Über mehrfach vollkommene Zahlen. II.

Von *Hans-Joachim Kanold* in Braunschweig.

Wir schließen uns in dieser Arbeit der Bezeichnungsweise einer früheren an[1]). Danach heißt eine natürliche Zahl $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ eine $(s-1)$-fach vollkommene Zahl, wenn sie der Bedingung $\sigma(n) = s \cdot n$ genügt. Die $p_\varkappa$ bedeuten Primzahlen, $\sigma(n)$ bezeichnet die Summe aller positiven Teiler von n. Ferner gilt die leicht einzusehende Ungleichung

$$2 \leqq s < \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq k + 1.$$

§ 1.

Wir wollen in diesem einleitenden Paragraphen die mehrfach vollkommenen Zahlen mit $k = 2, 3$ und 4 betrachten. Der Fall $k = 2$ führt auf die geraden vollkommenen Zahlen, deren Primzahlpotenzzerlegung man genau kennt. Jede gerade vollkommene Zahl muß die Gestalt $n = 2^{p-1} \cdot p_2$ besitzen, wobei p und $p_2 = 2^p - 1$ Primzahlen bedeuten. Man kennt bisher 17 gerade vollkommene Zahlen[2]). Davon sind 8 kleiner als 10^{20}, nämlich diejenigen mit $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ und 31.

Es sei jetzt $k = 3$. Weil für eine ungerade vollkommene Zahl bestimmt $k \geqq 6$ sein muß[3]), können wir sogleich auch $s = 3$ annehmen. Dann muß entweder $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ oder $n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ sein[4]). Der Fall $k = 4$ läßt die Möglichkeiten $s = 3, 4$ zu. $s = 3$ führt zu $n = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ (vgl. Anmerkung [4])). $s = 4$ und $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} < 4$ zeigt, daß $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid n$ sein muß. Aus $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} = 4$ folgt weiterhin, daß n noch eine der Primzahlen $7, 11, 13$ als Teiler enthalten muß.

Wir müssen jetzt die Gleichung

$$(1) \qquad (2^{\alpha_1+1} - 1)\, \sigma(3^{\alpha_2})\, \sigma(5^{\alpha_3})\, \sigma(p_4^{\alpha_4}) = 4 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$$

diskutieren, wobei für p_4 die Möglichkeiten $7, 11, 13$ bestehen. Es enthält $\sigma(p_4^{\alpha_4})$ für $\alpha_4 \geqq 2$ immer einen Primteiler[5]) der Restklasse 1 (mod $\alpha_4 + 1$) (vgl. Anmerkung [5])), d. h. einen Primteiler $\geqq \alpha_4 + 2$. Daraus folgt sofort

$$(2) \qquad \alpha_4 \leqq 3.$$

---

1) *H. J. Kanold*, Über mehrfach vollkommene Zahlen. Journ. f. reine u. angew. Math. **194** (1955), 218—220.

2) *H. S. Uhler*, On the 16th and 17th perfect numbers. Scripta math. **19** (1953), 128—131.

3) *U. Kühnel*, Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Zeitschr. **52** (1950), 202—211.

4) *R. Steuerwald*, Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N) = 3N$. Alexander Ostrowski zum 60. Geburtstag gewidmet. Arch. d. Math. **5** (1954), 449—451.

5) *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I. Journ. f. reine u. angew. Math. **187** (1949), 169—182.

$\alpha_4 = 2$ führt wegen $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19$; $\sigma(11^2) = 7 \cdot 19$ und $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61$ sogleich zu Widersprüchen.

$\alpha_4 = 3$ und $p_4 = 11$, 13 sind unmöglich wegen

$$\sigma(11^3) = 2^3 \cdot 3 \cdot 61 \quad \text{und} \quad \sigma(13^3) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17.$$

Aus $p_4 = 7$ folgt $\sigma(7^3) = 2^4 \cdot 5^2$. Weil 3 und 5 primitive Wurzeln (mod 7) sind, müßte $7^3 \mid 2^{\alpha_1+1} - 1$, also $\alpha_1 > 20$ sein. Dann enthielte[6] aber n einen Primteiler > 7. Wir müssen also nur noch den Fall

(3) $$\alpha_4 = 1$$

untersuchen. $p_4 = 13$ führt wegen $1 + 13 = 2 \cdot 7$ sofort zum Widerspruch und $p_4 = 11$ ergibt die folgenden Unmöglichkeiten:

$11 \mid 2^{\alpha_1+1} - 1$ liefert $31 \mid n$; $11 \mid \sigma(3^{\alpha_2})$ liefert $11^2 \mid n$; $11 \mid \sigma(5^{\alpha_3})$ liefert $71 \mid n$. Also bleibt

(4) $$p_4 = 7.$$

Daraus folgt sofort[7])

(5) $$\alpha_\varkappa \leqq 5 \text{ für } \varkappa = 1, 2, 3.$$

$\alpha_3 > 1$ liefert Widersprüche, ebenso $\alpha_2 > 3$. Wir erhalten schließlich für n die einzige Möglichkeit

(6) $$n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

§ 2.

Wir wollen in diesem Paragraphen den folgenden Satz beweisen, der ein Analogon zu einem früheren Satz über ungerade vollkommene Zahlen darstellt[8]):

Satz 1. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$ *und die ganze rationale Zahl* t *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k - 1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t \mid sn$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Ist l Primzahl und $l^j \mid \alpha_\varkappa + 1$ für $\varkappa = 2, \ldots, k$ (die Primzahlen $p_\varkappa$ sind nicht notwendig der Größe nach numeriert), dann ist $l^j \mid sn$. Wie in § 1 gezeigt wurde, sind für $3 \leqq k \leqq 4$ die einzigen mehrfach vollkommenen Zahlen

(1) $$2^3 \cdot 3 \cdot 5;\ 2^5 \cdot 3 \cdot 7;\ 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31;\ 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Wir sehen sofort, daß in diesen Fällen für t nur der Wert 2 in Frage kommt und dann sogar

(2) $$t^3 \mid n$$

erfüllt ist. Von jetzt an wollen wir bei diesem Beweis $k \geqq 5$ voraussetzen. Ist $p_\varkappa \equiv 1$ (mod l) für mindestens ein $\varkappa$ aus $2, \ldots, k$ erfüllt, so gilt

(3) $$l^j \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \mid sn.$$

Es sei nun

(4) $$p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k.$$

[6]) A. a. O. [5]).

[7]) A. a. O. [1]).

[8]) *H. J. Kanold*, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen. Journ. f. reine u. angew. Math. **183** (1941), 98—109, insbesondere III, (1).

Wir wollen zeigen, daß aus dieser Annahme ein Widerspruch folgt. Wegen $k > 2$ folgt auch $l > 2$. Es sei nun

$$1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2 + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = s_\varkappa p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Dabei können wir $1 \leqq s_\varkappa \mid s$ und $\xi_\varkappa \geqq 0$ voraussetzen. Die Anzahl der $s_\varkappa > 1$ sei k_s. Wir beachten, daß $s_\varkappa$ nur Primteiler $\equiv 1 \pmod{2l}$ enthalten kann[9]). Daraus folgt

$$k_s \leqq \frac{\log s}{\log(2l+1)}. \tag{6}$$

Für $k - 1 - k_s$ Zahlen $\varkappa > 1$ gilt nun

$$1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2 + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa}. \tag{7}$$

Die Kongruenz $1 + x + x^2 + \cdots + x^{l-1} \equiv 0 \pmod{p_1^{\xi_\varkappa}}$ hat genau $l - 1$ inkongruente Lösungen x. Das sind die Lösungen $p_\varkappa, p_\varkappa^2, \ldots, p_\varkappa^{l-1}$. Numerieren wir jetzt die Primzahlen $p_\varkappa$ so, daß

$$1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k - k_s \tag{8}$$

und

$$p_2 < p_3 < \cdots < p_{k-k} \tag{9}$$

gilt, dann folgt

$$p_1^{\xi_\varkappa} < p_{\varkappa+1} < p_1^{\xi_{\varkappa+1}} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k - k_s - 1. \tag{10}$$

Dabei ist

$$\xi_\varkappa \geqq (l-1)^{\varkappa-2} \quad (\varkappa = 2, \ldots, k - k_s). \tag{11}$$

Das ergibt mit Berücksichtigung von (6)

$$\begin{aligned} s &< \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \prod_{\nu=0}^{k-k_s-3} \left(1 + \frac{1}{p_1^{(l-1)^\nu}}\right) \cdot \prod_{\varkappa=k-k_s+1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \\ &\leqq \frac{p_1+1}{p_1-1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{k_s+2}{k_s+1} \cdot \prod_{\nu=1}^{k-k_s-3} \left(1 + \frac{1}{p_1^{(l-1)^\nu}}\right) \\ &< \frac{p_1+1}{p_1-1} (k_s + 2) \cdot \frac{p_1^{l-1}}{p_1^{l-1} - 1} \leqq \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^2 \left(\frac{\log s}{\log(2l+1)} + 2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Ist $k_s > 1$, so folgt

$$49 \leqq (2l+1)^2 \leqq s < 4\left(\frac{\log s}{\log 7} + 2\right) < 2{,}1 \log s + 8. \tag{13}$$

Diese Ungleichung stellt einen Widerspruch dar.

Ist $k_s \leqq 1$, so haben wir

$$s < \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^2 (k_s + 2) \leqq \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^2 \cdot 3, \tag{14}$$

ferner

$$k - k_s - 1 \geqq k - 2 \geqq 3. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich

$$1 + p_2 + \cdots + p_2^{l-1} = p_1^{\xi_2}, \tag{16}$$

---

[9]) A. a. O.[5]).

also $p_1 \equiv 1 \pmod{2l}$, $p_1 \geqq 2l + 1 \geqq 7$ und

$$(17) \qquad 7^{k_s} \leqq (2l+1)^{k_s} \leqq s < \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot 3 < 5.$$

Das liefert aber

$$(18) \qquad k_s = 0;\ s < \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot 2 < 3, \text{ d. h. } s = 2.$$

Dann müßte n aber eine *ungerade* vollkommene Zahl sein, also[10]) auch $k \geqq 6$. Ferner wäre dann nach (8)

$$(19) \qquad 1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k \geqq 6.$$

Nach früheren Ergebnissen[11]) muß

$$(20) \qquad l \geqq 5$$

sein. Das liefert $p_1 \geqq 11$; $s = 2 < \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^2 \frac{p_2}{p_2 - 1} \leqq \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}$.

Diese Ungleichung ist aber falsch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Wir wollen jetzt zunächst Satz 1 in dem Sonderfall $t = 2^j$ verschärfen. Daraus wird sich dann auch eine Verschärfung für den Fall $s = 2^\xi$ ergeben (j, ξ sind natürliche Zahlen).

Satz 2. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$ *und* $t = 2^j$ *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k - 1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t^3 \mid n$.

Beweis. Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, gilt der Satz für $k < 5$. Wir können also wieder

$$(1) \qquad k \geqq 5$$

annehmen. Es sei jetzt

$$(2) \qquad 2^\xi \mid s;\ 2^{\xi+1} \nmid s \qquad (\xi \geqq 0).$$

In jedem Fall ist dann

$$(3) \qquad 2^{(k-2)j-\xi} \mid n.$$

Wäre unser Satz falsch, so müßte $(k-2)j - \xi < 3j$, also $(k-5)j < \xi$, d. h.

$$(4) \qquad k - 4 \leqq \xi \leqq \frac{\log s}{\log 2} \leqq \frac{\log k}{\log 2}$$

sein. Die Ungleichung (4) stellt für $k > 7$ einen Widerspruch dar. Wir können somit

$$(5) \qquad s \leqq k \leqq 7$$

annehmen. Aus (2) erhalten wir

$$(6) \qquad \xi \leqq 2.$$

Dann folgt aus (1) und (4)

$$(7) \qquad 5 \leqq k \leqq 6;\ 1 \leqq \xi.$$

---

[10]) A. a. O. [3]).

[11]) *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. II. Journ. f. reine u. angew. Math. **188** (1950), 129—146, insbesondere Abschnitt III, (41).

Nach (2) ergibt sich wegen $s < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} < 6$

(8) $$s = 2 \text{ oder } = 4.$$

Der Fall $s = 2$ führt wieder zu einer *ungeraden* vollkommenen Zahl, somit zu $k = 6$. Aus (4) folgt dann $\xi \geqq 2$, was nach (2) aber $s = 2$ widerspricht. Also bleibt nur noch

(9) $$s = 4, \ \xi = 2$$

zu untersuchen übrig.

Die Abschätzung

(10) $$\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} < 4$$

zeigt, daß

(11) $$2 \cdot 3 \mid n$$

sein muß. Es sei wieder

(12) $$2^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Wir unterscheiden jetzt die zwei Fälle

(13) $$\begin{cases} \text{I.} \ p_1 = 2, \text{ d. h. } p_2 = 3;\ 2^{(k-1)j+1-\xi} = 2^{(k-1)j-1} \mid n; \\ \text{II.} \ p_2 = 2, \text{ d. h. } 2^{2^j-1} \mid n;\ 2^{(k-2)j-2} \mid n. \end{cases}$$

Der Fall I liefert $(k-1)\,j - 1 < 3j$, also den Widerspruch $k \leqq 4$. Der Fall II liefert $2^j - 1 < 3j$, d. h.

(14) $$2^j + 1 \leqq 3j;\ j \leqq 3.$$

$k = 6$ führt nach (13), II zu $4j - 2 < 3j$, also zu

(15) $$j = 1;\ 2^2 \mid n;\ \alpha_2 \geqq 2.$$

Nach (12) ist dann aber auch $2 \mid \alpha_2 + 1$, also $\alpha_2 \geqq 3$, somit $2^{3j} \mid n$. Wir können deshalb von jetzt an wegen (7)

(16) $$k = 5$$

annehmen. Aus $j = 3$ ergibt sich

(17) $$2^7 \sigma(2^7) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \mid n.$$

Weil $\sigma(5^7) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$ ist, muß

(18) $$\sigma(3^7)\,\sigma(17^7) \mid n$$

sein. Das ergibt aber ebenfalls einen Widerspruch zu (16). Wir können nach (14)

(19) $$j = 1 \text{ bzw. } = 2;\ 2^3 \nmid n \text{ bzw. } 2^6 \nmid n,$$

also $\alpha_2 < 3$ bzw. $\alpha_2 < 6$ voraussetzen. Die Abschätzung

(20) $$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} < 4$$

zeigt, daß

(21) $$\alpha_2 > 1, \text{ d. h. nach (12) auch } 2^3 \mid n$$

sein muß. Wir können nach (19) also

(22) $$j = 2$$

und nach (12) auch

$$(23) \qquad 4 \mid \alpha_2 + 1$$

annehmen. Dann liefert aber (19)

$$(24) \qquad \alpha_2 = 3,$$

während aus (22), (16) und (13), II

$$(25) \qquad \alpha_2 \geqq 4$$

folgt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s - 1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$, $s = 2^\xi$ *und die ganze rationale Zahl* t *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k - 1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t^3 \mid n$.

Beweis. Wir müssen nach Satz 2 noch zeigen: Ist die *ungerade* Primzahl l in t in der j-ten Potenz enthalten, so folgt $l^{3j} \mid n$. Nach Satz 1 ist $l^j \mid n$. Wir können also

$$(26) \qquad 2^\xi l^{\alpha_1} \prod_{\varkappa=2}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = \sigma(l^{\alpha_1}) \prod_{\varkappa=2}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}), \quad \alpha_1 \geqq j,$$

annehmen. Wir unterscheiden jetzt wieder zwei Fälle.

$$(27) \qquad \begin{cases} \text{I. } l^j \nmid \alpha_1 + 1, \text{ d. h. } l^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 2 \leqq \varkappa \leqq k; \\ \text{II. } l^j \mid \alpha_1 + 1, \text{ d. h. } \alpha_1 \geqq l^j - 1 \geqq 3^j - 1 \geqq 2j; \; l^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 3 \leqq \varkappa \leqq k. \end{cases}$$

Wäre unser Satz falsch, so wäre im Fall I

$$(28) \qquad p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa \neq 2, 3$$

und im Fall II

$$(29) \qquad p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa \neq 2, 3, 4; \; 3j > \alpha_1 \geqq l^j - 1, \text{ d. h. } j = 1, l = 3.$$

Im Fall I erhalten wir das Gleichungssystem

$$(30) \qquad \begin{cases} 1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{l-1} = l \cdot p_3^{b_3} \\ 1 + p_3 + p_3^2 + \cdots + p_3^{l-1} = l \cdot p_2^{b_2} \end{cases}$$

mit natürlichen Exponenten b_2, b_3. Dieses System führt aber nach früheren Ergebnissen[12]) zum Widerspruch.

Im Fall II ergeben (27) und (29)

$$(31) \qquad \begin{cases} 3 \mid \alpha_1 + 1; \; \alpha_1 \geqq 2; \; 3 \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 3 \leqq \varkappa \leqq k; \\ p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod 3 \text{ für } \varkappa \neq 2, 3, 4; \; 3 > \alpha_1. \end{cases}$$

Wir haben also nach (26) und (31)

$$(32) \qquad \alpha_1 = 2; \; \sigma(3^2) = 13 \mid n.$$

Aus (26) folgt nun

$$(33) \qquad 2^\xi \mid \prod_{\varkappa=2}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \mid 2^\xi \cdot n.$$

Es sei

$$(34) \qquad 2 \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \text{ für ein } \varkappa > 2.$$

[12]) *H. J. Kanold*, Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen. Journ. f. reine u. angew. Math. **189** (1952), 243—245.

Dann folgt für dieses $\varkappa$ nach (31)

$$(35) \qquad (1+p_\varkappa)(1+p_\varkappa+p_\varkappa^2)(1-p_\varkappa+p_\varkappa^2) \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}).$$

Wäre dieses spezielle $\varkappa > 4$, also nach (31) auch $p_\varkappa \equiv 2 \pmod 3$, so folgte aus (35) sofort $3^2 \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa})$. Dann müßte aber $p_3 \equiv p_4 \equiv 2 \pmod 3$ sein, was zu

$$(36) \qquad \prod_{\varkappa=3}^{k} (1+p_\varkappa+p_\varkappa^2) \mid p_2^{\alpha_2}$$

führen würde. Wegen $k \geqq 5$ ergibt dies einen Widerspruch[13]). Wäre $\varkappa = 3$ oder $= 4$, also z. B. $\varkappa = 3$, so wäre

$$(37) \qquad 1+p_3+p_3^2 = 3p_r^{b_r} \text{ und } 1-p_3+p_3^2 = p_s^{b_s}.$$

Dabei sind r, s entweder gleich 2, 4 oder gleich 4, 2; b_r kann nur 1 oder 2 sein, b_s muß eine Potenz von 3 sein[14]).

Wir beachten, daß nach (32) eine der Zahlen p_2, p_3, p_4 gleich 13 sein muß.

a) $p_3 = 13$ ergibt $p_r = 61$, $p_s = 157$.

$r = 4$ liefert mit $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$ einen Widerspruch zu (31).

$s = 4$ liefert mit $\sigma(157^2) = 3 \cdot 8269 \mid n$ ebenfalls einen Widerspruch zu (31).

b) $p_r = 13$ liefert $1+p_3+p_3^2 = 3 \cdot 13$ oder $= 3 \cdot 13^2$. Beides führt zum Widerspruch.

c) $p_s = 13$ liefert $1-p_3+p_3^2 = 13^{b_s} \equiv -1 \pmod 7$. Daraus folgt $p_3 \equiv 4 \pmod 7$; dann ergibt $1+p_3+p_3^2 \equiv 0 \pmod 7$ die Widersprüche $1+p_3+p_3^2 = 3 \cdot 7$ oder $= 3 \cdot 7^2$.

Wir haben somit gezeigt, daß (34) nicht gelten kann. Es bleibt noch übrig, die Unmöglichkeit von

$$(38) \qquad 2^\xi \mid \sigma(p_2^{\alpha_2})$$

nachzuweisen. Es ist dann

$$(39) \qquad 2 \mid 1+p_2 \mid 2n.$$

a) $p_2 = 13$ führt zu $7 \mid n$; $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19 \mid n$; $\sigma(19^2) = 3 \cdot 127 \mid n$. Das widerspricht (31).

b) $p_3 = 13$ führt zu $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n$.

$p_2 = 61$ liefert $31 \mid n$; $\sigma(31^2) = 3 \cdot 331 \mid n$ und damit einen Widerspruch zu (31).

$p_4 = 61$ liefert $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$; $p_2 = 97$. Dann folgt aber aus $p_2+1 = 2 \cdot 7^2 \mid n$ ein Widerspruch zu (31). Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4.

Wir werden in diesem Paragraphen eine frühere numerische Abschätzung über ungerade vollkommene Zahlen verschärfen und auf ungerade mehrfach vollkommene Zahlen ausdehnen[15]). Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 1. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $sn \equiv 1 \pmod 2$. *Dann ist* $n > 10^{20}$.

[13]) A. a. O. [11]).

[14]) *T. Nagell*, Des équations indéterminées $x^2+x+1=y^n$ et $x^2+x+1=3y^n$. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I, **2**, 1—14 (1921).

[15]) *H. J. Kanold*, Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl. Journ. f. reine u. angew. Math. **186** (1944), 25—29.

Beweis. Wir gehen aus von der Beziehung

(1) $$sn = s \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \equiv 1 \pmod 2.$$

Daraus sehen wir, daß

(2) $$\alpha_\varkappa \equiv 0 \pmod 2 \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k$$

sein muß. Wir wollen nun zeigen, daß aus (1) und $n < 10^{20}$, d. h. nach (2) auch

(3) $$p_1 p_2 \cdots p_k \leqq \sqrt{n} < 10^{10}$$

ein Widerspruch folgt. Weil

(4) $$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 > 10^{10}$$

ist, können wir

(5) $$k \leqq 9$$

annehmen. Es ist dann

(6) $$3 \leqq s < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} < 4,$$

also

(7) $$s = 3.$$

Wegen

(8) $$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} < 3$$

und (5) erhalten wir

(9) $$8 \leqq k \leqq 9.$$

Wegen (2) folgt aus $5 \mid n$ bzw. $17 \mid n$, daß n mindestens einen Primteiler der Restklasse 1 (mod 10) bzw. (mod 34) mindestens in der 4. bzw. 16. Potenz besitzt[16]). Somit liefert $17 \mid n$ den Widerspruch

(10) $$n > 103^{16} > 10^{32}.$$

$k = 9$ ergibt dann entweder

(11) $$\sqrt{n} > 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 > 10^{10}$$

oder

(12) $$\sqrt{n} > 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 > 10^{10}.$$

Also bleibt noch

(13) $$k = 8.$$

Die Abschätzung

(14) $$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} < 3$$

zeigt, daß (13) zum Widerspruch führt. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

---

[16]) A. a. O. [15]).

Hilfssatz 2. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $n \equiv 1 \pmod 2$ *und* $s > 2$. *Dann ist* $n > 10^{20}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 können wir

(15) $$s \geqq 4$$

annehmen. Aus der Ungleichung

(16) $$4 \leqq s < \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{p_k}{p_k - 1}$$

folgt

(17) $$k > 20 \text{ und } n > 10^{30},$$

wie bei früheren Abschätzungen gezeigt wurde[17]).

Satz 4. *Es sei* $n < 10^{20}$ *eine ungerade natürliche Zahl. Dann kann n keine vollkommene oder mehrfach vollkommene Zahl sein.*

Beweis. Nach dem vorangehenden Hilfssatz müssen wir noch zeigen, daß es unterhalb von 10^{20} keine ungerade vollkommene Zahl geben kann. Wir bezeichnen die ungerade vollkommene Zahl wie in früheren Arbeiten (vgl. z. B. Anmerkung [8])) und gehen aus von der Gleichung

(18) $$n = p^\alpha \prod_{\varrho=1} q_\varrho^{2\beta_\varrho}$$
$$= \frac{p+1}{2}\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - p + p^2 - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \prod_{\varrho=1}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}).$$

Dabei gilt nach Euler die Kongruenz

(19) $$p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4.$$

Ferner ist[18])

(20) $$r \geqq 5.$$

Auf Grund früherer Ergebnisse[19]) können wir weiterhin annehmen

(21) $$\begin{cases} n \neq p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^2 \cdots q_r^2 \text{ mit } 2\beta_1 < 10; \\ n \neq p q_1^{2\beta_1} q_2^2 \cdots q_r^2; \; n \neq p^\alpha \cdot 3^{2\beta_1} \cdot q_2^2 \cdots q_r^2, \end{cases}$$

außerdem[20])

(22) $$n \neq p^\alpha q_1^4 q_2^4 q_3^2 \cdots q_r^2.$$

Wir erhalten daraus, unter Berücksichtigung, daß n mindestens einen Primteiler $\geqq 61$ enthalten muß[21]), für n die Abschätzung

(23) $$10^{20} > n \geqq p \cdot q_1^6 \cdot q_2^4 q_3^2 \cdots q_r^2 \geqq 61 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdots q_r^2.$$

Aus $r > 7$ ergibt sich somit

(24) $$n \geqq 61 \cdot 3^4 \cdot 5^2 (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23)^2 > 10^{20}.$$

---

[17]) *H. J. Kanold*, Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen. Arch. d. Math. **6** (1953), 399—401.

[18]) A. a. O. [3]).

[19]) A. a. O. [11]).

[20]) *H. J. Kanold*, Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen, Journ. f. reine u. angew. Math. **192** (1953), 24—34.

[21]) A. a. O. [15]).

Die Bedingungen (20) und (24) ergeben zusammen

(25) $$5 \leqq r \leqq 7.$$

Das führt zu[22])

(26) $$3 \mid n.$$

Wir können nach (19) o. B. d. A.

(27) $$q_1 = 3$$

setzen. Wegen $(q_\varrho^{2\beta_\varrho}, 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}) = 1$ folgt aus (18)

(28) $$n = f_\varrho q_\varrho^{2\beta_\varrho}(1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho})$$

mit ganzzahligem $f_\varrho \geqq 1$. Es sei nun

(29) $$11 \mid n$$

angenommen. Wegen (19) und (27) können wir

(30) $$q_2 = 11$$

setzen. Aus (28) folgt

(31) $$10^{20} > n > 11^{4\beta_2}, \text{ d. h. } 2\beta_2 \leqq 8.$$

$2\beta_2 = 2$ oder $= 8$ führt zu $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \mid n$ und zu $\dfrac{\sigma(n)}{n} > 2$.

$2\beta_2 = 6$ liefert $\sigma(11^6) = 43 \cdot 45319 \mid n$. Dann ist wegen (19)

(32) $$n > 5 \cdot 3^2 \cdot 11^6 \cdot 43^2 \cdot 45319^2 > 10^{20}.$$

$2\beta_2 = 4$ liefert $\sigma(11^4) = 5 \cdot 3221 \mid n$. Da aus $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \mid n$ ein Widerspruch folgt[23]), muß

(33) $$p = 5, \; \alpha = 1$$

sein. Wir erhalten damit aus (18)

(34) $$\begin{aligned} &5 \cdot 3^{2\beta_1} \cdot 11^4 \cdot 3221^{2\beta_3} q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r} \\ &= 3(1 + 3 + \cdots + 3^{2\beta_1}) \cdot 5 \cdot 3221 \cdot \sigma(3221^{2\beta_3}) \cdot \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}). \end{aligned}$$

Nach (34) muß

(35) $$3221 \mid \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho})$$

sein, da $3221 \mid \sigma(3^{2\beta_1})$ wegen $3221 \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ unmöglich ist. Für ein $\varrho \geqq 4$ muß also

(36) $$q_\varrho^{2\beta_\varrho+1} \equiv 1 \pmod{3221}$$

gelten. Weil

(37) $$3221 - 1 = 2^2 \cdot 5 \cdot 161$$

ist, muß entweder

(38) $$2\beta_\varrho + 1 \geqq 161$$

oder

(39) $$5 \mid 2\beta_\varrho + 1$$

sein.

[22]) A. a. O. [15]).
[23]) A. a. O. [15]).

Aus (38) ergibt sich sogleich

(40) $$n > q_\varrho^{2\beta_\varrho} \geqq 7^{160} > 10^{20}.$$

Im Fall (39) ist

(41) $$1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^4 \equiv 0 (\bmod 3221).$$

Nun besitzt die Kongruenz $1 + x + \cdots + x^4 \equiv 0 (\bmod 3221)$ die vier Lösungen $x \equiv 11$, 11^2, 11^3, $1757 (\bmod 3221)$. Weil 1757 keine Primzahl ist, muß also $q_\varrho > 3221$ sein. Dann ist aber nach (28)

(42) $$n > q_\varrho^8 > 3000^8 > 10^{20}.$$

Die Annahme (29) widerspricht also $n < 10^{20}$. Wir können von nun an voraussetzen

(43) $$11 \nmid n.$$

Jetzt können wir auch (25) verschärfen. Denn aus $r = 7$ folgt nach (23) und (43), unter Berücksichtigung, daß $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ zu $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$ führt, die Abschätzung

(44) $$n > 61 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20}.$$

Es bleiben somit noch die Möglichkeiten

(45) $$r = 5, 6.$$

Wir wollen jetzt

(46) $$17 \mid n$$

annehmen. Wenn $p = 17$ ist, folgt aus (18), daß n mindestens einen Primteiler $\equiv 1 (\bmod 34)$ in mindestens der 16. Potenz enthält. Das liefert mit Hilfe von (28)

(47) $$n > 103^{32}.$$

Wenn $q_2 = 17$ ist, so ist entweder ebenfalls $n > 10^{20}$ oder es gilt

(48) $$17^{2\beta_2} \mid \frac{p+1}{2}.$$

Dann ist $p + 1 \geqq 2 \cdot 17^{2\beta_2}$, also

(49) $$p \nmid 1 + 17 + \cdots + 17^{2\beta_2} < \frac{17}{16} \cdot 17^{2\beta_2}.$$

Aus (18) und (27) sehen wir, daß

(50) $$\begin{aligned} 10^{20} > n &\geqq \frac{p+1}{2} \sigma(3^{2\beta_1}) \sigma(17^{2\beta_2}) \prod_{\varrho=3}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \\ &\geqq 17^{2\beta_2}(1 + \cdots + 17^{2\beta_2}) (2 \cdot 17^{2\beta_2} - 1) (1 + 3 + 3^2) \prod_{\varrho=3}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \\ &> 26 \cdot 17^{6\beta_2} \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \end{aligned}$$

gelten muß. Daraus folgt sofort

(51) $$2\beta_2 = 2 \text{ oder } = 4.$$

Im Fall $2\beta_2 = 4$ ergibt (50) die Ungleichung

(52) $$10^{20} > 26 \cdot 17^{12} \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) > 1{,}5 \cdot 10^{16} \cdot \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}),$$

d. h.

$$(53)\qquad \prod_{\varrho=4} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) < \frac{20000}{3} < 7000;\ r = 5;\ 2\beta_4 = 2\beta_5 = 2.$$

Nach (43) ergibt (53) einen Widerspruch, wenn $5 < q_4 < q_5$ ist. Wir können also

$$(54)\qquad q_4 = 5,\ q_3 = 31,\ q_5 = 13$$

annehmen. Dann liefert $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n$ einen Widerspruch.

Im Fall $2\beta_2 = 2$ folgt

$$(55)\qquad \sigma(17^2) = 307 \mid n;\ q_3 = 307.$$

Da $307 \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ ist, folgt aus $2\beta_3 \geqq 4$ sofort

$$(56)\qquad n > 307^4 \sigma(307^4)\, \sigma(3^{2\beta_1}) > 10^{20}.$$

Aus $2\beta_3 = 2$ ergibt sich

$$(57)\qquad \sigma(307^2) = 3 \cdot 43 \cdot 733 \mid n.$$

Daraus erhalten wir wegen (48), d. h. $p \geqq 577$

$$(58)\qquad n > 577 \cdot 3^2 \cdot 17^2 \cdot 307^2 \cdot 43^2 \cdot 733^2 > 10^{20}.$$

Die Annahme (46) hat zu Widersprüchen geführt. Von nun an sei

$$(59)\qquad 17 \nmid n.$$

Die Abschätzung

$$(60)\qquad \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{61}{60} < 2$$

zeigt uns, daß

$$(61)\qquad (n, 5 \cdot 7) > 1$$

sein muß. Wir wollen jetzt den Exponenten $2\beta_1$ von 3 nach oben abschätzen. Wir beachten dabei die früheren Ergebnisse über Kreisteilungspolynome[24]). Es sei zunächst

$$(62)\qquad p \equiv 1 \pmod 3.$$

Dann folgt aus (18)

$$(63)\qquad \begin{aligned} 10^{20} > n &\geqq \frac{p+1}{2}\, \sigma(3^{2\beta_1}) \prod_{\nu=1}^{2\beta_1} (1 + (6\nu + 1) + (6\nu + 1)^2) \\ &> 7 \cdot 3^{2\beta_1} \prod_{\nu=1}^{2\beta_1} 36\,\nu^2 = 7 \cdot 108^{2\beta_1} ((2\beta_1)!)^2. \end{aligned}$$

Das liefert sogleich

$$(64)\qquad 2\beta_1 \leqq 6.$$

$2\beta_1 = 6$ ergibt $1093 \mid n$ und

$$(65)\qquad n > 7 \cdot 1093 \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(13^2) \cdot \sigma(19^2) \cdot \sigma(31^2) \cdot \sigma(37^2) \cdot \sigma(547^2) > 10^{20}.$$

Der Fall $2\beta_1 = 4$ ist nach (43) wegen $\sigma(3^4) = 11^2$ nicht möglich. Also haben wir aus der Annahme (62) die Bedingungen

$$(66)\qquad 2\beta_1 = 2;\ \sigma(3^2) = 13 \mid n$$

hergeleitet. Es sei nun

$$(67)\qquad p \equiv 2 \pmod 3,$$

---

[24]) A. a. O. [5]).

d. h. nach (19) auch $p \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$. Wir nehmen ferner an

(68) $$3^{\xi} \mid p+1;\ 3^{\xi+1} \nmid p+1.$$

Wir erhalten aus (18)

(69) $$\begin{aligned} n &> \frac{p+1}{2} \cdot p \cdot \sigma(3^{2\beta_1}) \prod_{\nu=1}^{2\beta_1-\xi} \left(1 + (6\nu+1) + (6\nu+1)^2\right) \\ &> 65 \cdot 3^{3\xi-3} \cdot 108^{2\beta_1-\xi} \cdot \left((2\beta_1-\xi)!\right)^2 = f(\xi). \end{aligned}$$

Sofort sehen wir, daß für $\xi = 1, \ldots, 2\beta_1 - 1$ die Abschätzung

(70) $$\frac{f(\xi+1)}{f(\xi)} = \frac{3^3}{108(2\beta_1-\xi)^2} < 1$$

gilt. Also ist

(71) $$n > f(2\beta_1) = 65 \cdot 3^{6\beta_1-3}.$$

Daraus erhalten wir

(72) $$2\beta_1 \leqq 12.$$

a) $2\beta_1 = 12$ liefert $\sigma(3^{12}) = 797161 \mid n$ und $n > 797161^4 > 10^{20}$.

b) $2\beta_1 = 10$ liefert

(73) $$n = p^{\alpha} \cdot 3^{10} \cdot 23^{2\beta_2} \cdot 3851^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r}.$$

Ist hierin $2\beta_3 \geqq 4$, so folgt

(74) $$n > 3851^8 > 10^{20}.$$

Also ist

(75) $$\sigma(3851^2) = 13 \cdot 1141081 \mid n.$$

Dann ist aber $n > 1141081^4 > 10^{20}$.

c) $2\beta_1 = 8$ ergibt

(76) $$n = p^{\alpha} \cdot 3^{8} \cdot 13^{2\beta_2} \cdot 757^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r}.$$

$2\beta_3 \geqq 4$ führt zu $n > 757^8 > 10^{20}$; also haben wir

(77) $$\sigma(757^2) = 3 \cdot 13 \cdot 14713 \mid n,\ q_4 = 14713,\ 2\beta_4 = 2;$$

weiterhin $\sigma(14713^2) \equiv 0 \pmod{19}$, d. h. $19 \mid n$; $q_5 = 19$. Nach (61) ist außerdem noch 5 oder 7 ein Teiler von n. Da $\sigma(14713^2)$ zu $p \cdot 13 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 757$ teilerfremd ist, müßte

(78) $$\sigma(14713^2) = 3 \cdot 19^b \leqq 3 \cdot 19^2$$

sein[25]). Das ist aber ein Widerspruch.

d) $2\beta_1 = 6$ liefert $\sigma(3^6) = 1093 \mid n$; $q_2 = 1093$, $2\beta_2 = 2$; $\sigma(1093^2) = 3 \cdot 398581 \mid n$; $n > 398581^4 > 10^{20}$.

e) $2\beta_1 = 4$ ergibt wieder einen Widerspruch zu (43).

Wir sehen, daß (66) in jedem Fall gelten muß. Es sei nun

(79) $$r = 6$$

angenommen. Ist $5 \nmid n$, so erhalten wir nach (23), (43) und (59)

(80) $$n \geqq 61 \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 3^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 > 10^{20}.$$

[25]) A. a. O. [14]).

Ist $5 \mid n$, so ist $(n, 7 \cdot 11 \cdot 17) = 1$ und nach früheren Ergebnissen[26])

$$(81)\quad \begin{cases} n \geqq 149 \cdot 13^6 \cdot 5^4 \cdot (3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20}, \text{ wenn } 5^6 \nmid n; \\ n \geqq 149 \cdot 5^6 \cdot 31^4 \cdot (3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23)^2 > 10^{20}, \text{ wenn } 5^6 \mid n,\ 5^6 \nmid p+1; \\ n \geqq p \cdot 5^6 \cdot 13^4 \cdot (3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20} \text{ wegen } p \geqq 2 \cdot 5^6 - 1. \end{cases}$$

Da die Annahme (79) zu Widersprüchen geführt hat, können wir nach (45) von jetzt ab

$$(82)\qquad r = 5$$

voraussetzen. Die Abschätzung

$$(83)\qquad \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{61}{60} < 2$$

zeigt, daß $7 \mid n$ entweder $19 \mid n$ oder $23 \mid n$ nach sich zieht. Ist $23 \mid \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho})$, so ist $2\beta_\varrho \geqq 10$ und $3 \neq q_\varrho \geqq 13$. Dann ist aber $n > 13^{20}$. Ist $23 \mid (1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{\alpha-1})$, so ist $\alpha \geqq 21$ und

$$(84)\qquad n \geqq p^\alpha \cdot \frac{1}{2} \sigma(p^\alpha) > \frac{1}{2} \cdot 5^{42} > 10^{20}.$$

Aus $23 \mid n$ folgt in jedem Fall $q_2 = 23$ und

$$(85)\qquad 23^{2\beta_2} \,\Big|\, \frac{p+1}{2};\ p \geqq 2 \cdot 23^2 - 1.$$

Nun ergibt

$$(86)\qquad \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{2 \cdot 23^2 - 1}{2 \cdot 23^2 - 2} < 2,$$

daß aus $7 \mid n$ auch

$$(87)\qquad 3^2 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \mid n$$

folgt.

a) $19^8 \mid n$ führt zu $n > 19^{16} > 10^{20}$.

b) Genau $19^6 \mid n$ liefert unter Beachtung, daß $\sigma(19^6)$ keine Quadratzahl ist, auch $n > 19^6 \cdot \sigma(19^6) \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 > 10^{20}$, wenn $p \neq 13$ ist und sonst

$$n > 19^6 \cdot \sigma(19^6) \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot q_4 > 10^{20}.$$

c) Genau $19^4 \mid n$ liefert $\sigma(19^4) = 151 \cdot 911 \mid n$. Dann ist aber

$$(88)\qquad \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{151}{150} \cdot \frac{911}{910} < 2.$$

d) Genau $19^2 \mid n$ ergibt $\sigma(19^2) = 3 \cdot 127 \mid n$. Dann muß n die folgende Gestalt besitzen:

$$(89)\qquad n = 13 \cdot 3^2 \cdot 7^{2\beta_1} \cdot 19^2 \cdot 127^2 \cdot 5419^2.$$

Dann liefert $\sigma(5419^2) \equiv 0 \pmod{31}$ sofort einen Widerspruch. $7 \mid n$ hat zu Widersprüchen geführt. Nach (61) können wir

$$(90)\qquad 5 \mid n$$

annehmen.

[26]) A. a. O. [15]).

Wir bekommen die beiden Fälle

$$\text{(91)} \qquad \begin{cases} \text{I.} \ n = 5^\alpha \cdot 3^2 \cdot 13^{2\beta_2} \cdot q_3^{2\beta_3} \cdots q_5^{2\beta_5}; \\ \text{II.} \ n = p^\alpha \cdot 3^2 \cdot 13^{2\beta_2} \cdot 5^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4} q_5^{2\beta_5}. \end{cases}$$

$2\beta_2 > 2$ führt wegen $\sigma(13^8) = 3^2 \cdot 61 \cdot 1609669$, $\sigma(13^6) = 5229043$, $\sigma(13^4) = 30941$ sowie $\frac{30941+1}{2} = 3^4 \cdot 191$ bzw. $\sigma(30941^2) = 157 \cdot 433 \cdot 14083$ zu Widersprüchen. Wir erhalten so

$$\text{(92)} \qquad \sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n.$$

Der Fall I führt wegen $\sigma(61^4) = 5 \cdot 131 \cdot 21491$ zu

$$\text{(93)} \qquad n > 5 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^4 \cdot 131^2 \cdot 21491^2 > 10^{20}.$$

Ist im Fall II $p = 61$, so ist auch $31 \mid n$. Aus $31^6 \mid n$ ergibt sich leicht $n > 10^{20}$; wir beachten, daß $\sigma(31^4) \equiv 0 \pmod{11}$ ist und $\sigma(31^2) = 3 \cdot 331$. Wir erhalten dann wieder $n > 10^{20}$ oder den Widerspruch $3^3 \mid n$.

Ist $p \neq 61$, so beachten wir die Gleichungen $\sigma(61^4) = 5 \cdot 131 \cdot 21491$ und $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97$. Ferner gilt die Kongruenz $\sigma(97^4) \equiv 0 \pmod{11}$. Aus alledem ergeben sich Widersprüche zu $n < 10^{20}$. Somit ist der Satz 4 vollständig bewiesen.

Eingegangen 20. August 1955.