadratischen Formen

$$\varrho = u_\varrho^2 = \theta_\nu^4 u_\vartheta^2, \quad t = t_x^2 = a_\eta^4 H_x^2$$

als Moduln adjungiert, sodaß man ein relativ vollständiges System mod (s, ϱ, t) erhält; und zwar soll der Modul (ϱ, t) als höherer Modul als der Modul s gelten.

Die Anordnung der einzelnen Formen soll nach der Ordnung in den Koeffizienten erfolgen.

Wir normieren die Faltung

$$\theta_\eta (K_\eta, \theta_\iota, \ldots)$$

höher als die Faltung

$$H_\vartheta (H_k, L_\vartheta, \ldots).$$

Dadurch ist nach § 1 und § 3b die Reihenfolge der einzelnen Formen gleicher Ordnung eindeutig bestimmt.

Die Bildung der Formen gleicher Ordnung wird tabellarisch durchgeführt:

I. Angabe, welche Formen von System I und II miteinander zu falten sind, um die bestimmte Ordnung in den Koeffizienten zu erzielen.

II. Aufstellung der irreduziblen Formen nach dem Schema der Formenreihe.

III. Reduktion der reduziblen oder zerfallenden Formenreihen oder Formen, d. h. derjenigen Stellen, wo die Gesamtformenreihe abbricht, und dadurch der Nachweis, daß alle irreduziblen Bildungen mit den angegebenen erschöpft sind.

IV. Folgerungen, und zwar 1) Angabe neu entstandener Reduzenten, 2) Angabe derjenigen Formen, die nicht in Produkten mit Formen des gleichen Systems in Faltung mit Formen des andern Systems eingehen.

Es wird sich zeigen, daß nur auftreten:

1) Faltungen von je einer Form von System I mit einer Form von System II.

2) Faltungen von Potenzen von θ, bzw. H, oder von zwei Formen des einen Systems mit je einer Form des zweiten Systems.

Wir werden folgendes Schema zur Faltung erhalten:

System I		gefaltet mit	System II	
1. Ordnung	f		2. Ordnung	ν
2. „	θ		4. „	H
3. „	K, j, Δ		6. „	L, σ
4. „	$N, \theta^2, f\cdot j$		8. „	$(\nu\sigma x), H^2$
5. „	$\theta\cdot K$		10. „	$H\cdot L$
6. „	$\theta^3, \Delta\cdot j$		12. „	H^3.

Zur Kontrolle der Rechnung dienen, außer der „doppelten Reduktion“, die beiden speziellen Formen:

I. $f=\sum_3 x_1^3 x_2$. $\quad a_\nu^2=\frac{i}{6}u_x^2$. $\quad s=\frac{i}{3}f$. $\quad a_\eta^2=-\frac{1}{9}i\theta$. $\quad \Delta_\nu^2=\frac{i}{6}\theta$.
$\sigma=-\frac{i}{6}j$. $\quad g=-\frac{2}{3}i\Delta$. $\quad \varrho=0$. $\quad t=0$.

II. $f=\sum_3 x_1^4$. $\quad s=\frac{4}{3}if$. $\quad a_\eta^2=\frac{2}{9}i\theta$. $\quad \Delta_\nu^2=\frac{1}{15}i\theta$. $\quad \sigma=\frac{4}{3}ij$. $\quad g=\frac{4}{3}i\Delta$.
$\varrho=0$. $\quad t=0$.

Nachbemerkung: Den Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) entsprechen für die Grundform ν die folgenden:

$$(5.)\qquad \begin{array}{r|l|l}
 & \underline{H_\nu} = \frac{1}{3}u_x\cdot\sigma & \\
\underline{(\nu\eta x)^2} = A & \underline{H_\nu(\nu\eta x)} = 0 & \underline{H_\nu^2} = \sigma \\
\underline{(\nu\eta x)^3} = 0 & \underline{H_\nu(\nu\eta x)^2} = B & \underline{H_\nu^2(\nu\eta x)} = 0 \\
\underline{(\nu\eta x)^4} = g & \underline{H_\nu(\nu\eta x)^3} = 0 & \underline{H_\nu^2(\nu\eta x)^2} = C,
\end{array}$$

$$A=\frac{1}{6}s\cdot\nu-\frac{2}{3}u_x\cdot s_\nu+\frac{2}{3}u_x^2\cdot s_\nu^2-\frac{J}{18}u_x^4,$$
$$B=-\frac{5}{6}s_\nu+\frac{7}{6}u_x\cdot s_\nu^2-\frac{J}{9}u_x^3,$$
$$C=\frac{2}{3}s_\nu^2-\frac{J}{9}u_x^2.$$

$$(6.)\qquad s_\nu^3\,u_\nu s_x=\frac{1}{3}u_x\cdot s_\nu^4=\frac{1}{3}J\cdot u_x.$$

$$
(7.)\quad
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad (\nu\sigma x)^2 = \frac{1}{2}(Hsu)^2 - \frac{2}{5}\nu\cdot s_\nu^2 - \frac{4}{5}u_x\cdot s_\eta (Hsu)^2 + u_x^2\left\{\frac{1}{6}J\cdot\nu - \frac{1}{40}(ss'u)^4\right\},\\
&\text{b)}\quad (\nu\sigma x)^3 = -\frac{3}{10}s_\eta (Hsu),\\
&\text{c)}\quad (\nu\sigma x)^4 = \frac{21}{10}s_\eta^2 - \frac{3}{10}Z - \frac{6}{5}u_x\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{10}u_x^2\cdot s_\eta^4;
\end{aligned}
$$

$$
(8.)\quad
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad g_\nu = -s_\eta + u_x\left\{\frac{9}{2}s_\eta^2 - \frac{1}{2}Z\right\} - 3u_x^2\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x^3\cdot s_\eta^4,\\
&\text{b)}\quad g_\nu^2 = \frac{21}{10}s_\eta^2 - \frac{3}{10}Z - 2u_x\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x^2\cdot s_\eta^4,\\
&\text{c)}\quad g_\nu^3 = -\frac{7}{10}s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x\cdot s_\eta^4,\\
&\text{d)}\quad g_\nu^4 = \frac{3}{5}s_\eta^4.
\end{aligned}
$$

§ 8. *Formen dritter Ordnung (System III).*

Faltung von f mit ν.

Irreduzible Formen:

$$
\begin{array}{cccc}
a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & a_\nu^2 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & a_\nu^4 = i.
\end{array}
$$

Reduktion: $a_\nu^3 = \frac{1}{3} i\, u_x$ (Formel (2.)).

Folgerungen: 1) a_ν^3 ist Reduzent.

2) f tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen (j) in Faltung mit ν ein. Das Gleiche gilt für ν in bezug auf f.

§ 9. *Formen vierter Ordnung (System III).*

Faltung von θ mit ν.

Irreduzible Formen:

$$
\begin{array}{cccc}
(\vartheta\nu x) & \theta_\nu & \cdot & \cdot \\
(\vartheta\nu x)^2 & \theta_\nu(\vartheta\nu x) & \theta_\nu^2 & \cdot \\
\cdot & \theta_\nu(\vartheta\nu x)^2 & \cdot & \theta_\nu^3
\end{array}
$$

Reduktionen: Aus dem Reduzenten a_ν^3 durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $a_\nu^3(abu)$, $a_\nu^3 b_\nu$, $a_\nu^3 b_\nu(abu)$ nach dem Ansatz:

$$\theta_\nu^2(\vartheta\nu x) = a_\nu^2(\widehat{ab}\nu x)(abu) - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 x)^3 = a_\nu b_\nu(\widehat{ab}\nu x)(abu) + \frac{1}{6}(\nu\nu_1 x)^3$$
$$= a_\nu^3(abu) - a_\nu^2 b_\nu(abu) = 2\,a_\nu^2 b_\nu(abu) = \frac{2}{3}a_\nu^3(abu),$$

$$\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2 = a_\nu^2(\widehat{ab}\nu x)^2 - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 x)^4 = a_\nu b_\nu(\widehat{ab}\nu x)^2 + \frac{1}{6}(\nu\nu_1 x)^4$$
$$= i\cdot f - 2\,a_\nu^3 b_\nu + a_\nu^2 b_\nu^2 - \frac{1}{3}s = 2\,a_\nu^3 b_\nu - 2\,a_\nu^2 b_\nu^2 + \frac{1}{6}s = \frac{2}{3}i\cdot f - \frac{2}{3}a_\nu^3 b_\nu - \frac{1}{6}s,$$

$$\theta_\nu^3(\vartheta\nu x) = a_\nu^2 b_\nu(\widehat{ab}\nu x)(abu) = a_\nu^3 b_\nu(abu).$$

Es entstehen die Formeln:

$$(9.)\quad \begin{array}{l|l|l} \underline{\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)} = 0 & & \\ \underline{\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2} = \frac{4}{9}if - \frac{1}{6}s & \underline{\theta_\nu^3(\vartheta\nu x)} = 0 & \underline{\theta_\nu^4 u_\vartheta^2} = u_\varrho^2 = \varrho \end{array} \quad \text{(adj. Modul, § 7).}$$

Folgerungen: 1) $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$ ist Reduzent.

2) ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen (g) in Faltung mit θ ein.

§ 10. *Formen fünfter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} K,\ j,\ \varDelta & \text{mit } \nu, \\ f & \text{mit } H. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

	.	K_ν	.	.
A)	$(k\nu x)^2$	.	K_ν^2	.
	$(k\nu x)^3$	$K_\nu(k\nu x)^2$	.	.
	.	$K_\nu(k\nu x)^3$	.	. ,

B)	$(j\nu x)$ $(j\nu x)^2$ $(j\nu x)^3$ $\cdot$,	C)	$\varDelta_\nu$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$, $\cdot$

D)	(aHu)	$(aHu)^2$	$\cdot$
	a_η	$a_\eta(aHu)$	$a_\eta(aHu)^2$
	$\cdot$	a_η^2	$\cdot$ $\cdot$

Reduktionen:

A) Formenreihe K_ν^3: Reduzent a_ν^3.

Form $K_\nu^2(k\nu x)^2$: Reduzent $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$.

$(k\nu x)$, $K_\nu(k\nu x)$, $K_\nu^2(k\nu x)$ sind zerfallende Formen nach § 3.

B) Form $(j\nu x)^4 \equiv (\widehat{a\theta}\nu x)^4 = a_\nu^4\cdot\theta + \theta_\nu^4\cdot f - 4\,a_\nu^3\theta_\nu - 4\,a_\nu\,\{a_\nu\cdot\theta_x - (\widehat{a\theta}\,\nu x)\}^3$

$$+\,6\,a_\nu^2\,\{a_\nu\,\theta_x - (\widehat{a\theta}\nu x)\}^2 = \varrho\cdot f + \frac{5}{3}\,i\,\theta - 6\,a_\nu^2\,(\widehat{a\theta}\,\nu x)^2 + 4\,a_\nu\,(\widehat{a\theta}\,\nu x)^3,$$

$$(j\nu x)^4 = \varrho\cdot f + \frac{5}{3}\,i\,\theta\cdot \mathrm{mod}\,(\varDelta, \nu), \qquad \text{(vgl. § 5 Schluß).}$$

C) Form $\varDelta_\nu^4$: Reduzent θ_ν^4.

Formen $\varDelta_\nu^2$ und $\varDelta_\nu^3$: Reduzent a_ν^3 oder θ_ν^4 durch Ersetzen der Form $\varDelta$ durch niedere Formen der Formenreihe (§ 5 Schluß), d. h. durch doppelte Reduktion der Ausdrücke

$$a_\vartheta\,a_\nu^3, \quad a_\vartheta\,a_\nu^3\,\theta_\nu \text{ und } a_\vartheta\,\theta_\nu^4.$$

Die doppelte Berechnung von $\varDelta_\nu^3$ gibt Anlaß zur Reduktion der höheren Form a_η^3.

Reduktionsformeln:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \Delta_\nu^2 = \frac{3}{5}a_\eta^2 - \frac{3}{10}(asu)^2 + \frac{1}{3}\,i\theta + \frac{1}{5}\,u_x^2\cdot(2a_\varrho^2 - t)',\\ &\text{b)}\quad \Delta_\nu^3 = -\frac{3}{10}a_\varrho + \frac{3}{5}u_x\left\{\frac{13}{10}a_\varrho^2 - \frac{2}{5}t\right\},\\ &\text{c)}\quad \Delta_\nu^4 = a_\varrho^2 - \frac{2}{5}t. \end{aligned}$$

Ableitung der Formeln:

a) $$a_\vartheta a_\nu^3 = \frac{1}{3}\,i\theta = [a_\vartheta]_{\nu^3} + \frac{6}{7}[a_\vartheta^2]_{\nu^2} + \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2 + \frac{11}{30}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,\widehat{\nu x}^2$$
$$-\frac{6}{7}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_\nu^3 - \frac{1}{6}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2,$$
$$\frac{1}{3}\,i\theta = \Delta_\nu^2 - \frac{2}{3}u_x\cdot\Delta_\nu^3 - a_\nu a_{\nu_1}(\nu\nu_1 x)^2 + \frac{2}{5}a_\nu^2(\nu\nu_1 x)^2 + \frac{1}{5}u_x\cdot a_\nu^2 a_{\nu_1}(\nu\nu_1 x)^2;$$

b) $$a_\vartheta a_\nu^3\theta_\nu = 0 = [a_\vartheta]_{\nu^4} + \frac{9}{14}[a_\vartheta^2]_{\nu^3} + \frac{3}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2 + \frac{17}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2$$
$$-\frac{9}{14}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_{\nu^4} - \frac{1}{24}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$
$$0 = \frac{5}{6}\Delta_\nu^3 - \frac{1}{2}u_x\cdot\Delta_\nu^4 - \frac{1}{4}a_\eta^3 + \frac{1}{20}u_x\cdot a_\eta^4;$$

b′) $$a_\vartheta\theta_\nu^4 = a_\varrho = a_\vartheta\theta_\nu\{a_\nu - (a\theta\widehat{\nu x})\}^3$$
$$= -\frac{3}{2}[a_\vartheta^2]_{\nu^3} + \frac{3}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2 - \frac{37}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2$$
$$+\frac{3}{2}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_{\nu^4} + \frac{49}{120}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$
$$a_\varrho = -\frac{3}{2}\Delta_\nu^3 + \frac{3}{2}u_x\cdot\Delta_\nu^4 - \frac{11}{20}a_\eta^3 + \frac{7}{20}u_x\cdot a_\eta^4;$$

c) $$a_\vartheta^2\theta_\nu^4 = a_\varrho^2 = [a_\vartheta^2]_{\nu^4} + \frac{3}{5}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$
$$a_\varrho^2 = \Delta_\nu^4 + \frac{2}{5}a_\eta^4.$$

D) Reduktion von a_η^3 durch doppelte Reduktion von Δ_ν^3 (C).

Die übrigen Reduktionen durch Rechnung, die der in § 9 dualistisch entgegengesetzt ist.

Reduktionsformeln:

$$(11.)\quad \begin{array}{l|l} \underline{a_\eta^2(aHu)} = -\frac{1}{6}(asu)^3 & \underline{a_\eta^2(aHu)^2} = \frac{4}{9}i\nu - \frac{1}{6}(asu)^4, \\ \underline{a_\eta^3} = -a_\varrho + \frac{3}{5}u_x \cdot a_\varrho^2 + \frac{1}{5}u_x \cdot t, & \underline{a_\eta^3(aHu)} = 0, \\ & \underline{a_\eta^4} = t \text{ (als Modul adjungiert).} \end{array}$$

Folgerungen:

1) $(j\nu x)^4$, $\varDelta_\nu^2$, $a_\eta^2(aHu)$ sind Reduzenten.

2) ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung mit $K, j, \varDelta$ ein; das gleiche gilt von f in bezug auf H und von j in bezug auf ν, da $\theta_\nu(\vartheta\cdot j, \nu, x)^3$ nach § 11 B reduzibel wird.

§ 11. *Formen sechster Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta^2,\ f\cdot j,\ N \text{ mit } \nu, \\ \theta \qquad\qquad \text{mit } H. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A) $(\vartheta^2\nu x)^3$ $\cdot$ $\cdot$ $\theta_\nu(\vartheta^2\nu x)^3$,

B) $a_\nu(j\nu x)$ $\cdot$ $\cdot$ $a_\nu^2(j\nu x)$,

C) N_ν,

$$\text{D)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & (\theta Hu) & (\theta Hu)^2 & \cdot \\ (\vartheta\eta x) & \theta_\eta & H_\vartheta(\theta Hu),\ \theta_\eta(\theta Hu) & \theta_\eta(\theta Hu)^2 \\ (\vartheta\eta x)^2 & H_\vartheta(\vartheta\eta x),\ \theta_\eta(\vartheta\eta x) & \theta_\eta^2 & \theta_\eta^2(\theta Hu) \\ \cdot & \theta_\eta(\vartheta\eta x)^2 & \cdot & \cdot \end{array}$$

Reduktionen:

A) $(\vartheta^2\nu x)^4$ zerfällt nach Formel (3.)a:

$$(a\varDelta\widehat{\vartheta x})^2 = \frac{1}{2}(\vartheta^2\nu x)^4 - \frac{3}{5}f\cdot a_\nu^2(\nu\vartheta x)^2 = \frac{1}{3}\varDelta^2 + f\cdot\varDelta_\vartheta^2.$$

B) $a_\nu (j\nu x)^2$ zerfällt nach Formel (9.)a, indem wir nach § 6 Schluß $f \cdot j$ durch $(\theta\theta' u)^2$ ersetzen, und die Reduzibilität von θ'_ϑ beachten:

$$\frac{1}{3} a_\nu (j\nu x)^2 = (\widehat{\theta\theta'} \nu x)^2 \theta_\nu = \theta_\nu^3 \cdot \theta - \theta_\nu^2 \theta'_\nu = \theta_\nu^3 \cdot \theta + \theta_\nu^2 (\widehat{\vartheta\nu}\, \theta' u) = \theta_\nu^3 \cdot \theta - \frac{2}{3} \theta_\nu^3 \cdot \theta.$$

Formen $a_\nu (j\nu x)^3$ und $a_\nu^2 (j\nu x)^2$: Reduzent a_j und $(j\nu x)^4$:

$$a_\nu (j\nu x)^3 = a_j (j\nu x)^3 - (j\nu x)^3 (j\nu \widehat{au}),$$

$$a_\nu^2 (j\nu x)^2 = a_j^2 (j\nu x)^2 - 2\, a_j (j\nu x)^2 (j\nu \widehat{au}) + (j\nu x)^2 (j\nu \widehat{au})^2.$$

C) Formenreihe N_ν^2; Reduzent Δ_ν^2.
$(n\nu x)$ und $N_\nu (n\nu x)$ zerfallen als Überschiebung über Funktionaldeterminanten nach § 3.

D) *Übersicht über die Reduktionen:*

a) Formenreihe $\theta_\eta^2 H_\vartheta$: Reduzent $a_\eta^2 (aHu)$. (Führt auf Formen mit höheren Symbolen.)

b) Formenreihe $\theta_\eta H_\vartheta$: Reduzent $a_\eta^2 (aHu)$ durch doppelte Reduktion. (Führt auf Formen mit höheren Symbolen und auf höhere Formen der Gesamtformenreihe, d. h. auf die Formenreihe θ_η^2.) Wir betrachten an Stelle von $\theta_\eta H_\vartheta$ die Formenreihe $\theta_\eta (\vartheta \eta x) (\theta H u) = \theta_\eta H_\vartheta + \theta_\eta^2$, ersetzen darin die Symbole θ durch die niedere Form (abu), gelangen so zur doppelten Reduktion der Formenreihe $a_\eta^2 (aHu)(abu) = \theta_\eta H_\vartheta + \frac{3}{2} \theta_\eta^2$ mod s bis zur Endform $a_\eta^3 b_\eta (bHu)(abu) = \theta_\eta^3 H_\vartheta + \frac{1}{2} \theta_\eta^4$.

c) Formenreihe θ_η^3: Durch doppelte Reduktion derjenigen Formen, die zugleich den Formenreihen $\theta_\eta H_\vartheta$ und $\theta_\eta^2 H_\vartheta$ angehören — d. h. der Formen der Formenreihe $\theta_\eta^2 H_\vartheta$ — auf Formen mit höheren Symbolen einerseits, auf Formen mit höheren Symbolen und auf die höhere Formenreihe θ_η^3 andererseits.

d) Formen $\theta_\eta^2 (\vartheta \eta x)$, $\theta_\eta^2 (\vartheta \eta x)^2$, $\theta_\eta^3 (\vartheta \eta x)$: Durch doppelte Reduktion mittelst des Reduzenten a analog der Rechnung von § 9.

e) Formen $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ und $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$: Durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $\Delta_\nu^2(a\Delta u)^4$ und $(a\Delta\widehat{\nu x})^4$ mittelst der Reduzenten Δ_ν^2 und $(a\Delta u)^4$.

f) Formen H_ϑ und H_ϑ^2: Zerfallende Formen. Ergibt sich bei H_ϑ^2 durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $\Delta_\nu^2(a\Delta u)^2$ oder auch durch direkte Berechnung der Produkte $(a_\nu^2)^2$, $a_\nu^2\cdot b_{\nu_1}$ durch Formen des Systems. (Die analoge Berechnung von $(a_\nu)^2$ gibt eine Relation zwischen zerfallenden Formen.)

g) Reduktion höherer Formen dadurch, daß Formen der Formenreihe $\theta\cdot H$ zwei Reduktionsmöglichkeiten zulassen (zwei reduziblen Formenreihen angehören) und zwar:

g durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$: läßt Reduktion d) und e) zu;

$s_\vartheta^2(\theta s u)$ durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^3(\vartheta\eta x)$: läßt Reduktion c) und d) zu

$s_\vartheta^2(\theta s u)^2$ durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$: läßt Reduktion a) zu und hat Reduzent $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$ zum Faktor;

s_ν^2 durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^3 H_\vartheta$: läßt Reduktion a) und c) zu.

Der Nachweis der Unabhängigkeit der übrigen Formen ergibt sich durch doppelte Reduktion der Formenreihe $\Delta_\nu^2(a\Delta u)^2 \equiv \theta_\eta^2$.

Ausführung der Reduktionen:

Die Existenz der Reduktionen a), b), c), d) ist a priori klar, da nach dem angegebenen Bildungsgesetz die bei der doppelten Reduktion entstehenden Relationen von einander unabhängig sind. Bei den Reduktionen e), f), g) ist durch Rechnung nachzuweisen, daß keine Identitäten entstehen.

Wir geben, symmetrisch zum Diagonalglied in der Formenreihe $\theta\cdot H$ bis zur Form θ_η vorangehend, teilweise mit Andeutung der Rechnung, auch die durch Reduktion a), b), c), d) gewonnenen Formeln, da sie zum Teil bei Reduktion e), f), g), zum Teil später Anwendung finden.

1) H_ϑ und H_ϑ^2 nach f). Nach dem Ansatz*)

$$a_\nu \cdot b_{\nu_1}^2 = \nu\cdot a_\nu b_\nu^2 - (aHu)(bHu)b_\eta \frown \nu\cdot a_\nu b_\nu^2 - f\cdot a_\eta (aHu)^2 - (abu)(aHu)b_\eta + (abu)^2 b_\eta,$$

$$a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 = b_{\nu_1}^2 \{a_{\nu_1} u_\nu - (a\widehat{\nu\nu_1}u)\}^2 \frown \nu\cdot a_\nu^2 b_\nu^2 - 2a_\eta b_\eta (aHu)(bHu) - \frac{1}{6}(asu)^2(bsu)^2$$

$$\frown \nu\cdot a_\nu^2 b_\nu^2 - 2a^2(aHu)(abu) - \frac{1}{6}(asu)^2(bsu)^2 + (\vartheta\eta x)^2(\theta Hu)^2$$

entstehen unter Eintragung des Wertes von $\theta_\eta H_\vartheta$ die Formeln:

$$(12.)\quad \begin{cases} \text{a)}\ H_\vartheta \frown 2a_\nu\cdot a_\nu^2 + 2\nu\cdot\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2 + 2f\cdot a_\eta(aHu)^2 - 2\theta_\eta, \\ \text{b)}\ H_\vartheta^2 \frown (a_\nu^2)^2 + 2\theta_\eta^2 + \frac{2}{3}(\theta su)^2 + \frac{1}{12}s\cdot\nu - \frac{1}{9}if\cdot\nu - \frac{1}{6}f\cdot(asu)^4. \end{cases}$$

2) $\theta_\eta H_\vartheta$ nach b):

$$a_\eta^2(aHu)(abu) \frown [a_\eta^2(aHu)]_{\widehat{bu}} + \frac{1}{2}f\cdot[a_\eta^2(aHu)^2] = a_\eta b_\eta(aHu)(abu)$$

$$+ a_\eta(\widehat{ab}\eta x)(abu)(aHu) \frown \theta_\eta(\vartheta\eta x)(\theta Hu) + \frac{1}{2}\theta_\eta^2 + \frac{1}{4}(\nu\eta x)^2.$$

Nach den Formeln (5.) und (11.) folgt:

$$\theta_\eta H_\vartheta \frown -\frac{3}{2}\theta_\eta^2 - \frac{1}{4}(\theta su)^2 - \frac{1}{12}s\cdot\nu + \frac{2}{9}if\cdot\nu.$$

3) $\theta_\eta H_\vartheta(\theta Hu)$ berechnet sich nach b) analog wie $\theta_\eta H_\vartheta$:

$$\theta_\eta H_\vartheta(\theta Hu) \frown -\theta_\eta^2(\theta Hu) - \frac{1}{6}(\theta su)^3.$$

4) $\theta_\eta H_\vartheta(\vartheta\eta x)$ nach b); $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$ nach d) (vgl. § 9):

$$\theta_\eta H_\vartheta(\vartheta\eta x) \frown -\theta_\eta^2(\vartheta\eta x) - \frac{1}{6}s_\vartheta(\theta su) \frown \frac{1}{3}(\vartheta\varrho x) - \frac{1}{6}s_\vartheta(\theta su),$$

$$\theta_\eta^2(\vartheta\eta x) \frown \frac{2}{3}a_\eta^3(abu) \frown -\frac{1}{3}(\vartheta\varrho x).$$

*) Das Zeichen $\frown$ an Stelle des Gleichheitszeichens bedeutet, daß Produkte aus u_x mit höheren Formen, als die durch Faltung III und IV entstehenden, ausgelassen sind.

5) $\theta_\eta H_\vartheta^2$ nach b), $\theta_\eta^2 H_\vartheta$ nach a),
aus $a_\eta^2(aHb)(bHu)$; aus $a_\eta^2(Hab)(abu)$;

$\theta_\eta^2 H_\vartheta$ nach b) und dadurch θ_η^3 nach c),
aus $a_\eta^3(bHu)(abu)$:

$$\theta_\eta H_\vartheta^2 \backsim -\frac{3}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta - \frac{1}{4}s_\vartheta(\theta s u)^2 + \frac{1}{6}s_\nu - \frac{4}{9}i\,a_\nu \backsim -\theta_\varrho - \frac{1}{6}s_\nu - \frac{1}{9}i\,a_\nu,$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta \backsim \frac{2}{3}\theta_\varrho - \frac{1}{6}s_\vartheta(\theta s u)^2 + \frac{2}{9}s_\nu - \frac{2}{9}i\,a_\nu,$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta \backsim \frac{2}{3}\theta_\varrho - \frac{2}{3}\theta_\eta^3 + \frac{5}{36}s_\nu \text{ und daraus}$$

$$\theta_\eta^3 \backsim \frac{1}{4}s_\vartheta(\theta s u)^2 - \frac{1}{8}s_\nu + \frac{1}{3}i\cdot a_\nu.$$

6) $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ nach e):

$$\Delta_\nu^2(a\Delta u)^4 = [(a\Delta u)^4]_{\nu^2} = -\frac{12}{5}\theta_\eta^2(\theta H u)^2 - \frac{3}{10}\sigma - \frac{1}{20}(\theta s u) + \nu\cdot\varrho$$
(nach Formel (3.) c),

$$\Delta_\nu^2(a\Delta u)^4 = [\Delta_\nu^2]_{\widehat{ua}}{}^4 = \frac{3}{5}\theta_\eta^2(\theta H u)^2 + \frac{1}{5}\sigma - \frac{3}{10}(\theta s u)^4 + \frac{1}{3}ij$$
(nach Formel (10.) a),

$$\theta_\eta^2(\theta H u)^2 = -\frac{1}{6}\sigma + \frac{1}{12}(\theta s u)^4 - \frac{1}{9}ij + \frac{1}{3}\nu\cdot\varrho.$$

7) $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$ nach d) und e). Daraus Reduktion der höheren Form g.

Nach analoger Rechnung wie in § 9 folgt:

$$\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 = \frac{1}{2}t\cdot f - \frac{1}{2}a_\eta^2 b_\eta - \frac{1}{12}g = \frac{2}{3}t\cdot f - \frac{2}{3}a_\eta^3 b_\eta - \frac{1}{6}g$$

$$= -\frac{1}{6}g - \frac{1}{3}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{4}{15}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{8}{15}f\cdot t \quad \text{(nach Formel (11.))}.$$

Nach entsprechender Rechnung wie oben folgt:

$$(a\varDelta\widehat{\nu x})^4 = [(a\varDelta u)^4]\widehat{\nu x}^4 = \frac{21}{10}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 + \frac{7}{10}s_\vartheta^2 - \frac{3}{10}g,$$

(nach Formel (3.) c),

$$(a\varDelta\widehat{\nu x})^4 = -\frac{1}{3}i\varDelta + 6[\varDelta_\nu^2]a^2 - 4[\varDelta_\nu^3]a + \varDelta_\nu^4\cdot f$$

$$= -\frac{36}{5}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 - \frac{9}{5}s_\vartheta^2 - \frac{3}{5}g - \frac{3}{5}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{5}{3}i\varDelta + \frac{37}{25}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{74}{25}f\cdot t,$$

(nach Formel (10.)):

$$\frac{93}{10}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 = -\frac{3}{10}g - \frac{5}{2}s_\vartheta^2 - \frac{3}{5}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{5}{3}i\varDelta + \frac{37}{25}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{74}{25}f\cdot t,$$

und durch Vergleichen der beiden Werte von $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$ nach g):

$$(13.)^*)\qquad 0 = g - 2s_\vartheta^2 + 2(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{4}{3}i\varDelta - \frac{4}{5}f\cdot a_\varrho^2 - \frac{8}{5}f\cdot t.$$

8) $\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u)$ nach a) und b), daraus $\theta_\eta^3(\theta H u)$ nach c) (Formen mit dem Faktor u_x verschwinden):

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u) = -\frac{1}{6}s_\vartheta(\theta s u)^3 - \frac{1}{3}(\nu\varrho x),$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u) = -\frac{1}{3}\theta_\eta^3(\theta H u) - \frac{1}{3}(\nu\varrho x),$$

$$\theta_\eta^3(\theta H u) = \frac{1}{2}s_\vartheta(\theta s u)^3.$$

9) $\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x)$ nach a) und b), daraus $\theta_\eta^3(\vartheta\eta x)$ nach c). $\theta_\eta^3(\vartheta\eta x)$ nach d), daraus Reduktion der höheren Form $s_\vartheta^2(\theta s u)$ nach g) (Formen mit dem Faktor u_x verschwinden):

---

*) Es ist dies die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnte Relation zwischen den drei Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades.

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x) = \frac{1}{3}(atu),$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x) = \frac{1}{3}(atu) + \frac{1}{3}\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) - \frac{1}{6}s_\vartheta^2(\theta s u),$$

$$\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) = \frac{1}{2}s_\vartheta^2(\theta s u),$$

$$\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) = \frac{2}{5}\theta_\varrho(\vartheta\varrho x) + \frac{1}{5}(atu):$$

$$s_\vartheta^2(\theta s u) = \frac{4}{5}\theta_\varrho(\vartheta\varrho x) + \frac{2}{5}(atu). \tag{14.}$$

10) $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$ **nach a) und durch Reduzent** $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$, $\theta_\eta^3 H_\vartheta$ **nach a) und c),** θ_η^4 **nach c), daraus Reduktion der höheren Formen** $s_\vartheta^2(\theta s u)^2$ **und** s_ν^2 **nach g):**

Nach a) $$\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = [a_\eta^2(aHu)^2]b^2 + \frac{1}{3}[a_\eta^4]_{\widehat{bu^2}} - \frac{1}{3}H_\nu^2(\nu\eta x)^2$$
$$= \frac{4}{9}i\cdot a_\nu^2 - \frac{1}{6}s_\vartheta^2(\theta s u)^2 - \frac{5}{18}s_\nu^2 + \frac{1}{3}(atu)^2 + \frac{1}{54}J\cdot u_x^2.$$

Durch $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$. $$\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = [\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2]_{\nu_1^2} + \frac{1}{3}[\theta_\nu^4]\widehat{\nu_1 x^2} - \frac{1}{3}s_\vartheta^2(\theta s u)^2$$
$$= \frac{4}{9}i\cdot a_\nu^2 - \frac{1}{6}s_\nu^2 - \frac{1}{3}s_\vartheta^2(\theta s u)^2 + \frac{1}{3}(\nu\varrho x)^2.$$

Nach a) $$\theta_\eta^3 H_\vartheta = -[a_\eta^2(aHu)]_{\widehat{bu}}b^2 - \frac{1}{2}[a_\eta^2(aHu)^2]b^2 - \frac{1}{3}[a_\eta^3]_{\widehat{bu^2}}b + \frac{1}{18}[a_\eta^4]_{\widehat{bu^2}}$$
$$+ \frac{1}{2}u_x\cdot[a_\eta^2(aHu)^2]b^3$$
$$= -\frac{2}{9}ia_\nu^2 + \frac{1}{12}s_\nu^2 + \frac{4}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{7}{90}(\nu\varrho x)^2 + \frac{1}{30}(atu)^2 + \frac{2}{27}i^2\cdot u_x^2 - \frac{1}{36}J\cdot u_x^2.$$

Nach *c)* $\theta_\eta^3 H_\vartheta$: $$a_\eta^3(Hab)(bHu) = \frac{1}{2}(atu)^2 = \theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u)(\vartheta\eta x) + \frac{1}{4}H_\nu^2(\nu\eta x)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = \frac{3}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 + \theta_\eta^3 H_\vartheta - u_x\cdot[a_\eta^2(aHu)^2]b^3 + \frac{1}{4}H_\nu^2(\nu\eta x)^2,$$

$$\theta_\eta^3 H_\vartheta = -\frac{2}{3} i\cdot a_\nu^2 + \frac{5}{12} s_\nu^2 + \frac{1}{2}(\nu\varrho x)^2 - \frac{1}{2}(atu)^2 + \frac{4}{27} i^2\cdot u_x^2 - \frac{1}{12} J\cdot u_x^2.$$

Nach c) $$\theta_\eta^4 = \frac{4}{9} i a_\nu^2 - \frac{1}{6} s_\nu^2 + \frac{16}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{14}{45}(\nu\varrho x)^2 + \frac{2}{15}(atu)^2.$$

Nach g) aus den zwei Werten für $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$:

$$(15.)\quad \begin{aligned} s_\vartheta^2(\theta s u)^2 &= \frac{2}{3} s_\nu^2 - 2(atu)^2 + 2(\nu\varrho x)^2 - \frac{1}{9} J\cdot u_x^2 \\ &= \frac{8}{9} i\cdot a_\nu^2 + \frac{8}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{14}{15}(atu)^2 + \frac{38}{45}(\nu\varrho x)^2 - \frac{4}{27} i^2\cdot u_x^2. \end{aligned}$$

Nach g) aus den zwei Werten für $\theta_\eta^3 H_\vartheta$:

$$(16.)\quad s_\nu^2 = \frac{4}{3} i\cdot a_\nu^2 + \frac{4}{5}\theta_\varrho^2 + \frac{8}{5}(atu)^2 - \frac{26}{15}(\nu\varrho x)^2 + \frac{1}{6} J\cdot u_x^2 - \frac{2}{9} i^2\cdot u_x^2.$$

Formel (16.) gibt die Grundlage zur Reduktion des Moduls $(ss'u)^4$, Formel (13.) zur Reduktion des Systems von s. (§ 17.)

Folgerungen:

1) $a_\nu(j\nu x)^3$, $\theta_\eta H_\vartheta$, $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$, $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ sind Reduzenten, $a_\nu(j\nu x)^2$, H_ϑ und H_ϑ^2 zerfallende Formen.

2) Die Form des Systems II: $j(\nu) = g = (\nu\eta x)^4 H_x^2$ ist reduzibel.

3) ν tritt, da die einzige kontragrediente Form g reduzibel wird, überhaupt nicht in Potenzen oder in Produkten mit Formen des gleichen Systems in Faltung mit System I ein.

θ tritt nur als Kontravariante betrachtet in Produkten oder Potenzen in Faltung ein, und entsprechend H als Kovariante betrachtet (vgl. § 13 B).

§ 12. *Formen siebenter Ordnung.*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta\cdot K \text{ mit } \nu, \\ K,\ j,\ \varDelta \text{ mit } H, \\ f \text{ mit } L,\ \sigma. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c|c|c}
\cdot & \cdot & (KHu)^2 & \cdot \\
\cdot & K_\eta & \cdot & K_\eta(KHu)^2 \\
(k\eta x)^2 & \cdot & K_\eta^2 & \cdot \\
(k\eta x)^3 & H_k(k\eta x)^2,\ K_\eta(k\eta x)^2 & \cdot & \cdot \\
\cdot & K_\eta(k\eta x)^3 & \cdot & \cdot
\end{array}\ ,$$

$$\text{C)}\quad \begin{array}{ccc}
(j\eta x) & H_j & \cdot \\
\cdot & H_j(j\eta x) & H_j^2,
\end{array} \qquad \text{D)}\quad \begin{array}{c}
(\varDelta Hu) \\
\varDelta_\eta,
\end{array} \quad \cdot$$

$$\text{E)}\quad \begin{array}{cccc}
\cdot & (aLu)^2 & (aLu)^3 & \cdot \\
a_l & \cdot & a_l(aLu)^2 & a_l(aLu)^3 \\
\cdot & a_l^2 & \cdot & \cdot
\end{array}\ .$$

Reduktionen:

A) $(\vartheta\cdot k,\, \nu,\, x)^4$ zerfällt als einmalige Überschiebung über die zerfallende Form $(\vartheta^2\nu x)^4$.

B) Formenreihe $H_k K_\eta$: Reduzent $H_\vartheta\,\theta_\eta$.
Formenreihe $K_\eta^2(KHu)$: Reduzent $a_\eta^2(aHu)$.
Formenreihe $K_\eta^2(k\eta x)$: Reduzent $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$.

Die daraus sich ergebende doppelte Reduktion der Formenreihe K_η^3 gibt Anlaß zur Reduktion der höheren Formenreihe $(j\eta x)^3$.

(KHu), $(k\eta x)$, $K_\eta(k\eta x)$ zerfallende Formen nach § 3.

$H_k(KHu)$, $K_\eta(KHu)$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $K_\nu(k\nu x)$ und der Funktionaldeterminante $K_\nu^2 \equiv \theta_\nu^2(a\theta u) \equiv a_\nu^2(a\theta u) \mod \nu^2$.

Der doppelten Darstellung von K_ν^2 entspricht eine Relation zwischen zerfallenden Formen.

Es wird:

$$H_k(KHu) = 2\,K_{\nu_1}(\nu\nu_1 k) = 2\,\theta_{\nu_1}(\nu\nu_1\widehat{a\theta}) = 2\,\theta_\nu^2\cdot a_\nu - a_\nu^2\cdot\theta_\nu + f\cdot\theta_\eta(\theta Hu)^2$$
$$- f\cdot\nu\cdot\theta_\nu^3 \text{ (Produktsatz) } \mod (\nu^3),$$

$$K_\eta(KHu) = -K_\nu^2(\nu\nu_1 x) = -a_\nu^2(a\theta u)(\nu\nu_1 x) = -\theta_\nu^2(a\theta u)(\nu\nu_1 x)$$

$$= a_\eta(aHu)^2\cdot\theta + a_\nu^2\cdot\theta_\nu = -\theta_\eta(\theta Hu)^2\cdot f - \theta_\nu^2\cdot a_\nu:$$

$$(17.)^{*)}\qquad 0 = a_\nu^2\cdot\theta_{\nu_1} + \theta_\nu^2\cdot a_{\nu_1} + f\cdot\theta_\eta(\theta Hu)^2 + \theta\cdot a_\eta(aHu)^2 \bmod (\nu^3).$$

Die Formen H_k, $H_k(k\eta x)$, H_k^2, $H_k^2(k\eta x)$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen H_ϑ und H_ϑ^2 (vgl. § 3. 2), a) und b)).

Es ist $H_k = H_\vartheta(a\theta u) \sim [H_\vartheta]_{\widehat{ua}} - f\cdot H_\vartheta(\theta Hu)$. (Spezialisierung $y = \widehat{uv}$ von 2) a).

$$H_k(k\eta x) = H_\vartheta a_\eta - H_\vartheta\theta_\eta\cdot f,\quad H_\vartheta a_\eta = \frac{5}{4}[H_\vartheta]\,a - \frac{1}{4}H_\vartheta a_\vartheta,\quad (\S\ 3.\ 2)\ \mathrm{b}).$$

$$H_\vartheta^2(a\theta u) = [H_\vartheta^2]_{\widehat{ua}},\quad H_\vartheta^2 a_\eta = [H_\vartheta^2]\,a = H_k^2(k\eta x) + H_\vartheta^2\theta_\eta\cdot f.$$

C) Formenreihe $(j\eta x)^3$: Reduzibel durch doppelte Reduktion der Formenreihe K_η^3 nach B); nach dem Ansatz:

$$0 = a_\eta^3(a\theta u) = \theta_\eta^3(a\theta u) = \{\theta_\eta + (\widehat{a\theta}\eta x)\}^3(a\theta u) - \theta_\eta^3(a\theta u)$$

$$= \frac{1}{2}(j\eta x)^3 \bmod (\nu^3, s, \varrho, t, \imath, J).\quad \text{(Vgl. § 5 Schluß.)}$$

Der analoge Ansatz gilt bis zur Schlußform der Formenreihe:

$$0 = H_\vartheta^2(\widehat{a\theta}\eta x)a_\eta^3 = H_\vartheta^2(\widehat{a\theta}\eta x)\theta_\eta^3 = \frac{1}{2}H_j^2(j\eta x)^4 \bmod (\nu^3, s, \varrho, t, i, J).$$

Form $(j\eta x)^2$: Zerfällt 1) durch zweimalige Polarisation der Relation für die zerfallende Form H_ϑ^2 ((12.) b);

2) durch direkte Berechnung des Produktes $a_\nu\cdot\theta_\nu^3$; dadurch Zerfallen der höheren Form $(\varDelta Hu)^2$. Es wird:

---

*) Produkte von Formen, unter denen eine Kontravariante ist, wie in diesem Fall $f\cdot\theta_\nu^3\cdot\nu$, sind bei allen Relationen zwischen zerfallenden Formen weggelassen, da sie bei der Anwendung der Formeln bei System s_{IV} keine Bedeutung haben.

$$(18.)\quad \left.\begin{aligned} &a)\ \tfrac{1}{3}(\varDelta Hu)^2+\tfrac{1}{3}(j\eta x)^2=\theta_\nu^2\cdot a_{\nu_1}^2,\\ &b)\ (j\eta x)^2=\tfrac{4}{3}\theta_\nu^3\cdot a_{\nu_1}\end{aligned}\right\}\ \text{mod}\ (\nu^3, s, \varrho, t, i, J)$$

nach dem Ansatz:

$$H_\vartheta^2(a\theta u)^2=\frac{1}{3}(\varDelta Hu)^2=2\,\theta_\eta^2(a\theta u)(aHu)+\theta_\nu^2\cdot a_{\nu_1}^2\ \text{(Produktsatz)}$$
$$=(a\theta u)(aHu)\{a_\eta-(\widehat{a\theta}\eta x)\}^2+\theta_\nu^2\cdot a_{\nu_1}^2,$$

$$a_{\nu_1}\cdot\theta_\nu^3=-(a\widehat{\nu\nu_1}u)\,\theta_\nu^2(\theta\widehat{\nu\nu_1}u)-\frac{1}{2}(a\widehat{\nu\nu_1}u)\theta_\nu\theta_{\nu_1}(\theta\widehat{\nu\nu_1}u)=-\frac{3}{2}\theta_\eta^2(\theta Hu)(aHu)$$
$$=-\frac{3}{2}\theta_\eta^2(\theta Hu)(a\theta u)=-\frac{3}{2}(a_\eta-(\widehat{a\theta}\eta x))^2\{(aHu)-(a\theta u)\}(a\theta u).$$

D) Formenreihe $\varDelta_\eta(\varDelta Hu)$: Reduzent $\varDelta_\nu^2$.
$(\varDelta Hu)^2$ zerfallende Form nach C).

E) Formenreihe $a_l^2(aLu)$: Reduzent $a_\eta^2(aHu)$.
Formen (aLu) und $a_l(aLu)$: Zerfallen als Überschiebungen über Funktionaldeterminanten nach § 3.

F) Formenreihe a_σ^3: Reduzent a_η^3.
Formen a_σ^2 und a_σ^3: Reduzent a_ν^3 und a_η^3 durch doppelte Reduktion der entsprechenden Ausdrücke

$$H_\nu a_\nu^3\ \text{und}\ H_\nu a_\eta^3,\ H_\nu a_\nu^3 a_\eta\ \text{und}\ H_\nu a_\eta^4$$
(vgl. § 10. C) Reduktion von $\varDelta_\nu^2$ und $\varDelta_\nu^3$).

Daraus Reduktion für die höheren Formen $a_\nu s_\nu(asu)^2$, $a_\nu^2 s_\nu(asu)^2$ und für Formen in Symbolen ϱ, $t(a_\nu a_\varrho^2)$ unter Berücksichtigung von (16.):

$$(19.)\quad \left.\begin{aligned} &a_\nu s_\nu(asu)^2=\frac{1}{3}i\theta_\nu^2-\frac{1}{18}iH,\\ &a_\nu^2 s_\nu(asu)^2=0.\end{aligned}\right\}\ \text{mod}\ (\varrho, t)$$

Form a_σ: Zerfällt durch Polarisation von (12.) b oder kürzer durch direkte Entwicklung des Produktes $a_\nu^2\cdot\theta_\nu^3$ nach dem Ansatz:

$$a_\nu^2\cdot\theta_{\nu_1}^3=a_\nu^2\theta_{\nu_1}\{a_{\nu_1}-(\widehat{a\theta}\nu_1 x)\}^2=-2\,a_\eta(aHu)(a\theta H)(\widehat{a\theta}\eta x)+(\widehat{a\theta}\nu_1 x)^2 a_\nu^2\theta_{\nu_1}$$

und unter Berücksichtigung der Reduktion von $Hj(j\eta x)^2$ (C):

$$a_\sigma = 2a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^3 \mod (s, \varrho, t, i). \tag{20.}$$

Folgerungen:

1) $(j\eta x)^3$, $\Delta_\eta(\Delta Hu)$, a_σ^2 sind Reduzenten, $(j\eta x)^2$, $(\Delta Hu)^2$, a_σ zerfallende Formen.

2) f tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung mit L ein, f und daher auch K und N überhaupt nicht in Faltung mit σ und folglich auch $(\nu\sigma x)$. j tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen, Δ überhaupt nicht in Produkten in Faltung mit H und L ein (folgt aus $\Delta_\eta(\Delta Hu)$ und $(\Delta Hu)^2$). Ebenso tritt σ und folglich $(\nu\sigma x)$ nicht in Produkten in Faltung mit irgendeiner Form von System I ein. Es bleiben an Produkten in System II, unter Berücksichtigung der Folgerungen in § 11, nur Potenzen von H und Produkte von H mit L.

§ 13. *Formen achter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von } \begin{cases} \Delta \cdot j \text{ mit } \nu, \\ \theta^2, f \cdot j, N \text{ mit } H, \\ \theta \text{ mit } L, \sigma. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A) $\Delta_\nu(j\nu x)$, B) $\begin{array}{ll} (\vartheta^2\eta x)^3 & \cdot \\ (\vartheta^2\eta x)^4 & H_\vartheta(\vartheta^2\eta x)^3,\ \theta_\eta(\vartheta^2\eta x)^3, \end{array}$

C) $\begin{array}{ll} (aHu)\,H_j & \cdot \\ \cdot & a_\eta(aHu)\,H_j, \end{array}$ D) $H_n;\ N_\eta$,

E) $\begin{array}{lllll} \cdot & \cdot & (\theta Lu)^2 & (\theta Lu)^3 & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota & \cdot & L_\vartheta(\theta Lu)^2,\ \theta_\iota(\theta Lu)^2 & \theta_\iota(\theta Lu)^3 \\ (\vartheta lx)^2 & \cdot & \theta_\iota^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota(\vartheta lx)^2 & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{array}$

Reduktionen:

A) $\Delta_\nu (j\nu x)^3$: Reduzent $a_\nu (j\nu x)^3$.

$\Delta_\nu (j\nu x)^2$ reduzibel durch die zerfallende Form $a_\nu (j\nu x)^2$ nach § 3. 2) b unter Berücksichtigung des Reduzenten $\theta_{\vartheta'}$. Denn nach § 11 B) wird:

$$\frac{3}{10}\Delta_\nu (j\nu x)^2 + \frac{3}{5} a_\nu (j\nu \vartheta) a_\vartheta (j\nu x) + \frac{1}{10} a_\nu (j\nu \vartheta)^2 = \frac{3}{5}\theta_\nu^3 \cdot \theta_{\vartheta''}'^2 + \frac{2}{5}\theta_\nu^3 \theta_{\vartheta''} \theta_{\vartheta''}'.$$

(Reduzent a_j und $\theta_{\vartheta'}$).

B) Die Formen $H_\vartheta (\vartheta' \eta x)^2$, $H_\vartheta^2 (\vartheta' \eta x)$, $H_\vartheta^2 (\vartheta' \eta x)^2$ zerfallen als entstanden durch sukzessive einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen H_ϑ und H_ϑ^2, bzw. $H_\vartheta a_\eta$ und $H_\vartheta^2 a_\eta$ nach § 3. 2) b) und nach der Relation:

$$H_\vartheta (\vartheta' \eta x)^2 = 2 H_\vartheta a_\eta^2 \cdot f - 2 H_\vartheta a_\eta b_\eta.$$

C) Formenreihe $a_\eta (j\eta x)^2$: Reduzenten a_j und $(j\eta x)^3$.

Form $a_\eta (j\eta x)$ zerfällt: Reduzent a_j und einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$ nach § 3, 2) a (Spezialisierung $y = uv$).

Form $a_\eta H_j$ zerfällt: 1) durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $a_\nu (j\nu x)^2$;

2) durch spezielle zweimalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$; daraus eine Relation zwischen zerfallenden Formen.

Aus $a_\nu (j\nu x)^2$: $0 = \theta_\nu^3 \cdot \theta_\nu + 2 a_\eta H_j \mod (s, \varrho, t, i, J)$.

Aus $(j\eta x)^2$: $0 = \theta_\nu^3 \cdot \theta_\nu - \frac{3}{2} a_\eta H_j \mod (s, \varrho, t, i, J)$

(Produkte mit Kontravarianten sind ausgelassen),

nach dem Ansatz:

$$0 = \frac{1}{2} a_\nu (abu)^2 \theta_\nu^3 + \frac{1}{2} a_\nu (abu)\, \theta_{\nu_1}^3 (\theta b u) - \frac{3}{4} (\widehat{j\eta} bu)^2 + \frac{3}{4} H_j (\widehat{j\eta} bu) - \frac{1}{8} f \cdot H_j^2$$

und Vertauschung der Symbole in $a_\nu (abu)(\theta bu)\theta_{\nu_1}^3$.

D) Formenreihe $N_\eta (NHu)$: Reduzent Δ_ν^2.

(NHu), $(n\eta x)$, $N_\eta (n\eta x)$, $H_n (NHu)$ zerfallende Formen (vgl. § 12 B), $(NHu)^2$ zerfällt durch einmalige Faltung mit der Form $(\Delta Hu)^2$.

E) Formenreihen $\theta_l L_\vartheta$, $\theta_l^2 (\theta Lu)^2$, $\theta_l^2 (\vartheta lx)$:

Reduzenten: $\theta_\eta H_\vartheta$, $\theta_\eta^2 (\theta Hu)^2$, $\theta_\eta^2 (\vartheta \eta x)$.

Formen (θLu), (ϑlx), L_ϑ, $L_\vartheta (\theta Lu)$, $\theta_l (\theta Lu)$, $L_\vartheta (\vartheta lx)$, $\theta_l (\vartheta lx)$, L_ϑ^2, $L_\vartheta^2 (\theta Lu)$, $\theta_l^2 (\theta Lu)$ zerfallen. (Den zerfallenden Formen von § 12 B) dualistisch entgegengesetzt).

F) Formenreihe $\theta_\sigma (\vartheta \sigma x)$: Reduzent a_σ^2.

Formen $(\vartheta \sigma x)$ und $(\vartheta \sigma x)^2$ zerfallen, als entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form a_σ; θ_σ durch zweimalige Faltung entstanden, zerfällt, da die Formenreihe $a_\nu^2 (a \theta u) \theta_{\nu_1}^3 \equiv H_j^2 (j \eta x) \equiv 0 \mod u$ lo (s, ϱ, t, i, J):

$$\theta_\sigma = a_\sigma (abu)^2 = a_\nu^2 (abu)^2 \cdot \theta_\nu^3.$$

Folgerungen: θ^3 oder $\theta^2 K$ tritt nicht in Faltung mit H ein; θ nur als Kontravariante betrachtet in Potenzen oder Produkten in Faltung mit L, überhaupt nicht in Faltung mit σ und $(\nu \sigma x)$.

N tritt nicht in Produkten in Faltung mit irgend einer Form von System II ein, ebensowenig wie mit Potenzen oder Produkten von Formen von System II. Es bleiben an Produkten in System I, unter Berücksichtigung der Folgerungen der letzten Paragraphen, nur Produkte $f \cdot j$, $\Delta \cdot j$, Potenzen von θ und Produkte von $\theta \cdot K$.

§ 14. *Formen neunter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta \cdot K \text{ mit } H, \\ K, j, \Delta \text{ mit } L, \\ j, \Delta \text{ mit } \sigma, \\ f \text{ mit } H^2. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\ \begin{array}{cc} (\vartheta\cdot k,\eta,x)^4 & \cdot \\ \cdot & H_k(\vartheta\cdot k,\eta,x)^4, \end{array} \qquad \text{B)}\ \begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & (KLu)^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_l(KLu)^3 \\ \cdot & \cdot & K_l^2 & \cdot & \cdot \\ (klx)^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_l(Klx)^3 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array},$$

$$\text{C)}\ \begin{array}{cc} L_j & \cdot \\ \cdot & L_j^2, \end{array} \qquad \text{D)}\ \varDelta_l, \qquad \text{E)}\ (j\sigma x), \qquad \text{G)}\ \begin{array}{cc} (aH^2u)^3 & (aH^2u)^4 \\ \cdot & a_\eta(aH^2u)^3. \end{array}$$

Reduktionen:

A) die Formen $H_\vartheta(k\eta x)^3$, $H_\vartheta^2(k\eta x)^2$, $H_\vartheta^2(k\eta x)^3$ zerfallen als entstanden durch sukzessive einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

B) Formenreihen $K_l L_k$, $K_l^2(KLu)$, $K_l^2(klx)$:
Reduzenten: $\theta_\eta H_\vartheta$, $a_\eta^2(aHu)$, $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$.
Formen K_l, $K_l(KLu)$, $K_l(klx)$, $(KLu)^2$, $(klx)^2$ zerfallen als Überschiebungen über Funktionaldeterminanten (§ 3).
Formen L_k, $L_k(KLu)$, $L_k(KLu)^2$, $L_k(klx)$, $L_k(klx)^2$, L_k^2, $L_k^2(KLu)$, $L_k^2(klx)$, L_k^3, $K_l(KLu)^2$, $K_l(klx)^2$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen:

$$L_\vartheta,\ H_k(KHu),\ L_\vartheta(\vartheta lx),\ H_k^2,\ L_\vartheta^2,\ L_\vartheta^2(\theta Lu),\ K_\eta(KHu),\ \theta_l(\vartheta lx)$$

nach § 3. 2), a) und b).

C) Formenreihe $(jlx)^3$: Reduzent $(j\eta x)^3$.
Formen $(jlx)^2$ und $L_j(jlx)$: Entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$.

D) Formenreihe $\varDelta_l(\varDelta Lu)$: Reduzent $\varDelta_\nu^2$.
Formen $(\varDelta Lu)^2$, $(\varDelta Lu)^3$: Einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(\varDelta Hu)^2$.

E) Formenreihe $(j\sigma x)^2$: Reduzent a_σ^2 durch Ersetzen von j durch niedrigere Formen der Formenreihe (§ 5):

$$a_\sigma^2(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(j\sigma x)^2 \ldots a_\sigma^2(a\theta\sigma x)^2 = \frac{1}{3}(j\sigma x)^4.$$

F) Formenreihe Δ_σ^2: Reduzent a_σ^2.
Form Δ_σ: Reduzent a_σ^2 durch Ersetzen von Δ durch niedrigere Formen der Formenreihe:

$$a_\vartheta\, a_\sigma^2 = \frac{2}{3}\Delta_\sigma \mod \nu.$$

Folgerungen: Nur die Form j tritt in Faltung mit σ und $(\nu\sigma x)$ ein. N tritt nicht in Faltung mit L ein, da die Δ_ι entsprechende Form N_ι zerfällt.

§ 15. *Formen zehnter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta^2,\ f\cdot j \text{ mit } L, \\ \theta \text{ mit } H^2. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{A)} \begin{array}{ll} (\vartheta^2\, lx)^4 & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota(\vartheta^2\, lx)^4, \end{array} \qquad \text{B)} \begin{array}{ll} (aLu)^2\, L_j & \cdot \\ \cdot & a_\iota(aLu)^2\, L_j, \end{array}$$

$$\text{C)} \begin{array}{lll} (\theta H^2 u)^3 & (\theta H^2 u)^4 & \cdot \\ \cdot & H_\vartheta(\theta H^2\, u)^3, & \theta_\eta(\theta H^2 u)^3. \end{array}$$

Reduktionen:

A) und B): Zerfallen der übrigen Formen durch einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

C) Zerfallen der übrigen Formen nach § 13 B) durch dualistisch entgegengesetzte Betrachtung.

Folgerungen:

$\theta^2\cdot K$ tritt nicht in Faltung mit L ein; entsprechend $H^2 L$ nicht in Faltung mit K. H^3 und $H^2 L$ treten nicht in Faltung mit θ ein. Das Schema zur Faltung § 7 ist somit bewiesen.

§ 16. *Formen 11., 12., 13., 15. Ordnung (System III).*

11. Ordnung.

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta \cdot K \text{ mit } L, \\ K, j \text{ mit } H^2, \\ j \text{ mit } (\nu \sigma x), \\ f \text{ mit } H \cdot L. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A) $(\vartheta \cdot k, l, x)^5 \quad \cdot \quad \cdot \quad \theta_l (\vartheta \cdot k, l, x)^5$, B) $(K H^2 u)^4 \quad \cdot \quad \cdot \quad K_\eta (K H^2 u)^4$,

C) $(\nu \sigma j)$, D) $(a, H \cdot L, u)^4$.

12. Ordnung.

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta^3 \text{ mit } L, \\ \theta \text{ mit } H \cdot L. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

E) $(\vartheta^3 l x)^6$, F) $(\theta, H \cdot L, u)^4 \quad \cdot \quad \cdot \quad L_\vartheta (\theta, H \cdot L, u^4)$.

13. Ordnung.

Faltung von K mit $H \cdot L$.

Irreduzible Formen:

G) $(K, H \cdot L, u)^5 \quad \cdot \quad \cdot \quad K_\eta (K, H \cdot L, u)^5$.

15. Ordnung.

Faltung von K mit H_3.

Irreduzible Form:

H) $(K H^3 u)^6$.

Reduktionen:

Formen $H^2_{j^3}, H^2_{j^4}$. Reduzent L^3_j aus der Relation:

$$(\nu l x) L^3_x = -\frac{1}{2} H^2 \quad \text{mod } (\sigma, s).$$

Zerfallen oder Reduzibilität der übrigen Formen nach den Betrachtungen der früheren Paragraphen.

Folgerungen:

Nach dem Schema zur Faltung § 7 und den Folgerungen der §§ 8 bis 15 sind hiermit die irreduziblen Formen des Systems III (117 Formen) erschöpft.

Kapitel IV. Das relativ vollständige System mod (ϱ, t).

§ 17. *Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$ und des Systems von s.*

Zur Bildung des nächsthöheren relativ vollständigen Systems hat man nach Analogie von § 7 das System von s in bezug auf den nächsten Modul $\nu(s) = (s s' u)^4$ zu bilden und mit den Formen des relativ vollständigen Systems mod s zu falten. Es soll gezeigt werden, daß bei Einführung des Moduls (ϱ, t) als höheren Moduls

A) der Modul $(s s' u)^4$ reduzibel wird,

B) das System von s aus der einzigen Form s besteht.

A) Die Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$ ergibt sich sofort aus dem durch Formel (16.) § 11 gefundenen Reduzenten s^2_ν. Aus

$$s^2_\nu = \frac{4}{3} i a^2_\nu + \frac{4}{5} \theta^2_\varrho + \frac{8}{5} (a t u)^2 - \frac{26}{15} (\nu \varrho x)^2 + \frac{1}{6} J \cdot u^2_x - \frac{2}{9} i^2 \cdot u^2_x$$

folgt durch Polarisation von x nach ν_1:

$$\begin{aligned}(s s' u)^4 &= -\frac{2}{3} J \cdot \nu + 6 s^2_\nu s^2_{\nu_1} \\ &= \frac{24}{5} \theta^2_\nu \theta^2_\varrho + \frac{48}{5} a^2_\nu (a t u)^2 - \frac{52}{5} H^2_\varrho + \frac{4}{3} i \cdot (a s u)^4 + \frac{1}{3} J \cdot \nu - \frac{4}{9} i^2 \cdot \nu\end{aligned} \quad (21.)^*)$$

und damit die Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$.

---

*) Aus Formel (21.) folgt die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnte

B) Die Reduktion von $Z=(ss'u)^2=\theta(s)$ und daraus die Reduktion des Systems von s ergibt sich durch Ersetzen der Form Z durch die niedrigere Form g_ν^2 nach Formel (8.) b, § 7 unter Berücksichtigung der Relation

$$s_\eta^2=s_\nu^2(\nu\nu_1 x)^2-\frac{1}{3}Z.$$

Die Form g_ν^2 hat nach Formel (13.), § 11 den Reduzenten s_ν^2 zum Faktor.

Es wird, nach Formel (8.) und (16.):

$$g_\nu^2=-Z+\frac{14}{5}ia_\eta^2+\frac{14}{15}i(asu)^2 \quad \text{mod } (\varrho, t),$$

nach Formel (13.), (14.), (15.), (16.):

$$g_\nu^2=2[s_\vartheta^2]_{\nu^2}-\frac{4}{3}i\Delta_\nu^2=2s_\vartheta^2 s_\nu^2-\frac{6}{5}[s_\vartheta^2(\theta su)^2]\,\widehat{\nu x}^2-\frac{4}{3}i\Delta_\nu^2$$

$$=\frac{4}{5}i\cdot a_\eta^2-\frac{2}{5}i\cdot(asu)^2+\frac{1}{3}J\cdot\theta \quad \text{mod } (\varrho, t):$$

$$(23.)\qquad Z=2i\cdot a_\eta^2+\frac{4}{3}i\cdot(asu)^2-\frac{1}{3}J\cdot\theta \quad \text{mod } (\varrho, t).$$

Das relativ vollständige System mod $((ss'u)^4, \varrho, t)$ geht also über in ein relativ vollständiges System mod (ϱ, t), und aus diesem entsteht durch Überschiebung über das bekannte System zweier quadratischen Formen das absolut vollständige. Zur Bildung des relativ vollständigen Systems mod (ϱ, t) haben wir, da nach Formel (23.) das System von s sich reduziert auf die Form s, das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t) über s und Potenzen von s zu überschieben. Es wird sich zeigen, daß Potenzen von s nur mit System I in Faltung eingehen.

Relation zwischen den drei Invarianten 9. Ordnung, unter Anwendung von Formel (10.) c

$$(22.)\qquad \begin{aligned}(ass')^4&=\frac{24}{5}\theta_\nu^2\theta_\varrho^2 a_\nu^2 a_\vartheta^2+\frac{48}{5}a_\nu^2 b_\nu^2(tab)^2-\frac{52}{5}H_\varrho^2 a_\eta^4+\frac{5}{3}J\cdot i-\frac{4}{9}i^3,\\ (ass')^4&=\frac{24}{5}a_\varrho^2 a_{\varrho'}^2-\frac{12}{5}t_\varrho^2+\frac{5}{3}J\cdot i-\frac{4}{9}i^3.\end{aligned}$$

Als „höhere Formen" definieren wir unter den Formen gleicher Ordnung und gleichen Grades diejenigen, die aus höheren Formen des relativ vollständigen Systems mod (s, ϱ, t) durch Faltung mit s hervorgegangen sind, indem wir die Faltung mit s nur als Polarisation der ursprünglichen Formen betrachten. Dadurch ist die Anordnung der einzelnen Formen eindeutig bestimmt [vgl. § 1. Formenreihen 2)].

Es wird beispielsweise:

$$(\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2 \text{ höher als } s_\eta((\theta H u)^2, s, u)^{*)},$$

$$(\theta_\eta(\theta H u)^2, s, u) \text{ höher als } (\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2.$$

Wir teilen das entstehende System in die vier Teilsysteme:

System s_I : Entstanden durch Faltung von s und Potenzen von s mit System I.

System s_{II}: Entstanden durch Faltung von s mit System II.

System s_{III}: Entstanden durch Faltung von s mit den einzelnen Formen (ohne Produkte) von System III und mit Produkten von je einer Form von System I und II.

System s_{IV}: Entstanden durch Faltung von s mit Produkten von je einer Form von System I und III, II und III, III und III.

Bemerkt sei noch, daß von jetzt an alle Formeln mod (ϱ, t) zu verstehen sind, von Formel (27.) an mod $(\varrho, t, i, J,$ höhere Formen), ohne daß dies jedesmal ausdrücklich angegeben wird.

Zur Reduktion stellen wir die früher gewonnenen Formeln zusammen:

$$\text{(24.)} \quad \begin{aligned} s_\nu^2 &= \frac{4}{3} i\, a_\nu^2 + \frac{1}{6} J \cdot u_x^2 - \frac{2}{9} i^2 \cdot u_x^2, \\ s_\nu^3 &= \frac{1}{3} J \cdot u_x, \quad s_\nu^4 = J, \end{aligned}$$

*) Der kürzeren Schreibart willen nehmen wir das Glied der Überschiebung an Stelle der vollständigen Überschiebung $[(\theta H u)^2] \widehat{su}\, s$ als Form des Systems auf. Bei Aufstellung von Formeln werden alle Überschiebungen durch ihre Anfangsglieder ersetzt; z. B.: $(\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2$ durch $\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2$.

$$g = 2\,s_\vartheta^2 - \frac{4}{3}\,i\Delta,$$

$$s_\vartheta^2\,(\theta s u) = 0,$$

$$s_\vartheta^2\,(\theta s u)^2 = \frac{8}{9}\,i\cdot a_\nu^2 - \frac{4}{27}\,i^2\cdot u_x^2,$$

$$Z = 2\,i\cdot a_\eta^2 + \frac{4}{3}\,i\,(a s u)^2 - \frac{1}{3}\,J\cdot\theta, \tag{24.}$$

$$g_\nu = -\,s_\eta + u_x\left\{2\,i\,a_\eta^2 - \frac{2}{3}\,i\,(a s u)^2 + \frac{2}{3}\,J\cdot\theta\right\},$$

$$g_\nu^2 = \frac{4}{5}\,i\,a_\eta^2 - \frac{2}{5}\,i\,(a s u)^2 + \frac{1}{3}\,J\cdot\theta,$$

$$g_\nu^3 = 0,\quad g_\nu^4 = 0.$$

Folgerungen:

s_ν^2, $s_\vartheta^2(\theta s u)$, $s_\vartheta^2 s_\nu$, $s_\vartheta^2\theta_\nu$ **sind Reduzenten.**

§ 18. *System* s_I.

Faltung von $\begin{cases} s \text{ mit } f;\quad \theta;\quad K, j, \Delta;\quad f\cdot j, N;\quad \Delta\cdot j, \\ s^2 \text{ mit } \theta, K. \end{cases}$

Irreduzible Formen.

5. Ordnung.

$$(a s u);\quad (a s u)^2;\quad (a s u)^3;\quad (a s u)^4.$$

6. Ordnung.

$(\theta s u)$	$(\theta s u)^2$	$(\theta s u)^3$	$(\theta s u)^4$
s_ϑ	$s_\vartheta(\theta s u)$	$s_\vartheta(\theta s u)^2$	$s_\vartheta(\theta s u)^3$
.	s_ϑ^2	.	.

7. Ordnung.

$$\begin{array}{lllll} & \cdot & (Ksu)^2 & (Ksu)^3 & (Ksu)^4 \\ \text{A)} & s_k & s_k(Ksu) & s_k(Ksu)^2 & s_k(Ksu)^3 \\ & \cdot & s_k^2 & \cdot & \cdot \end{array}, \qquad \begin{array}{l} \text{B)}\ s_j, \\ \text{C)}\ (\varDelta su),\ (\varDelta su)^2. \end{array}$$

8. Ordnung.

$$\text{A)}\ s_j(asu),\ s_j(asu)^2,\ s_j(asu)^3, \qquad \text{B)} \begin{array}{ll} \cdot & (Nsu)^2 \\ s_n & s_n(Nsu). \end{array}$$

10. Ordnung.

$$\text{A)}\ s_j(\varDelta su), \quad \text{B)}\ s_\vartheta(\theta s' u)^4.$$

11. Ordnung.

$$\begin{array}{ll} (Ks^2u)^6 & \cdot \\ s_k(Ks^2u)^5 & s_k(Ks^2u)^6. \end{array}$$

Reduktionen:

Die Formenreihen

$$s_\vartheta^2(\theta su),\ s_k^2(Ksu),\ s_j^2,\ (\varDelta su)^3,\ (Nsu)^3$$

haben den Reduzenten $s_\vartheta^2(\theta su)$ zum Faktor, s_j^2 und $(\varDelta su)^3$ durch Zurückgehen von j und $\varDelta$ auf niedrigere Formen der Formenreihe:

$$s_\vartheta^2(\theta su)(a\theta u)^3 = -\frac{1}{2}s_j^2,$$

$$s_\vartheta^2(\theta su)(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(\varDelta su)^3,$$

$$s_\vartheta^2(\theta su)^2(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(\varDelta su)^4 + \frac{1}{3}s_j^2.$$

Formen $s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}$ und $s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}^2$: Reduzenten $s_\vartheta^2(\theta s u)$ und $\theta_{\vartheta'}$:

$$s_\vartheta^2 s_{\vartheta'} = s_\vartheta^2 \theta_{\vartheta'} - s_\vartheta^2(\theta s \widehat{\vartheta' x}), \qquad s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}^2 = s_\vartheta^2 s_{\vartheta'} \theta_{\vartheta'} - s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}(\theta s \widehat{\vartheta' x}).$$

Formenreihe $s_j(\varDelta s u)^2$: Reduzenten $\varDelta_j$ und $(\varDelta s u)^3$.

Folgerungen:

s tritt nicht in Potenzen in Faltung mit $f, j, \varDelta, N$ ein. $f, j, \varDelta, N$ treten nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung ein, die aber bei den Produkten mit f noch quadratisch in x, bei den Produkten mit $\varDelta$ noch linear in x sein können; d. h. folgende Produkte von Formen sind zu betrachten:

$$f\cdot(0,\lambda),\quad f\cdot(1,\lambda),\quad f\cdot(2,\lambda),\quad j\cdot(\mu,0),\quad N \text{ und } \varDelta\cdot(0,\lambda)\quad \varDelta\cdot(1,\lambda)\quad (\lambda > 0),$$

wobei (μ, λ) eine Form μten Grades in x, λten Grades in u bedeutet.

θ oder K treten nicht in Potenzen oder Produkten mit beliebigen Formen in Faltung mit s oder s^2 ein.

Für Produkte mit der Funktionaldeterminante K, $K\cdot\varphi_x$ $(\varphi \neq f$ oder $\theta)$ gilt nämlich die Relation zwischen zerfallenden Formen:

$$K\cdot\varphi_x = (a\theta u)\varphi_x = f\cdot(\varphi\theta u) - \theta\cdot(\varphi a u).$$

Das oben stehende Schema zur Faltung von System s_I ist somit bewiesen.

§ 19. *System* s_{II}.

Faltung von s mit ν; H; L; H^2.

Irreduzible Formen:

	6. Ordnung.	8. Ordnung.	10. Ordnung.	12. Ordnung.
s_ν		(Hsu) $(Hsu)^2$	$(Lsu)^2$ $(Lsu)^3$	$(H^2su)^3$.
.		$s\eta$. ;	s_l . . ;	
.				
	$s_\nu^4 = J$;			

Reduktionen:

Formenreihen $s_\eta(Hsu)$ und $s_l(Lsu)$: Reduzent s_ν^2.

Formenreihe s_σ: Reduzent s_ν^2 aus H, $s_\nu^2 = \frac{2}{3} s_\delta$.

$(H^2 su)^4$ zerfällt aus Formel (7.)a. (vgl. § 11. A). Daraus: Zerfallen von $(H \cdot L, s, u)^4$.

Folgerungen:

s^2 tritt nicht in Faltung mit System II ein.

ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen,

H in Produkten mit Formen $(1, \lambda)$, $(2, \lambda)$, $(3, \lambda)$ (λ beliebig), als Kovariante betrachtet, in Faltung ein.

σ und $(\nu \sigma x)$ treten überhaupt nicht, L als Funktionaldeterminante nicht in Produkten in Faltung ein (die vollen Überschiebungen über Kovarianten von System III werden reduzibel).

Als Produkte von System I und II bleiben:

$$f \cdot \nu, \quad \Delta \cdot \nu.$$

§ 20. *Formen 7. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit $f \cdot \nu$, a_ν, a_ν^2.

Irreduzible Formen:

$$s_\nu (asu), \; a_\nu (asu), \quad s_\nu (asu)^2, \; a_\nu (asu)^2, \quad s_\nu (asu)^3, \; a_\nu (asu)^3,$$
$$a_\nu s_\nu, \quad a_\nu s_\nu (asu), \; a_\nu^2 (asu), \quad a_\nu^2 (asu)^2.$$

Reduktionen:

Die selbstverständlichen, aus direkter Faltung mit den Reduzenten s_ν^2 und $s_\eta (Hsu)$ hervorgehenden Reduktionen sollen nicht erwähnt werden, ebenso wenig das Zerfallen von Überschiebungen mit Funktionaldeterminanten.

Form $a_\nu s_\nu (asu)^2$ und $a_\nu^2 s_\nu (asu)^2$: siehe Formel (19.), § 12;

$$a_\nu s_\nu (asu)^3 = a_\nu (a \widehat{\nu_1 \nu_2} u)^3 (\nu_1 \nu_2 \nu) = 0.$$

Formenreihe $a_\nu^2 s_\nu$: Reduzent $s_\vartheta^2 (\theta su)$ durch Zurückgehen von a_ν^2 auf niedrigere Formen, d. h. durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $s_\vartheta^2 (a \theta s)(a \theta u)$, $s_\vartheta^2 (a \theta s)(a \theta u)^2$ nach dem Ansatz:

$$s_\vartheta^2 (a \theta s)(a \theta u) = [(a \theta u)^2] s^3 + \frac{1}{5} [a_\vartheta (a \theta u)^2] s^2 + \frac{1}{60} [a_\vartheta^2 (a \theta u)^2] s = \frac{1}{2} a_\nu^2 s_\nu - \frac{2}{3} a_\nu s_\nu^2,$$

$$s_\vartheta^2 (a \theta s)(a \theta u)^2 = \frac{4}{5} [a_\vartheta (a \theta u)^2]_{\widehat{us}} s^2 + \frac{23}{180} [a_\vartheta^2 (a \theta u)^2]_{\widehat{us}} s = -\frac{1}{2} a_\nu^2 s_\nu (asu).$$

$$(a_\nu^2 b_\nu (abu) = 0).$$

Es entstehen die Formeln:

$$(25.)\quad \begin{array}{lll} & \underline{a_\nu s_\nu (asu)^2} = \frac{1}{3} i \cdot \theta_\nu^2 - \frac{1}{18} iH, & \underline{a_\nu s_\nu (asu)^3} = 0, \\ \underline{a_\nu^2 s_\nu} = \frac{4}{3} i \cdot a_\nu^2 b_\nu, & \underline{a_\nu^2 s_\nu (asu)} = 0, & \underline{a_\nu^2 s_\nu (asu)^2} = 0. \end{array}$$

Folgerungen:

1) $a_\nu s_\nu (asu)^2$, $a_\nu^2 s_\nu$ sind Reduzenten.

2) Es ergeben sich die Werte der in § 19 als reduzibel erkannten Formen $(\Delta su)^3$, $(\Delta su)^4$; ebenso für die entsprechende Formenreihe $(agu)^2$, die bei Faltung mit ν durch den Reduzenten g_ν Anlaß zur doppelten Reduktion gibt.

$$(26.)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & (\Delta su)^3 = -\frac{6}{5} a_\nu^2 (asu) + 3 a_\nu s_\nu (asu) + 2 i \cdot \theta_\nu (\vartheta \nu x), \\ \text{b)} & (\Delta su)^4 = -\frac{2}{5} a_\nu^2 (asu)^2 + \frac{4}{3} i \theta_\nu^2 + \frac{1}{9} iH. \end{array}$$

Aus Formel (24.) und (26.), mod (i, J) (vgl. S. 71):

$$(27.)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & (agu)^2 = \frac{2}{3} (\Delta su)^2 - \frac{4}{3} a_\nu s_\nu + \frac{3}{5} s \cdot a_\nu^2, \\ \text{b)} & (agu)^3 = 2 a_\nu s_\nu (asu) - a_\nu^2 (asu)^2, \\ \text{c)} & (agu)^4 = - a_\nu^2 (asu)^2. \end{array}$$

§ 21. *Formen 8. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen 4. Ordnung (System III). (§ 9).

Irreduzible Formen:

.	$((\vartheta\nu x), s, u)^2$, $(\theta_\nu su)$	❋
$(\vartheta\nu x) s_\nu$, $((\vartheta\nu x^2), s, u)$	$((\vartheta\nu x)^2, s, u)^2$, $\theta\ s_\nu$	
$(\vartheta\nu x)^2 s_\nu$	$((\vartheta\nu x)^2, s, u) s_\nu$, $(\theta_\nu (\vartheta\nu x)^2, s, u)$	

❋	$((\vartheta\nu x), s, u)^3$, $(\theta_\nu su)^2$	$((\vartheta\nu x), s, u)^4$, $(\theta_\nu su)^3$	.
	$((\vartheta\nu x)^2, s, u)^3$, $(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^2$, $(\theta_\nu^2 su)$	$(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^3$, $(\theta_\nu^2 su)^2$	$(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^4$.
	.	$(\theta_\nu^3 su)$	.

Reduktionen:

$((\vartheta\nu x), s, u)s_\nu$ zerfällt als Überschiebung über Funktionaldeterminanten nach § 3.

Formenreihe $((\vartheta\nu x), s, u)^2 s_\nu$: Reduzent s_ν^2 und $s_\vartheta^2 \theta_\nu$:

$$(\widehat{\vartheta\nu} su)s_\nu(\theta su) = s_\nu s_\vartheta(\theta su) = -\frac{1}{2}(\widehat{\vartheta\nu} su)^2(\theta su),$$

$$\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu} su)s_\nu = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta = -\frac{1}{2}\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu} su)^2. \qquad \text{(Produktsatz.)}$$

Formenreihe $\theta_\nu s_\nu(\theta su)$: Reduzent $a_\nu s_\nu(asu)^2$ durch doppelte Reduktion der Ausdrücke:

$$a_\nu s_\nu(asu)^2(abu) \text{ und } a_\nu s_\nu(asu)^2(abu)(sbu);$$

$\theta_\nu s_\nu(\theta su)^3$ durch doppelte Reduktion von $(agu)^3(abu)(bgu)^3$.

Formenreihe $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu = a_\nu^2(abu)s_\nu$.

Formenreihe $(\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2, s, u)$: Doppelte Reduktion der Formen der Formenreihe $\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu} su)s_\nu$, die zugleich den Formenreihen $((\vartheta\nu x)su)^2 s_\nu$ und $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu$ angehören.

Form $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)$ zerfällt als einmalige Überschiebung über die Funktionaldeterminante $\theta_\nu(\vartheta\nu x) = a_\nu^2(abu)$.

Form $(\vartheta\nu x)^2, s, u)^4$: doppelte Reduktion des Ausdrucks $(a\Delta u)^2(\Delta su)^4$ oder auch von $(\theta gu)^4$ aus den Formeln (27.) und analog der Reduktion von $(j\eta x)^4$ (§ 12 C)).

Durch doppelte Reduktion entstehen die Formeln:

$$\begin{aligned}
&0 = \theta_\nu s_\nu(\theta su) - \frac{1}{6}(\widehat{\vartheta\nu} su)^2(\theta su) - \frac{1}{12}(Hsu),\\
&0 = \theta_\nu s\ (\theta su)^2 - \frac{1}{4}(\widehat{\vartheta\nu} su)^2(\theta su)^2 - \frac{1}{24}(Hsu)^2,\\
\text{(28.)}\quad &0 = (\widehat{\vartheta\nu} su)^2(\theta su)^2 + 2\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu} su)(\theta su)^2 + 3\theta_\nu^2(\theta su)^2 - \frac{1}{3}H(su)^2,\\
&0 = \theta_\nu s_\nu(\theta su)^3 + \frac{1}{2}\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu} su)(\theta su)^3,\\
&0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta - \frac{1}{4}s_\eta, \quad 0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta(\theta su), \quad 0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta(\theta su)^2
\end{aligned}$$

(entspricht $(\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2, s, u)^2 \ldots$).

Folgerungen:

1) $\theta\,(\vartheta\nu x)s_\nu$, $(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su)s_\nu$, $\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)^2$, $(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su)^2$ sind Reduzenten.
2) Die Formen vierter Ordnung $(5,\lambda)$, $(6,\lambda)$ usw. treten nicht in Faltung mit s^2 ein.
3) Für die Formenreihe $(\theta g u)^2$ ergeben sich nach (27.) unter Berücksichtigung der Reduktionen dieses Paragraphen folgende Formeln:

$$\text{a)}\quad (\theta g u)^2 = \frac{4}{3}\theta_\nu s_\nu + \frac{2}{3}s_\nu s_\vartheta - \frac{1}{3}s\cdot\theta_\nu^2 - \frac{1}{9}s\cdot H - \frac{1}{3}f\cdot a_\nu^2(asu)^2 + \frac{1}{3}a_\nu^2\cdot(asu)^2,$$

$$\text{b)}\quad (\theta g u)^3 = -\frac{1}{3}(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su) - \theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su) - \theta_\nu^2(\theta su),$$

$$(29.)\quad \text{c)}\quad (\theta g u)^4 = 2\,\theta_\nu^2(\theta su)^2 - \frac{1}{3}(Hsu)^2,$$

$$g\vartheta(\theta g u) = (\widehat{\vartheta\nu}su)(\vartheta\nu x)s_\nu - \theta_\nu(\vartheta\nu x)(\widehat{\vartheta\nu}su),$$

$$g\vartheta(\theta g u)^2 = \frac{2}{3}s\cdot\theta_\nu^3,\quad g\vartheta(\theta g u)^3 = \frac{1}{3}\theta_\nu^3(\theta su),\quad g\vartheta(\theta g u)^4 = 0.$$

§ 22. *Formen neunter Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen fünfter Ordnung (System III) und dem Produkt $\varDelta\cdot\nu$ (§ 10).

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & (K_\nu su)^2 & * \\ \cdot & ((k\nu x)^2, s, u)^2,\ K_\nu s_\nu & ((k\nu x)^2, s, u)^3 & \\ (k\nu x)^2 s_\nu,\ ((k\nu x)^3, s, u) & ((k\nu x)^3, s, u)^2 & \cdot & \cdot \\ (k\nu x)^3 s_\nu & ((k\nu x)^3, s, u)s_\nu,\ (K_\nu(k\nu x)^3, s, u) & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} * & (K_\nu su)^3 & (K_\nu su)^4 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & (K_\nu^2 su)^4, \end{array}$$

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c} (j\nu x)s_\nu,\ ((j\nu x)^2, s, u) & ((j\nu x)^2, s, u)^2 \\ (j\nu x)^3, s, u) & \cdot \end{array}\ ,\qquad \text{C)}\quad s_\nu(\varDelta su),\ (\varDelta_\nu su),$$

$$\text{D)}\quad \begin{array}{c|c|c} \cdot & ((aHu), s, u)^2,\ ((aHu)^2, s, u) & * \\ (aHu)s_\eta,\ (a_\eta su) & (aHu)^2 s_\eta,\ (a_\eta su)^2 & \\ \cdot & (a_\eta^2 su) & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} * & ((aHu), s, u)^3,\ (aHu)^2, s, u)^2 & ((aHu), s, u)^4 \\ & (a_\eta su)^3,\ (a_\eta(aHu), s, u)^2,\ (a_\eta(aHu)^2, s, u) & (a_\eta(aHu), s, u)^3. \end{array}$$

Reduktionen:

A) Die Reduktionen folgen direkt aus den Reduktionen von § 21 durch einmalige Faltung. Die Formenreihe $K_\nu s_\nu (Ksu)^2$ hat die Reduzenten $a_\nu s_\nu (asu)^2$ und $\theta_\nu s_\nu (\theta su)^2$ zu Faktoren. Daraus Zerfallen der höheren Formen $K_\nu^2 (Ksu)^2$, $K_\nu^2 (Ksu)^3$ nach dem Ansatz:

$$0 = a_\nu s_\nu (asu)^2 (a\theta u) = K_\nu s_\nu (Ksu)^2 = \theta_\nu s_\nu (\theta su)^2 (a\theta u).$$

B) Formenreihe $(j\nu x)^2 s_\nu$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $(j\nu x)^2 s_\nu = 3\, a_\nu^2 s_\nu (a\theta u)^2$.

$((j\nu x)^3, su)^2$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $((j\nu x)^3, s, u)^2 = -6\, a_\nu^2 s_\nu (a\theta u)^2 (\theta su)$.

C) Formen $\varDelta_\nu (\varDelta su)^2$ und $s_\nu (\varDelta su)^2$: Reduzent g_ν aus Formel (27.)a.

Form $\varDelta_\nu s_\nu$: 1) Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $a_\vartheta a_\nu^2 s_\nu = \frac{2}{3} \varDelta_\nu s_\nu$;

2) zerfällt nach Formel (27.)a durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $(\varDelta s \widehat{\nu x})^2$.

Daraus: Zerfallen der höheren Form $a_\eta s_\eta$.

D) Formenreihe $(aHu)^2 s_\eta (asu)$: Reduzent $a_\nu s_\nu (asu)^2$ durch doppelte Reduktion der Formenreihe $[a_\nu s_\nu (asu)^2] \widehat{\nu_1 x}$; Reduktion von $(aHu)^2 s_\eta (asu)^2$ aus $a_\nu s_\nu (asu)^2$ und $a_\nu s_\nu (asu)^3$. Daraus Reduktion von $(a_\eta, s, u)^4$.

Formenreihe $a_\eta (aHu) s_\eta$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$. $a_\eta^2 s_\eta$ durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $(\varDelta s \widehat{\nu x})^3$, da $a_\eta^2 s_\eta$ nicht aus dem reduziblen Glied $a_\nu^2 s_\nu (\nu \nu_1 x)$ der Form $a_\eta (aHu) s_\eta$ durch Faltung entsteht.

Formenreihe $(a_\eta^2 su)^2$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $a_\nu^2 s_\nu s_{\nu_1} = -\frac{1}{2} a_\eta^2 (Hsu)^2$.

Form $(a_\eta (aHu), s, u)$ zerfällt als Überschiebung über eine Funktionaldeterminante.

Es entstehen die Reduktionsformeln:

$$(30.)\quad \begin{aligned}
&\text{a)}\ \ 0 = (aHu)^2 (asu) s_\eta - a_\eta (asu)(Hsu)^2 - a_\eta (aHu)(asu)(Hsu),\\
&\text{b)}\ \ 0 = (aHu)^2 (asu)^2 s_\eta - a_\eta (aHu)(asu)^2 (Hsu),\\
&\text{c)}\ \ 0 = a_\eta (asu)^2 (Hsu)^2,\\
&\qquad 0 = a_\eta s_\eta + \tfrac{1}{4} a_\nu^2 \cdot g - \tfrac{1}{4} s \cdot a_\eta^2,\\
&\qquad 0 = a_\eta (aHu) s_\eta - \tfrac{1}{2} a_\eta^2 (Hsu), \quad 0 = a_\eta^2 (Hsu)^2, \ldots\ 0 = a_\eta^2 s_\eta.
\end{aligned}$$

Folgerungen:

1) $(j\nu x)^2 s_\nu$, $\varDelta_\nu s_\nu$, $\varDelta_\nu(\varDelta s u)^2$ und folglich $N_\nu(Nsu)^2$, $(aHu)^2(asu)s_\eta$, $a_\eta(aHu)s_\eta$, $a_\eta^2(Hsu)^2$ sind Reduzenten; $a_\eta s_\eta$ ist zerfallende Form, die bei allen ein- und zweimaligen Faltungen in zerfallende Formen übergeht.

2) Die Formen 5. Ordnung $(5, \lambda)$, $(6, \lambda)$ usw. treten nicht in Faltung mit s^2 ein.

§ 23. *Formen zehnter Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen sechster Ordnung (System III). (§ 11).

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{c|c} (\vartheta^2\nu x)^3 s_\nu & \cdot \\ \cdot & (\vartheta^2\nu x)^3 s_\nu s_\vartheta,\ \theta_\nu(\vartheta^2\nu x)^3 s_\vartheta, \end{array}$$

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & (a_\nu(j\nu x), s, u)^2 & (a_\nu(j\nu x), s, u)^3 & (a_\nu(j\nu x), s, u)^4 \\ a_\nu(j\nu x)s_\nu & \cdot & (a_\nu^2(j\nu x), s, u)^2 & (a_\nu^2(j\nu x), s, u)^3, \end{array}$$

$$\text{C)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & ((\theta Hu), s, u)^2,\ ((\theta Hu)^2, s, u) & * \\ \cdot & ((\vartheta\eta x), s, u)^2,\ (\theta Hu)s_\eta,\ (\theta_\eta s u) & ((\vartheta\eta x), s, u)^3,\ (\theta_\eta s u)^2 & \\ ((\vartheta\eta x)^2, s, u) & \cdot & (\theta_\eta^2 s u) & \\ \cdot & (\theta_\eta(\vartheta\eta x)^2, s, u) & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$* \begin{array}{|c|c} ((\theta Hu), s, u)^3,\ ((\theta Hu)^2, s, u)^2 & ((\theta Hu), s, u)^4 \\ (H_\vartheta(\theta Hu), s, u)^2,\ (\theta_\eta(\theta Hu), s, u)^2,\ (\theta_\eta(\theta Hu)^2, s, u) & (\theta_\eta s u)^4,\ (\theta_\eta(\theta Hu), s, u)^3 \\ \cdot & (\theta_\eta^2(\theta Hu), s, u)^2. \end{array}$$

Reduktionen:

A) die Formen $((\vartheta^2\nu x)^3, s, u)^2$, $((\vartheta^2\nu x)^3, s, u)^3$ zerfallen:

$$(\vartheta\nu x)(\widehat{\vartheta\nu s u})(\widehat{\vartheta'}\nu s u) = (\vartheta\nu x)s_\vartheta s_{\vartheta'} - (\vartheta\nu x)s_\nu s_{\vartheta'} = -2\,\theta\cdot(\vartheta\nu x)s_\nu s_\vartheta + (\vartheta\nu x)\cdot s_\vartheta^2.$$

Übrige Formen: entweder Reduzenten zum Faktor oder einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

B) Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ und $(\widehat{j\nu} s u)s_\nu$.

C) 1. Formenreihe $(\theta Hu)^2 s_\eta$: a) Reduzent $(aHu)^2(asu)s_\eta$; b) doppelte Reduktion der Formenreihen $(\theta gu)^3 g_\nu$ und $g_\nu (agu)^3 (bgu)^2 (abu)$.

Daraus Reduktion der höheren Formen $(\theta_\eta su)^3$, $(H_\vartheta(\theta Hu), s, u)^3$ und $(a_\nu \cdot b^2_{\nu_1}, s, u)^4$ [letztere Form an Stelle von $(H_\vartheta su)^4$].

2. $((\vartheta\eta x), s, u)^4$: Reduzent $(a_\eta su)^4$.

3. $((\vartheta\eta x)^2, s, u)^3$: Reduzent $s^2_\vartheta s_\nu$ aus $(\widehat{\vartheta\eta} su)^2 (Hsu)$.

Formen $(\vartheta\eta x)s_\eta$, $(\vartheta\eta x)^2 s_\eta$, $((\vartheta\eta x)^2, s, u)^2$, $\theta_\eta s_\eta$ zerfallen durch Faltung mit der zerfallenden Form $a_\eta s_\eta$.

4. Formenreihen $H_\vartheta(\theta Hu)s_\eta$, $\theta_\eta(\theta Hu)s_\eta$, $H_\vartheta(\vartheta\eta x)s_\eta$, $\theta_\eta(\vartheta\eta x)s_\eta$: Reduzenten $a_\eta(aHu)s_\eta$ und $a^2_\eta s_\eta$.

Formenreihe $(\theta_\eta(\vartheta\eta x), s, u)^2$: Reduzent $a^2_\eta (Hsu)^2$ [mit Ausnahme von $(\theta^2_\eta(\theta Hu), s, u)^2$, das aus dem Glied $a^2_\eta(bsu)(Hsu)$ durch Faltung entsteht].

5. $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)$, $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)^2$: doppelte Reduktion von $a_\eta(aHu)s_\eta(abu)$ und $g_\vartheta(\theta gu)g_\nu$.

Formenreihe $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)^3$: Reduzent $((\vartheta\nu x)^2, s, u)^2 s_\nu$.

6. $(H_\vartheta(\theta Hu), s, u)$ zerfällt durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)$ nach § 3. 2), c); d. h. durch doppelte Reduktion der niedrigeren zerfallenden Form $(H_\vartheta su)^2$:*)

$$0 \equiv \theta_\nu(\vartheta\nu\nu_1)(\theta su) + \frac{2}{3}\theta^2_\nu(\vartheta\nu_1 x)(\theta su) + \theta_\nu(\vartheta\nu x)(\theta su)s_{\nu_1}$$

$$\equiv -\frac{1}{2}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su) + \theta_\eta(\theta su)(Hsu) + \frac{1}{2}H_\vartheta(\theta su)(Hsu)$$

$$\equiv -\frac{1}{2}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su) + \theta_\eta(\theta su)(Hsu) + \frac{1}{2}[H_\vartheta]^2_{\widehat{su}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su)$$

$$\equiv -\frac{3}{5}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su).$$

---

*) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, daß Produkte von Formen niedrigeren Grades ausgelassen sind.

Durch doppelte Reduktion entstehen nach 1. und 5. die Formeln:

$$
(31.)\quad
\begin{aligned}
0 &= \theta_\eta(\theta s u)(Hsu)^2 + \tfrac{1}{4} H_\vartheta(\theta H u)(\theta s u)^2 - \tfrac{3}{4}\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)(Hsu) \\
&\quad - \tfrac{5}{4}\theta_\eta(\theta H u)^2(\theta s u) - (asu)^3\cdot b_\eta(bHu)^2 - a_\nu(asu)^3\cdot b_\nu^2, \\
0 &= H_\vartheta(\theta H u)(\theta s u)^3 - 7\,\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2(Hsu), \\
0 &= a_\nu(asu)^2 b_{\nu_1}{}^2(bsu)^2 - \theta_\eta(\theta s u)^2(Hsu)^2 + 6\,\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2(Hsu), \\
0 &\equiv (H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u), \qquad 0 \equiv H_\vartheta(\widehat{\vartheta\eta} s u)(Hsu) - 4\theta_\eta^2(Hsu).
\end{aligned}
$$

Folgerungen:

1) $(\theta H u)^2 s_\eta$, $H_\vartheta(\theta H u)\, s_\eta$, $\theta_\eta(\theta H u)\, s_\eta$, $H_\vartheta(\vartheta\eta x)\, s_\eta$, $\theta_\eta(\vartheta\eta x)\, s_\eta$, $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)$, $(\theta_\eta(\vartheta\eta x), s, u)^2$ sind Reduzenten.

2) s^2 tritt nicht in Faltung mit den Formen $(5, \lambda)$ usw. 6. Ordnung.

§ 24. *Formen 11. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen 7. Ordnung (System III) (§ 12).

Irreduzible Formen:

A)

.	.	.	$((KHu)^2\, su)^2$	✻
.	.	$(K_\eta su)^2$	.	
.	.	.	.	.
$((k\eta x)^3, s, u)$	.	.	.	.
.	$(K_\eta(k\eta x)^3, s, u)$	.	.	.

✻	$((KHu)^2, s, u)^3$	$((KHu)^2, s, u)^4$
	.	$(K_\eta(KHu)^2, s, u)^3$,

B) $((j\eta x), s, u)^2$, $(H_j su)$ | $((j\eta x), s, u)^3$, C) $(\varDelta_\eta su)$,

D)

.	$((aLu)^2, s, u)^2$, $((aLu)^3, s, u)$	$((aLu)^2, s, u)^3$
$(aLu)^2 s_\iota$, $(a_\iota su)^2$	$(a_\iota su)^3$	$(a_\iota(aLu)^2, s, u)^2$.

Reduktionen:

A) Reduktion oder Zerfallen durch einmalige Faltung mit den entsprechenden Formen in Symbolen $\theta \cdot H$.

$(K_\eta\,(KHu)^2, s, u)$ und $(K_\eta\,(KHu)^2, s, u)^2$: Zerfallen nach § 3. 2), a), durch Faltung mit $K_\nu^2\,(Ksu)$, $K_\nu^2\,(Ksu)^2$.

$(K_\eta\,(KHu), s, u)^4 \equiv (a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}, s, u)^4$: Zerfallen nach § 3. 2), b), aus der zerfallenden Form $K_\nu^2\,(Ksu)^3$.

B) Formenreihe $(j\eta x)\,s_\eta$: Reduzent $(j\nu x)^2\,s_\nu$.

Form $H_j\,(\widehat{j\eta}\,su)(Hsu)$: Reduzent $(j\nu x)(\widehat{j\nu}\,su)^2$.

Form $H_j(j\eta x)(Hsu)$: Zerfällt durch Reduktion der zerfallenden Form $((j\eta x)^2, s, u)^2$ durch den Reduzenten $(j\nu x)^2\,s_\nu$ (Formel (18.)a):

$$0 = -2\,(j\nu x)^2\,s_\nu\,s_{\nu_1} = [(j\eta x)^2]_{\widehat{su^2}} + H_j\,(j\eta x)\,(Hsu).$$

C) Reduzenten $\Delta_\nu\,s_\nu$ und $\Delta_\nu\,(\Delta su)^2$.

D) Reduktion und Zerfallen durch einmalige Faltung mit den entsprechenden Formen in Symbolen $f \cdot H$.

E) Aus (30.) c ergibt sich die Reduktion der zerfallenden Formenreihe $(a_\sigma su)^2$:

$$0 = a_\eta\,(Hsu)^2\,(as\widehat{\nu x})^2 = a_\eta\,(Hsu)^2\,(a\widehat{\nu\eta}u)^2 + 2\,a_\eta\,(a\widehat{\nu\eta}u)\,(\widehat{\nu\eta}su)\,(Hsu)^2 = \frac{1}{3}\,a_\sigma\,(asu)^2,$$

$$0 = a_\eta\,a_\nu\,(Hsu)^2\,(as\widehat{\nu x})\,(asu) = a_\eta\,(a\widehat{\nu\eta}u)^2\,(Hsu)^2\,(asu) + a_\eta\,(a\widehat{\nu\eta}u)\,(\widehat{\nu\eta}su)\,(Hsu)^2\,(asu)$$
$$= \frac{1}{3}\,a_\sigma\,(asu)^3.$$

Folgerung:

s^2 tritt nicht in Faltung mit den Formen 7. Ordnung ein.

§ 25. *Formen 12., 13., 14., 15. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen 8., 9., 10., 11. Ordnung (System III) (§ 13—16).

Irreduzible Formen:

12. Ordnung.

A) $\left.\begin{array}{c} ((\vartheta^2\eta x)^4_\cdot, s, u) \\ \cdot \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot \\ \theta_\eta(\vartheta^2\eta x)^3 s_\vartheta, \end{array}$ $\cdot$ B) $((aHu)\,H_j, s, u)^2 \,|\, ((aHu)\,H_j, s, u)^3$,

$$\text{C)} \quad \begin{array}{c|c|l} \cdot & ((\theta L u)^2, s, u)^2, ((\theta L u)^3, s, u) & ((\theta L u)^2, s, u)^3 \\ (\theta_l s u)^2 & \cdot & (\theta_l(\theta L u)^2, s, u)^2. \end{array}$$

Reduktionen: Die durch direkte Faltung mit Reduzenten oder zerfallenden Formen entstehenden Reduktionen sollen nicht mehr erwähnt werden.

B) Zerfallen von $((aHu)H_j, s, u)$ und $(a_\eta(aHu)H_j, s, u)$ als Überschiebung über Funktionaldeterminanten.

Zerfallen von $(a_\eta(aHu)H_j, s, u)^2$: Doppelte Reduktion der zerfallenden Form $[\theta_\nu \cdot \theta'^3_{\nu_1}]_{\widehat{su^3}}$ (§ 13. C)

$$0 \equiv [\theta'^3_{\nu_1} \cdot \theta_\nu]_{\widehat{su^3}} \equiv -\frac{3}{4}\theta_\nu(\theta s u)^2(\theta\theta' u)\theta'^3_{\nu_1}$$
$$\equiv -\frac{9}{8}(\widehat{\theta\theta'}\eta\widehat{su})(\theta\theta' u)(\theta H u)(\theta' H u)\theta'_\eta(\theta s u) \equiv -\frac{3}{8}a_\eta(aHu)H_j(asu)^2.$$

C) Aus den Formeln (31.) ergibt sich die Reduktion der zerfallenden Formen

$[L_\vartheta(\theta L u)]_{\widehat{su^3}}$ und $[\theta_l(\theta L u)]_{\widehat{su^3}}$, d. h. der Produkte $[\theta^2_\nu \cdot H]_{\widehat{su}}$ und $[a^2_\nu \cdot (bHu)^2]_{\widehat{su^3}}$:

$$(32.) \quad \begin{aligned} &0 \equiv \theta^2_\nu(\theta s u)^2(Hsu), \quad 0 \equiv [L_\vartheta(\theta L u)]_{\widehat{su^4}} - 7[\theta_l(\theta L u)]_{\widehat{su^4}}, \\ &0 \equiv a^2_\nu(asu)^2(bHu)^2(bsu) + 6\,\theta_l(\theta L u)^2(\theta s u)(Lsu), \\ &0 \equiv \theta^3_\nu(\theta s u)(Hsu)^2 \text{ aus } 0 \equiv \theta^2_l(\theta L u)(\theta s u)(Lsu)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{Reduzent } a^2_\eta(Hsu)^2). \end{aligned}$$

Irreduzible Formen.

13. Ordnung.

A) $((KLu)^3, s, u)^2$; $((KLu)^3, s, u)^3$,
B) $(L_j s u)^2$,
C) $((aH^2u)^3, s, u)^2$.

14. Ordnung.

A) $((aLu)^2 L_j, s, u)^2$,
B) $((\theta H^2 u)^3, s, u)^2$.

15. Ordnung.

$$((KH^2 u)^4, s, u)^2.$$

Reduktionen: Zerfallen von $(K_l(KLu)^3, s, u)^2$, $(H_\vartheta(\theta H^2 u)^3, s, u)$, $((K, H\cdot L, u)^5, s, u)$ nach § 3. 2), c); d. h. unter gleichzeitiger Betrachtung der zerfallenden Formen $(K_l(KLu)^2, s, u)^3$, $(H_\vartheta(\theta H'u)^2, s, u)^2$, $((K, H\cdot L, u)^4, s, u)^2$.

Folgerung: s^2 tritt nicht mit einzelnen Formen von System III in Faltung ein.

§ 26. *System* s_{IV}.

1) *Faltung von* s *mit System* I · III.

Reduktionen: Nach den Reduktionen der letzten Paragraphen ($a_\nu^2\, s_\nu$, $(aHu)^2(asu)s_\eta$ usw.) lassen die Formen $(0, \lambda)$, $(1, \lambda)$, $(2, \lambda)$ nicht die Faltungen I und III gleichzeitig zu; f, $\varDelta$, N tritt also nach § 18, zur Bildung von System s_{IV}, nicht in Produkten in Faltung ein.

j tritt nicht in Faltung ein, da nach den gleichen Reduktionen den zu j kontragredienten Faltungen

$$(K_\nu(k\nu x)^3, s, u), \quad ((\vartheta^2\eta x)^4, s, u) \text{ usw.}$$

die zu j kogredienten Faltungen entsprechen:

$$K_\nu(k\nu x)^2 s_k, \quad (\vartheta^2\eta x)^3 s_\vartheta \text{ usw.}$$

2) *Faltung von* s *mit System* II · III

d. h. von s mit $H\cdot(1, \lambda)$, $H\cdot(2, \lambda)$, $H\cdot(3, \lambda)$.

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{lll} (a_\nu\cdot H, s, u)^4, & ((aHu)^2\cdot H, s, u)^3, & ((aHu)^2\cdot H, s, u)^4, \\ ((aLu)^2\cdot H, s, u)^4, & ((aLu)^3\cdot H, s, u)^3, & ((aH^2u)^3\cdot H, s, u)^4. \end{array}$$

$$\text{B)}\quad (a_\nu^2\cdot H, s, u)^3, \quad (a_\eta(aHu)^2\cdot H, s, u)^3, \quad (a_l(aLu)^2\cdot H, s, u)^4.$$

C) $(\theta_\nu \cdot H, s, u)^4$, $((\theta H u)^2 \cdot H, s, u)^3$, $((\theta H u)^2 \cdot H, s, u)^4$,
$((\theta L u)^2 \cdot H, s, u)^4$, $((\theta L u)^3 \cdot H, s, u)^3$, $((\theta H^2 u)^3 \cdot H, s, u)^4$.

D) $(\theta_\eta (\theta H u)^2 \cdot H, s, u)^3$, $(\theta_\iota (\theta L u)^2 \cdot H, s, u)^4$.

E) $((K L u)^3 \cdot H, s, u)^4$, $((K H^2 u)^4 \cdot H, s, u)^4$.

F) $((j \nu x)^2 \cdot H, s, u)^3$, $((j \nu x)^2 \cdot H, s, u)^4$, $((j \eta x) \cdot H, s, u)^4$, $(H_j \cdot H, s, u)^3$,
$(L_j \cdot H, s, u)^4$.

Reduktionen: ν tritt analog wie j nicht in Faltung ein.

B) und D). $(a_\nu^2 . H, s, u)^4$ und $(\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^4$ zerfallen aus Formel (27.)c) und (29.)c) unter Berücksichtigung von $(g H u)^2 = -\frac{1}{3} s \cdot \sigma$:

$$(a_\nu^2 \cdot H, s, u)^4 \equiv \frac{1}{3} (a s u)^4 \cdot \sigma, \quad (\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^4 \equiv -\frac{1}{6} (\theta s u)^4 \cdot \sigma;$$

daraus Zerfallen von $(a_\eta (a H u) \cdot H, s, u)^4$, $(\theta_\eta (\theta H u) \cdot H, s, u)^4$.

$(\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^3$, $(\theta_\nu^3 \cdot H, s, u)^3$ und daraus $(\theta_\eta^2 (\theta H u) \cdot H, s, u)^4$

zerfallen nach § 25, Formen 12. Ordnung C).

3) *Faltung von s mit System* III·III,

d. h. von s mit Formen von System III: $(3, \lambda) \cdot (3, \lambda)$, $(3, \lambda) \cdot (2, \lambda)$, $(3, \lambda) \cdot (1, \lambda)$,
$(2, \lambda) \cdot (2, \lambda)$, $(2, \lambda) \cdot (1, \lambda)$,
$(1, \lambda) \cdot (1, \lambda)$.

Irreduzible Formen:

A) $(a_\nu^2 \cdot a_\nu^2, s, u)^3$, $(a_\nu^2 \cdot a_\nu^2, s, u)^4$, $(a_\nu^2 \cdot a_\eta (a H u)^2, s, u)^3$.

B) $(a_\nu \cdot H_j, s, u)^4$, $((a H u)^2 . H_j, s, u)^3$, $((a L u)^2 \cdot H_j, s, u)^4$,
$((a L u)^3 \cdot H_j, s, u)^2$, $((a H^2 u)^3 \cdot H_j, s, u)^3$.

Reduktionen:

Produkte II·III sollen, bei gleicher Ordnung in Symbolen ν und f, als höher gelten wie Produkte III·III.

Die Reduktionen entstehen zum Teil durch Relationen zwischen Produkten (Syzygien), zum Teil durch Ersetzen der Produkte durch die entsprechenden zerfallenden Formen und Reduktion der Faltung dieser Formen mit s. (Produkte, die Kontravarianten enthalten, sind stets ausgelassen, da sie in Produkte übergehen.)

A) f quadratisch, Symbole ν in beliebiger Ordnung.

Nach § 11, Formeln (12.) und durch analoge Rechnung gilt:

1) $$0 = a_\nu \cdot b_{\nu_1} + \frac{1}{2} f \cdot (aHu)^2 - \frac{1}{4} \theta \cdot H + \frac{1}{2} u_x H_\vartheta - \frac{1}{4} u_x^2 \cdot H_\vartheta^2,$$

2) $$0 = a_\nu \cdot b_{\nu_1}^2 + f \cdot a_\eta (aHu)^2 - \theta_\eta - \frac{1}{2} H_\vartheta,$$

3) $$0 = a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 - H_\vartheta^2 + 2\,\theta_\eta^2.$$

Daraus folgt:

4) $$0 = a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 (j\nu_1 x) \quad \text{(aus 3))},$$

5) $$L_\vartheta(\theta L u) = -\, a_\nu \cdot b_\eta (bHu)^2 + \frac{3}{4} a_\nu^2 \cdot (bHu)^2 + \frac{3}{4} \theta_\nu^2 \cdot H \quad \text{(aus 2))},$$

6) $$L_\vartheta(\theta L u) = -6\, a_\nu \cdot b_\eta (bHu)^2 + 2\, a_\nu^2 \cdot (bHu)^2 - \frac{1}{2} \theta_\nu^2 \cdot H \quad \text{(aus 1))},$$

7) $$0 = a_\nu \cdot (bHu)^2 + f \cdot (aLu)^3 + \theta_\nu \cdot H \quad \text{(aus 1))},$$

$$\left.\begin{array}{ll} 8) & 0 = a_\nu \cdot (bLu)^3 + \frac{3}{4} (\theta Hu)^2 \cdot H \\[2ex] 9) & 0 = (aHu)^2 \cdot (bHu)^2 + 2\,(\theta Hu)^2 \cdot H \end{array}\right\} \quad \text{(aus 7))},$$

10) $$0 = a_\eta (aHu)^2 \cdot b_\eta (bHu)^2 \quad \text{(aus 5) und 6))},$$

11) $$0 = [a_\nu^2 \cdot b_\eta (bHu)]_{\widehat{su}^4} \quad \text{(aus Formel (30.) b))}.$$

Die Reduktionen von

$$(H_\vartheta su)^4,\quad (L_\vartheta(\theta Lu), s, u)^3,\quad (L_\vartheta(\theta Lu), s, u)^4$$

(Formeln (31.) und (32.)) geben zusammen mit den Formeln 1) bis 11) die Reduktion aller Faltungen von s mit Produkten, die in den Symbolen f quadratisch, ν beliebig sind.

B) Produkte von je zwei der Symbole f, θ, j; ν in beliebiger Ordnung.

Nach den Formeln (17.), (18.), (20.) und durch direkte Rechnung gelten die Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 0=a_\nu\cdot\theta_{\nu_1}+\frac{1}{4}\theta\cdot(aHu)^2+\frac{1}{4}f\cdot(\theta Hu)^2, \\ 2) & 0=\theta_\nu\cdot\theta_{\nu_1}+\frac{1}{2}\theta\cdot(\theta Hu)^2 \end{array}\right\}\ \text{(direkte Rechnung analog A 1)).}$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 3) & 0=3a_\nu\cdot(\theta Hu)^2+\theta\cdot(aLu)^3+2f\cdot(\theta Lu)^3 \\ 4) & 0=3\theta_\nu\cdot(aHu)^2+f\cdot(\theta Lu)^3+2\theta\cdot(aLu)^3 \end{array}\right\}\ \text{(aus 1) und A 6)),}$$

$$5)\quad 0=a_\nu\cdot(\theta Lu)^3,\quad 0=\theta_\nu\cdot(aLu)^3,\quad 0=(aHu)^2\cdot(\theta Hu)^2\quad \text{(aus 3), 4) und A 8)),}$$

$$6)\quad 0=a_\nu\cdot\theta_\nu^2+\theta_\nu\cdot a_\nu^2+f\cdot\theta_\eta(\theta Hu)^2+\theta\cdot a_\eta(aHu)^2\quad \text{(Formel (17.)),}$$

$$7)\quad 0=\theta_\nu\cdot\theta_\nu^2+\theta\cdot\theta_\eta(\theta Hu)^2+\frac{1}{6}f\cdot H_j\quad \text{[analoge Ableitung wie von 6) aus } \theta_\nu^2(\theta\theta'\widehat{\nu_1 x})\text{].}$$

Daraus folgt:

$$8)\quad 0=a_\nu\cdot(j\nu x)^2+f\cdot H_j\quad \text{(aus 6)),}$$

$$9)\quad 0=(aHu)^2\cdot(j\nu x)^2-2a_\nu\cdot H_j\quad \text{(aus 8)),}$$

$$10)\quad 0=\theta_\nu\cdot(j\nu x)^2,\quad 0=\theta\cdot H_j\quad \text{(aus 7) und 8)),}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 11) & 0=a_\nu\cdot\theta_\nu^3-\frac{3}{4}(j\eta x)^2 \\ 12) & 0=a_\nu^2\cdot\theta_\nu^2-\frac{1}{3}(j\eta x)^2-\frac{1}{3}(\varDelta Hu)^2 \end{array}\right\}\ \text{(Formel (18.)),}$$

13) $0 = a_\nu^2 \cdot \theta_\nu^3 - \frac{1}{2} a_\sigma$ (Formel (20.)),

14) $0 = \theta_\nu \cdot \theta_\nu^3$, $0 = a_\eta H_j$ (§ 13. C)).

Die Formeln sind so weit geführt, bis die Produkte polarisierbar werden; d. h. daß durch Faltung nur *ein* neues Produkt entsteht dadurch, daß

a) die Faltung des Produktes in sich reduzibel wird,

b) die übrigen durch Faltung entstehenden Produkte reduzibel werden oder auf Kontravarianten führen (vgl. § 3. 2), a) und b)).

Formeln 1) bis 5) geben die Reduktion aller Faltungen von s mit Produkten, die aus $a_\nu \cdot \theta_\nu$ durch Faltung entstehen,

Formeln 6) bis 10) die Reduktion derjenigen Produkte, die aus $a_\nu \cdot \theta_\nu^2$ durch Faltung entstehen.

Nach § 24 A) zerfallen, unter Berücksichtigung von Formeln 6) bis 10), die Faltungen von s mit Produkten, die aus $a_\nu^2 \cdot \theta_\nu$ entstehen.

Es wird:

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu)^2 \theta_{\nu_1} (\theta su)^2, \quad 0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su)^3 - K_\eta (KHu)^2 (Ksu)^3,$$

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu)^2 \theta_{\nu_1} (\theta su), \quad 0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su)^2,$$

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su).$$

Die Reduzenten:

$((j\eta x)^2, s, u)^3$ [aus $(\vartheta\eta \widehat{su})^2 (Hsu)$. § 23. C 3)],

$(H_j (j\eta x), s, u)^2$ [§ 24, B], $((\varDelta Hu)^2, s, u)^2$ [§ 24, C],

$(a_\sigma su)^2$ [§ 24, E]

geben zusammen mit den Formeln 11) bis 14) die Reduktion aller aus $a_\nu \cdot \theta_{\nu_1}^3$, $a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^2$, $a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^3$ entstehenden Produkte.

Unsere bisherigen Rechnungen lassen sich zusammenfassen in der

Schlußfolgerung:

Das relativ vollständige System mod (ϱ, t) besteht aus folgenden 331 Formen und Teilsystemen, die wir anschließend auch tabellarisch geordnet wiedergeben:

u_x	1 Form	Relativ vollständiges System mod (s, ϱ, t) [s. Tabelle I].
System I	6 Formen	
System II	5 Formen	
System III	117 Formen	

s	1 Form	[s. Tabelle II].
System s_I	35 Formen	
System s_{II}	9 Formen	
System s_{III}	125 Formen	
System s_{IV}	32 Formen	

TABELLE I (s. S. 90).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	i				f		$\varDelta$		$K_\nu(k\nu x)^3$		$K_\eta(k\eta x)^3$				$(\vartheta^2\eta x)^4$	$H_k(k\cdot\vartheta, \eta x)^4$		$\theta_l(\vartheta\cdot k, lx)^5$				$(\vartheta^2 lx)^6$
1		u_x				$\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2$		$\theta_\eta(\vartheta\eta x)^2$	N	$(k\nu x)^3$	$\theta_\nu(\vartheta^2\nu x)^3$	$(k\eta x)^3$	$H_\vartheta(\vartheta^2\eta x)^3$ $\theta_\eta(\vartheta^2\eta x)^3$		$\theta_l(\vartheta^2 lx)^4$		$(\vartheta k, \eta, x)^4$		$(\vartheta k, l, x)^5$			
2			a_ν^2		θ a_η^2		$(\vartheta\nu x)^2$	$K_\nu(k\nu x)^2$	$(\vartheta\eta x)^2$	$H_k(k\eta x)^2$ $K_\eta(k\eta x)^2$		$(\vartheta^2\nu x)^3$ $K_l(klx)^3$		$(\vartheta^2\eta x)^3$		$(\vartheta^2 lx)^4$						
3		θ_ν^3		a_ν	$\theta_\nu(\vartheta\nu x)$	$\varDelta_\nu$ a_η	K $H_\vartheta(\vartheta\eta x)$ $\theta_\eta(\vartheta\eta x)$	$\varDelta_\eta$	$(k\nu x)^2$ $\theta_l(\vartheta lx)^2$		$(k\eta x)^2$		$(klx)^3$									
4	ν		H θ_ν^2	$(j\nu x)^3$ $a_\eta(aHu)$	θ_η^2	$(\vartheta\nu x)$ a_l^2		N_ν $(\vartheta\eta x)$		H_n N_η $(\vartheta lx)^2$												
5		$a_\eta(aHu)^2$	$\theta_\eta^2(\theta Hu)$	θ_ν	K_ν^2 (aHu)	θ_η	K_η^2 $(\varDelta Hu)$ a_l		$\varDelta_l$													
6	j σ		$(j\nu x)^2$ $(aHu)^2$	L $a_\nu^2(j\nu x)$ $H_\vartheta(\theta Hu)$ $\theta_\eta(\theta Hu)$		K_ν θ_l^2		K_η														
7		$\theta_\eta(\theta Hu)^2$	$H_j(j\eta x)$ $a_l(aLu)^2$		$a_\nu(j\nu x)$ (θHu)		$\varDelta_\nu(j\nu x)$ θ_l	K_l^2														
8	H_j^2 $a_l(aLu)^3$	$(\nu\sigma x)$ $(j\nu x)$	$(\theta Hu)^2$	$K_\eta(KHu)^2$ $(j\eta x)$ $(aLu)^2$																		
9		H_j $(aLu)^3$	$a_\eta(aHu)H_j$ $L_\vartheta(\theta Lu)^2$ $\theta_l(\theta Lu)^2$		(KHu)																	
10	$\theta_l(\theta Lu)^3$	L_j^2 $(j\sigma x)$ $a_\eta(aH^2u)^3$		$H_j(aHu)$ $(\theta Lu)^2$																		
11		$(\theta Lu)^3$	$K_l(KLu)^3$ L_j $(aH^2u)^3$																			
12	$(aH^2u)^4$	$a_l(aLu)^2L_j$ $H_\vartheta(\theta H^2u)^3$ $\theta_\eta(\theta H^2u)^3$		$(KLu)^3$																		
13	$(\nu\sigma j)$		$(aLu)^2L_j$ $(\theta H^2u)^3$																			
14	$(\theta H^2u)^4$	$K_\eta(KH^2u)^4$ $(a, H\cdot L, u)^4$																				
15	$L_\vartheta(\theta, H\cdot L, u)^4$		$(KH^2u)^4$																			
16		$(\theta, H\cdot L, u)^4$																				
17	$K_\eta(K, H\cdot L, u)^5$																					
18		$(K, H\cdot L, u)^5$																				
19																						
20																						
21	$(KH^3u)^6$																					

(Die Zahlen der obersten Horizontalreihe bezeichnen den Grad in den x, die Zahlen der ersten Vertikalreihe den Grad in den u.)

TABELLE II (s. S. 90).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	J				s		s_ϑ^2					s_n	$(k\nu x)^3 s_\nu$	$(\vartheta^3\nu x)^3 s_\nu s_\vartheta$ $\theta_\nu(\vartheta^2\nu x)^3 s_\vartheta$		$\theta_\eta(\vartheta^2\eta x)^3 s_\vartheta$	
1							(asu)	s_ϑ	s_k^2 (Δsu)	$s_n(Nsu)$ $(\vartheta\nu x)^2 s_\nu$	$((k\nu x)^3, s, u)s_\nu$ $(K_\nu(k\nu x)^3, s, u)$		$(K_\eta(k\eta x)^3, s, u)$		$(\vartheta^2\nu x)^3 s_\nu$		$((\vartheta^2\eta x)^4, s, u)$
2					$(asu)^2$	$s_\vartheta(\theta su)$	$(\Delta su)^2$ $a_\nu s_\nu$	$((\vartheta\nu x)^2, s, u)s_\nu$ $(\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2, s, u)$		s_k $(\theta_\eta(\vartheta\eta x)^2, s, u)$		$(k\nu x)^2 s_\nu$ $((k\nu x)^3, s, u)$		$((k\eta x)^3, s, u)$			
3			$(asu)^3$	$s_\vartheta(\theta su)^2$ s_ν	$a_\nu s_\nu(asu)$ $a_\nu^2(asu)$	s_η	(θsu) $(a_\eta^2 su)$	$s_k(Ksu)$	$(Nsu)^2$ $(\vartheta\nu x)s_\nu$ $((\vartheta\nu x)^2, s, u)$	$((k\nu x)^3, s, u)^2$	$((\vartheta\eta x)^2, s, u)$						
4	$(asu)^4$	$s_\vartheta(\theta su)^3$	$a_\nu^2(asu)^2$	$(\theta_\nu^3 su)$	$(\theta su)^2$	$s_k(Ksu)^2$ $a_\nu(asu)$ $s_\nu(asu)$	$((\vartheta\nu x)^2, s, u)^2$ $\theta_\nu s_\nu$	$s_\nu(\Delta su)$ $(\Delta_\nu su)$ $(aHu)s_\eta$ $(a_\eta su)$		$(\Delta_\eta su)$							
5			$(\theta su)^3$	$s_k(Ksu)^3, s_j,$ $s_\vartheta(\theta s'u)^4$ $s_\nu(asu)^2$ $a_\nu(asu)^2$	(Hsu) $((\vartheta\nu x)^2, s, u)^3$ $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)^2$ $(\theta_\nu^2 su)$	$((j\nu x)^3, s, u)$ $(aHu)^2 s_\eta$ $(a_\eta su)^2$	$(Ksu)^2$ s_l $(\theta_\eta^2 su)$		$((k\nu x)^2, s, u)^2$ $K_\nu s_\nu$								
6	$(\theta su)^4$	$s_\nu(asu)^3$ $a_\nu(asu)^3$	$(Hsu)^2$ $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)^3$ $(\theta_\nu^2 su)^2$	$(a_\eta su)^3$ $(a_\eta(aHu), s, u)^2$ $(a_\eta(aHu)^2, s, u)$	$(Ksu)^3$	$s_j(asu)$ $((\vartheta\nu x), s, u)^2$ $(\theta_\nu su)$	$((k\nu x)^2, s, u)^3$	$s_j(\Delta su)$ $a_\nu(j\nu x)s_\nu$ $((\vartheta\eta x), s, u)^2$ $(\theta Hu)s_\eta$ $(\theta_\eta su)$									
7	$(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)^4$	$(a_\eta(aHu), s, u)^3$	$(Ksu)^4$ $(\theta_\eta^2(\theta Hu), s, u)^2$ $(a_\nu^2\cdot a_\nu^2, s, u)^3$	$s_j(asu)^2$ $s_k(Ks^2u)^5$ $((\vartheta\nu x), s, u)^3$ $(\theta_\nu su)^2$	$(j\nu x)s_\nu$ $((j\nu x)^2, s, u)$ $((aHu), s, u)^2$ $((aHu)^2, s, u)$	$((\vartheta\eta x), s, u)^3$ $(\theta_\eta su)^2$	$(aLu)^2 s_l$ $(a_l su)^2$										
8	$(a_\nu^2\cdot a_\nu^2, s, u)^4$	$s_j(asu)^3$ $s_k(Ks^2u)^6$ $((\vartheta\nu x), s, u)^4$ $(\theta_\nu su)^3$	$((j\nu x)^2, s, u)^2$ $((aHu), s, u)^3$ $((aHu)^2, s, u)^2$	$(Lsu)^2$ $(a_\nu^2(j\nu x), s, u)^2$ $(H_\vartheta(\theta Hu), s, u)^2$ $(\theta_\eta(\theta Hu), s, u)^2$ $(\theta_\eta(\theta Hu)^2, s, u)$	$(a_l su)^3$	$(K_\nu su)^2$		$(K_\eta su)^2$									
9	$(K_\nu^2 su)^4$ $((aHu), s, u)^4$	$(Lsu)^2$ $(a_\nu^2(j\nu x), s, u)^3$ $(\theta_\eta su)^4$ $(\theta_\eta(\theta Hu), s, u)^3$	$(Ks^2u)^6$ $(a_l(aLu)^2, s, u)^2$ $(a_\nu^2\cdot H, s, u)^3$	$(K_\nu su)^3$	$(a_\nu(j\nu x), s, u)^2$ $((\theta Hu), s, u)^2$ $((\theta Hu)^2, s, u)$		$(\theta_l su)^2$										
10		$(K_\nu su)^4$ $(a_\nu^2\cdot a_\eta(aHu)^2, s, u)^3$	$(a_\nu(j\nu x), s, u)^3$ $((\theta Hu), s, u)^3$ $((\theta Hu), s, u)^2$	$((j\eta x), s, u)^2$ $(H_j su)$ $((aLu)^2, s, u)^2$ $((aLu)^3, s, u)$													
11	$(a_\nu(j\nu x), s, u)^4$ $((\theta Hu), s, u)^4$	$(K_\eta(KHu)^2, s, u)^3$ $((j\eta x), s, u)^3$ $((aLu)^2, s, u)^3$ $(a_\nu\cdot H, s, u)^4$	$(H^2su)^3$ $(\theta_l(\theta Lu)^2, s, u)^2$		$((KHu)^2, s, u)^2$												
12		$(a_\eta(aHu)^2\cdot H, s, u)^3$	$((KHu)^2, s, u)^3$	$((aHu)H_j, s, u)^2$ $((\theta Lu)^2, s, u)^2$ $((\theta Lu)^3, s, u)$													
13	$((KHu)^2, s, u)^4$	$((aHu)H_j, s, u)^3$ $((\theta Lu)^2, s, u)^3$ $(\theta_\nu\cdot H, s, u)^4$	$(L_j su)^2$ $((aH^2u)^3, s, u)^2$ $((j\nu x)^2\cdot H, s, u)^3$ $((aHu)^2\cdot H, s, u)^3$														
14	$((j\nu x)^2\cdot H, s, u)^4$ $((aHu)^2\cdot H, s, u)^4$	$(\theta_\eta(\theta Hu)^2\cdot H, s, u)^3$		$((KLu)^3, s, u)^2$													
15	$(a_l(aLu)^2\cdot H, s, u)^4$	$((KLu)^3, s, u)^3$	$((aLu)^2 L_j, s, u)^2$ $((\theta H^2u)^3, s, u)^2$ $((\theta Hu)^2\cdot H, s, u)^3$														
16	$((\theta Hu)^2\cdot H, s, u)^4$ $(a_\nu\cdot H_j, s, u)^4$	$((j\eta x)\cdot H, s, u)^4$ $(H_j\cdot H, s, u)^3$ $((aLu)^2\cdot H, s, u)^4$ $((aLu)^3\cdot H, s, u)^3$															
17	$(\theta_l(\theta Lu)^2\cdot H, s, u)^4$		$((KH^2u)^4, s, u)^3$														
18		$((\theta Lu)^2\cdot H, s, u)^4$ $((\theta Lu)^3\cdot H, s, u)^3$ $((aHu)^2\cdot H_j, s, u)^3$															
19	$((aH^2u)^3\cdot H, s, u)^4$ $(L_j\cdot H, s, u)^4$																
20		$((KLu)^3\cdot H, s, u)^4$	$((aLu)^3\cdot H_j, s, u)^2$														
21	$((\theta H^2u)^3\cdot H, s, u)^4$ $((aLu)^2\cdot H_j, s, u)^4$																
22																	
23	$((KH^2u)^4\cdot H, s, u)^4$	$((aH^2u)^3\cdot H, s, u)^3$															