Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen.

Von

Torsten Carleman in Upsala.

Im folgenden wollen wir eine Auflösungsformel für die Integralgleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha} \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

herleiten. Diese Gleichung unterscheidet sich von der bekannten Abelschen Integralgleichung

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\, dy = f(x)$$

nur dadurch, daß in jener die Integrationsgrenzen fest sind.

Es möge zunächst die Lösbarkeit der homogenen Integralgleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha} \varphi(y)\, dy = 0 \tag{2}$$

untersucht werden. Zu dem Zwecke betrachten wir die analytische Funktion

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x-y)^\alpha} \varphi(y)\, dy \qquad (x > 1), \tag{3}$$

wo $\varphi(y)$ als eine absolut integrierbare Lösung von (2) angenommen wird, so beschaffen, daß

$$\frac{1}{|x-y|^\alpha} \varphi(y)$$

für $0 < x < 1$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.

Wir schreiben für x reell und < 1:

$$\left.\begin{aligned} F(x+i0) &= \lim_{\varepsilon=0} F(x+i\varepsilon), \\ F(x-i0) &= \lim_{\varepsilon=0} F(x-i\varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon > 0),$$

falls diese Grenzwerte existieren. Es gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(4) \qquad F(x+i0) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy + e^{-\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}\,dy, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0<x<1). \\ &(5) \qquad F(x-i0) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy + e^{\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}\,dy, \end{aligned}$$

Dies folgt leicht daraus, daß man infolge der Voraussetzungen eine solche Größe d finden kann, daß (bei festem reellen x)

$$\left|\int_{x-d}^{x+d} \frac{\varphi(y)}{(x\pm i\varepsilon-y)^\alpha}\,dy\right| \leqq \int_{x-d}^{x+d} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha}\,dy < \delta,$$

wo δ eine beliebige vorgegebene positive Größe ist. Berücksichtigen wir noch die Gleichung

$$(6) \qquad \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy + \int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}\,dy = 0,$$

so ergibt sich aus (4) und (5):

$$(7) \qquad F(x+i0) = -\,e^{-\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (0<x<1).$$

Ferner gilt:

$$(8) \qquad F(x+i0) = e^{-2\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (x<0).$$

Wüßten wir nur, daß die Grenzwerte

$$F(x+i0),\quad F(x-i0) \qquad (0<x<1)$$

gleichmäßig (in bezug auf x) existieren, so würde $F(x)$ über die Strecke $0<x<1$ hinaus analytisch fortsetzbar sein, infolge des folgenden bekannten Satzes: Wenn die Definitionsgebiete zweier analytischen Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ eine gemeinsame rektifizierbare Begrenzungslinie L haben und dort stetig miteinander zusammenhängen, so läßt sich $F_1(z)$ durch $F_2(z)$ über L hinaus analytisch fortsetzen und umgekehrt.

Um die Schwierigkeit bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz zu vermeiden, betrachten wir statt $F(x)$ die Funktion

$$(9) \qquad \psi(x) = \int^x F(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy.$$

Da $|x-y|^{1-\alpha}$ endlich bleibt, und weil ferner $\int^x |\varphi(x)|\,dx$ absolut stetig ist, so konvergieren $\psi(x+i\varepsilon)$ und $\psi(x-i\varepsilon)$ für $\varepsilon\longrightarrow 0$ im Intervalle $0<x<1$ gleichmäßig gegen stetige Grenzwerte, die durch die Formeln

$$
(10)\quad \begin{cases} \psi(x+i0) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy + e^{\pi i(1-\alpha)}\int\limits_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy\right], \\ \psi(x-i0) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\int\limits_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy + e^{-\pi i(1-\alpha)}\int\limits_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy\right] \end{cases}
$$

dargestellt werden können. Falls wir in der Gleichung (2) x durch s ersetzen und dann in bezug auf s von Null bis x integrieren, so ergibt sich

$$
(11)\quad \int\limits_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy - \int\limits_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy = k \quad (k = \text{Konstante}).
$$

Aus (10) ergibt sich nun

$$
\psi(x+i0) = -e^{-\alpha\pi i}\psi(x-i0) + k',
$$

wo k' eine Konstante bedeutet. Hieraus folgt, wie oben, daß $\psi(x)$ über die Strecke (01) hinaus analytisch fortgesetzt werden kann. Infolge (9) gilt dann dasselbe von $F(x)$. Daß $F(x)$ auf der negativen reellen Achse regulär bleibt, geht aus (3) unmittelbar hervor. Aus (7) und (8) folgt nun, daß

$$
(12)\qquad \Phi(x) = F(x)\,[x(x-1)]^{\frac{1+\alpha}{2}}
$$

eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion ist, für welche nur 0, 1 und ∞ singuläre Punkte sein können. In der Umgebung von $x=\infty$ besitzt $F(x)$, wie dies aus (3) leicht folgt, eine Entwicklung von der Form

$$
\frac{1}{x^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}.
$$

Folglich kann $\Phi(x)$ höchstens wie $|x|$ unendlich werden. In der Umgebung von $x=1$ gilt ferner, da $\Phi(x)$ eindeutig ist, eine Darstellung von der Form

$$
F(x) = (x-1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-1)^n,
$$

und somit für $\int\limits^x F(x)\,dx$:

$$
\int\limits^x F(x)\,dx = C + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n(x-1)^{n+\frac{1-\alpha}{2}}}{n+\frac{1-\alpha}{2}} = C + (x-1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+\frac{1-\alpha}{2}}.
$$

Folglich:

$$
(13)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+\frac{1-\alpha}{2}} = \left[\int\limits^x F(x)\,dx - C\right](x-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.
$$

Da $\int^{x} F(x)\,dx$ für $-\pi \leqq \arg(x-1) \leqq \pi$ endlich bleibt, so können, nach einem Satze von Weierstraß, in der Reihe auf der rechten Seite von (13) keine negativen Potenzen auftreten. Ferner muß die Reihe für $x = 1$ verschwinden. Somit gilt

$$a_n = 0 \qquad (n < 0).$$

Folglich ist $\Phi(x)$ für $x = 1$ regulär. Aus der für $x > 1$ gültigen Ungleichung

$$|F(x)| \leqq \frac{1}{|x-1|^{\alpha}} \int_0^1 |\varphi(y)|\,dy$$

ergibt sich, daß $\Phi(x)$ im Punkte $x = 1$ verschwindet. Eine analoge Überlegung zeigt, daß $\Phi(x)$ auch im Punkte $x = 0$ regulär bleibt und dort mindestens eine einfache Nullstelle besitzt. Weil also $\Phi(x)$ eine ganze Funktion ist, die in 0 und 1 verschwindet, und welche im Unendlichen höchstens wie $|x|$ wächst, so muß $\Phi(x)$ und damit auch $F(x)$ identisch verschwinden. Aus (4) und (5) schließt man:

$$\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{\alpha}}\,dy = \frac{1}{e^{\alpha\pi i} - e^{-\alpha\pi i}} [F(x - i0) - F(x + i0)].$$

Es gilt somit:

$$\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{\alpha}}\,dy = 0,$$

woraus, nach der Theorie der Abelschen Integralgleichung

$$\int_x^1 \varphi(y)\,dy = 0$$

folgt. Es hat sich somit ergeben:

Jede summierbare[1]) *Lösung der Gleichung*

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \varphi(y)\,dy = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

(von solcher Art, daß auch $\frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \varphi(y)$ eine summierbare Funktion von y ist für $0 < x < 1$) *ist notwendig bis auf eine Nullmenge identisch gleich Null.*

---

[1]) Integrierbar im Sinne von Lebesgue.

Um die Lösung der allgemeinen Gleichung (1) zu finden, betrachten wir wiederum die Funktion

$$F(x)=\int_0^1 \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy,$$

wo $\varphi(y)$ als eine Lösung von (1) angenommen ist. Man erhält wie oben die Relationen:

$$(14)\quad F(x+i0)=e^{-2\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (-\infty<x<0),$$

$$(15)\quad F(x+i0)=-e^{-\alpha\pi i}F(x-i0)+(1+e^{-\alpha\pi i})f(x) \qquad (0<x<1).$$

Betrachten wir nun statt $F(x)$ die Funktion

$$\Phi(x)=F(x)[x(x-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

so ergibt sich

$$(16)\qquad \Phi(x+i0)=\Phi(x-i0) \qquad (-\infty<x<0),$$

$$(17)\qquad \Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)=-2i\cos\frac{\alpha\pi}{2}f(x)[x(1-x)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \qquad (0<x<1).$$

Durch diese Gleichungen wird man zu dem Ansatz

$$(18)\qquad \Phi(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{s-x}f(s)[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}ds$$

geführt. Aus den Relationen

$$(19)\quad F(x+i0)=\int_0^x\frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy+e^{-\alpha\pi i}\int_x^1\frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy,$$

$$(20)\quad F(x-i0)=\int_0^x\frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy+e^{\alpha\pi i}\int_x^1\frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy \qquad (0<x<1)$$

erhält man

$$(21)\quad \int_x^1\frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy=\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}[F(x-i0)-F(x+i0)],$$

$$(22)\quad \int_0^x\frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy=\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}[e^{\alpha\pi i}F(x+i0)-e^{-\alpha\pi i}F(x-i0)].$$

Durch Einführung der Funktion $\Phi(x)$ ergeben sich aus

$$F(x+i0)=i[x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0),$$

$$F(x-i0)=-i[x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)$$

die folgenden Gleichungen

$$(23)\quad \int_x^1 \frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy = -\frac{1}{2\sin\alpha\pi}\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0)\right][x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

$$(24)\quad \int_0^x \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2\sin\alpha\pi}\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)\right][x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Wenden wir nun auf (24) die Abelsche Auflösungsformel an, so finden wir

$$(25)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(t+i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(t-i0)\right][t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}}\,dt.$$

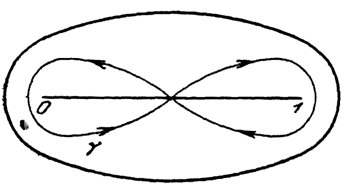
Es sei in der komplexen x-Ebene Γ_x eine Kurve, die vom Punkte x $(0 < x < 1)$ ausgehend, den Punkt $x = 0$ einmal im positiven Sinne umkreist und dann zu x zurückkehrt, ohne die positive reelle Achse zu schneiden. Man stellt leicht fest, daß (25) folgendermaßen geschrieben werden kann[2]):

$$(26)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x}\frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}\Phi(t)\,dt.$$

Bei Berücksichtigung von (18) ergibt sich schließlich

$$(27)\quad \varphi(x) = \frac{i\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x}\frac{[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\int_0^1\frac{1}{s-t}[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}f(s)\,ds.$$

Wir müssen noch verifizieren, daß (27) wirklich eine Lösung von (1) darstellt. Hierbei machen wir die Annahme, daß $f(s)$ auf der Strecke $0 \leqq s \leqq 1$ analytisch ist, obwohl weit geringere Voraussetzungen genügen würden. Es sei D ein die Strecke (01) einschließendes Gebiet, wo $f(s)$ regulär bleibt. Es sei ferner γ die in der beistehenden Figur gezeichnete, sich selbst durchschneidende Kurve. Man sieht leicht, daß



$$\int_0^1 [s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{s-t}f(s)\,ds = \frac{i}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\int_\gamma [s(s-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{s-t}f(s)\,ds$$

[2]) Man denke sich die t-Ebene längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten und wähle für $[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}$ und $\frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}$ diejenigen Zweige, die für $t > 1$ auf der Oberseite der reellen Achse reell sind.

für t außerhalb γ. Nehmen wir an, daß t innerhalb γ liegt, so ergibt sich

$$(28) \quad \int_0^1 [s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{s-t} f(s)\,ds = \frac{i}{2\cos\alpha\frac{\pi}{2}} \int_\gamma [s(s-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{s-t} f(s)\,ds \pm \frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} f(t)[t(t-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Das erste Glied rechter Hand ist eine reguläre Funktion in der Umgebung von $t=0$ und $t=1$. $\Phi(t)$ ist im vorliegenden Falle analytisch fortsetzbar über die Strecke (01) hinaus. Aus dem Verhalten von $\Phi(t)$ um $t=0$ und $t=1$, wie es durch (28) gegeben ist, ersieht man, daß (23) und (24) wirklich (nach der Abelschen Formel) Lösungen besitzen.

Es sei nun L eine geschlossene, die Strecke (01) umkreisende Linie. Das Integral

$$(29) \qquad \int_L \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}} \Phi(t)\,dt = J$$

ändert seinen Wert nicht, wenn man die Linie L ohne Überschreitung von (01) deformiert. Wenn man L in einen unendlich großen Kreis übergehen läßt, so findet man, daß J gleich einer von x unabhängigen Konstante K ist. Läßt man dagegen L in die Doppellinie (01) übergehen[3], so ergibt sich:

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt$$
$$-\int_x^1 \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt = K'$$
$$(K' = \text{Konstante}).$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt$$
$$= \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt,$$

was nichts anderes besagt (gemäß der Abelschen Formel), als daß die Integralgleichungen (23) und (24) dieselbe Lösung $\varphi(x)$ haben, wo $\varphi(x)$

---

[3]) Daß $\Phi(t)$ den für diesen Grenzübergang nötigen Bedingungen genügt, ergibt sich aus (28).

die durch (26) oder (27) gegebene Funktion ist. Durch Addition von (23) und (24) ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|}\,\varphi(y)\,dy = \frac{i}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left[\Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)\right]\left[x(1-x)\right]^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

was mit Hilfe der Gleichung (17) in die zu beweisende Gleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

übergeht. Das erhaltene Resultat fassen wir folgendermaßen zusammen:

Die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (0<\alpha<1)$$

läßt sich durch die Formel

$$\varphi(x) = \frac{i\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\,\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x}\frac{[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt\int_0^1\frac{1}{s-t}\,[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\,f(s)\,ds$$

eindeutig auflösen. Γ_x *ist hierbei eine beliebige geschlossene Kurve* (mit positivem Durchlaufungssinn), *die die positive reelle Achse nur im Punkte* x *schneidet.*

Man kann auch in analoger Weise Integralgleichungen von der Form

$$\int_0^1 \frac{G(x-y)}{|x-y|^{\alpha}}\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

behandeln, wo G ein Polynom ist[4]).

Mit Hilfe der obigen Auflösungsformel für die Gleichung (1) kann man sehr allgemeine Integralgleichungen von der Form

$$\int_0^1 \left[\frac{A(y)}{|x-y|^{\alpha}} + H(x,y)\right]\varphi(y)\,dy = f(x)$$

auf Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art zurückführen.

Wir wollen noch durch eine analoge Methode die Gleichung

$$(30) \qquad \int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

---

[4]) Die zugehörige Abelsche Integralgleichung ist von Sonine, Acta mathematica 4 (1884) S. 171—176, behandelt worden.

auflösen[5]). Wir betrachten die analytische Funktion

$$F(x)=\int_0^1 \log(x-y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{31}$$

Es gilt

$$\left.\begin{aligned} F(x+i0) &= \int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy+\pi i\int_x^1 \varphi(y)\,dy, & (32)\\ F(x-i0) &= \int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy-\pi i\int_x^1 \varphi(y)\,dy & (33)\end{aligned}\right\}\ (0<x<1).$$

Ferner

$$\left.\begin{aligned} F(x+i0) &= \int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy+\pi i\int_0^1 \varphi(y)\,dy, & (34)\\ F(x-i0) &= \int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy-\pi i\int_0^1 \varphi(y)\,dy & (35)\end{aligned}\right\}\ (x<0).$$

Somit infolge (30)

$$\left.\begin{aligned} F(x+i0)+F(x-i0) &= 2f(x), & (36)\\ F(x+i0)-F(x-i0) &= 2\pi i\int_x^1 \varphi(y)\,dy & (37)\end{aligned}\right\}\ (0<x<1),$$

$$F(x+i0)-F(x-i0)=2\pi i\int_0^1 \varphi(y)\,dy \qquad (x<0). \tag{38}$$

Durch Differentiation finden wir

$$\left.\begin{aligned} F'(x+i0)+F'(x-i0) &= 2f'(x), & (39)\\ F'(x+i0)-F'(x-i0) &= -2\pi i\,\varphi(x) & (40)\end{aligned}\right\}\ (0<x<1),$$

$$F'(x+i0)-F'(x-i0)=0 \qquad (x<0). \tag{41}$$

$F'(x)$ ist somit eine in der längs (01) aufgeschnittenen x-Ebene eindeutige Funktion.

Dasselbe gilt von

$$\Phi(x)=F'(x)\sqrt{x(x-1)}.$$

Wegen

$$\left.\begin{aligned} F'(x+i0) &= -i\,\frac{\Phi(x+i0)}{\sqrt{x(1-x)}},\\ F'(x-i0) &= i\,\frac{\Phi(x-i0)}{\sqrt{x(1-x)}},\end{aligned}\right.\qquad (0<x<1)$$

[5]) Diese Gleichung läßt sich auch, wie bekannt, mittels potentialtheoretischer Methoden behandeln.

ergibt sich aus (39) und (40):

$$(42)\qquad \Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)=2if'(x)\sqrt{x(1-x)},\qquad (0<x<1).$$
$$(43)\qquad \Phi(x+i0)+\Phi(x-i0)=2\pi\varphi(x)\sqrt{x(1-x)},$$

Weil $\Phi(x)$ für $x\to\infty$ gegen die Konstante $K=\int_0^1\varphi(s)\,ds$ strebt, bekommen wir wegen (42) für $\Phi(x)$ die Formel

$$(44)\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}\,ds+K.$$

Hieraus folgt

$$(45)\qquad \Phi(x+i0)+\Phi(x-i0)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}\,ds+2K,$$

wo das Integral als Cauchyscher Hauptwert zu berechnen ist. Aus (43) findet man nun

$$(46)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}\,ds+\frac{K}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Um die Konstante K zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß aus der Formel (46) im Falle $f(x)=1$

$$\int_0^1\log|x-y|\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\,dy=g$$

folgt, wo g eine von x unabhängige Konstante ist. Man findet leicht

$$g=-2\pi\log 2.$$

Multipliziert man nun (30) mit $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ und integriert in bezug auf x von Null bis Eins, so ergibt sich für $K=\int_0^1\varphi(s)\,ds$

$$K=-\frac{1}{2\pi\log 2}\int_0^1\frac{f(s)}{\sqrt{s(1-s)}}\,ds.$$

Wir haben somit für die Gleichung

$$\int_0^1\log|x-y|\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

die Auflösungsformel

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}\,ds-\frac{1}{2\pi^2\log 2\cdot\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f(s)}{\sqrt{s(1-s)}}\,ds$$

erhalten.

(Eingegangen am 11. September 1921.)