SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Ph
Jahr: 1910
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN252457811_1910
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811_1910

LOG Id: LOG_0008
LOG Titel: Ueber die Hilbertsche Uniformisierung
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN252457811
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=252457811

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die Hilbertsche Uniformisierungsmethode[1]).

Von **Paul Koebe** in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Die vorliegende Arbeit knüpft an eine kürzlich von Herrn Hilbert in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Note „zur Theorie der konformen Abbildung" (Nachr. 17. Juli 1909, pag. 314) an. In dieser Arbeit gibt Herr Hilbert einen Weg an, um mit Hülfe der von ihm begründeten Methode des Dirichletschen Prinzip auf der denkbar allgemeinsten endlich- oder unendlich-vielblättrigen Riemannschen Fläche B die Existenz derjenigen Potentialfunktion nachzuweisen, welche in der Interpretation von Herrn Klein den Spannungszustand des aus einer Doppelquelle auf B entspringenden stationären elektrischen Stromes darstellt. Sei U die Potentialfunktion, 0 ($x = x_0$, $y = y_0$) der Punkt auf B, in welchem dieselbe unstetig wird, wie

$$r^{-1} \cos \varphi = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

(unter r und φ die Polarkoordinaten des Punktes mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y inbezug auf 0 verstanden), so ist für die betreffende Strömungsfunktion U außer der erwähnten Unstetigkeit folgende von Herrn Hilbert angegebene Minimaleigenschaft charakteristisch: Es sei k_ϱ irgend eine Kreislinie auf B mit hinreichend kleinem Radius ϱ und dem Mittelpunkt 0. Durch k_ϱ wird B in zwei Stücke zerlegt, deren eines, den Punkt 0 nicht enthaltendes wir mit B_ϱ bezeichnen. Ist $w(x, y)$ irgend eine in B_ϱ eindeutig, stetig und stückweise analytisch erklärte, auf k_ϱ verschwindende reelle Funktion, für welche das Doppelintegral

$$\iint_{B_\varrho} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

1) Ueber den Inhalt vorliegender Note, insbesondere des Abschnitts C habe ich kürzlich in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft sowie in der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg vorgetragen.

einen endlichen Wert hat, dann ist jedesmal

$$\iint\limits_{B_\varrho}\left[\left(\frac{\partial(U+w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(U+w)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy>\iint\limits_{B_\varrho}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, es besteht die Variationsgleichung

$$\iint\limits_{B_\varrho}(U_x w_x+U_y w_y)\,dx\,dy=0.$$

Ist der Bereich B schlichtartig, d. h. so beschaffen, daß er durch jeden inneren Rückkehrschnitt in zwei getrennte Stücke zerfällt[1]), so entsteht die Aufgabe, wenn unter V die zu U konjugierte Potentialfunktion verstanden wird, den Nachweis zu führen, daß $U+iV$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B auf einen schlichten, d. i. einblättrigen Bereich leistet, welcher von lauter zur Axe des Reellen parallelen geradlinigen Strecken begrenzt wird, deren einzelne sich auch auf einen Punkt reduzieren kann; und zwar soll dieser Satz im Sinne von Hilbert als eine unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft erkannt werden.

Einen derartigen Beweis entwickelte für den Fall des einfach zusammenhängenden und endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs Herr Hilbert selbst in seiner im Sommer-Semester 1909 gehaltenen Vorlesung über konforme Abbildung. Bei diesem Beweise kommt es darauf an, das Bild des Gesamtverlaufs der Strömungslinien $V=\text{const.}$ auf der Fläche B festzustellen. In den Abschnitten A und B vorliegender Arbeit widme ich dem Falle des einfach zusammenhängenden bezw. endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs ebenfalls eine besondere Untersuchung, welche mit der Hilbertschen in dem erwähnten Grundgedanken übereinstimmt.

Der allgemeine, unten im Abschnitt C mitgeteilte Beweis, betreffend den Fall des unendlich vielfach zusammenhängenden Bereichs B, ein Fall, welcher mit Rücksicht auf die allgemeinen Uniformisierungsprobleme (insbesondere Uniformisierung durch Funktionen mit imaginären Transformationen in sich)[2]),

1) Was bei jedem schlichten, d. i. einblättrigen Bereich, auch wenn derselbe unendlich-vielfach zusammenhängend ist, tatsächlich zutrifft.

2) Der Fall des einfach zusammenhängenden Bereichs umfaßt nur diejenigen Uniformisierungstheoreme, welche auf Funktionen mit nur einem Grenzkreise führen.

ebenfalls von größter Wichtigkeit ist, gelang mir mittels einer wesentlich anderen Gedankenkombination. Die Abbildungseigenschaft wird dabei in der Tat in dem von Hilbert gewünschten Sinne als eine unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft, nämlich durch Zuhilfenahme spezieller Variationen erkannt[1]).

Hinsichtlich der Darstellung möchte ich erwähnen, daß ich mich von dem Streben leiten ließ, die Eigenart und wunderbare Plastizität der Methode möglichst hervortreten zu lassen. Dementsprechend habe ich die Untersuchung an manchen Stellen mehr ausgestaltet, als dies zur Erlangung des Hauptzieles, nämlich des Beweises der Abbildungseigenschaft der Funktion $U+iV$ durchaus notwendig ist.

A. Das Abbildungstheorem für den einfach zusammenhängenden Bereich.

Es werde nunmehr B als ein einfach zusammenhängender ungeschlossener endlich- oder unendlich vielblättriger Bereich vorausgesetzt. In diesem Falle ist ohne weiteres klar, daß die zu U konjugierte Potentialfunktion V ebenso wie U eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B ist. Die Funktion $U+iV$ wird im Punkte 0 ($x = x_0$, $y = y_0$) unendlich wie $\frac{1}{z-z_0}$, wenn $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$ gesetzt wird.

Wir bemerken zunächst, daß es nicht möglich ist, eine ganz innerhalb B verlaufende geschlossene Linie L zu ziehen, welche den Punkt 0 nicht trifft und längs welcher die Funktion U einen konstanten Wert U_1 hat. Wäre dies nämlich der Fall, so könnten wir in demjenigen von L begrenzten Teilgebiete β von B, welcher den Punkt 0 nicht enthält, an Stelle der Funktionswerte U den konstanten Wert U_1 treten lassen[2]) und würden auf diese Weise den Wert des Dirichletschen Integrals durch Ueber-

1) In einer Note „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, 4. Mitteilung", (Gött. Nachr. 31. Juli 1909, p. 324 ff.) habe ich die Existenz der erwähnten Funktion U unabhängig von der Methode des Dirichletschen Prinzips in derselben Allgemeinheit wie Hilbert nach zwei verschiedenen Methoden dargetan und auch den vollständigen Beweis des genannten Abbildungssatzes im Falle des unendlich hohen Zusammenhanges geliefert, ein Beweis, bei welchem die bei meinen Methoden des Existenzbeweises sich mitergebende Hilbertsche Minimaleigenschaft der Funktion U ebenfalls eine fundamentale Rolle spielt. S. auch die Anmerkung 3 am Schlusse vorliegender Arbeit. Einen ersten Existenzbeweis habe ich in den Comptes Rendus, 1. juin 1909 veröffentlicht. Ein ebenfalls auf der Zuhülfenahme der Näherungsfunktionen beruhender Beweis wurde von R. Courant gefunden. (Göttinger Dissertation 1910.)

2) Vgl. meine erwähnte Note p. 333 oben.

gang von der Funktion U zu der in der angegebenen Weise modifizierten Funktion verringern. Es ist gleichfalls nicht möglich eine Linie $U = U_1$ zu ziehen, welche, wenn man sie rückwärts oder vorwärts verfolgt, den Punkt 0 nicht trifft und sich beidemale der Grenze des Bereiches B unbegrenzt nähert[1]). Eine solche Linie würde nämlich mit der Begrenzung des Bereichs B zusammen ein gewisses Teilgebiet β von B abgrenzen, welches 0 nicht enthält und in welchem wir wieder an Stelle der Funktionswerte U den konstanten Wert U_1 treten lassen könnten, indem wir dabei zugleich den Wert des Dirichletschen Integrals verringern. Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daß U in B_ϱ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, nämlich unterhalb M, wenn M das Maximum von $|U|$ auf k_ϱ bedeutet. Andernfalls würde man nämlich in demjenigen Teile von B_ϱ, in welchem etwa $U > M$ ist, die Funktionswerte U durch M ersetzen können und dadurch den Wert des Dirichletschen Integrals verringern (vgl. l. c. pag. 333). Weiter ergibt sich, daß an keiner Stelle des Bereichs B ein Staupunkt liegt, d. h. ein Punkt, für welchen gleichzeitig die partielle Ableitung der Funktion U nach x sowohl wie nach y verschwindet, oder anders ausgedrückt, ein Punkt, dessen unmittelbare Umgebung durch die Funktion $U+iV$ auf ein Windungsflächenstück abgebildet wird. Die Annahme eines solchen Staupunktes würde nämlich zur Folge haben, daß von dem betreffenden Staupunkte aus mindestens vier Aeste $U =$ einem konstanten Werte U_1, nämlich dem U-Werte in dem betrachteten Staupunkte, ausgehen. Von diesen vier Aesten könnten keine zwei in einem inneren, von 0 verschiedenen Punkte von B zusammentreffen, weil dadurch eine geschlossene Linie $U = U_1$ entstände. Es können andererseits höchstens zwei der Linien in 0 endigen, indem sie dann mit entgegengesetzter Richtung in 0 einlaufen. Demnach müßten mindestens zwei der erwähnten vier Linien sich der Grenze von B unbegrenzt nähern, da eine Häufungssingularität einer solchen Linie im Innern von B offenbar ausgeschlossen ist. Wir erhielten so einen Widerspruch mit dem vorhin gefundenen Satze, daß es keine von Rand zu Rand verlaufende den Punkt 0 nicht treffende Linie $U = U_1$ gibt.

1) Der Ausdruck „sich unbegrenzt der Grenze annähern" hat bei einem unendlich-vielblättrigen Bereich, allgemein zu reden, keinen Sinn. Wir verstehen darunter hier und im Folgenden nichts anderes als dies: die betreffende Linie bleibt, falls man sich den Bereich als Grenze endlich-vielblättriger analytisch begrenzter Näherungsbereiche in der Form $B = \lim\limits_{n=\infty} B_n$ dargestellt denkt, außerhalb jedes Näherungsbereichs mit noch so hohem Index, wenn man die Linie nur weit genug verfolgt.

Aus der Tatsache des Fehlens von Staupunkten folgt, daß alle Linien $U = U_1$ und $V = V_1$ in B völlig regulär verlaufen, indem sie an jeder Stelle von B (ausgenommen 0) eine eindeutig bestimmte Fortsetzungsrichtung haben. Die einzelnen Linien $U = U_1$ laufen daher entweder von 0 zu 0 oder von 0 nach der Grenze.

Betrachten wir nunmehr die Linien $V =$ const. näher. Ich behaupte: eine derartige Linie $V = V_1$ kann ebensowenig wie eine Linie $U = U_1$ eine geschlossenen 0 nicht treffenden Zug innerhalb B bilden oder einen 0 nicht treffenden Zug von Rand zu Rand. Der Beweis dafür ergibt sich durch Bildung einer speziellen Variation für dasjenige von der betrachteten Linie $V = V_1$ begrenzte Teilgebiet β von B, welches den Punkt 0 nicht enthält, nämlich der Variation

$$w(x, y) = U\varphi(V;\ V_1),$$

wobei unter $\varphi(V;\ V_1)$ eine Funktion von V verstanden wird, welche für alle V-Werte stetig, positiv und < 1 erklärt ist, für V_1 verschwindet und der Bedingung genügt, daß die Ableitung nach V, die auch Sprünge erleiden kann, unterhalb einer endlichen Schranke g bleibt. Man verifiziert sofort für die erwähnte Variation

$$\begin{aligned}
\iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy &= \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right] dU\,dV^{1)} \\
&= \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \\
&= \iint [\varphi(V;\ V_1)^2 + U^2\varphi'(V;\ V_1)^2][\,]\,dx\,dy \\
&< (1 + M^2 g^2) \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy
\end{aligned}$$

wobei mit M eine für β gültige obere Schranke von $|U|$ bezeichnet ist. Es hat also das Dirichletsche Integral für w einen endlichen Wert. Andererseits ist

$$\iint_\beta (U_x w_x + U_y w_y)\,dx\,dy = \iint_\beta \left(\frac{\partial w}{\partial U}\right) dU\,dV > 0$$

---

1) Wegen der Invarianz des Dirichletschen Integrals gegenüber konformen Abbildungen. Diese Invarianz besteht auch für die Variationsgleichung. Vgl. meine „vierte Mitteilung" l. c. pag. 351. Auch Herr Hilbert bediente sich bei seinem oben erwähnten Beweise dieser Invarianz.

wegen $\frac{\partial w}{\partial U} = \varphi(V; V_1) > 0$. Das ist ein Widerspruch mit der für alle zulässigen Variationen bestehenden Variationsgleichung. Man könnte wie vorher mit Hülfe der Linien $U =$ const. auch mit Hülfe der Linien $V =$ const. das Fehlen von Staupunkten nachweisen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß durch jeden Punkt von B eine und nur eine bestimmte Linie $V =$ const. geht und daß diese Linie entweder, vorwärts und rückwärts verfolgt, nach 0 läuft oder nur in der einen Richtung verfolgt nach 0 läuft, in der anderen Richtung verfolgt jedoch nach dem Rande. Eine innere Häufungssingularität der Linie ist nämlich wegen der Eindeutigkeit von V ausgeschlossen.

Es kann nicht mehr als zwei von 0 nach dem Rande laufende Linien $V =$ const. geben[1]). Um dies einzusehen, veranschaulichen wir uns den Verlauf der Linien $V =$ const. in der unmittelbaren Nähe des Punktes 0; (Fig. 1). Nehmen wir an, daß es drei verschiedene Linien $V =$ const. von 0 nach dem Rande gebe, so würden sicher zwei davon $V = V_1$ und $V = V_2$ von 0 in derselben Richtung auslaufen und wir könnten daher durch ein Linienstück $U = U_1$ in der Nachbarschaft des Punktes 0 (vgl. Fig. 2; lies U_1 statt U_2) ein Gebiet β bestimmen (in der Figur

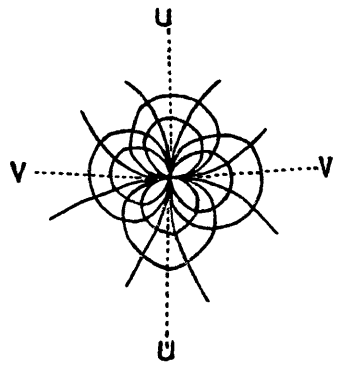

Fig. 1.

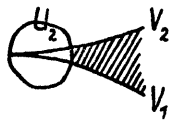

Fig. 2.

schraffiert) und für dieses eine Variation w in der Gestalt

$$w = (U - U_1)\varphi(V;\ V_1,\ V_2)$$

bilden, indem wir unter $\varphi(V; V_1, V_2)$ eine solche positive Funktion

1) Der Nachweis dieses Satzes gerade ist ein charakteristischer Punkt auch des von Hilbert in seiner Vorlesung entwickelten Beweises. Der hier gegebene Beweis desselben lehnt sich aufs engste an die Betrachtung pag. 350—351 meiner „vierten Mitteilung" an.

von V verstehen, welche nur für V_1 und V_2 verschwindet, im übrigen aber zugleich mit ihrer Ableitung nach V unterhalb einer festen Schranke bleibt. Für diese Variation ist dann wieder $\int\int\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$ endlich und $\iint(U_x w_x+U_y w_y)\,dx\,dy$ positiv, nicht Null.

Betrachten wir nunmehr den Gesamtverlauf aller Linien $V=$ const., so erkennen wir jetzt unmittelbar, daß derselben das durch die Figur 3 dargestellte typische Verhalten zeigen wird, eine Figur, welche auch sofort in Evidenz treten läßt, daß die Funktion $U+iV$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen einblättrigen Bereich leistet, dessen Begrenzung von einem endlichen Schlitz gebildet wird, parallel der Axe des Reellen. Dieser Schlitz kann sich auch auf einen Punkt reduzieren.

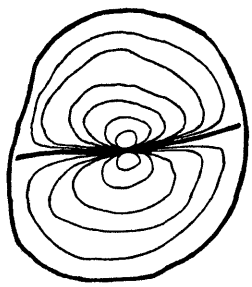

Fig. 3.

B. Der Fall des endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs.

Es sei jetzt B ein endlich vielfach zusammenhängender, schlichtartiger Bereich. In diesem Falle zeigt man zunächst nach einer von Hilbert angegebenen direkt auf die Minimaleigenschaft der Funktion U gegründeten Methode, daß die konjugierte Potentialfunktion V ebenfalls eine eindeutige Funktion auf der Fläche B ist[1]). Nunmehr betrachten wir die Linien $V=$ const. Eine solche Linie kann nicht geschlossen sein, außer wenn sie den Punkt 0 enthält; sie kann auch nicht von einer Randlinie zu derselben Randlinie zurückkehren, ohne durch 0 zu gehen. Diese beiden Bemerkungen ergeben sich genau ebenso wie die entsprechenden Bemerkungen in A. Es kann jedoch im vorliegenden Falle vorkommen, daß eine Linie $V=$ const. von einem Rande zu einem anderen Rande läuft oder von einem Rande nach dem Punkte 0 Hier ist nun wichtig zu bemerken, daß die Anzahl aller möglichen

1) Ich gebe den Beweis dieses Satzes zu Anfang des Abschnitts C dieser Arbeit wieder. Derselbe verläuft nämlich im Falle eines unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichtartigen Bereichs ebenso wie im Falle endlichen Zusammenhanges.

verschiedenen[1]) Linien $V = \text{const.}$ dieser Art endlich sein muß, da andernfalls einer von den folgenden Fällen eintreten müßte. Erster Fall: Es gibt zwei verschiedene Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ (eventuell kann für dieselben auch $V_1 = V_2$ sein) von einer Randlinie L_1 zu einer anderen Randlinie L_2. Zweiter Fall: Es gibt zwei verschiedene Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ von 0 nach einer und derselben Randlinie. Diese beiden Linien laufen ferner von 0 aus in derselben Richtung (eventuell kann auch $V_1 = V_2$ sein, in welchem Falle die beiden Linien in der Nähe des Punktes 0 jedenfalls koinzidieren würden, um sich dann an einem Staupunkte zu gabeln. Der erste Fall ist unmöglich, weil man in diesem Falle ein den Punkt 0 nicht enthaltendes Gebiet angeben kann, welches von den Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ begrenzt wird und für welches man die Variation $w = U\varphi(V; V_1, V_2)$ (siehe oben p. 64) bilden könnte. Der zweite Fall ist ausgeschlossen, weil man wie oben die Variation $(U - U_1)\varphi(V; V_1, V_2)$ in einem Gebiete β bilden könnte, das durch Hinzunahme einer Linie $U = U_1$ entsteht nach Art der Figur 2.

Nachdem die Endlichkeit der Anzahl der „singulären" Linien (von Rand zu Rand oder von Rand zu 0) festgestellt ist, denken wir uns dieselben sämtlich gezogen. Auf diesen Linien müssen bereits sämtliche möglicherweise vorhandenen Staupunkte liegen. Denn von einem solchen Staupunkte aus können wir mindestens vier Linien $V = V_1$ verfolgen, deren höchstens zwei auf 0 stossen können, sodaß die anderen sich notwendig zu einer Linie von Rand zu Rand vereinigen. Es ist hiermit auch die Endlichkeit der Anzahl der Staupunkte bewiesen, insofern als die Annahme unendlich vieler Staupunkte zur Folge haben würde, daß es sicher unendlich viele „verschiedene" Linien von Rand zu Rand geben würde[2]).

Betrachten wir nunmehr irgend einen Punkt in B, welcher weder mit 0 noch mit einer der erwähnten ausgezeichneten Linien koinzidiert, so geht durch denselben stets eine und nur eine Linie $V = \text{const.}$, welche sich als eine geschlossene Linie durch 0 darstellt. Indem wir also alle Linien $V = \text{const.}$ von 0 aus konstruieren, welche nicht zu „singulären" V-Werten gehören (V-Werte auf singulären Linien $V = \text{const.}$) erhalten wir eine vollständige Bedeckung der Fläche B, welche nun durch die singulären Linien

1) „Verschieden" nenne ich zwei Linien, wenn sie nicht ihrem ganzen Verlaufe nach koinzidieren.

2) Vgl. einen Beweis pag. 72 für die Unmöglichkeit der Existenz eines Staupunktes.

in eine endliche Anzahl von Teilgebieten, die sämtlich an 0 anstoßen, zerlegt ist. Daraus leuchtet in Anbetracht der Eindeutigkeit der Funktion $U+iV$ unmittelbar ein, daß letztere Funktion eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Fläche B auf einen einblättrigen Bereich leistet, welcher von endlich vielen zur Axe des Reellen parallelen Schlitzen begrenzt wird. Diese Abbildung zeigt auch, daß in Wahrheit überhaupt keine Staupunkte vorkommen.

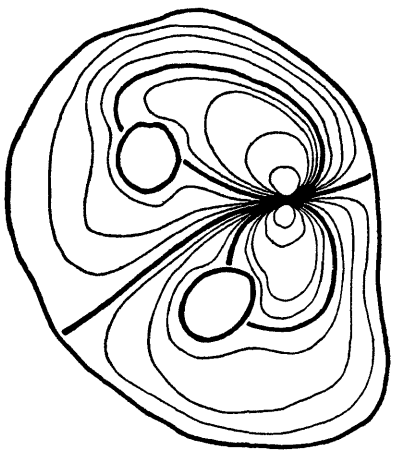

Fig. 4.

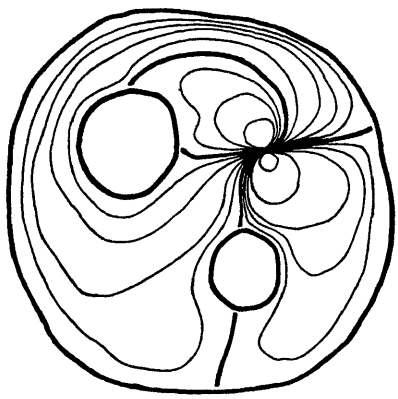

Fig. 5.

Zur Erläuterung dienen die Figuren 4 und 5. In Fig. 4 ist der Verlauf der Linien $V = \text{const.}$ im Falle eines dreifach zusammenhängenden Bereichs dargestellt so, wie er im allgemeinen sein wird. Es ist dies der Fall, in welchem von den parallelen Schlitzen keine zwei auf einer und derselben Geraden liegen. Figur 5 veranschaulicht den Fall, in welchem zwei der Schlitze auf einer und derselben Geraden liegen, während der dritte auf einer anderen Geraden liegt.

C. Der Fall des unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs.

Es sei nunmehr B der allgemeinste unendlich vielfach zusammenhängende schlichtartige Bereich mit endlicher oder unendlich hoher Blätterzahl. Man stelle sich der Einfachheit halber den Bereich B schlicht, d. i. einblättrig vor.

Wir beweisen eine Reihe von Sätzen, welche sich sämtlich in einfachster Weise aus dem Bestehen der Variationsglei-

chung ergeben und als deren Resultat sich die gewünschte Abbildungseigenschaft der Funktion $U+iV$ ergibt.

Satz I. Die zu U konjugierte Potentialfunktion V ist eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B.

I. Beweis[1]): Es ist zu zeigen, daß das Integral $\int \frac{dU}{dn} ds$ stets den Wert Null hat, wenn man dasselbe über eine ganz im Innern von B verlaufende, 0 nicht treffende einfach geschlossene Linie L erstreckt.

Die Linie L zerlegt die Fläche B, weil diese schlichtartig ist, in zwei Stücke, deren eines den Punkt 0 nicht enthaltendes, wir mit β'' bezeichnen, das andere mit $(B-\beta'')$. Wir denken uns in $(B-\beta'')$, der Linie L benachbart, eine geschlossene Linie L_1 gezogen, welche zusammen mit L einen zweifach zusammenhängenden längs L sich hinziehenden Streifen β' begrenzt, und definieren nunmehr eine Variation wie folgt. In β'' setzen wir $w = 1$, in β' hingegen setzen wir w gleich irgend einer eindeutigen stetigen stückweise analytischen Funktion, welche auf L_1 verschwindet, auf L hingegen den Wert eins erhält. Nun muß sein

$$\iint_{\beta'+\beta''} (U_x w_x + U_y w_y)\, dx\, dy = 0.$$

Es ist $\iint_{\beta''} = 0$, weil w_x und w_y in β'' identisch verschwinden, andererseits ist nach dem Greenschen Satze

$$\iint_{\beta'} = \int_L w \frac{dU}{dn} ds - \int_{L'} w \frac{dU}{dn} ds,$$

also mit Rücksicht auf die für w in β' gestellte Grenzbedingung

$$\int_L 1 \frac{dU}{dn} ds = 0.$$

Satz II. Es gibt kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von B enthält und welches außer von den Grenzen des Gebiets B nur von solchen in B verlaufenden Linien begrenzt wird, längs denen U einen für alle diese Linien konstanten Wert U_1 hat[2]).

---

1) Dieser Beweis rührt von Herrn Hilbert her.

2) Die Zahl der getrennten Begrenzungsstücke $U = U_1$ kann dabei unendlich groß sein. Selbstverständlich ist sie abzählbar, da an jedes Stück ein Teil von β anstößt.

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß die Annahme der Existenz eines solchen Gebiets die Möglichkeit mit sich brächte, von der Funktion U zu einer Funktion mit kleinerem Dirichletschen Integral überzugehen, indem man in β die Funktionswerte U durch den konstanten Wert U_1 ersetzt. (Vgl. pag. 61).

Satz III. Die Funktion U bleibt in einem Gebiete, welches die unmittelbare Umgebung des Punktes 0 ausschließt, zwischen endlichen Schranken.

Der Beweis ergibt sich analog wie oben pag. 62.

Satz IV. Ist β irgend ein Teilgebiet von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, so ist die obere und untere Grenze der von der Funktion U auf der Begrenzung von β, soweit sie innerhalb B verläuft, zugleich auch die obere und untere Grenze der Werte U im Gebiete β überhaupt.

Der Beweis ergibt sich ebenso wie der Beweis des Satzes III durch Zurückführung auf Satz II.

Satz V. Es gibt kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von B enthält und welches außer von den Grenzen des Gebiets B nur von solchen in B verlaufenden Linien begrenzt wird, längs denen V einen für alle diese Linien konstanten Wert V_1 hat.

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hülfe der Variation $U\varphi(V; V_1)$ geführt nach Analogie des oben pag. 63 gegebenen Beweises.

Satz VI. Die Funktion V bleibt in einem Teilgebiete β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, unterhalb einer endlichen Schranke.

Der Beweis ergibt sich aus Satz V, ebenso wie Satz III aus Satz II gefolgert wurde.

Satz VII. Ist β irgend ein Teilgebiet von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, so ist die obere und untere Grenze der von der Funktion V auf der Begrenzung von β, soweit sie innerhalb B verläuft, angenommenen Werte zugleich auch die obere und untere Grenze der von der Funktion V in β überhaupt angenommenen Werte.

Der Beweis folgt aus V und VI ebenso wie der Beweis von IV aus II und III.

Satz VIII. Es seien $U_1, V_1, V_2, \ldots, V_n$ eine endliche Anzahl von Werten. Dann gibt es kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält und außer von Begrenzungslinien von B nur von Linien bezw. Linien-

stücken $U = U_1$ oder $V = V_1, V_2, \ldots V_n$ begrenzt wird. Dabei ist auch der Fall einbegriffen, daß Linien $U =$ const. als Begrenzungslinien von β garnicht vorkommen.

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man in dem betreffenden Gebiete β die Variation $(U - U_1) \cdot \varphi(V; V_1, V_2, \ldots, V_n)$ bildet, wobei unter $\varphi(V; V_1, V_2, \ldots V_n)$ eine solche überall positive Funktion verstanden wird, deren Werte nebst den Werten der Ableitung nach V unterhalb einer endlichen Schranke bleiben und welche an den Stellen $V_1, V_2 \ldots, V_n$ verschwindet. Vgl. pag. 64 oben.

Satz IX. Konstruiert man in B das System aller Linien, längs welchen U einen bestimmten Wert U_1 hat, so wird durch dieses Liniensystem die Fläche B in genau zwei getrennte Stücke zerlegt. In dem einen Stück ist $U > U_1$, in dem anderen $U < U_1$.

Beweis: Es geht durch den Punkt 0 jedenfalls nur eine Linie $U = U_1$, folglich stoßen an 0 nur zwei derjenigen Gebiete an, in welche B durch das erwähnte Liniensystem zerlegt wird. In dem einen dieser Gebiete ist $U > U_1$, in dem anderen $U < U_1$. Gäbe es nun außer diesen beiden Gebieten noch ein weiteres, so würde dieses Stück ein solches Gebiet sein, wie wir es in Satz II als unmöglich erkannt haben.

Satz X. Es seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ n von einander verschiedene V-Werte. Zieht man alle Linien in B, längs welchen V einen der angegebenen Werte hat, so wird dadurch die Fläche B in genau $n+1$ getrennte Stücke zerlegt, für welche, wenn $V_1 < V_2 < \ldots < V_n$ bezeichnet ist, folgende Ungleichheiten charakteristisch sind: $V < V_1$; $V_1 < V < V_2$; $V_2 < V < V_3$; $\ldots$; $V_{n-1} < V < V_n$; $V_n < V$.

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen. Jedes der Gebiete, in welche B durch die genannten Linien zerlegt wird, muß wegen des Satzes VIII an 0 anstoßen. Nun wird die Umgebung des Punktes 0 durch das genannte Liniensystem offenbar in $2n$ Stücke zerlegt, ein Stück $V < V_1$, zwei $V_1 < V < V_2$, zwei $V_2 < V < V_3, \ldots$, zwei V_{n-1} $V < V_n$ und ein Stück $V_n < V$.: vgl. Fig. 8. Es gibt demnach höchstens $2n$ getrennte Gebiete. Nun aber müssen die jedesmal derselben Ungleichheitsbedingung genügenden, an 0 anstoßenden Stücke Teile eines und desselben zusammenhängenden Gebietes sein, in welchem ebenfalls die betreffende Ungleichheit erfüllt ist. Denn anderenfalls würde durch Hinzunahme einer Linie $U = U_1$, welche in unmittelbarer Nähe des

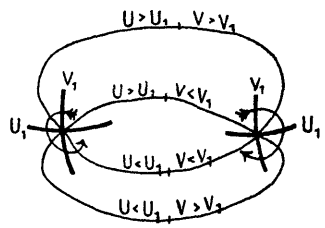

Fig. 6.

Punktes 0 verläuft (vgl. Figur 2 oben), ein den Punkt 0 nicht enthaltendes Teilgebiet β von B entstehen, welches von einem Linienstück $U = U_1$ und von zwei Liniensystemen $V = V_m$ bezw. $V = V_{m+1}$ begrenzt wird. Ein solches Gebiet kann aber nach VIII nicht existieren.

Satz XI. Wird zu dem erwähnten vollständigen Liniensystem $V = V_1, V_2, \ldots, V_n$ noch ein vollständiges Liniensystem $U = U_1$ hinzugenommen, so zerfällt die Fläche B in genau $2n+2$ Stücke, indem jedes der vorher erwähnten $n+1$ Gebiete in genau zwei Teile zerlegt wird, in deren einem $U > U_1$, in deren anderem $U < U_1$ ist.

Der Beweis beruht ebenso wie der Beweis von X auf Satz VIII.

Satz XII. **Durch Vermittlung der Funktion $U+iV$ wird die Fläche B umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten, d. i. einblättrigen Bereich S abgebildet. Die vollständige Begrenzung des Bereichs S liegt in einem endlichen Bezirk. Insbesondere existieren auf B keine Staupunkte.**

Beweis: Zunächst ist $U+iV$ nach Satz I eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B. Zu zeigen ist, daß diese Funktion nicht an zwei verschiedenen Stellen der Fläche B einen und denselben Wert annimmt. Der Beweis verläuft indirekt. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte auf B, für welche $U+iV$ einen und denselben Wert U_1+iV_1 annimmt. Wir dürfen voraussetzen, daß in diesen beiden Punkten die Ableitung der Funktion $U+iV$ nach $x+iy$ von null verschieden ist. Andernfalls könnten wir offenbar in der Nachbarschaft von P_1 und P_2 oder auch in unmittelbarer Nachbarschaft einer der Punkte zwei Punkte P_1' und P_2' angeben, für welche diese Annahme zutrifft und für welche wiederum $U+iV$ einen und denselben Wert hat.

Wir konstruieren das System aller Linien $U = U_1$ sowie das System aller Linien $V = V_1$ auf B. Die Fläche B zerfällt dadurch nach dem Satze X in genau vier Stücke. Jedes dieser Stücke stößt sowohl an den Punkt P_1 als auch an den Punkt P_2 an, in welchen Punkten sich die Linien $U = U_1$ und $V = V_1$ unter einem rechten Winkel schneiden. Fängt man in dem Gebiete $U > U_1$, $V > V_1$ an, so gelangt man bei Umkreisung des Punktes P_1 sowohl als auch bei Umkreisung des Punktes P_2 wegen der Konformität der durch die Funktion $U+iV$ vermittelten Abbildung nacheinander zu den Gebieten $U > U_1$, $V > V_1$; $U < U_1$, $V > V_1$; $U < U_1$, $V < V_1$; $U > U_1$, $V < V_1$. Die korrespondierenden Gebiete bei P_1 und P_2, d. s. solche Gebiete, für welche dieselben

Ungleichheitsbedingungen erfüllt sind, müssen sich auf Grund des Satzes X als Teile eines zusammenhängenden Gebiets auffassen lassen, in welchem die betreffenden Ungleichheitsbedingungen ebenfalls gelten. Demnach müßte es möglich sein, den vier Gebieten entsprechend je eine Linie von P_1 nach P_2 zu ziehen, so daß dieselben außer in P_1 und P_2 sich nicht treffen; (vgl. die Fig. 6, in welcher wir die Vorstellung eines schlichten Bereiches B zu Grunde legen, was jedoch für den Schluß unwesentlich ist; in der Figur 7 lies V_1 statt U_1). Daraus würde aber folgen, daß man die Punkte P_1 und P_2 in entgegengesetztem Sinne umkreisen müßte, um die vier Linien bezw. die vier Gebiete in derselben Reihenfolge anzutreffen, das ist ein Widerspruch mit der unmittelbar vorhergehenden Bemerkung, der zufolge der Drehungssinn bei P_1 und P_2 derselbe ist.

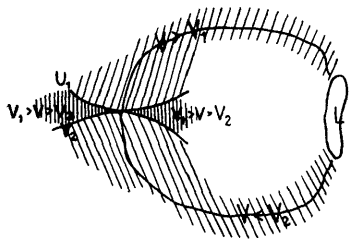

Fig. 7.

Der vorstehend entwickelte Gedanke führt auch unmittelbar zu dem Nachweis, daß ein Staupunkt auf B nicht existiert. Gäbe es nämlich einen Staupunkt, so könnte man durch denselben zwei oder mehr in dem Staupunkte sich schneidende Linienstücke $U = U_1$ legen, wenn U_1 den Wert der Funktion U im Staupunkte bezeichnet. Bei Umkreisung des Staupunktes würde man nun nach einander Gebiete $U > U_1$, $U < U_1$, $U > U_1$, $U < U_1$, ... antreffen, von welchen wir nur die vier ersten jetzt benutzen. Nach Satz IX müssen das erste und dritte Gebiet Teile eines zusammenhängenden Gebiets β_1 sein, in welchem $U > U_1$ ist, das zweite und vierte Teile eines zusammenhängenden Gebiets β_2, in welchem $U < U_1$ ist. Demnach wäre es möglich, durch den Staupunkt zwei geschlossene, nur im Staupunkt selbst sich schneidende Linien zu ziehen, deren eine ganz in β_1 verläuft, während die andere in β_2 verläuft. Das steht in Widerspruch mit der Schlichtheit bezw. Schlichtartigkeit der Fläche B, insofern als offenbar auf einer solchen Fläche zwei geschlossene Linien sich stets in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden.

Satz XIII: Die Funktion V geht bei der Annäherung an eine Begrenzung des Bereichs B stetig in einen konstanten Wert über.

Wir betrachten irgend eine Begrenzungslinie L des Bereichs B, indem wir uns denselben etwa schlicht vorstellen, vgl. die Fußnote p. 62. Wir konstruieren um L eine Folge ineinander geschachtelter geschlossener Linien L_1, L_2, L_3, ..., welche sämtlich ganz

innerhalb B verlaufen und in der Grenze jeden inneren Punkt von B ausschließen. Wir können dann in leicht verständlicher Weise setzen $L = \lim\limits_{n=\infty} L_n$. Die Funktion V wird auf L_n ein bestimmtes Maximum M_n und ein bestimmtes Minimum m_n haben. Nach Satz VII hat man

$$M_1 > M_2 > M_3 > \cdots; \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \cdots,$$

wobei noch stets für jeden Wert des Index n $M_n > m_n$ ist. Der Inhalt des Satzes XIII ist dann folgender:

$$\lim_{n=\infty} M_n = \lim_{n=\infty} m_n.$$

Wir nehmen zum Beweise an, es sei $\lim\limits_{n=\infty} M_n > \lim\limits_{n=\infty} m_n$. Bezeichnen wir den ersten limes mit V_2, den zweiten mit V_1, so ist $V_1 < V_2$. Durch das System aller in B verlaufenden Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ wird die Fläche B nach Satz X in genau drei Stücke zerlegt. Jedes dieser Stücke stößt sowohl an 0 als auch an L an. Konstruieren wir nun in dem Gebiete $V < V_1$ eine vollständig in B verlaufende Linie, welche 0 mit L verbindet, ebenso in dem Gebiete $V > V_2$ eine Linie, welche 0 mit L verbindet, so ist offenbar (vgl. Figur 7) das Gebiet $V_1 < V < V_2$ nicht mehr zusammenhängend, was im Widerspruch steht mit Satz X.

Fig. 8.

Es ist nicht notwendig, daß man zum Beweise gerade die oben angegebenen Limeswerte als Werte V_1 und V_2 benutzt, vielmehr könnte man ebenso irgend zwei Werte anstelle von V_1 und V_2 treten lassen, von welchen feststeht, daß sie noch in beliebiger Nähe der Linie L von der Funktion V angenommen werden. Diese Werte müssen nur der Bedingung genügen, von einander verschieden zu sein.

Satz XIV. Die Funktion $U+iV$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B auf einen schlichten, den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenen Bereich S, dessen vollständige Begrenzung ganz in einem endlichen Bezirke der Ebene enthalten ist. Die einzelne Begrenzungslinie ist entweder ein zur Axe des Reellen paralleler Schlitz oder ein Punkt.

Der Beweis dieses Satzes ist mit den Sätzen XII und XIII unmittelbar gegeben.

Satz XV. Die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit des Schlitzbereiches S hat den Inhalt Null,

d. h. es ist möglich, die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit in endlich viele geschlossene Kurven einzuschließen, welche einen beliebig kleinen Gesamtflächeninhalt abgrenzen.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, wenn man die Funktion U selbst, indem man dieselbe nach 0 hin willkürlich gegen Null abfallen läßt, als Variation benutzt[1]).

D. Anmerkungen.

Anmerkung 1. Ist B endlich-vielfach zusammenhängend, so folgt aus XIII sofort XII nach dem Satze von der Charakteristik des Randes.

Anmerkung 2. Faßt man im Falle unendlich hohen Zusammenhangs B als Grenze $B = \lim\limits_{n=\infty} B_n$ von Näherungsflächen endlichen Zusammenhangs auf, so ist, wenn $U_n + iV_n$ für B_n dieselbe Bedeutung hat, welche $U+iV$ für B hat, $U+iV = \lim\limits_{n=\infty}(U_n + iV_n)$ auf Grund pag. 338—343 meiner vierten Mitteilung. Man kann daher unter Zugrundelegung des Abschnitts B vorliegender Arbeit analog wie in der erwähnten Mitteilung die Abbildungseigenschaft der Grenzfunktion beweisen.

Anmerkung 3[2]). Die Methoden meiner vierten Mitteilung lassen sich vollständig vom Standpunkte des Dirichletschen Prinzips darstellen. Man braucht nur zu beachten, daß die Näherungsfunktion U_n, von welcher ich in dieser Mitteilung Gebrauch mache (längs der ganzen Begrenzung von B_n ist die normale Ableitung gleich Null) als Ausschnitt einer Funktion auf einer geschlossenen Fläche, nämlich der Fläche B_n als Fläche mit Vorderseite und Rückseite aufgefaßt werden kann. Der Funktion U_n hat man dabei auf der Rückseite genau dieselben Werte beizulegen wie auf der Vorderseite. Auf der erwähnten geschlossenen Fläche ist U_n allein durch seine zwei Unstetigkeiten in 0 (auf Vorderseite und Rückseite) charakterisiert. Man kann U_n auf dieser Fläche sowohl mittels der Schwarz-Neumannschen kombinatorischeu Methoden finden wie nach Hilbert mittels des Dirichletschen Prinzips. Die Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" ist eine unmittelbare Folge der Symmetrie der Funktion inbezug auf Vorderseite und Rückseite.

1) Vgl. meine vierte Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Gött. Nachr., 1909, insbesondere pg. 353.

2) Vgl. § 13 meiner Abhandlung „über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II." Math. Ann. 1910.