Studien zur Kombinatorik.

Von

Richard Rado in Berlin.

Einleitung.

Diese Arbeit knüpft an einen in letzter Zeit viel genannten kombinatorischen Satz von van der Waerden[1]) an, welcher lautet:

k, l und N seien natürliche Zahlen. Man verteile die Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

irgendwie auf k Klassen. Ist N mindestens gleich einer gewissen von k und l abhängenden Konstanten $f(k, l)$, dann gibt es stets bei jeder solchen Verteilung in mindestens einer Klasse ein Zahlensystem von der Form

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+ld$$

mit $a, d > 0$, also eine arithmetische Progression von $l+1$ Gliedern.

Dieser außerordentlich interessante Satz macht gewisse zahlentheoretische Sätze zugänglich, die mit den bisherigen Mitteln fast unangreifbar erschienen. Derartige Folgerungen hat Herr A. Brauer[2]) aus dem Satz gezogen. Schon vor van der Waerden hat Herr I. Schur[3]) sich im Zusammenhang mit einem zahlentheoretischen Satz ein ähnliches kombinatorisches Problem gestellt und gelöst, indem er folgendes nachwies:

Wenn man die Zahlen

$$1, 2, \ldots, [e \cdot k!]$$

auf k Klassen verteilt, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse ein Zahlensystem der Form

$$a, b, a+b.$$

---

[1]) Nieuw archief voor wiskunde **15**, S. 212–216.

[2]) Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-physik. Klasse, 1928, S. 9–16, 1931, S. 329–341.

[3]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **25** (1916), S. 114.

Aber auch abgesehen von ihren Anwendungen bietet der obige van der Waerdensche und der letzte Satz Interesse. Ein ganz neuer Problemkreis der Kombinatorik erschließt sich mit diesen Sätzen. Man kann sich nämlich fragen, ob es noch andere Systeme von positiv ganzzahlig lösbaren Gleichungen oder andersartigen Bedingungen gibt, die bei beliebigen Verteilungen hinreichend vieler natürlicher Zahlen auf endlich viele Klassen immer in mindestens einer Klasse erfüllbar sind. Bedingungssysteme mit dieser Eigenschaft will ich *regulär* nennen. Gilt dieselbe Lösbarkeitsaussage für ein Bedingungssystem bei allen Verteilungen mit *fester* Klassenanzahl k, dann nenne ich das Bedingungssystem *k-fach regulär*.

Der obige Satz von Schur ist, wenn man von dem genauen Wert der Konstanten $[e \cdot k!]$ absieht, identisch mit der Aussage, daß die Gleichung

$$x + y - z = 0$$

regulär ist.

Das Hauptresultat der folgenden Untersuchungen wird die Bestimmung sämtlicher Systeme linearer Gleichungen sein, die diese Eigenschaft der Regularität haben. Für den Spezialfall homogener Gleichungen erhält man unter Benutzung des obigen Satzes von van der Waerden folgendes Kriterium:

Dann und nur dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

regulär, wenn man die Indizes $1, 2, \ldots, n$ so in endlich viele Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ einteilen kann, daß es zu jedem $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$ eine Lösung x_ν des Gleichungssystems gibt mit

$$\begin{array}{lll} x_\nu \text{ rational} & \text{für alle } \nu \text{ aus } & \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa-1}, \\ x_\nu = 1 & \text{für alle } \nu \text{ aus } & \Gamma_\varkappa, \\ x_\nu = 0 & \text{für alle } \nu \text{ aus } & \Gamma_{\varkappa+1}, \Gamma_{\varkappa+2}, \ldots, \Gamma_q. \end{array}$$

Für eine einzige Gleichung

$$(1) \qquad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0 \qquad (c_\nu \neq 0, \text{ rational})$$

besagt dieses Kriterium einfach, daß irgendwelche der c_ν eine verschwindende Summe haben müssen. Man sieht, wie der obige Satz von Schur aus dem Kriterium unmittelbar folgt. Der Satz von van der Waerden folgt auch aus ihm, sogar gleich mit der von I. Schur[4]) herrührenden Verschärfung, daß man die Progression immer so wählen kann, daß ihre sämtlichen $l+1$ Glieder und ihre *Differenz* in derselben Klasse liegen. Diese verschärfte Form ist nämlich identisch mit der Aussage, daß das Gleichungssystem

[4]) Publiziert bei A. Brauer, vgl. [2]), S. 9–16 (Satz 5).

$$\begin{array}{llll} x_0 & -2x_1 & +x_2 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{l-2} & -2x_{l-1} & +x_l & =0 \\ x_{l-1} & -x_l & +x_{l+1} & =0 \end{array}$$

regulär ist.

Eine dem Kriterium genügende Gruppeneinteilung der hier in Betracht kommenden Indizes $0, 1, \ldots, l+1$ ist:

1. Gruppe Γ_1: $0, 1, \ldots, l$
2. Gruppe Γ_2: $l+1$.

Der erste Teil der vorstehenden Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen mit der Regularität linearer Gleichungen und Ungleichungen. § 1 bringt den Satz von van der Waerden mit einem etwas abgeänderten Beweis, in § 2 werden unter den Gleichungen (1) alle diejenigen bestimmt, welche zweifach regulär sind. § 3 bringt einen allgemeinen Satz über reguläre Bedingungssysteme, den man den Satz von der gleichmäßigen Lösbarkeit regulärer Bedingungssysteme nennen könnte. Er zeigt nämlich allgemein die Identität der folgenden beiden Aussagen, die van der Waerden[5]) noch ausdrücklich auseinanderhält:

1. Das Bedingungssystem $\mathfrak{S}$ ist bei jeder Verteilung *aller* natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

auf k Klassen stets durch Zahlen zu befriedigen, die derselben Klasse angehören.

2. Es gibt eine Konstante N, so daß $\mathfrak{S}$ bei jeder Verteilung der *endlich vielen* Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse zu befriedigen ist. (Die letzte Aussage ist nach obiger Definition identisch damit, daß $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist. In § 1 wird aus Bequemlichkeitsgründen als Regularitätsdefinition das Zutreffen von 1. gewählt.)

In § 4 wird das allgemeine Kriterium für Regularität linearer Gleichungssysteme hergeleitet. Ferner wird dort eine Folgerung aus diesem Kriterium angegeben, welche lautet:

---

[5]) loc. cit. S. 212.

Um nachzuweisen, daß das Gleichungssystem

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

regulär ist, genügt es, von jeder Gleichung, die durch lineare Kombination der Gleichungen von (2) mit rationalen Koeffizienten entsteht, Regularität zu beweisen.

In § 5 werden verschiedene Methoden angegeben, mehrere reguläre lineare Gleichungssysteme zu einem neuen regulären Gleichungssystem zu kombinieren. Insbesondere ergibt sich das überraschende Resultat: Bei jeder Verteilung aller natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen gibt es mindestens eine Klasse, in der *sämtliche* überhaupt existierenden regulären linearen homogenen Gleichungssysteme *gleichzeitig* je eine Lösung haben.

§ 6 enthält einen Satz, der einen ersten Schritt in der Richtung auf folgende mit großer Wahrscheinlichkeit zutreffende Vermutung darstellt: Zu jedem n gibt es eine Zahl k_n, die die Eigenschaft hat, daß jedes Gleichungssystem (2) in n Unbekannten entweder regulär oder höchstens k_n-fach regulär ist.

In § 7 wird folgendes bewiesen: Wenn man bei einem k-fach regulären Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

beliebige der Gleichheitszeichen durch die Zeichen $>$ oder $<$ ersetzt, dann ist das entstehende Bedingungssystem wieder k-fach regulär, vorausgesetzt, daß es überhaupt durch positive Zahlen lösbar ist. Außerdem wird in diesem Paragraphen untersucht, welche homogenen regulären Gleichungssysteme bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen stets so zu lösen sind, daß die Unbekannten sämtlich in derselben Klasse liegen und *voneinander verschieden* sind.

In § 8 wird erörtert, welche linearen Gleichungssysteme sich Verteilungen der positiven *und negativen* ganzen Zahlen

$$(3) \qquad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

gegenüber genau so verhalten wie die regulären Gleichungen bei den Verteilungen der natürlichen Zahlen, also bei jeder Verteilung der Zahlen (3) immer durch Zahlen aus derselben Klasse zu lösen sind. Unter diesen Gleichungssystemen kommen offenbar sämtliche regulären Gleichungssysteme vor. Es zeigt sich, daß außer diesen im früheren Sinne regulären Gleichungssystemen nur noch solche Gleichungssysteme in Frage kommen, bei denen diese Lösbarkeitseigenschaft auf ganz triviale Art zustande kommt.

Der zweite Teil dieser Arbeit ist allgemeineren Fragen rein kombinatorischer Art gewidmet. Die bisherigen Begriffsbildungen werden in einer

Art verallgemeinert, daß kein Gebrauch mehr davon gemacht wird, daß die Dinge, die auf die Klassen verteilt werden, Zahlen sind, zwischen denen Rechnungsarten definiert sind. Es werden allgemeiner die Elemente irgendeiner abstrakten abzählbaren Menge verteilt.

In § 1 wird der Gleichmäßigkeitssatz auf diese allgemeineren Verhältnisse übertragen, in § 2 wird gezeigt, daß den Sätzen von § 5 des ersten Teiles über die Koppelung mehrerer regulärer Gleichungssysteme zu neuen regulären Gleichungssystemen bedeutend allgemeinere Sätze rein kombinatorischer Art zugrunde liegen, speziell, daß man zur Ableitung der erwähnten Koppelungssätze das Regularitätskriterium gar nicht benötigt. Es war lediglich eine Frage der Bequemlichkeit, wenn diese Sätze im ersten Teil mit Benutzung dieses Kriteriums abgeleitet wurden.

Inhalt.

I. Teil.

Regularität linearer Gleichungen und Ungleichungen.

§ 1.

Einführende Definitionen. Der Satz von van der Waerden.

Man denke sich die natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

irgendwie auf endlich viele Klassen verteilt. Derartige Verteilungen bezeichne ich im folgenden mit

$$\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \ldots, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots.$$

Zwei Verteilungen werden als miteinander identisch betrachtet, wenn sie sich nur in der Bezeichnung der Klassen unterscheiden. Bei diesen Verteilungen können auch einzelne Klassen leer bleiben, so daß also eine Verteilung auf k Klassen gleichzeitig als Verteilung auf $(k+1)$ Klassen angesehen wird. Die Schreibweise

(1) $$a \equiv b \pmod{\mathfrak{V}}$$

möge bedeuten, daß sich die Zahlen a und b bei der Verteilung $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse befinden. Wird umgekehrt für jedes Paar a, b irgendwie festgesetzt, ob (1) gelten soll oder nicht, so ist dadurch eine Verteilung $\mathfrak{V}$ definiert, wenn die üblichen drei Postulate erfüllt sind:

1. $a \equiv a \pmod{\mathfrak{V}}$.
2. Wenn $a \equiv b \pmod{\mathfrak{V}}$, dann $b \equiv a \pmod{\mathfrak{V}}$.
3. Wenn $a \equiv b \pmod{\mathfrak{V}}$, $b \equiv c \pmod{\mathfrak{V}}$, dann $a \equiv c \pmod{\mathfrak{V}}$.

Im folgenden wird es sehr häufig vorkommen, daß eine Verteilung derartig definiert wird. Es ist dann jedesmal klar, daß diese Postulate gelten, was nicht mehr besonders hervorgehoben wird.

So wird oft auf folgende Art von einer gegebenen Verteilung $\mathfrak{V}$ zu einer anderen Verteilung $\mathfrak{V}'$ übergegangen werden: Gegeben sind außer $\mathfrak{V}$ noch endlich viele Funktionen

(2) $$f(x), g(x), \ldots, l(x),$$

die für natürliches x definiert sind und nur natürliche Zahlen als Funktionswerte haben. $\mathfrak{V}'$ wird nun definiert durch:

Dann und nur dann ist $a \equiv b \pmod{\mathfrak{V}'}$, wenn

$$\begin{aligned} f(a) &\equiv f(b) \pmod{\mathfrak{V}}, \\ g(a) &\equiv g(b) \pmod{\mathfrak{V}}, \\ &\cdots\cdots \\ l(a) &\equiv l(b) \pmod{\mathfrak{V}}. \end{aligned}$$

Den Übergang von $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{V}'$ kann man sich so klar machen: Die Klassen von $\mathfrak{V}$ seien mit

(3) $$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots . \mathfrak{K}_k$$

bezeichnet. c sei irgendeine natürliche Zahl. Dann verteilen sich die Zahlen

$$f(c), g(c), \ldots, l(c)$$

in bestimmter Weise auf die Klassen (3). Es sei etwa

$$f(c) \prec \mathfrak{K}_\alpha, g(c) \prec \mathfrak{K}_\beta, \ldots, l(c) \prec \mathfrak{K}_\lambda.$$

Bei der neuen Verteilung $\mathfrak{V}'$ liegen dann alle und nur die Zahlen c in derselben Klasse, bei denen die Indizes

(4) $$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$$

der Größe und Reihenfolge nach übereinstimmen.

Die Anzahl der Funktionen (2) sei N. Da für jeden der Indizes (4) k Werte in Frage kommen, gibt es genau

$$K = k^N$$

verschiedene Systeme (4). Folglich besitzt $\mathfrak{V}'$ genau ebenso viele Klassen, wobei auch, wie oben schon erwähnt wurde, manche Klassen leer sein können.

Die so definierte Verteilung $\mathfrak{V}'$ bezeichne ich durch

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[f(\xi), g(\xi), \ldots, l(\xi)].$$

Der Buchstabe ξ wird im folgenden nur für die Verwendung in diesem Symbol reserviert bleiben.

Für jedes $\mathfrak{V}$ ist z. B.

$$\mathfrak{V}[\xi] = \mathfrak{V}.$$

Für die spezielle Verteilung

$$\mathfrak{V}'' = \begin{Bmatrix} 1, 5, 7, 8, \ \ 9, \ldots \\ 2, 3, 4, 6, 10, \ldots \end{Bmatrix}$$

wird

$$\mathfrak{V}''[2\xi] = \begin{Bmatrix} 4, \ldots \\ 1, 2, 3, 5, \ldots \end{Bmatrix}, \qquad \mathfrak{V}''[\xi, \xi + 1] = \begin{Bmatrix} 7, 8, \ldots \\ 1, 5, 9, \ldots \\ 4, 6, \ldots \\ 2, 3, \ldots \end{Bmatrix}.$$

Statt

$$\mathfrak{V}[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_N(\xi)]$$

schreibe ich auch

$$\mathfrak{V}[f_\nu(\xi)\,(1 \leqq \nu \leqq N)].$$

Die Relation

$$x \equiv y\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}[f_\nu(\xi)\,(1 \leqq \nu \leqq N)])$$

ist also völlig identisch mit den N Relationen

$$f_\nu(x) \equiv f_\nu(y)\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}) \qquad (1 \leqq \nu \leqq N).$$

Dieses Übergehen zu neuen Verteilungen mit eventuell bedeutend größerer Klassenanzahl durch Vermittlung irgendwelcher Funktionen wird sich als ein äußerst fruchtbares Beweisprinzip herausstellen.

Mit $\mathfrak{V}_m$ (m = natürliche Zahl) sei im folgenden stets die Restklassenverteilung mod m bezeichnet, also:

$$\mathfrak{V}_m = \begin{Bmatrix} 1, 1 + m, 1 + 2m, \ldots \\ 2, 2 + m, 2 + 2m, \ldots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ m, \ \ 2m, \ \ \ 3m, \ldots \end{Bmatrix}.$$

Es bezeichne $\mathfrak{S}$ ein System irgendwelcher Bedingungen für die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Zahlen sind, dann besage die Ausdrucksweise

$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

daß die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingungen $\mathfrak{S}$ erfüllen.

Definition. Ein Bedingungssystem $\mathfrak{S}$ heißt *k-fach regulär,* wenn es zu jeder Verteilung $\mathfrak{V}$ mit k Klassen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt mit

$$a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_n \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$$
$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

$\mathfrak{S}$ heißt *regulär* schlechthin, wenn $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist für jedes k.

So ist z. B. die Gleichung

$$(x + 1 - y)(x + 2 - y) = 0 \tag{5}$$

zweifach regulär. Denn wenn $\mathfrak{V}$ irgendeine Verteilung der natürlichen Zahlen auf zwei Klassen ist, dann liegen zwei von den drei Zahlen 1, 2, 3 in derselben Klasse. Es ist also mindestens eine der folgenden drei Relationen richtig:

$$1 \equiv 2\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}),$$
$$1 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}),$$
$$2 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}).$$

Trifft die erste zu, dann ist $x = 1, y = 2$ eine Lösung von (5), in den anderen Fällen ist $x = 1$, $y = 3$ bzw. $x = 2$, $y = 3$ eine Lösung von (5), deren Zahlen, wie die obige Definition verlangt, sich in derselben Klasse befinden. Die Gleichung (5) ist aber nicht dreifach regulär. Denn wählt man zwei Zahlen x, y, die bei der speziellen Verteilung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_3 = \begin{Bmatrix} 1, 4, 7, \ldots \\ 2, 5, 8, \ldots \\ 3, 6, 9, \ldots \end{Bmatrix}$$

sich in derselben Klasse befinden, dann gilt für sie offenbar niemals (5). Die Gleichung (5) ist also zweifach regulär, aber nicht regulär schlechthin.

Dagegen ist die Gleichung

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2 = 0$$

regulär. Denn sie ist durch $x = y = 1$ befriedigt, und es ist ja für jedes $\mathfrak{V}$

$$1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}).$$

Allgemein ist jedes Bedingungssystem

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

regulär, für das eine natürliche Zahl a existiert mit

$$\mathfrak{S}(a, a, \ldots, a) = 0.$$

Es gilt nun folgender Satz von van der Waerden[6]):

[6]) Siehe Einleitung.

Satz I. *Zu den natürlichen Zahlen k, l gibt es eine natürliche Zahl $f(k, l)$, so daß das Bedingungssystem*

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l \neq 0$$
$$x_0, x_1, \ldots, x_l \leqq f(k, l)$$

k-fach regulär ist.

Der Satz besagt also, daß man bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen immer in mindestens einer Klasse $l+1$ Zahlen finden kann, die eine arithmetische Progression bilden und höchstens gleich einer nur von k und l abhängenden Konstanten sind. Der folgende Beweis knüpft an die Beweismethode von van der Waerden an. Ihm liegt aber ein etwas andersartiger Gedankengang zugrunde, der schneller zum Ziel führt.

Beweis. Die Behauptung kann auch so formuliert werden: Zu jedem $\mathfrak{V}$ mit k Klassen gibt es natürliche Zahlen a, d mit

$$a + \lambda d \equiv a \pmod{\mathfrak{V}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l),$$
$$a + l d \leqq f(k, l).$$

Für $l = 1$ leistet offenbar

$$f(k, 1) = k + 1$$

das, was behauptet wird. Denn von den $k+1$ Zahlen

$$1, 2, \ldots, k+1$$

liegen bei Verteilungen auf k Klassen immer zwei Zahlen in derselben Klasse. Man nehme an, es sei die Existenz einer Zahl $f(k, l)$ für alle k und ein festes $l \geqq 1$ bereits bewiesen. Hieraus wird sich die Existenz von $f(k, l+1)$ für alle k und dasselbe l ergeben, womit der Satz bewiesen sein wird.

$\mathfrak{V}$ sei eine Verteilung auf k Klassen.

Lemma. Zu den ganzen Zahlen $a \geqq 0$, $n > 0$ gibt es natürliche Zahlen a', d' mit

$$(6) \qquad a + (a' + \lambda d') + \nu \equiv a + a' + \nu \pmod{\mathfrak{V}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l,\ 0 \leqq \nu < n),$$

$$(7) \qquad a' + l d' \leqq f(k^n, l).$$

Beweis des Lemmas. Die Verteilung

$$(8) \qquad \mathfrak{V}' = \mathfrak{V}\,[a + \xi + \nu\ (0 \leqq \nu < n)]$$

hat k^n Klassen. Also gibt es nach der Bedeutung von $f(k^n, l)$ natürliche Zahlen a', d' mit (7) und

$$(9) \qquad a' + \lambda d' \equiv a' \pmod{\mathfrak{V}'} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l).$$

(9) ist nach (8) identisch mit (6), womit das Lemma bewiesen ist.

Nun wähle man zunächst beliebige natürliche Zahlen $n_0, n_1, \ldots, n_k$ und bestimme sukzessiv Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $d_0, d_1, \ldots, d_k$ folgendermaßen: Die Anwendung des Lemmas auf $a = 0$, $n = n_0$ liefert die Existenz natürlicher Zahlen $a' = a_0$, $d' = d_0$ mit

$$(a_0 + \lambda_0 d_0) + \nu_0 \equiv a_0 + \nu_0 \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (0 \leqq \lambda_0 \leqq l,\ 0 \leqq \nu_0 < n_0),$$
$$a_0 + l\, d_0 \leqq f(k^{n_0}, l).$$

Wenn bereits $a_0, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}$, $d_0, d_1, \ldots, d_{\varkappa-1}$ bestimmt sind $(1 \leqq \varkappa < k)$, dann liefert das Lemma, angewandt auf die Zahlen

$$a = \sum_{\varrho=0}^{\varkappa-1} a_\varrho, \qquad n = n_\varkappa,$$

die Existenz natürlicher Zahlen $a' = a_\varkappa$, $d' = d_\varkappa$ mit

$$(10)\quad \sum_0^{\varkappa-1} a_\varrho + (a_\varkappa + \lambda_\varkappa d_\varkappa) + \nu_\varkappa \equiv \sum_0^{\varkappa-1} a_\varrho + a_\varkappa + \nu_\varkappa \pmod{\mathfrak{B}} \ (0 \leqq \lambda_\varkappa \leqq l, 0 \leqq \nu_\varkappa < n_\varkappa),$$

$$(11)\qquad a_\varkappa + l\, d_\varkappa \leqq f(k^{n_\varkappa}, l).$$

Man setze fest, daß Summen der Form $\sum_{\varrho=\alpha}^{\alpha-1} x_\varrho$ den Wert Null haben sollen. Dann gilt (10) und (11) für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k$.

Da $\mathfrak{B}$ nur k Klassen hat, gibt es unter den $k+1$ Zahlen

$$b_\varkappa = \sum_0^k a_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa+1}^k d_\varrho \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq k)$$

zwei voneinander verschiedene Zahlen, die in derselben Klasse liegen. Es gibt also $\varkappa_1, \varkappa_2$ mit $0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 \leqq k$ und

$$(12)\qquad b_{\varkappa_1} \equiv b_{\varkappa_2} \pmod{\mathfrak{B}}.$$

Setzt man nun

$$a = b_{\varkappa_2}, \qquad d = \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} d_\varrho,$$

dann wird sich zeigen, daß für passende, nur von k und l abhängige Wahl der $n_\varkappa$ die $l+2$ Zahlen

$$(13)\qquad a + \mu d \qquad (0 \leqq \mu \leqq l+1)$$

sämtlich in derselben Klasse liegen, womit die Existenz von $f(k, l+1)$ erwiesen sein wird.

Zunächst ist

$$(14)\quad a + (l+1) d = \sum_1^k a_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} d_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa_2+1}^k d_\varrho = b_{\varkappa_1}.$$

Für $0 \leqq \lambda \leqq l$ ist

$$(15)\quad a + \lambda d = \sum_1^{\varkappa_1} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^k (a_\varrho + [l+1] d_\varrho).$$

Will man auf (15) die Relation (10) anwenden mit

$$\varkappa = \varkappa_1 + 1, \qquad \nu_\varkappa = \sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1]\, d_\varrho),$$

so ist dazu erforderlich:

$$\sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1]\, d_\varrho) < n_{\varkappa_1+1}.$$

Nach (11) ist hierzu hinreichend eine Ungleichung der Form

$$F(n_{\varkappa_1+2}, n_{\varkappa_1+3}, \ldots, n_k) < n_{\varkappa_1+1},$$

wobei F außer von den $n_\varkappa$ nur noch von k und l abhängt. Die Anwendung von (10) würde ergeben:

$$a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_1+1} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1]\, d_\varrho) \pmod{\mathfrak{B}}.$$

Falls $\varkappa_2 \geqq \varkappa_1 + 2$, dann könnte man durch nochmalige Anwendung von (10) mit $\varkappa = \varkappa_1 + 2$ hieraus folgern:

$$a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_1+2} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+3}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1]\, d_\varrho) \pmod{\mathfrak{B}},$$

vorausgesetzt, daß eine Relation der Form

$$G(n_{\varkappa_1+3}, n_{\varkappa_1+4}, \ldots, n_k) < n_{\varkappa_1+2}$$

gilt. Fährt man so fort, dann erhält man nach $\varkappa_2 - \varkappa_1$ Schritten

$$(16) \qquad a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_2} a_\varrho + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1]\, d_\varrho) = b_{\varkappa_2} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l).$$

Erforderlich wären hierzu endlich viele Relationen der Form

$$H(n_{\varkappa+1}, n_{\varkappa+2}, \ldots, n_k) < n_\varkappa,$$

wobei die H gewisse Funktionen sind, die außer von den n_ϱ nur noch von k und l abhängen. Aus der Form der Relationen erkennt man, daß man nacheinander feste, nur von k und l abhängende Werte von $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ angeben kann, die allen diesen Relationen genügen. Aus (14), (16), (12) folgt dann, wie oben behauptet, daß sich alle Zahlen (13) in derselben Klasse befinden. Da sie außerdem durch eine nur von k und l abhängende Schranke abschätzbar sind, ist die Existenz von $f(k, l+1)$ und damit der Satz I bewiesen.

Der vorstehende Beweis liefert folgende Methode, sukzessiv der Behauptung genügende Werte von $f(k, l)$ zu bestimmen: Man setze

$$f(k, 1) = k + 1.$$

Ist bereits $f(k, l)$ für alle k und ein festes $l \geqq 1$ bestimmt, dann setze man

$$m_0 = 1, \qquad m_{\varkappa+1} = m_\varkappa + 2 \cdot f(k^{m_\varkappa}, l) \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq k).$$

Dann ist

$$f(k, l+1) = m_{k+1}$$

ein brauchbarer Wert. Man könnte leicht durch Modifikation des Beweises diese Schranken erheblich herabdrücken. Sie bleiben aber immer noch so ungeheuer groß, daß Überlegungen zu diesem Zweck keinen rechten Nutzen haben.

§ 2.

Ein spezielles Beispiel.

Bevor allgemeine Systeme linearer Gleichungen auf ihre Regularität hin untersucht werden, soll der Spezialfall einer homogenen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genauer diskutiert werden. Der folgende Satz gestattet es, unter diesen Gleichungen alle anzugeben, die zweifach regulär sind. Zunächst sieht man leicht: Die Gleichung

$$ax + by = 0 \tag{1}$$

ist regulär für $a + b = 0$, nicht zweifach regulär für $a + b \neq 0$.

Denn für $a + b = 0$ ist $x = y = 1$ eine Lösung von (1), was Regularität nach sich zieht. Ist $a + b \neq 0$, dann kann man (1) in der Form annehmen:

$$y = c \cdot x \quad \text{mit } c \neq 1. \tag{2}$$

Für $c \leqq 0$ ist (2) garnicht durch positive Werte von x und y zu lösen, also erst recht nicht zweifach regulär. Ist $c > 0$, dann kann man, eventuell nach Vertauschung von x und y, sogar $c > 1$ annehmen. Ich gebe nun eine Verteilung der natürlichen Zahlen auf zwei Klassen an, bei der niemals x und cx in derselben Klasse liegen. Damit wäre dann gezeigt, daß (2) nicht zweifach regulär ist. Die Verteilung findet man folgendermaßen: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine ganze Zahl $\varkappa$ mit

$$c^\varkappa \leqq m < c^{\varkappa+1}.$$

Legt man nun alle m mit geradem $\varkappa$ in eine Klasse, die übrigen m in eine andere Klasse, dann erhält man offenbar eine Verteilung der gewünschten Art.

Für Gleichungen mit drei Unbekannten gilt der Satz:

Satz II. *a, b, c seien natürliche Zahlen. Dann gibt es eine ebensolche Zahl N, so daß das Bedingungssystem*

$$ax + by = cz, \qquad x, y, z \leqq N$$

zweifach regulär ist.

Ein brauchbares N findet man folgendermaßen: Man bestimme natürliche Zahlen x_0, y_0, z_0 mit

$$a x_0 + b y_0 = c z_0$$

und bilde

$$A = \operatorname{Max}(x_0, y_0, z_0), \quad m = \textit{kleinstes gemeinsames Vielfaches von}$$

$$\frac{a}{(a,b)} \textit{ und } \frac{c}{(b,c)},$$

$$N = \operatorname{Max}\left(mA, \frac{bm}{c}(A^2-1)(A-1) + \frac{bm}{c}\cdot A, \frac{bm}{a}\cdot A^2(A-1)\right).$$

Der Satz besagt z. B.: Verteilt man die Zahlen

$$1, 2, \ldots, 20$$

irgendwie auf zwei Klassen, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse drei Zahlen x, y, z mit

$$2x + y = 5z.$$

Beweis. $\mathfrak{V}$ sei eine Verteilung auf zwei Klassen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, bei der im Gegensatz zur Behauptung weder in $\mathfrak{K}_1$ noch in $\mathfrak{K}_2$ Zahlen x, y, z liegen mit $ax + by = cz$. Zunächst bemerke ich folgendes: C sei eine beliebige natürliche Zahl. Dann liegen die Zahlen

$$C, 2C, 3C, \ldots, AC$$

nicht alle in derselben Klasse wegen

$$a\cdot x_0 C + b\cdot y_0 C = c\cdot z_0 C.$$

Ich setze $x = m$. Dann ist $\frac{bx}{a}$ und $\frac{bx}{c}$ ganz. Man kann annehmen:

$$x \prec \mathfrak{K}_1.$$

y sei die erste Zahl der Reihe

$$m, 2m, 3m, \ldots, Am,$$

die in $\mathfrak{K}_2$ liegt. Nach der Anfangsbemerkung gibt es eine solche Zahl. Es ist also

$$y = lm \prec \mathfrak{K}_2 \quad \text{mit} \quad 2 \leqq l \leqq A.$$

Es ist

$$\frac{b}{a}(y - x) = \frac{b}{a}(l-1)m$$

positiv und ganz. Irgendein positives Vielfaches dieser Zahl sei in $\mathfrak{K}_2$, z. B. sei

$$z = n\cdot\frac{b}{a}(y-x) \prec \mathfrak{K}_2 \quad \text{mit } n \text{ positiv, ganz.}$$

Da

$$\frac{a}{c}\cdot z + \frac{b}{c}\cdot y = \frac{a}{c}\cdot n\cdot\frac{b}{a}(l-1)m + \frac{b}{c}\cdot lm$$

positiv und ganz ist,

$$z, y \prec \mathfrak{K}_2,$$

so folgt

$$\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y \prec \mathfrak{K}_1 .$$

Denn andernfalls hätte man in $\mathfrak{K}_2$ die Gleichung

$$a u+b v=c w$$

durch

$$u=z, \qquad v=y, \qquad w=\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y$$

aufgelöst, was der Annahme über $\mathfrak{V}$ widerspräche. Wegen

$$x \prec \mathfrak{K}_1, \qquad \frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y \prec \mathfrak{K}_1$$

folgt aus demselben Grunde

$$\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y\right)-\frac{b}{a}\cdot x \prec \mathfrak{K}_2,$$

falls diese letzte Zahl positiv und ganz ist. Das ist sie aber wegen

$$\frac{c}{a}\left(\frac{a}{c} z+\frac{b}{c} y\right)-\frac{b}{a} x=z+\frac{b}{a}(y-x)=(n+1)\cdot\frac{b}{a}(y-x).$$

Wir haben also bisher: x und y sind feste Zahlen.

$$C=\frac{b}{a}(y-x)$$

ist positiv und ganz. Aus

$$n C \prec \mathfrak{K}_2, \qquad n \text{ positiv, ganz}$$

folgt immer

$$(n+1) C \prec \mathfrak{K}_2 .$$

Zu diesem Schluß wurde die Verteilung von Zahlen benutzt, die alle höchstens folgende Schranke erreichen:

$$\operatorname{Max}\left(m, A m, n\cdot\frac{b}{a}(A-1) m, \frac{b n}{c}(A-1) m+\frac{b m}{c}\cdot A,(n+1)\cdot\frac{b}{a}(A-1) m\right)$$
$$=\operatorname{Max}\left(m A, \frac{b m n}{c}(A-1)+\frac{b m}{c}\cdot A, \frac{b m(n+1)}{a}(A-1)\right).$$

Nun gibt es nach der Anfangsbemerkung eine natürliche Zahl $n_0 \leqq A$ mit

$$n_0\cdot C \prec \mathfrak{K}_2 .$$

Indem man nun das eben formulierte Ergebnis nacheinander auf

$$n=n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, A n_0-1$$

anwendet, erhält man sukzessiv:

$$n_0 C,(n_0+1) C, \ldots, 2\cdot n_0 C, \ldots, 3\cdot n_0 C, \ldots, A\cdot n_0 C \prec \mathfrak{K}_2 .$$

Das ist ein Widerspruch zur Anfangsbemerkung, da nicht die ersten A Vielfachen der Zahl $n_0 C$ sich in derselben Klasse befinden können. Wenn ich in der obigen Schranke

$$n = A n_0 - 1$$

einsetze, erhalte ich eine Schranke mit der Eigenschaft, daß ich zur Konstruktion des Widerspruchs nur Zahlen bis zu dieser Schranke heranzuziehen brauche. Diese Schranke wird höchstens gleich

$$\mathrm{Max}\left(m A, \frac{b m}{c}(A^2 - 1)(A - 1) + \frac{b m}{c} \cdot A, \frac{b m}{a} \cdot A^2 (A - 1)\right).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Satz II folgt: *Dann und nur dann ist die Gleichung*

$$(3) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad (a_\nu \text{ rational})$$

zweifach regulär, wenn mindestens eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

1. $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0$.

2. *Mindestens drei der Koeffizienten a_ν sind von Null verschieden. Unter den a_ν gibt es sowohl positive wie negative Zahlen.*

Denn zunächst sei weder 1. noch 2. erfüllt. Wenn alle $a_\nu \geqq 0$ oder alle $a_\nu \leqq 0$ sind, dann hat (3) keine aus positiven Zahlen bestehende Lösung, ist also erst recht nicht zweifach regulär. Gibt es unter den a_ν positive und negative Zahlen, dann hat (3) die Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \text{mit} \quad a_1 + a_2 \neq 0.$$

Zu Anfang dieses Paragraphen wurde gezeigt, daß solche Gleichungen nicht zweifach regulär sind.

Ist jetzt umgekehrt eine der beiden Aussagen zutreffend, dann ist (3) zweifach regulär. Für die erste Aussage ist das evident, da dann $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ eine Lösung von (3) ist. Es sei also jetzt die zweite Aussage zutreffend. Dann hat (3) die Form

$$\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho y_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma z_\sigma \qquad (b_\varrho,\ c_\sigma \text{ natürliche Zahlen, } r \geqq 2,\ s \geqq 1).$$

Nimmt man dazu noch die weiteren Gleichungen

$$y_2 = y_3 = \ldots = y_r, \qquad z_1 = z_2 = \ldots = z_s,$$

dann erhält man als für y_1, y_2, z_1 zu erfüllende Gleichung:

$$b_1 \cdot y_1 + \sum_{2}^{r} b_\varrho \cdot y_2 = \sum_{1}^{s} c_\sigma \cdot z_1.$$

Diese Gleichung ist nach Satz II zweifach regulär.

Will man die Regularität beliebiger linearer Gleichungssysteme untersuchen, dann braucht man zunächst einen allgemeinen Satz über reguläre Bedingungssysteme, dem der folgende Paragraph gewidmet sein soll.

§ 3.
Der Gleichmäßigkeitssatz.

Satz I und II haben folgende Form: Gegeben ist eine ganze Zahl $k > 0$ und ein System $\mathfrak{S}$ von Bedingungen für die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es wird behauptet, daß bei jeder Verteilung $\mathfrak{V}$ auf k Klassen in mindestens einer Klasse Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liegen, welche $\mathfrak{S}$ befriedigen und außerdem unterhalb einer nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängenden Schranke liegen. Beide Beweise wurden in der Form geführt, daß zunächst für jedes $\mathfrak{V}$ nur die Existenz solcher x_ν gezeigt wurde, die in derselben Klasse liegen und $\mathfrak{S}$ genügen. Daß diese Zahlen immer unterhalb einer nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängenden Schranke wählbar sind, ergab sich dann daraus, daß beim Beweis die Verteilung von Zahlen oberhalb einer gewissen Schranke dieser Art nicht benutzt wurde. Es wäre nun an und für sich denkbar, daß es auch solche Bedingungssysteme $\mathfrak{S}$ gibt, für die sich wohl ein Existenzbeweis für Lösungen in einer Klasse führen läßt, welche aber nicht für konstantes k immer schon unterhalb einer festen Schranke ein derartiges Lösungssystem haben. Das würde bedeuten, es gibt für ein gewisses k und jedes N spezielle Verteilungen der endlich vielen Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen mit der Eigenschaft, daß in keiner Klasse $\mathfrak{S}$ zu befriedigen ist. Bei Verteilungen aller Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

auf k Klassen wäre jedoch immer ein Lösungssystem in einer Klasse zu finden. Es würde also Verteilungen der letzteren Art geben, bei denen erst „beliebig spät“ Lösungen durch Zahlen aus derselben Klasse auftreten.

Der folgende Satz III zeigt aber, daß mit dem Existenzbeweis für Lösungen in einer Klasse immer auch schon ein Existenzbeweis für eine Schranke der obigen Art geliefert ist. Ist ein Bedingungssystem also „lösbar“, so ist es auch unterhalb einer gleichmäßig für alle Verteilungen mit fester Klassenanzahl geltenden Schranke „lösbar“. Der Satz lautet nun:

Satz III. Voraussetzung. *Das Bedingungssystem*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ist k-fach regulär.

Behauptung. *Es gibt eine nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängende Zahl N, so daß schon das Bedingungssystem*

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N \end{cases}$$

k-fach regulär ist.

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann ist (1) für keine Wahl von N k-fach regulär. Es gibt also zu

$$N = 1, 2, 3, \ldots$$

je eine Verteilung $\mathfrak{V}^{(N)}$ mit k Klassen, die die Eigenschaft hat, daß aus

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}^{(N)}),$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N$$

immer folgt, daß die Zahlen x_ν nicht sämtliche Bedingungen $\mathfrak{S}$ erfüllen. Die Klassen von $\mathfrak{V}^{(N)}$ seien mit $\mathfrak{K}_1^{(N)}, \mathfrak{K}_2^{(N)}, \ldots, \mathfrak{K}_k^{(N)}$ bezeichnet. Es sei $\varkappa_\nu^{(N)}$ der untere Index derjenigen Klasse von $\mathfrak{V}^{(N)}$, in der die Zahl ν liegt. Es ist $1 \leqq \varkappa_\nu^{(N)} \leqq k$. Nach einer bekannten Schlußweise folgt jetzt:

Es gibt $\varkappa_1$, so daß für unendlich viele N gilt:

$$(2) \qquad \varkappa_1^{(N)} = \varkappa_1.$$

Es gibt $\varkappa_2$, so daß für unendlich viele N außer (2) noch gilt:

$$(3) \qquad \varkappa_2^{(N)} = \varkappa_2.$$

Es gibt $\varkappa_3$, so daß für unendlich viele N außer (2), (3) noch gilt:

$$(4) \qquad \varkappa_3^{(N)} = \varkappa_3$$

usw.

Man erhält so eine Folge

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jedem m gibt es unendlich viele N mit $\varkappa_1^{(N)} = \varkappa_1, \varkappa_2^{(N)} = \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m^{(N)} = \varkappa_m$. $\mathfrak{V}$ sei diejenige Verteilung, bei der sich die Zahl ν in der $\varkappa_\nu$-ten Klasse befindet. $\mathfrak{V}$ hat k Klassen. Also gibt es nach Voraussetzung Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit

$$(5) \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}),$$

$$(6) \qquad \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

(5) ist identisch mit

$$(7) \qquad \varkappa_{x_1} = \varkappa_{x_2} = \ldots = \varkappa_{x_n}.$$

Nach der Bildungsweise der $\varkappa_\nu$ gibt es unendlich viele N mit

$$(8) \qquad \varkappa_{x_1}^{(N)} = \varkappa_{x_1}, \ \varkappa_{x_2}^{(N)} = \varkappa_{x_2}, \ \ldots, \ \varkappa_{x_n}^{(N)} = \varkappa_{x_n}.$$

Also gibt es auch ein spezielles

$$N \geqq \mathrm{Max}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

für das (8) gilt. Dann hat man nach (8) und (7), indem man wieder die Bedeutung der $\varkappa_\nu^{(N)}$ beachtet:

$$(9) \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}^{(N)}),$$

$$(10) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N.$$

(6), (9), (10) bilden einen Widerspruch zu der anfangs beschriebenen Eigenschaft von $\mathfrak{V}^{(N)}$. Damit ist der Beweis erbracht.

In § 2 wurde die zweifache Regularität von

$$ax + by = cz \qquad (a, b, c \text{ rational}, > 0)$$

bewiesen und gleichzeitig eine von a, b, c abhängende Zahl angegeben, welche dieselbe Rolle spielt wie die Konstante N, deren Existenz allgemein durch Satz III bewiesen ist. Der Satz III ist ein reiner Existenzsatz, er gestattet keinerlei konkrete Berechnung einer solchen Konstanten. Es müssen ganz andere als die vorstehenden Betrachtungen herangezogen werden, wenn man ein N finden will.

Anwendung. $\mathfrak{S}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Bedingungssystem, bei dem als Argumente auch gebrochene rationale x_ν zulässig sind. Es sei homogen in dem Sinne, daß aus

$$\mathfrak{S}'(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

a positiv, ganz immer

$$\mathfrak{S}'(a_1 a, a_2 a, \ldots, a_n a) = 0$$

folgt.

Voraussetzung. *Wenn man alle positiven rationalen Zahlen auf k Klassen verteilt, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit*

$$\mathfrak{S}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Behauptung. $\mathfrak{S}'(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *ist k-fach regulär.*

Beweis. Die positiven rationalen Zahlen lassen sich abzählen. Eine ihrer Ordnungen sei

$$r_1, r_2, r_3, \ldots.$$

Ich definiere ein System $\mathfrak{S}$ von Bedingungen folgendermaßen:

Dann und nur dann ist

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wenn die x_ν natürliche Zahlen sind und

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0$$

erfüllen. Ich behaupte zunächst, daß $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist. Denn es sei $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen. Ich definiere eine Verteilung $\mathfrak{V}'$ der positiven rationalen Zahlen auf k Klassen durch:

$$(11) \qquad r_\varkappa \equiv r_\lambda \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}'), \quad \text{wenn } \varkappa \equiv \lambda \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}).$$

Nach Voraussetzung gibt es $r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}$ mit

(12) $$r_{x_1} \equiv r_{x_2} \equiv \ldots \equiv r_{x_n} \pmod{\mathfrak{B}'},$$

(13) $$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0.$$

(12) besagt nach (11) dasselbe wie

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{B}},$$

(13) ist identisch mit

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

was die k-fache Regularität von $\mathfrak{S} = 0$ beweist.

Nun gibt es nach Satz III eine natürliche Zahl N, so daß auch das Bedingungssystem

(14) $$\begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N \end{cases}$$

k-fach regulär ist. Das heißt ausführlich: Bei jeder Verteilung der Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen x_ν mit

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Das ist genau dasselbe wie: Bei jeder Verteilung der Zahlen

(15) $$r_1, r_2, \ldots, r_N$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen r_{x_ν} mit

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0.$$

Aus der Homogenität von $\mathfrak{S}'$ folgt weiter für jede natürliche Zahl H: Bei jeder Verteilung der Zahlen

(16) $$r_1 H, r_2 H, \ldots, r_N H$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen $r_{x_\nu} \cdot H$ mit

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1} \cdot H, r_{x_2} \cdot H, \ldots, r_{x_n} \cdot H) = 0.$$

Wählt man nun für H den Hauptnenner aller Zahlen (15), dann sind alle Zahlen (16) positiv und ganz, woraus die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Was eben bewiesen wurde, lautet in anderen Worten: Um nachzuweisen, daß ein homogenes Bedingungssystem $\mathfrak{S}' = 0$ *k-fach regulär* ist, genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{S}' = 0$ bei jeder Verteilung aller *positiven rationalen* Zahlen auf k Klassen stets eine Lösung besitzt, deren Zahlen sich in derselben Klasse befinden. Man überlegt sich leicht noch folgendes: Um *Regularität* eines homogenen Bedingungssystems $\mathfrak{S}' = 0$ nachzuweisen, genügt es sogar, bei jeder Verteilung aller *positiven* und *negativen rationalen*

Zahlen auf eine endliche Klassenanzahl stets ein Lösungssystem in einer Klasse zu finden. Daß die Homogenität von $\mathfrak{S}'$ notwendig ist, zeigt das Beispiel der Gleichung $x + y = 3$. Diese Gleichung ist bei jeder Verteilung der positiven rationalen Zahlen auf endlich viele Klassen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, da ja $x = y = \frac{3}{2}$ die Gleichung befriedigt. Dagegen ist diese Gleichung nicht einmal zweifach regulär, wie man an der Verteilung

$$\mathfrak{V} = \begin{Bmatrix} 1 & & & \\ 2, & 3, & 4, & \ldots \end{Bmatrix}$$

erkennt.

§ 4.

Bestimmung aller regulären Systeme linearer Gleichungen.

Ich nenne im folgenden ein Bedingungssystem $\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogen*, wenn, in etwas schwächerer Bedeutung des Wortes homogen, als es sonst üblich ist, nur folgendes gilt: Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ natürliche Zahlen mit

$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

dann ist immer

$$\mathfrak{S}(a_1 a, a_2 a, \ldots, a_n a) = 0.$$

Um alle regulären Systeme linearer Gleichungen zu finden, beweist man zunächst folgenden Hilfssatz, der später auch für verschiedene andere Fragen nützlich sein wird:

Hilfssatz I. Voraussetzung. *$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ist ein homogenes, k-fach reguläres Bedingungssystem, M eine natürliche Zahl, $\mathfrak{V}$ eine Verteilung aller natürlichen Zahlen auf k Klassen.*

Behauptung. *Es gibt natürliche Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ mit*

$$\mathfrak{S}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0,$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{V}} \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \quad \lambda \textit{ ganz}, \quad |\lambda| \leqq M.$$

Beweis. Nach dem Gleichmäßigkeitssatz gibt es eine natürliche Zahl N, so daß das Bedingungssystem

$$(1) \qquad \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N$$

k-fach regulär ist. Es sei

$$(2) \qquad \mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[\nu \xi (1 \leqq \nu \leqq N)].$$

Nach van der Waerden gibt es $a', d' > 0$ mit

$$(3) \qquad a' + \lambda' d' \equiv a' \pmod{\mathfrak{V}'} \quad \text{für } \lambda' \text{ ganz}, \quad |\lambda'| \leqq MN^{n-1}.$$

Denn (3) besagt nur, daß a' das mittlere Glied einer arithmetischen Progression von $2MN^{n-1} + 1$ Gliedern ist, deren Zahlen sich alle in derselben Klasse befinden. Es sei

$$(4) \qquad \mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}[a' \xi].$$

$\mathfrak{B}''$ hat k Klassen. Da (1) k-fach regulär ist, gibt es also natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\mathfrak{S}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0, \tag{5}$$

$$x_1', x_2', \ldots, x_n' \leqq N, \tag{6}$$

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{B}''}. \tag{7}$$

Ich behaupte nun, die Zahlen

$$x_\nu^{(0)} = a' x_\nu' \qquad (1 \leqq \nu \leqq n), \tag{8}$$

$$d = d' x_1' x_2 \ldots x_n' \tag{9}$$

erfüllen die in der obigen Behauptung angegebenen Relationen. Zunächst folgt aus (5), (8) und der Homogenität von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0. \tag{10}$$

Ferner ist (7) nach (4) und (8) identisch mit

$$x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}}. \tag{11}$$

(3) bedeutet nach (2) dasselbe wie

$$\nu(a' + \lambda' d') \equiv \nu a' \pmod{\mathfrak{B}} \quad (1 \leqq \nu \leqq N,\ \lambda' \text{ ganz},\ |\lambda'| \leqq MN^{n-1}). \tag{12}$$

Für $1 \leqq \mu \leqq n$, λ ganz, $|\lambda| \leqq M$ wird nach (8), (9), (6):

$$\begin{aligned} x_\mu^{(0)} + \lambda d = a' x_\mu' + \lambda d' x_1' x_2' \ldots x_n' &= x_\mu'(a' + \lambda x_1' \ldots x_{\mu-1}' x_{\mu+1}' \ldots x_n' d') \\ &= \nu(a' + \lambda' d') \end{aligned} \tag{13}$$

mit $1 \leqq \nu = x_\mu' \leqq N$, $|\lambda'| = |\lambda x_1' \ldots x_{\mu-1}' x_{\mu+1}' \ldots x_n'| \leqq MN^{n-1}$.

Auf (13) ist also (12) anwendbar, was

$$x_\mu^{(0)} + \lambda d \equiv x_\mu^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (1 \leqq \mu \leqq n,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M) \tag{14}$$

liefert. (10), (11), (14) zeigen die Richtigkeit der Behauptung.

Um später den Gang eines Beweises nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich noch einen einfachen Hilfssatz über lineare Kongruenzen voraus:

Hilfssatz II. Voraussetzung. *Zu den ganzen rationalen Zahlen*

$$b_{\varkappa\lambda},\ b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k,\ 1 \leqq \lambda \leqq l)$$

gibt es unendlich viele Tripel r, s, t von ganzen Zahlen, deren t beliebig groß werden, für die ferner $(r, t) = 1$ gilt und für die das System von Kongruenzen

$$\sum_{\lambda=1}^{l} b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + r s b_\varkappa \equiv 0 \pmod{s t} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k) \tag{15}$$

je mindestens ein ganzzahliges Lösungssystem $x_1, x_2, \ldots, x_l$ hat.

Behauptung. *Das Gleichungssystem*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + b_\varkappa = 0 \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k) \tag{16}$$

besitzt Lösungen.

Beweis. Dann und nur dann hat (16) eine Lösung, wenn aus $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ganz,

$$(17) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa b_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq l)$$

immer

$$(18) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa b_\varkappa = 0$$

folgt. Es möge also (17) gelten. Dann folgt aus (15):

$$\sum_\varkappa c_\varkappa \sum_\lambda b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + \sum_\varkappa c_\varkappa r s b_\varkappa \equiv 0 \pmod{st}$$

oder

$$0 + rs \sum_\varkappa c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{st},$$

$$r \sum_\varkappa c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{t},$$

$$(19) \qquad \sum_\varkappa c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{t} \quad (\text{wegen } (r, t) = 1).$$

Da (19) für beliebig große t gilt, folgt (18), was den Hilfssatz beweist.

Die beiden Hilfssätze gestatten nun, alle regulären linearen homogenen Gleichungssysteme aufzustellen, deren Koeffizienten rational sind.

Satz IV. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$(20) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m, \; a_{\mu\nu} \text{ rational})$$

regulär, wenn die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

folgende Eigenschaft hat: Die Spalten von $\mathfrak{A}$ lassen sich derart in Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_q$ einteilen, daß gilt:

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_1$ verschwindet.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_2$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1$ linear kombinierbar.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_3$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ linear kombinierbar.

. . . .

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_q$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{q-1}$ linear kombinierbar.

Ehe wir zum Beweis des Satzes übergehen, soll seine Behauptung etwas erläutert werden: Für den Fall einer Gleichung sagt sie folgendes aus: *Dann und nur dann ist eine Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \qquad (a_\nu \textit{ rational})$$

bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, wenn es irgendwelche von Null verschiedene Zahlen unter den a_ν gibt, deren Summe verschwindet. Der von I. Schur[7]) betrachtete Fall

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

fällt hierunter, ebenso der von A. Brauer[8]) erörterte Fall

$$x_1 + a x_2 - x_3 = 0 \qquad (a \text{ ganz}).$$

Dagegen ist z. B. die Gleichung

$$x_1 + x_2 - 3 x_3 = 0$$

nicht regulär, da keine Teilsumme aus den Koeffizienten dieser Gleichung den Wert Null ergibt. Aus einem späteren Satz[9]) wird sogar folgen, daß diese Gleichung höchstens dreifach regulär ist.

Man kann Satz IV auch folgendermaßen formulieren: *Dann und nur dann ist* (20) *regulär, wenn man die Indizes* $1, 2, \dots, n$ *so in Gruppen* $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$ *einteilen kann, daß folgendes gilt: Zu jedem* $\varkappa = 1, 2, \dots, q$ *gibt es ein Lösungssystem* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *von* (20) *mit*

$$x_\nu = 1 \textit{ für alle } \nu \textit{ aus } \Gamma_\varkappa,$$
$$x_\nu = 0 \textit{ für alle } \nu \textit{ aus } \Gamma_{\varkappa+1}, \Gamma_{\varkappa+2}, \dots, \Gamma_q.$$

Aus dieser Formulierung ergibt sich leicht folgende Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden: *Verteilt man alle natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen, dann gibt es zu den natürlichen Zahlen r, l immer eine Klasse $\mathfrak{K}_0$ und ein System*

$$a_0, a_1, \dots, a_l$$

natürlicher Zahlen, welche eine arithmetische Reihe r-ter Stufe bilden und welche mit allen ihren Differenzen bis zu denen r-ter Stufe in $\mathfrak{K}_0$ liegen. (Natürlich muß $r < l$ sein.) Man hat hier als Unbekannte alle Größen des Schemas

$$\begin{array}{ccccc}
x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots\dots\dots & x_{0l} \\
 & x_{11} & x_{12} & \dots\dots\dots & x_{1l} \\
 & & \dots\dots & \dots\dots & \\
 & & & x_{rr} \dots\dots & x_{rl}
\end{array}$$

zu betrachten. Sie sollen den Gleichungen

$$x_{\varrho\lambda} + x_{\varrho+1,\lambda} = x_{\varrho,\lambda+1} \qquad (0 \leqq \varrho < r, \quad \varrho \leqq \lambda < l)$$

genügen. Um die Regularität dieses Gleichungssystems zu erkennen, muß man

[7]) Siehe Einleitung.

[8]) Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-physikal. Klasse 1931, S. 15.

[9]) Satz X, 1.

die Indexpaare (ϱ, λ) $(0 \leqq \varrho \leqq \lambda \leqq l)$ derart auf Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ verteilen, daß man zu jeder Gruppe eine Lösung des Gleichungssystems finden kann, bei der die zu dieser Gruppe gehörigen $x_{\varrho\lambda}$ gleich Eins und die zu den folgenden Gruppen gehörigen $x_{\varrho\lambda}$ gleich Null sind. Offenbar hat die Zerlegung

$$\Gamma_\varrho = \{(\varrho, \varrho), (\varrho, \varrho+1), \ldots, (\varrho, l)\} \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r)$$

diese Eigenschaft.

Beweis von Satz IV. 1. $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ möge die beschriebene Eigenschaft haben. Ich habe zu zeigen, daß (20) regulär ist. Für $q = 1$ ist das richtig. Denn in diesem Falle ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ eine Lösung von (20). Man kann für kleinere Werte von q daher die Behauptung als bewiesen ansehen. Ich will zeigen, daß (20) k-fach regulär ist für jedes $k \geqq 1$. Für $k = 1$ besagt diese Aussage, daß (20) eine Lösung durch positive ganze x_ν besitzt. Daß das der Fall ist, sieht man so: $\mathfrak{G}_q$ bestehe etwa aus den r letzten Spalten von $\mathfrak{A}$. Nach Induktionsannahme ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{21}$$

regulär, also überhaupt durch positive ganze Werte der x_ν, etwa

$$x_\nu = g_\nu > 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n - r)$$

zu befriedigen. Nach Voraussetzung gibt es Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} s_\nu + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{22}$$

Offenbar können die s_ν auch rational gewählt werden. Es folgt nun für jedes A und B:

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu}(A g_\nu + B s_\nu) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot B = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{23}$$

Wählt man für B den Hauptnenner H aller s_ν und für A eine genügend große ganze Zahl, dann zeigt (23), daß (20) eine Lösung durch positive ganze Werte der x_ν besitzt, also einfach regulär ist. Meine Behauptung wird bewiesen sein, wenn folgendes gezeigt ist: Aus der Annahme, daß (21) regulär und (20) $(k-1)$-fach regulär ist $(2 \leqq k)$, folgt, daß (20) k-fach regulär ist. Diese beiden Annahmen über (21) und (20) will ich nun machen.

Da (20) $(k-1)$-fach regulär ist, gibt es nach dem Gleichmäßigkeitssatz eine Konstante N, so daß schon das Bedingungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N$$

$(k-1)$-fach regulär ist. Jetzt sei $\mathfrak{V}$ eine Verteilung auf k Klassen.

Annahme. Es gibt keine natürlichen Zahlen x_ν mit (20), welche bei $\mathfrak{B}$ in derselben Klasse liegen.

Folgerungen. Da (21) regulär ist, kann auf (21) und $\mathfrak{B}$ der Hilfssatz I angewandt werden. Als M wähle ich dabei

$$M = HN \cdot \mathrm{Max}(|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{n-r}|). \tag{24}$$

H bedeutet, wie oben, den Hauptnenner aller s_ν. Nach Hilfssatz I folgt dann die Existenz natürlicher Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-r}^{(0)}, d$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} \cdot x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{25}$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n - r,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M). \tag{26}$$

Aus (25) und (22) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + \varkappa \cdot Hs_\nu d) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot \varkappa Hd = 0 \tag{27}$$
$$(1 \leqq \mu \leqq m,\ 1 \leqq \varkappa \leqq N).$$

Die Klasse von $\mathfrak{B}$, in der alle Zahlen (26) liegen, sei $\mathfrak{K}_0$. Aus (24) und der Definition von H folgt, daß die Zahlen

$$\varkappa \cdot Hs_\nu \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq N,\ 1 \leqq \nu \leqq n - r)$$

ganz und höchstens vom Absolutbetrag M sind. Also ist nach (26)

$$x_\nu^{(0)} + \varkappa \cdot Hs_\nu d \prec \mathfrak{K}_0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n - r,\ 1 \leqq \varkappa \leqq N). \tag{28}$$

Aus (27), (28) und der Annahme über $\mathfrak{B}$ folgt

$$\varkappa \cdot Hd \not\prec \mathfrak{K}_0 \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq N). \tag{29}$$

Jetzt bilde ich

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}[\xi \cdot Hd]. \tag{30}$$

Wegen (29) verteilen sich die Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

bei $\mathfrak{B}'$ auf höchstens $k - 1$ Klassen. Aus der Definition von N folgt daher die Existenz natürlicher Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu' = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{31}$$
$$x_1', x_2', \ldots, x_n' \leqq N,$$

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{B}'}. \tag{32}$$

Aus (31) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot x_\nu' Hd = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{33}$$

(32) besagt nach (30) dasselbe wie

(34) $$x_1' \cdot Hd \equiv x_2' \cdot Hd \equiv \ldots \equiv x_n' \cdot Hd \; (\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}).$$

(33) und (34) stellen einen Widerspruch zur Annahme über $\mathfrak{V}$ dar.

Da $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung auf k Klassen war, ist die k-fache Regularität von (20) und damit die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

2. Das Gleichungssystem (20) sei regulär. Ich habe die Spalten der Matrix $\mathfrak{A}$ so in Gruppen einzuteilen, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

p sei eine beliebige Primzahl. Jede natürliche Zahl x ist eindeutig zerlegbar in der Form

$$x = u_p \cdot p^{v_p} \quad \text{mit} \quad p \nmid u_p, \; u_p \text{ und } v_p \text{ ganz.}$$

Man hat also eine eindeutige Funktion $u_p(x)$. Ich bilde nun

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_p\,[u_p(\xi)].$$

$\mathfrak{V}_p$ ist dabei, wie in § 1 allgemein erwähnt, die Restklassenverteilung $\mathrm{mod}\, p$. Da (20) regulär ist, gibt es natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit (20) und

(35) $$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \; (\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}).$$

Aus (35) folgt die Existenz von u_0 mit $p \nmid u_0$ und

(36) $$x_\nu = (u_0 + k_\nu p) \cdot p^{v_\nu} \quad \text{mit } k_\nu,\, v_\nu \text{ ganz.}$$

Man kann $v_1 \leqq v_2 \leqq v_3 \leqq \ldots \leqq v_n$ annehmen oder genauer

$$0 \leqq v_1 = v_2 = \ldots = v_{\alpha_1} < v_{\alpha_1+1} = v_{\alpha_1+2} = \ldots$$
$$= v_{\alpha_2} < v_{\alpha_2+1} = \ldots < v_{\alpha_3+1} = \ldots = v_{\alpha_q} \qquad (\alpha_q = n).$$

Da für jede der Zahlen $q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ nur eine Zahl aus der Reihe

$$1, 2, \ldots, n$$

in Frage kommt, gibt es unendlich viele p, für die diese Zahlen übereinstimmen. Aus einer unendlichen Folge solcher Primzahlen denke ich mir im folgenden p gewählt. Aus (20) und (36) folgt

(37) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(u_0 + k_\nu p) \cdot p^{v_\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Man betrachte (37) zunächst $\mathrm{mod}\, p^{v_{\alpha_1}+1}$. Dann folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} \cdot u_0\, p^{v_{\alpha_1}} \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p^{v_{\alpha_1}+1}) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

oder

(38) $$u_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Da p unendlich viele Primzahlen durchlaufen kann und $p \nmid u_0$ ist, folgt aus (38):

$$(39) \qquad \sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Ferner betrachte man (37) mod $p^{v_{\alpha_\varkappa}+1}$ $(2 \leqq \varkappa \leqq q)$. Dann folgt

$$(40) \qquad \sum_{\nu=1}^{\alpha_{\varkappa-1}} a_{\mu\nu}\, x_\nu + \sum_{\nu=\alpha_{\varkappa-1}+1}^{\alpha_\varkappa} a_{\mu\nu} \cdot u_0\, p^{v_{\alpha_\varkappa}} \equiv 0 \pmod{p^{v_{\alpha_\varkappa}+1}} \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Wendet man auf (40) nun Hilfssatz II an mit

$$r = u_0, \quad s = p^{v_{\alpha_\varkappa}}, \quad t = p$$

(daß seine Voraussetzungen erfüllt sind, sieht man sofort), dann folgt: Für $2 \leqq \varkappa \leqq q$ hat das Gleichungssystem

$$(41) \qquad \sum_{\nu=1}^{\alpha_{\varkappa-1}} a_{\mu\nu}\, y_\nu + \sum_{\nu=\alpha_{\varkappa-1}+1}^{\alpha_\varkappa} a_{\mu\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

eine Lösung in den y_ν. (39) und (41) zeigen, daß $\mathfrak{A}$ die gewünschte Zerlegbarkeitseigenschaft besitzt. In dieselbe Gruppe $\mathfrak{G}_\varkappa$ sind einfach diejenigen Spalten von $\mathfrak{A}$ zu legen, deren zugehörige x_ν mit gleicher Nummer durch genau dieselbe Potenz von p teilbar sind. Satz IV ist damit vollständig bewiesen.

Durch einfaches Rechnen mit linearen Gleichungen kann man den Hilfssatz II leicht dahin verschärfen, daß man nur ein einziges Tripel r, s, t in seiner Voraussetzung braucht, dessen t aber mindestens gleich einer angebbaren, von den Koeffizienten abhängigen Schranke ist. Wenn man diesen verschärften Hilfssatz hier benutzt, dann ergibt sich: $\mathfrak{A}$ habe den Rang s $(1 \leqq s \leqq m)$. $M_s(\mathfrak{A})$ sei das Maximum der absoluten Beträge der Unterdeterminanten s-ten Grades von $\mathfrak{A}$. p sei eine Primzahl mit

$$p > M_s(\mathfrak{A}) \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|,$$

$u_p(x)$ sei die Seite 449 eingeführte Funktion. Dann gilt: *Dann und nur dann ist* (20) *regulär, wenn* (20) *bei der speziellen Verteilung*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_p\,[u_p(\xi)]$$

ein Lösungssystem hat, dessen Zahlen sich in derselben Klasse befinden.

Um also nachzuprüfen, ob ein Gleichungssystem (20) bei *jeder beliebigen* Verteilung der natürlichen Zahlen auf *endlich* viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar ist, braucht man nur *eine einzige,* leicht angebbare Verteilung daraufhin zu untersuchen, ob in einer Klasse sich ein Lösungssystem von (20) befindet. Ist letzteres der Fall, dann gibt es auch bei jeder anderen Verteilung auf beliebig viele Klassen immer ein solches Lösungssystem.

Wenn man alle regulären linearen *homogenen* Gleichungssysteme mit rationalen Koeffizienten kennt, dann ist es nicht mehr schwer, auch noch die *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme mit rationalen Koeffizienten zu bestimmen, die regulär sind. Es gilt hier

Satz V. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \; (a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ rational}) \tag{42}$$

regulär, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine natürliche Zahl a mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es gibt eine ganze Zahl* $a \leqq 0$ *mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} a = a_u \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Ferner ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{43}$$

regulär.

Beweis. 1. Ich zeige zunächst, daß die Richtigkeit jeder der beiden Aussagen hinreichend ist für Regularität von (42). Für die erste Aussage ist das klar. Denn nach ihr gehört ja a zu den Zahlen, die auf die Klassen verteilt werden. Es sei jetzt die zweite Aussage zutreffend. Man kann (42) schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(x_\nu - a) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{44}$$

Die Regularität von (44) wird bewiesen sein, wenn allgemeiner gezeigt ist: *Ist*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein homogenes, k-fach reguläres Bedingungssystem, a eine ganze Zahl, dann ist auch

$$\mathfrak{S}(x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a) = 0 \tag{45}$$

ein k-fach reguläres Bedingungssystem. Die Richtigkeit dieses allgemeinen Prinzips ergibt sich so: Es sei

$$b \text{ ganz}, \qquad b > |a|, \tag{46}$$

$\mathfrak{V}$ sei eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Man bilde

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[a + b\xi]. \tag{47}$$

29*

Da für natürliches x immer $a+bx$ wegen (46) eine natürliche Zahl ist, hat die Definition von $\mathfrak{V}'$ einen Sinn. $\mathfrak{V}'$ hat k Klassen. Also gibt es natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$(48) \qquad \mathfrak{S}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0$$

$$(49) \qquad x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{V}'}.$$

(49) ist nach (47) gleichbedeutend mit

$$(50) \qquad a+bx_1' \equiv a+bx_2' \equiv \ldots \equiv a+bx_n' \pmod{\mathfrak{V}}.$$

Setzt man

$$x_\nu = a + b x_\nu' \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

dann folgt aus (50), (48) und der Homogenität von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}(x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a) = 0; \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{V}}.$$

Da $\mathfrak{V}$ beliebig war, bedeutet das k-fache Regularität von (45).

2. Jetzt sei umgekehrt (42) regulär. Es ist zu zeigen, daß eine der beiden obigen Aussagen zutrifft.

Man betrachte zunächst den Fall $m=1$, das heißt: Man nehme an, die Gleichung

$$(51) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu = c \qquad (c_\nu, c \text{ ganz rational})$$

sei regulär. Dann folgt: m sei eine natürliche Zahl mit

$$(52) \qquad m \mid \sum_\nu c_\nu.$$

Es sei

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_m.$$

Da (51) regulär ist, gibt es natürliche Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ mit

$$\sum_\nu c_\nu x_\nu^{(0)} = c$$

$$x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} \pmod{\mathfrak{V}}.$$

Dann folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $x^{(0)}$ mit

$$x_\nu^{(0)} \equiv x^{(0)} \pmod{m} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

$$(53) \qquad \sum_\nu c_\nu x^{(0)} \equiv c \pmod{m}.$$

Wegen (52) folgt aus (53):

$$m \mid c.$$

Da das für jedes m mit (52) gilt, ergibt sich:

(54) *Entweder ist* $\sum_\nu c_\nu = c = 0$, *oder es ist* $\sum_\nu c_\nu \neq 0$, $\dfrac{c}{\sum_\nu c_\nu} =$ *ganze Zahl.*

Nun ist (42) ein reguläres Gleichungssystem. Also ist speziell jede lineare Gleichung, die eine lineare Kombination der Gleichungen (42) mittels rationaler Koeffizienten ist, regulär. Für jede derartige Gleichung gilt somit (54). Ich behaupte nun: Für alle μ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} \neq 0$$

stimmen die ganzen Zahlen

$$\frac{a_\mu}{\sum\limits_\nu a_{\mu\nu}}$$

überein. Denn es sei im Widerspruch hiermit

$$\sum_\nu a_{1\nu} \neq 0, \quad \sum_\nu a_{2\nu} \neq 0, \qquad \frac{a_1}{\sum\limits_\nu a_{1\nu}} \neq \frac{a_2}{\sum\limits_\nu a_{2\nu}}.$$

Will man naheliegende Stetigkeitsüberlegungen vermeiden, dann kann man so schließen: Aus der Regularität von (42) folgt, daß

$$\begin{aligned}(2a_2 - \sum_\nu a_{2\nu}) \sum_\nu a_{1\nu} x_\nu - (2a_1 - \sum_\nu a_{1\nu}) \sum_\nu a_{2\nu} x_\nu \\ = (2a_2 - \sum_\nu a_{2\nu}) a_1 - (2a_1 - \sum_\nu a_{1\nu}) a_2\end{aligned}$$

eine reguläre Gleichung ist. Wegen

$$\frac{(2a_2 - \sum\limits_\nu a_{2\nu}) a_1 - (2a_1 - \sum\limits_\nu a_{1\nu}) a_2}{(2a_2 - \sum\limits_\nu a_{2\nu}) \sum\limits_\nu a_{1\nu} - (2a_1 - \sum\limits_\nu a_{1\nu}) \sum\limits_\nu a_{2\nu}} = \frac{1}{2}$$

ist das ein Widerspruch zu (54), wonach die letzte Zahl ganz wäre.

Bis jetzt ist also die Existenz einer ganzen Zahl a bewiesen mit

(55) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Falls $a > 0$, dann trifft von den beiden als hinreichend erkannten Bedingungen die erste zu.

Falls $a = 0$, dann folgt aus (55):

$$a_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu.$$

Also ist (43) regulär, die zweite Bedingung ist erfüllt.

Falls $a < 0$, schließt man so: $\mathfrak{B}$ sei eine beliebige Verteilung,

(56) $$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}[\xi - a].$$

Wegen $a < 0$ ist die letzte Bildung sinnvoll. Wegen der Regularität von (42) gibt es x_ν' mit

(57) $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu' = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

(58) $$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{B}''}.$$

Nach (55) schreibt sich (57) auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(x'_\nu - a) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{59}$$

(58) ist nach (56) gleichwertig mit

$$x'_1 - a \equiv x'_2 - a \equiv \ldots \equiv x'_n - a \pmod{\mathfrak{B}}. \tag{60}$$

(59) und (60) zeigen, daß (43) regulär ist, so daß in diesem Fall also Bedingung 2 erfüllt ist.

Die letzte Überlegung zeigt allgemein, daß folgendes Seitenstück des allgemeinen Prinzips von Seite 451 gültig ist:

Ist a eine negative ganze Zahl,

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein k-fach reguläres Bedingungssystem, dann ist auch

$$\mathfrak{S}(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = 0$$

k-fach regulär. Für $a > 0$ braucht das nicht immer zu gelten, wie folgendes Beispiel zeigt:

$\mathfrak{S}$ besteht aus der einen regulären Gleichung

$$x_1 = 1,$$

a hat den Wert 1.

Man überlegt sich leicht, wie man die bisherigen Regularitätskriterien zu modifizieren hat, wenn die $a_{\mu\nu}$ und a_μ nicht ganze rationale, sondern beliebige Zahlen sind. Man findet folgendes allgemeine, IV und V enthaltende Kriterium:

Satz VI. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m;\ a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ beliebig})$$

regulär, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine ganze Zahl $a > 0$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es gibt eine ganze Zahl $a \leqq 0$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Ferner kann man die Spalten der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

so in Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_q$ einteilen, daß gilt:

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_1$ verschwindet.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_\varkappa$ $(2 \leqq \varkappa \leqq q)$ *ist mittels rationaler Koeffizienten aus den Spalten von* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{\varkappa-1}$ *linear kombinierbar.*

Auf Grund von Satz VI zeigt man leicht durch Anwendung einfacher Sätze über lineare Formen:

Satz VII. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \quad (1 \leqq \mu \leqq m;\ a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ beliebig}) \tag{61}$$

regulär, wenn für jede Wahl von rationalen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *die Gleichung*

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_\mu$$

regulär ist.

Das wesentliche an dem letzten Satz ist, daß man die $c_1, c_2, \ldots, c_m$ nur *rational* zu wählen braucht. Läßt man diese Beschränkung fort, dann wäre der Satz eine unmittelbare Folge aus der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

Es wäre von Interesse, einen Beweis von Satz VII zu finden, der von der Kenntnis aller regulären Gleichungssysteme keinen Gebrauch macht. Dann könnte man vielleicht auch die folgende Frage angreifen: Es ist unbekannt, ob Satz VII noch gilt, wenn man in ihm das Wort *regulär* ersetzt durch *k-fach regulär*. Falls das richtig wäre, dann könnte man unter anderem aus Satz II folgern: Dann und nur dann ist (61) zweifach regulär, wenn (61) eine Lösung durch natürliche x_ν besitzt, und wenn außerdem die Summe je zweier Spalten der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ aus ihren übrigen $n - 2$ Spalten mittels rationaler Koeffizienten linear kombinierbar ist.

Der folgende Paragraph bringt einige Anwendungen von Satz VI.

§ 5.

Koppelung regulärer Gleichungssysteme.

Wir wollen uns jetzt mit folgender Frage befassen: $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien zwei reguläre Gleichungssysteme für die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bzw $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ist es dann möglich, bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen stets in mindestens einer Klasse sowohl ein Lösungssystem x_μ des ersten als auch ein Lösungssystem y_ν des zweiten Gleichungssystems zu finden? Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß diese Frage nicht immer zu bejahen ist. Es sei nämlich

$$\mathfrak{S}_1:\quad x_1 + x_2 = 2,$$
$$\mathfrak{S}_2:\quad y_1 + y_2 = 4.$$

$\mathfrak{S}_1$ ist regulär wegen $\mathfrak{S}_1(1, 1) = 0$, $\mathfrak{S}_2$ ist regulär wegen $\mathfrak{S}_2(2, 2) = 0$. Bei der Verteilung

$$\mathfrak{V} = \begin{Bmatrix} 1. \\ 2, 3, 4, \ldots \end{Bmatrix}$$

ist $\mathfrak{S}_1 = 0$ nur in der ersten, $\mathfrak{S}_2 = 0$ nur in der zweiten Klasse zu befriedigen, so daß es also keine Klasse gibt, in der sowohl $\mathfrak{S}_1 = 0$ als auch $\mathfrak{S}_2 = 0$ lösbar ist. Aus dem folgenden wird sich unter anderem ergeben, daß ein derartiger Fall nicht eintreten kann, wenn $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ homogen sind. Es gilt der viel weiter gehende Satz:

Satz VIII. *Bei jedem $\mathfrak{V}$ gibt es mindestens eine Klasse, in der sämtliche überhaupt existierenden regulären linearen homogenen Gleichungssysteme gleichzeitig je eine Lösung haben.*

Der Satz besagt also z. B.: Wenn in einer Klasse von $\mathfrak{V}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung besitzt, dann gibt es eine andere Klasse von $\mathfrak{V}$, in der beliebig lange arithmetische Progressionen liegen. Denn obiges Gleichungssystem ist nach Satz VI regulär. Man hat hier

$$q = 2; \quad \mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz VIII. Ich zeige zunächst: Sind

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

zwei reguläre lineare homogene Gleichungssysteme, dann ist das Gleichungssystem

$$(62) \qquad \mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

für die $m+n$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auch regulär. Aus der Regularität von $\mathfrak{S}_1 = 0$ folgt nämlich, daß man die Indizes $1, 2, \ldots, m$ so in Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ einteilen kann, daß zu jedem $\varkappa_1$ mit $1 \leqq \varkappa_1 \leqq q_1$ ein Lösungssystem von $\mathfrak{S}_1 = 0$ existiert mit

$$\begin{cases} x_\mu \text{ rational} & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa_1 - 1}, \\ x_\mu = 1 & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1}, \\ x_\mu = 0 & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1+1}, \Gamma_{\varkappa_1+2}, \ldots, \Gamma_{q_1}. \end{cases}$$

Das ist nur eine andere Formulierung für die in Satz VI beschriebene Zerlegbarkeitseigenschaft der dortigen Matrix $\mathfrak{A}$. Es sei der bequemeren Ausdrucksweise wegen in diesem Paragraphen hierfür folgende Formulierung gestattet: Man betrachte $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ nicht als eine Gruppeneinteilung der

Indizes $1, 2, \ldots, m$, sondern der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Zu jedem $\varkappa_1 = 1, 2, \ldots, q_1$ gibt es ein Lösungssystem von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit

$$(63) \qquad \begin{cases} x_\mu \text{ rational für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa_1 - 1} \\ x_\mu = 1 \qquad \text{für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1}, \\ x_\mu = 0 \qquad \text{für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1+1}, \Gamma_{\varkappa_1+2}, \ldots, \Gamma_{q_1}. \end{cases}$$

Eine entsprechende Gruppeneinteilung $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$ der Unbekannten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gibt es für $\mathfrak{S}_2$. Dann ist

$$(64) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}, \qquad \Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$$

eine Gruppeneinteilung aller Unbekannten von (62), von der man leicht sieht, daß sie die für Regularität hinreichenden Eigenschaften hat. Ich habe nur zu zeigen, daß man zu jeder Gruppe Γ aus (64) eine Lösung von (62) finden kann, bei der die Unbekannten dieser Gruppe den Wert Eins, die Unbekannten der vorhergehenden Gruppen rationale Werte und die Unbekannten der folgenden Gruppen den Wert Null haben. Ist $\Gamma = \Gamma_{\varkappa_1}$, dann wähle ich für die x_μ eine Lösung von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit der Eigenschaft (63), während ich die y_ν alle gleich Null setze. Für $\Gamma = \Gamma_{\varkappa_2}'$ verfahre ich entsprechend. Damit ist die Regularität von (62) bewiesen. Sind

$$\mathfrak{S}_1 = 0, \mathfrak{S}_2 = 0, \ldots, \mathfrak{S}_r = 0$$

endlich viele reguläre lineare homogene Gleichungssysteme, dann ergibt sich durch mehrmalige Anwendung des obigen Resultats oder auch direkt durch eine der obigen analoge Schlußweise: Wenn man die Gleichungssysteme $\mathfrak{S}_1 = 0, \mathfrak{S}_2 = 0, \ldots, \mathfrak{S}_r = 0$ simultan ansetzt mit je einer anderen Reihe von Unbekannten, dann erhält man ein reguläres Gleichungssystem in sämtlichen Unbekannten.

Satz VIII beweist sich jetzt einfach so: Man nehme an, $\mathfrak{V}$ sei eine Verteilung auf die Klasse $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$, für die die Behauptung falsch wäre. Dann gäbe es also zu jeder Klasse $\mathfrak{K}_\varkappa$ ein reguläres lineares homogenes Gleichungssystem $\mathfrak{S}_\varkappa$, welches in $\mathfrak{K}_\varkappa$ keine Lösung besitzt. Nun folgt aber aus dem letzten Resultat, daß es mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}_{\varkappa_0}$ von $\mathfrak{V}$ gibt, in der jedes $\mathfrak{K}_\varkappa$ je eine Lösung hat. Für $\varkappa = \varkappa_0$ ist das ein Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{S}_{\varkappa_0}$.

Eine weitere Anwendung von Satz VI ist der folgende

Satz IX. *$\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien zwei reguläre lineare homogene Gleichungssysteme in m bzw. n Unbekannten, $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung. Dann gibt es eine Matrix*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \ldots, & x_{mn} \end{pmatrix},$$

deren sämtliche Elemente sich in derselben Klasse von $\mathfrak{B}$ befinden und die die Eigenschaft hat, daß ihre Spalten Lösungen von $\mathfrak{S}_1 = 0$, ihre Zeilen Lösungen von $\mathfrak{S}_2 = 0$ sind.

Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die Koeffizientenmatrizen von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, dann kann man die Behauptung auch so ausdrücken: *Das Gleichungssystem*

$$\mathfrak{A}_1 X = 0, \qquad X\mathfrak{A}_2 = 0 \tag{65}$$

in den $m \cdot n$ Unbekannten $x_{\mu\nu}$ ist regulär.

Beweis. Ebenso wie beim Beweis von Satz VIII werde ich eine Gruppenzerlegung der Unbekannten $x_{\mu\nu}$ von (65) angeben, die die bei Satz VI gebrauchte Eigenschaft hat. Gruppenzerlegungen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ und $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit der entsprechenden Eigenschaft für $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ gibt es bereits. Es sei $\Gamma_{\varkappa\lambda}$ die Menge aller $x_{\mu\nu}$, für die

$$x_\mu \prec \Gamma_\varkappa, \qquad y_\nu \prec \Gamma_\lambda'$$

gilt. Dann liegt jedes $x_{\mu\nu}$ in genau einem $\Gamma_{\varkappa\lambda}$. Die $\Gamma_{\varkappa\lambda}$ ordne ich folgendermaßen:

$$\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{1q_2}, \quad \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \ldots, \Gamma_{2q_2}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{q_1 q_2}.$$

Ich zeige nun, daß diese Gruppeneinteilung der Unbekannten von (65) die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu ist nur folgendes zu zeigen: zu $\varkappa, \lambda$ mit $1 \leqq \varkappa \leqq q_1$, $1 \leqq \lambda \leqq q_2$ gibt es ein Lösungssystem von (65) mit

$x_{\mu\nu} = 1$ für alle $x_{\mu\nu}$ aus $\Gamma_{\varkappa\lambda}$,
$x_{\mu\nu}$ rational für alle $x_{\mu\nu}$ aus $\Gamma_{\varkappa'\lambda'}$ mit $\varkappa' < \varkappa$ oder mit $\varkappa' = \varkappa$, $\lambda' < \lambda$,
$x_{\mu\nu} = 0$ für alle übrigen $x_{\mu\nu}$.

Nun gibt es eine Lösung $x_\mu = x_\mu^{(0)}$ von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit:

$x_\mu = 1$ für alle x_μ aus $\Gamma_\varkappa$,
x_μ rational für alle x_μ aus $\Gamma_{\varkappa'}$ mit $\varkappa' < \varkappa$,
$x_\mu = 0$ für alle übrigen x_μ.

Ferner gibt es eine Lösung $y_\nu = y_\nu^{(0)}$ von $\mathfrak{S}_2 = 0$ mit:

$y_\nu = 1$ für alle y_ν aus Γ_λ',
y_ν rational für alle y_ν aus $\Gamma_{\lambda'}'$ mit $\lambda' < \lambda$,
$y_\nu = 0$ für alle übrigen y_ν.

Dann setze ich:

$$x_{\mu\nu} = x_\mu^{(0)} \cdot y_\nu^{(0)}.$$

Diese Zahlen bilden eine Lösung von (65), die die gewünschte Eigenschaft hat, wie man sofort sieht. Damit ist die Regularität von (65) bewiesen.

Ein zu IX ganz entsprechender Satz gilt für Matrizen von höherer als zweiter Dimension, wenn mehr als zwei reguläre Gleichungssysteme gegeben sind. Aus IX folgt insbesondere: Wenn $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ regulär sind, dann gibt es bei jedem $\mathfrak{B}$ eine Lösung von $\mathfrak{S}_1 = 0$ und eine Lösung von

$\mathfrak{S}_2 = 0$, so daß beide Lösungen in derselben Klasse liegen und in der Weise miteinander gekoppelt sind, daß eine beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ denselben Wert hat wie eine andere beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_2$. Das heißt: Sind

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

zwei reguläre Gleichungssysteme (homogene), dann ist für jede Wahl von μ_0, ν_0 mit $1 \leqq \mu_0 \leqq m$, $1 \leqq \nu_0 \leqq n$ auch das Gleichungssystem

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$
$$x_{\mu_0} = y_{\nu_0}$$

regulär. Das folgt sofort aus Satz IX. Man braucht ja nur für die x_μ die ν_0-te Spalte, für die y_ν die μ_0-te Zeile der Matrix X zu nehmen. Verfährt man entsprechend mit der Verallgemeinerung von IX auf Matrizen von mehr als zwei Dimensionen, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}) = 0 \\ &\mathfrak{S}_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathfrak{S}_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_{n_r}^{(r)}) = 0 \end{aligned}$$

seien r reguläre lineare homogene Gleichungssysteme. Dann kann man bei jedem $\mathfrak{V}$ die Systeme $\mathfrak{S}_\varrho$ so durch Zahlen aus derselben Klasse lösen, daß eine beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ gleich einer beliebigen Unbekannten von $\mathfrak{S}_2$, gleichzeitig eine beliebig auswählbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$ gleich einer beliebigen Unbekannten von $\mathfrak{S}_3$, eine Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$ oder $\mathfrak{S}_3$ gleich einer Unbekannten von $\mathfrak{S}_4$ ist usw. Das kann man auch so ausdrücken: Man wähle für $2 \leqq \sigma \leqq r$ beliebige Zahlen $\nu_\sigma, \lambda_\sigma, \mu_\sigma$ mit

$$\begin{aligned} &1 \leqq \nu_\sigma \leqq \sigma - 1, \\ &1 \leqq \lambda_\sigma \leqq n_\sigma, \\ &1 \leqq \mu_\sigma \leqq n_{\nu_\sigma}. \end{aligned}$$

Dann ist folgendes Gleichungssystem in $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ Unbekannten $x_\nu^{(\varrho)}$ regulär:

$$\mathfrak{S}_\varrho(x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_{n_\varrho}^{(\varrho)}) = 0 \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r),$$
$$x_{\mu_\sigma}^{(\nu_\sigma)} = x_{\lambda_\sigma}^{(\sigma)} \qquad (2 \leqq \sigma \leqq r).$$

Es folgt z. B., daß es bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen in mindestens einer Klasse 100 arithmetische Progression von je 20 Zahlen gibt, so daß immer das Anfangsglied einer der Progressionen gleich der Differenz der folgenden Progression ist.

Im Anschluß an Satz VIII kann man das Problem der regulären Gleichungssysteme noch in einer anderen Richtung weiter verfolgen. Man nenne Mengen natürlicher Zahlen, die von *jedem* regulären linearen homogenen Gleichungssystem mindestens eine Lösung enthalten, *reguläre Mengen*. Dann lautet Satz VIII: *Teilt man die Menge aller natürlichen Zahlen in endlich viele Teilmengen, so ist mindestens eine der Teilmengen regulär.* Nun kann man leicht zeigen, daß eine reguläre Menge regulär bleibt, wenn man endlich viele ihrer Zahlen wegläßt. Es sei nämlich a eine natürliche Zahl aus $\mathfrak{M}$. Es ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M} - a$ noch eine reguläre Menge ist. Es sei

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

irgendein reguläres lineares homogenes Gleichungssystem. Dann ist auch folgendes Gleichungssystem in $3n$ Unbekannten x_ν, y_ν, z_ν regulär:

$$(66) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1 - y_1 = a z_1, \\ x_2 - y_2 = a z_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n - y_n = a z_n. \end{cases}$$

Denn man nehme etwa an, die schon mehrfach erwähnte Gruppeneinteilung der Unbekannten von $\mathfrak{S}$ sei

$$\Gamma_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha\}, \qquad \Gamma_2 = \{x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots, x_\beta\},$$
$$\Gamma_3 = \{x_{\beta+1}, x_{\beta+2}, \ldots, x_n\}.$$

Dann ist folgende Gruppeneinteilung der Unbekannten von (66) brauchbar:

$$\begin{aligned} \Gamma_1' &= \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha,\ y_1, y_2, \ldots, y_\alpha\}, \\ \Gamma_2' &= \{x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots, x_\beta,\ y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots, y_\beta\}, \\ \Gamma_3' &= \{x_{\beta+1}, x_{\beta+2}, \ldots, x_n,\ y_{\beta+1}, y_{\beta+2}, \ldots, y_n\}, \\ \Gamma_4' &= \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}. \end{aligned}$$

Man sieht nämlich leicht, daß man auf Grund der Eigenschaft der Gruppeneinteilung $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ eine Lösung von (66) finden kann, bei der die Unbekannten einer beliebigen Gruppe $\Gamma_\varkappa'$ $(1 \leqq \varkappa \leqq 4)$ den Wert Eins haben, die Unbekannten der vorhergehenden Γ_ϱ' rationale Werte haben und die übrigen Unbekannten verschwinden.

Da (66) somit regulär ist, gibt es also eine Lösung von (66) in $\mathfrak{M}$. Die Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in dieser Lösung sind nach (66) größer als a, liegen also in $\mathfrak{M} - a$ und befriedigen außerdem $\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Da $\mathfrak{S}$ beliebig war, ist daher $\mathfrak{M} - a$ eine reguläre Menge.

Es drängt sich folgende Vermutung auf: *Teilt man eine reguläre Menge $\mathfrak{M}$ in endlich viele Teilmengen, dann ist mindestens eine der Teilmengen wieder regulär.* In folgenden Fällen ist diese Vermutung bisher bewiesen:

1. Wenn alle Teilmengen von $\mathfrak{M}$ bis auf eine nur endlich viele Zahlen enthalten. Dann ist die Vermutung nämlich nach der letzten Überlegung richtig.

2. Wenn $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Dann ist die Vermutung identisch mit Satz VIII.

3. Wenn $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ keine reguläre Menge ist, wobei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Denn aus

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_p$$

folgt

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_p + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}).$$

Da $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{M})$ nicht regulär ist, ist nach 2. eine der Mengen $\mathfrak{M}_\lambda$ regulär. Der allgemeine Beweis der Vermutung ist noch nicht gelungen.

Man kann übrigens zu jedem k Verteilungen auf k Klassen angeben, bei denen *jede* Klasse eine *reguläre Menge* ist. Z. B. hat folgende Verteilung diese Eigenschaft: Die Klassen seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$. Man verteilt so, daß für jede Wahl von $\varkappa, n, \nu$ mit $\begin{array}{l} 1 \leqq \varkappa \leqq k,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ 1 \leqq \nu \leqq kn + \varkappa \end{array}$

$$\nu \cdot (kn + \varkappa)! \prec \mathfrak{K}_\varkappa,$$

während die nicht in der Form

$$\nu \cdot (kn + \varkappa)! \quad \text{mit} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq k, \quad 0 \leqq n, \quad 1 \leqq \nu \leqq kn + \varkappa$$

darstellbaren Zahlen irgendwie auf die k Klassen verteilt werden.

Man sieht sofort, daß diese Relationen nicht im Widerspruch zueinander stehen. Ferner erkennt man, daß in jeder Klasse zu jedem N ein Zahlensystem von der Form

$$1 \cdot a_N, \quad 2 \cdot a_N, \quad 3 \cdot a_N, \quad \ldots, \quad N \cdot a_N$$

liegt, was die Behauptung evident macht[10]).

Eine Bemerkung zu Satz VIII möge noch hinzugefügt werden: Man könnte versucht sein zu vermuten, daß man Satz VIII zusammen mit dem Gleichmäßigkeitssatz zu einer Aussage folgender Art kombinieren kann: Zu jedem k und zu jedem regulären linearen homogenen Gleichungssystem $\mathfrak{S} = 0$ gibt es eine Konstante $N_k(\mathfrak{S})$, so daß man bei jedem $\mathfrak{V}$ mit k Klassen immer mindestens eine Klasse finden kann, in der *jedes* $\mathfrak{S}$ eine Lösung *unterhalb* $N_k(\mathfrak{S})$ besitzt. Es würde also zu der bloßen Existenzaussage für Lösungen, wie sie in Satz VIII vorliegt, noch eine Abschätzung hinzukommen. Daß diese Vermutung unzutreffend ist, zeigt die Folge der Verteilungen

$$\mathfrak{V}^{(n)} = \begin{Bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n & \\ n+1, & n+2, & n+3, & \ldots \end{Bmatrix}.$$

---

[10]) Übrigens ist für jede der Klassen $\mathfrak{K}_k$ die S. 460 unten formulierte Vermutung zutreffend.

Denn bei jeder dieser Verteilungen könnte die fragliche „reguläre“ Klasse nur die zweite sein, woraus

$$N_k(\mathfrak{S}) > n \quad \text{für alle } n$$

folgen würde. Es kann also kein $N_k(\mathfrak{S})$ existieren. Wenn man also alle $\mathfrak{S}$ gleichzeitig in derselben Klasse lösen will, dann geht der Vorteil verloren, daß man diese Lösungen abschätzen kann.

Zur Ableitung der Resultate dieses Paragraphen wurde wesentlich Satz VI benutzt, also die allgemeine Form regulärer linearer Gleichungssysteme. Es hat sich nun gezeigt, daß alle Sätze dieses Paragraphen sich auch ohne Benutzung von Satz VI beweisen lassen. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird sogar gezeigt werden, daß Satz VIII und Satz IX weitgehende Verallgemeinerungen zulassen auf Bedingungssysteme allgemeinster Art, die statt der Forderung der Homogenität eine viel schwächere Voraussetzung erfüllen. Diese Verallgemeinerungen werden erst den wahren kombinatorischen Kern der vorstehenden Sätze deutlich machen, während die hier gebrachten Beweise lediglich für lineare Gleichungen anwendbar sind und die Kenntnis aller regulären Systeme linearer Gleichungen voraussetzen.

§ 6.

Abschätzung des Regularitätsgrades für nicht reguläre lineare Gleichungen.

Der Beweis von Satz VI gestattet es, wie S. 450 für homogene Gleichungen etwas genauer dargestellt wurde, für jedes nicht reguläre lineare Gleichungssystem $\mathfrak{S}$ eine Verteilung $\mathfrak{V}$ anzugeben, so daß $\mathfrak{S} = 0$ keine Lösung besitzt, deren Zahlen alle bei $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse liegen. Die Anzahl der Klassen von $\mathfrak{V}$ wird dabei von den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ abhängen. Man kann also für den Regularitätsgrad eines nichtregulären Gleichungssystems $\mathfrak{S} = 0$ eine leicht angebbare obere Schranke finden, die von den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ abhängt. Es ist nun zu vermuten, daß man sogar eine Schranke finden kann, die nur von der Anzahl der Unbekannten in $\mathfrak{S}$ abhängt. Das würde bedeuten: *Zu jedem n gibt es eine Zahl k_n mit der Eigenschaft: Ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten ist entweder regulär oder höchstens k_n-fach regulär.* Es würde genügen, diese Vermutung nur für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{S} = 0$ nur aus *einer einzigen* Gleichung besteht. Dann würde nämlich nach Satz VII auch die Richtigkeit der Vermutung für beliebige Systeme linearer Gleichungen folgen mit denselben Zahlen k_n. Eine ähnliche Überlegung wie die zu Anfang von § 2 angestellte zeigt, daß im Falle *zweier* Unbekannter die Zahl $k_2 = 1$ im Sinne der Vermutung das Gewünschte leistet. Eine Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

ist also entweder regulär oder höchstens einfach regulär.

Übrigens ist die Vermutung unzutreffend, wenn man sich nicht auf lineare Gleichungen beschränkt. Denn für jedes k ist die Gleichung

$$(x + 1 - y)(x + 2 - y) \ldots (x + k - y) = 0,$$

wie man analog wie S. 431 im Falle $k = 2$ sieht, k-fach, aber nicht $(k+1)$-fach regulär, während doch die Zahl der Unbekannten immer zwei ist. Dieselbe Eigenschaft hat, um auch ein homogenes Beispiel zu nennen, die Gleichung

$$(x - 2y)(x - 4y) \ldots (x - 2^k \cdot y) = 0.$$

Daß die Vermutung im Falle linearer Gleichungen dennoch berechtigt ist, zeigt der folgende Satz:

Satz X.

1. *Die Gleichung*

(1) $$a(x + y) = z \qquad (a \text{ rational, keine Potenz von Zwei})$$

ist höchstens dreifach regulär.

2. *Die Gleichung*

$$2^\alpha \cdot (x + y) = z \qquad (\alpha \text{ ganz})$$

ist entweder regulär oder höchstens fünffach regulär.

3. *Die Gleichung*

$$p^\alpha ax + p^\alpha by + p^\gamma cz = 0$$

$$(p \text{ Primzahl}, a, b, c, \alpha, \gamma \text{ ganz}, \alpha \neq \gamma, p \nmid abc(a + b))$$

ist entweder regulär oder höchstens fünffach regulär.

4. *Die Gleichung*

$$p^\alpha ax + p^\beta by + p^\gamma cz = 0$$

$$(p \text{ Primzahl}, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \text{ ganz}, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, p \nmid abc)$$

ist höchstens siebenfach regulär.

Beweis. Ich beschränke mich darauf, den ersten Teil des Satzes zu beweisen. Die Beweise für die übrigen drei Behauptungen verwenden ähnliche Überlegungen. Alle diese Beweise sind Verfeinerungen der Beweismethode von Satz IV, Fall 2.

Es sei

$$a = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{mit } a_1, a_2 \text{ ganz.}$$

Da a keine Potenz von Zwei ist, gibt es eine ungerade Primzahl p, die in a_1 und a_2 in einer verschiedenen Potenz aufgeht. Es sei etwa

$$a_1 = a_1' \cdot p^{\alpha_1}, \quad a_2 = a_2' \cdot p^{\alpha_2} \quad \text{mit } \alpha_1 \neq \alpha_2, \ p \nmid a_1' a_2'.$$

Die eindeutige Zerlegung

$$x = u_p \cdot p^{v_p} \quad \text{mit} \quad p \nmid u_p$$

liefert, wie S. 449, die eindeutige Funktion $u_p(x)$, außerdem noch die zweite Funktion $v_p(x)$. Nun sei $\mathfrak{V}^{(1)}$ eine Verteilung aller zu p teilerfremden positiven Zahlen auf zwei Klassen derart, daß aus

$$u_1 \equiv u_2 \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}}$$

immer

$$p \nmid (u_1 + u_2)$$

folgt. Eine solche Verteilung ist z. B.

$$\mathfrak{V}^{(1)} = \begin{cases} \text{1. Klasse: Alle Zahlen } lp + r \text{ mit } l = 0, 1, \ldots;\ r = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}. \\ \text{2. Klasse: Alle Zahlen } lp + r \text{ mit } l = 0, 1, \ldots;\ r = \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots, p-1. \end{cases}$$

$\mathfrak{V}^{(2)}$ sei eine Verteilung aller nicht negativen ganzen Zahlen auf zwei Klassen derart, daß für jedes v immer

$$v + \alpha_1 - \alpha_2 \not\equiv v \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}$$

gilt. Eine solche Verteilung ist z. B.

$$\mathfrak{V}^{(2)} = \begin{cases} \text{1. Klasse: Alle Zahlen } x \text{ mit } \left[\frac{x}{\alpha_1 - \alpha_2}\right] \equiv 0 \pmod 2. \\ \text{2. Klasse; Alle Zahlen } x \text{ mit } \left[\frac{x}{\alpha_1 - \alpha_2}\right] \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Jetzt definiere ich eine Verteilung $\mathfrak{V}$ aller natürlichen Zahlen durch

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{V}}, \text{ wenn } u_p(x) \equiv u_p(y) \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}},\ v_p(x) \equiv v_p(y) \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}.$$

$\mathfrak{V}$ hat offenbar vier Klassen. Wenn ich gezeigt habe, daß für jede Wahl natürlicher Zahlen x_1, x_2 mit

(2) $$x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{V}},$$

für die

(3) $$a(x_1 + x_2)$$

positiv und ganz ist,

(4) $$a(x_1 + x_2) \not\equiv x_1 \pmod{\mathfrak{V}}$$

ist, dann ist bewiesen, daß die Gleichung (1) nicht vierfach regulär ist, was mit der ersten Behauptung von Satz X übereinstimmt. Es gelte also (2), und (3) sei eine natürliche Zahl. Setzt man

$$u' = u_p(x_1), \quad u'' = u_p(x_2), \quad v' = v_p(x_1), \quad v'' = v_p(x_2),$$

dann folgt aus (2)

(5) $$\begin{aligned} u' &\equiv u'' \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}}, \\ v' &\equiv v'' \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}. \end{aligned}$$

Ist zunächst

$$v' < v'',$$

dann ist

$$(6) \qquad a(x_1 + x_2) = \frac{a_1' p^{\alpha_1 - \alpha_2}(u' p^{v'} + u'' p^{v''})}{a_2'} = \frac{a_1'(u' + u'' p^{v'' - v'})}{a_2'} \cdot p^{v' + \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Die Zahl

$$\frac{a_1'(u' + u'' p^{v'' - v'})}{a_2'}$$

ist ganz und nicht durch p teilbar. Aus (6) folgt also

$$(7) \qquad v_p(a(x_1 + x_2)) = v' + \alpha_1 - \alpha_2.$$

Da nach der Wahl von $\mathfrak{V}^{(2)}$

$$(8) \qquad v' + \alpha_1 - \alpha_2 \not\equiv v' \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}$$

ist, folgt aus (8) und der Definition von $\mathfrak{V}$ die Relation (4). Entsprechend wird für $v'' < v'$ geschlossen.

Ist dagegen

$$v' = v'',$$

dann folgt

$$(9) \qquad a(x_1 + x_2) = \frac{a_1' p^{\alpha_1 - \alpha_2}(u' p^{v'} + u'' p^{v''})}{a_2'} = \frac{a_1'(u' + u'')}{a_2'} \cdot p^{v' + \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Wegen (5) und der speziellen Wahl von $\mathfrak{V}^{(1)}$ ist

$$p \nmid (u' + u''),$$

und

$$\frac{a_1'(u' + u'')}{a_2'}$$

ist eine ganze, nicht durch p teilbare Zahl. Also folgt aus (9) wieder (7) und damit wieder die gewünschte Relation (4).

§ 7.

Zwei spezielle reguläre Systeme von linearen Gleichungen und Ungleichungen.

In diesem Paragraphen sollen zwei Folgerungen aus dem Hilfssatz I, S. 443 gezogen werden, welche zeigen, wie man aus regulären linearen Gleichungssystemen Systeme von Gleichungen und Ungleichungen bilden kann, die regulär sind.

Satz XI. *Das Gleichungssystem*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

sei k-fach regulär, das Bedingungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 & (1 \leqq \mu \leqq m'), \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu > 0 & (m' < \mu \leqq m) \end{cases}$$

sei einfach regulär. Dann ist (2) *auch k-fach regulär.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu' = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m'),$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu' > 0 \qquad (m' < \mu \leqq m).$$

$\mathfrak{V}$ sei eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Wendet man auf (1), $\mathfrak{V}$ und

$$M = \mathrm{Max}(|x_1'|, |x_2'|, \ldots, |x_n'|)$$

den Hilfssatz I an, dann ergibt sich die Existenz natürlicher Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}) \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \qquad \lambda \text{ ganz}, \ |\lambda| \leqq M.$$

Dann folgt

$$\sum_\nu a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + x_\nu' d) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m'),$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + x_\nu' d) > 0 \qquad (m' < \mu \leqq m),$$

$$x_1^{(0)} + x_\nu' d \equiv x_2^{(0)} + x_2' d \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} + x_n' d \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}),$$

was die Behauptung beweist.

Zusatz. Natürlich können in (2) irgendwelche der Zeichen „>" durch „<" ersetzt werden, ohne daß die k-fache Regularität aufhört.

Satz XII. Voraussetzung. *Das Gleichungssystem*

$$(3)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

ist k-fach regulär, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ist ein Polynom. Es gibt rationale Lösungen von* (3) *mit* $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Behauptung. *Das Bedingungssystem*

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum\limits_\nu a_{\mu\nu} x_\nu = 0 & (1 \leqq \mu \leqq m), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0 \end{cases}$$

ist k-fach regulär.

Vorbemerkung zum Beweis. Aus dem vorstehenden Satz folgt sofort der Satz I von van der Waerden. Denn das Gleichungssystem

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l$$

ist regulär, da es durch $x_0 = x_1 = \ldots = x_l = 1$ zu befriedigen ist. Wählt man für f die Funktion

$$x_0 - x_1,$$

dann folgt nach Satz XII die Regularität von

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l \neq 0,$$

was mit dem Satz I identisch ist. Auf Grund dieser Bemerkung rechtfertigt es sich, daß zum Beweis des vorstehenden, dem ersten Anschein nach nicht sehr tiefliegenden Satzes der Hilfssatz I und damit der Satz von van der Waerden benutzt wird.

Beweis von Satz XII. Da (3) k-fach regulär ist, hat (3) rationale Lösungssysteme. Betrachtet man eine maximale Anzahl von linear unabhängigen unter solchen Lösungssystemen, dann sind alle anderen rationalen Lösungssysteme aus diesen speziellen mit rationalen Koeffizienten linear kombinierbar, d. h. alle rationalen Lösungssysteme von (3) haben die Form

$$x_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} b_{\nu\varrho} t_\varrho \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

Dabei sind die $b_{\nu\varrho}$ rationale Konstanten und die t_ϱ rationale Parameter, die beliebige Werte annehmen können. Offenbar kann man die $b_{\nu\varrho}$ auch ganz wählen. Aus der Voraussetzung folgt, daß es rationale x_ν gibt mit (3) und

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0.$$

D. h. das Polynom

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_r) = f\Big(\sum_\varrho b_{1\varrho} t_\varrho, \sum_\varrho b_{2\varrho} t_\varrho, \ldots, \sum_\varrho b_{n\varrho} t_\varrho\Big) \tag{5}$$

verschwindet nicht identisch in den t_ϱ. Dann gibt es bekanntlich eine Konstante A mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Wahl von beliebigen Zahlen $t_\varrho^{(0)}$ und von $d \neq 0$ gibt es ganze rationale Zahlen g_ϱ mit

$$F(t_1^{(0)} + g_1 d,\ t_2^{(0)} + g_2 d,\ \ldots,\ t_r^{(0)} + g_r d) \neq 0,\ |g_\varrho| \leqq A \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r).$$

Jetzt sei $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Nach Hilfssatz I gibt es zu jeder Zahl M natürliche Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{V}) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M). \tag{6}$$

Es gibt $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_r^{(0)}$ mit

$$x_\nu^{(0)} = \sum_{\varrho=1}^{r} b_{\nu\varrho} t_\varrho^{(0)} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

Nach Definition von A gibt es ganze rationale Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_r$ mit

$$|g_\varrho| \leqq A \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r),$$

$$F(t_1^{(0)} + g_1 d,\ t_2^{(0)} + g_2 d,\ \ldots,\ t_r^{(0)} + g_r d) \neq 0. \tag{7}$$

War nun die Zahl M so gewählt, daß

$$\sum_{\varrho=1}^{r} |b_{\nu\varrho}| \cdot A \leqq M \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

dann erfüllen die Zahlen

$$x'_\nu = x_\nu^{(0)} + d \sum_\varrho b_{\nu\varrho} g_\varrho \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

die Relationen

$$x'_1 \equiv x'_2 \equiv \ldots \equiv x'_n \pmod{\mathfrak{B}}, \tag{8}$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x'_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{9}$$

$$f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \neq 0. \tag{10}$$

Denn es ist

$$x'_\nu = x_\nu^{(0)} + \lambda_\nu d \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

mit

$$|\lambda_\nu| = \Big| \sum_\varrho b_{\nu\varrho} g_\varrho \Big| \leqq \sum_\varrho |b_{\nu\varrho}| \cdot A \leqq M,$$

also ist (8) nach (6) richtig. (9) ist richtig wegen

$$x'_\nu = \sum_\varrho b_{\nu\varrho} (t_\varrho^{(0)} + g_\varrho d) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

(10) ist nach (5) identisch mit (7). (8), (9) und (10) zeigen aber die Richtigkeit der Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt speziell: Ist

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{11}$$

ein k-fach reguläres lineares homogenes Gleichungssystem, aus dem keine Gleichung der Form

$$x_\alpha = x_\beta$$

für irgendwelche α, β mit $\alpha \neq \beta$ folgt, dann gibt es bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen immer eine Lösung von (11), deren Zahlen alle *voneinander verschieden* sind und in derselben Klasse liegen. Man wähle nur für f das Polynom

$$f = \prod_{1 \leqq \alpha < \beta \leqq n} (x_\alpha - x_\beta).$$

§ 8.

Erweiterung der Menge der verteilten Zahlen.

Man kann sich die Frage vorlegen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man nicht Verteilungen der *natürlichen* Zahlen, sondern solche *aller von Null verschiedenen ganzen* Zahlen betrachtet. Man nenne ein Bedingungssystem *normal*, wenn es bei jeder Verteilung der Zahlen

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots \tag{1}$$

auf endlich viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar ist. Offenbar sind alle regulären Bedingungssysteme erst recht normal. Untersucht man die linearen Gleichungen in bezug auf Normalität, dann zeigt es sich, daß außer den regulären Gleichungssystemen nur noch solche Gleichungssysteme $\mathfrak{S}$ normal sind, bei denen die Normalität trivialerweise dadurch zustande kommt, daß es eine ganze Zahl $g \neq 0$ mit

$$\mathfrak{S}(g, g, \ldots, g) = 0$$

gibt. Es gilt nämlich

Satz XIII. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{2}$$

normal, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine ganze Zahl* $g \neq 0$ *mit*

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} \cdot g = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es ist* $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, *und* (2) *ist regulär.*

Beweis. Daß die Richtigkeit einer der beiden obigen Aussagen Normalität von (2) nach sich zieht, ist klar. Jetzt sei umgekehrt angenommen, daß (2) normal ist. Dann folgt zunächst, daß entweder (2) oder das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu = -a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{3}$$

regulär ist. Denn wenn weder (2) noch (3) regulär wäre, dann gäbe es zwei Verteilungen $\mathfrak{V}^{(1)}$ und $\mathfrak{V}^{(2)}$ der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen, so daß gilt: Es gibt keine Zahlen x_ν mit (2), die bei $\mathfrak{V}^{(1)}$ in derselben Klasse liegen. Es gibt keine Zahlen x_ν mit (3), die bei $\mathfrak{V}^{(2)}$ in derselben Klasse liegen. Dann definiere man eine Verteilung $\mathfrak{V}$ der Zahlen (1) durch

$$\begin{gathered} x \equiv y \pmod{\mathfrak{V}}, \\ \text{wenn } xy > 0,\ |x| \equiv |y| \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}},\ |x| \equiv |y| \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}. \end{gathered} \tag{4}$$

Da (2) normal ist, gibt es $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ mit

$$x'_1 \equiv x'_2 \equiv \ldots \equiv x'_n \pmod{\mathfrak{B}}, \tag{5}$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x'_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{6}$$

Wäre $x'_1 > 0$, dann folgte aus (5) und (4)

$$x'_1 \equiv x'_2 \equiv \ldots \equiv x'_n \pmod{\mathfrak{B}^{(1)}}.$$

Das bildet mit (6) einen Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{B}^{(1)}$.

Wäre $x'_1 < 0$, dann würde folgen

$$-x'_1 \equiv -x'_2 \equiv \ldots \equiv -x'_n \pmod{\mathfrak{B}^{(2)}},$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} \cdot (-x'_\nu) = -a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Die beiden letzten Zeilen bilden einen Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{B}^{(2)}$. Da somit entweder (2) oder (3) regulär ist, folgt nach Satz VI die Existenz einer ganzen Zahl g mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} \cdot g = a_u \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{7}$$

Ist $g \neq 0$, dann ist die erste der in der Behauptung vorkommenden Aussagen zutreffend. Ist $g = 0$, dann folgt aus (7)

$$a_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu.$$

Dann sind (2) und (3) identisch miteinander und sind beide regulär. Also ist Aussage 2 zutreffend.

Geht man noch einen Schritt weiter und verteilt sämtliche ganzen Zahlen *einschließlich* der Null, dann ergibt sich aus Satz XIII, wie man sofort sieht, daß es nur noch triviale Gleichungssysteme gibt, die bei allen diesen Verteilungen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar sind. Es gilt

Satz XIII'. *Dann und nur dann ist ein lineares Gleichungssystem*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

bei jeder Verteilung aller ganzen Zahlen auf endlich viele Klassen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, wenn es eine ganze Zahl g gibt mit

$$\mathfrak{S}(g, g, \ldots, g) = 0.$$

Die Sätze dieses Paragraphen zeigen, daß für lineare Gleichungen die wirklich interessanten Verteilungen gerade die sind, die bisher fast ausschließlich untersucht wurden, nämlich die Verteilungen der natürlichen Zahlen, wenn man nicht kompliziertere und weniger natürlich erscheinende Mengen von Zahlen den Verteilungen zugrunde legen will.

II. Teil.

Allgemeinste Bedingungssysteme.

§ 1.

Einführende Begriffsbildungen, Verallgemeinerung des Gleichmäßigkeitssatzes.

Wie bereits am Ende von § 5 im Teil I erwähnt wurde, lassen die Sätze dieses Paragraphen weitgehende Verallgemeinerungen zu. Der wahre Grund für das Bestehen von Satz VIII und IX wird erst durch die hier folgenden Betrachtungen aufgedeckt werden. Die Kenntnis sämtlicher regulären linearen homogenen Gleichungssysteme wird in Wirklichkeit gar nicht benötigt, wenn man nachweisen will, daß es bei jeder Verteilung eine Klasse gibt, in der alle regulären linearen homogenen Gleichungssysteme gleichzeitig je eine Lösung haben. Es wird sich sogar zeigen, daß noch viele andere Mengen von Bedingungssystemen ganz allgemeiner Art diese Eigenschaft der „gleichzeitigen Lösbarkeit“ haben.

Im folgenden wird mit Bedingungssystemen $\mathfrak{S}$ allgemeinster Art operiert werden, die man sich einfach dadurch gegeben denkt, daß man von jeder Menge endlich vieler natürlicher Zahlen willkürlich festsetzt, ob sie $\mathfrak{S}$ genügen soll oder nicht. Es entsteht also ein System von endlichen Teilmengen der Menge $\mathfrak{Z}$ aller natürlichen Zahlen, das mir die Gesamtheit der „Lösungssysteme“ darstellt. Für Bedingungssystem führe ich jetzt die Bezeichnung *Komplex* ein. Man hat also folgende

Definition. *Unter einem Komplex verstehe man eine Menge, deren Elemente endliche Teilmengen der Menge $\mathfrak{Z}$ aller natürlichen Zahlen sind.*

Von den natürlichen Zahlen wird im folgenden keine andere Eigenschaft als die Abzählbarkeit benutzt, so daß man sie ebensogut durch die Elemente irgendeiner abstrakten abzählbaren Menge ersetzen könnte. Eine Verallgemeinerung gegenüber dem Bisherigen ist noch, daß die Elemente eines Komplexes *beliebig viele* Zahlen enthalten können. Man ist da an keine Höchstgrenze gebunden wie im Falle von Gleichungen oder Ungleichungen, wo die Zahl der Unbekannten doch fest ist. Ein Beispiel für einen Komplex ist

$$\mathfrak{C} = \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6, 7\}, \ldots .$$

Man wird nun konsequent definieren müssen:

Ein Komplex $\mathfrak{C}$ heißt k-fach regulär, wenn es bei jeder Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in k Teilmengen immer mindestens eine unter diesen Teilmengen gibt, in der ein Element von $\mathfrak{C}$ enthalten ist.

Regularität schlechthin bedeute k-fache Regularität für jedes k. Der Klarheit wegen bediene ich mich folgender Schreibweise: Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge, dann bedeute

$$B \prec \mathfrak{A},$$

daß B ein *Element* aus $\mathfrak{A}$ ist,

$$\mathfrak{B} \precdot \mathfrak{A},$$

daß $\mathfrak{B}$ eine *Teilmenge* von $\mathfrak{A}$ ist. Es ist bequem, noch folgende Schreibweise einzuführen: Ist $\mathfrak{N} \precdot \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{V}$ eine Verteilung, dann bedeute

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V},$$

daß alle Zahlen von $\mathfrak{N}$ sich bei der Verteilung $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse befinden. Die Definition regulärer Komplexe lautet dann z. B.:

$\mathfrak{C}$ heißt regulär, wenn zu jedem $\mathfrak{V}$ ein $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V}$$

existiert.

$\mathfrak{Z}_n$ sei die Menge

$$\mathfrak{Z}_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}'', \ldots$ sind wie bisher Bezeichnungen für Verteilungen der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen.

Für den allgemeineren Begriff der Komplexe gilt noch unverändert der Gleichmäßigkeitssatz III. Man kann ihn sogar noch erweitern auf Verteilungen mit *abzählbar unendlich* vielen Klassen

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots, \tag{1}$$

wenn man nur folgende in der Natur des Satzes liegende Einschränkung für diese Verteilungen macht: Jeder Zahl aus $\mathfrak{Z}$ werden ein für allemal auf beliebige Art endlich viele der Klassen (1) zugeordnet. Eine Verteilung besteht nun darin, daß jede Zahl aus $\mathfrak{Z}$ in eine der ihr zugeordneten Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ gelegt wird. Ordnet man speziell allen Zahlen *dieselben* Klassen zu, dann erhält man eine Verteilung der früheren Art auf *endlich viele* Klassen. Ein Beispiel für eine Menge derartiger Verteilungen ist: Man ordne der natürlichen Zahl n alle Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\nu \mid n$ zu. Verteilt man auf jede mögliche Weise alle natürlichen Zahlen auf die unendlich vielen Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ irgendwie derart, daß der Index derjenigen Klasse, in der n liegt, immer ein Teiler von n ist, dann erhält man ein System von Verteilungen, für das der Gleichmäßigkeitssatz noch gilt.

Die Verallgemeinerung des Gleichmäßigkeitssatzes kann man nun so aussprechen:

Satz III′. Voraussetzung. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ *sei eine Folge endlicher Teilmengen von* $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{C}$ *ein Komplex mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Zahlenfolge*

$$x_n \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gibt es x *und* $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ *mit*

$$x_n = x \quad \textit{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Behauptung. *Es gibt* $N \prec \mathfrak{Z}$, *so daß zu*

$$x_n \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

schon immer x *und* $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ *existiert mit*

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}_N, \quad x_n = x \quad \textit{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft genau so wie der von Satz III, daher fasse ich mich kurz.

Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es zu jedem $N \prec \mathfrak{Z}$ eine Folge

$$x_n^{(N)} \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so daß kein x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ existiert mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}_N, \quad x_n^{(N)} = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Weil die Mengen $\mathfrak{m}_n$ endlich sind, gibt es Zahlen

$$x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit der Eigenschaft: Je endlich viele der folgenden Gleichungen sind für unendlich viele N gleichzeitig richtig:

$$x_1^{(N)} = x_1, \quad x_2^{(N)} = x_2, \quad x_3^{(N)} = x_3, \ \ldots .$$

Wegen $x_n \prec \mathfrak{m}_n$ gibt es nach Voraussetzung x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$x_n = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}. \tag{2}$$

$\mathfrak{N}$ ist eine endliche Menge. Daher gibt es unendlich viele N mit

$$x_n^{(N)} = x_n \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}. \tag{3}$$

Folglich gilt (3) auch für ein spezielles N mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}_N. \tag{4}$$

Aus (3) und (2) folgt

$$x_n^{(N)} = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N},$$

was mit (4) zusammen einen Widerspruch zur Konstruktion der $x_n^{(N)}$ bildet. Der Satz ist also bewiesen.

Im folgenden wird dieser Satz nur im Falle $\mathfrak{m}_n = \{1, 2, \ldots, k\}$ ($k =$ konst.) benutzt werden, wo er aussagt: *Ist* $\mathfrak{C}$ *k-fach regulär, dann gibt es* $N \prec \mathfrak{Z}$, *so daß zu* $\mathfrak{B}$ *mit* k *Klassen immer* $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ *existiert mit*

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}_N, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{B}.$$

§ 2.
Koppelung von Bedingungssystemen.

Bei den erwähnten Verallgemeinerungen der Sätze VIII und IX kann man so allgemeine Verteilungen wie bei III′ nicht zulassen. Dafür kann man die bei VIII und IX benutzte Homogenität durch viel schwächere Voraussetzungen ersetzen. Das Ziel dieses Paragraphen ist, möglichst schwache hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß zwei reguläre Komplexe $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ die Eigenschaft haben, daß es bei jedem $\mathfrak{V}$ eine Klasse gibt, in der sowohl ein Element von $\mathfrak{C}_1$ als auch ein Element von $\mathfrak{C}_2$ ganz enthalten ist. Daß nicht für jedes Paar regulärer Komplexe immer eine solche Klasse existiert, zeigt schon das triviale Beispiel:

$\mathfrak{C}_1$ besteht nur aus der Menge $\{1\}$, $\mathfrak{C}_2$ nur aus $\{2\}$.

$$\mathfrak{V} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2, 3, 4, \ldots \end{Bmatrix}.$$

Ist $f(x)$ eine in $\mathfrak{Z}$ erklärte Funktion,

$$\mathfrak{N} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \prec \mathfrak{Z},$$

dann sei

$$f(\mathfrak{N}) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}.$$

Im folgenden kommen ausschließlich Funktionen vor, die in $\mathfrak{Z}$ erklärt sind und nur Funktionswert aus $\mathfrak{Z}$ annehmen, was ich nicht mehr besonders hervorheben will.

Ist $\mathfrak{C}$ ein Komplex, dann sei

$$f(\mathfrak{C}) = \text{Gesamtheit aller } f(\mathfrak{N}) \text{ mit } \mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}.$$

Es wird sich zeigen, daß für die oben beschriebene „gleichzeitige Lösbarkeit“ von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in derselben Klasse die Existenz irgendeiner Funktion $f(x, y)$ hinreicht, so daß

$$(1) \qquad f(\mathfrak{C}_1, y) \prec \mathfrak{C}_1, \quad f(x, \mathfrak{C}_2) \prec \mathfrak{C}_2 \quad \text{für alle} \quad x, y \prec \mathfrak{Z}$$

gilt. Man erkennt, daß im Falle homogener Bedingungssysteme der früheren Art diese Bedingung für die Funktion

$$f(x, y) = x \cdot y$$

erfüllt ist. Es gelten also die Sätze VIII und IX nicht nur für lineare Gleichungen, sondern z. B. auch für die Gesamtheit aller regulären homogenen Gleichungssysteme beliebigen Grades. In den folgenden Sätzen wird die einfache Bedingung (1) durch Abänderungen trivialerer Natur abgeschwächt werden. Zur bequemen Formulierung der Resultate führe ich folgende Bezeichnung ein:

$$(2) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

bezeichne bei gegebenem $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ den Komplex, der aus der Gesamtheit aller Vereinigungsmengen je eines Elementes von $\mathfrak{C}_1$ mit je einem Element von $\mathfrak{C}_2$ besteht. Die Aussage, daß (2) regulär ist, bedeutet in der früheren Sprache: Bei jedem $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in mindestens einer Klasse gleichzeitig „lösbar". Entsprechend wird

$$\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{C}_r$$

für $r > 2$ definiert. Das Analogon zu der bei Satz IX vorkommenden Koppelung von Gleichungssystemen bezeichne man mit

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \tag{3}$$

und definiere es so: Eine Menge

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

ist dann und nur dann Element von (3), wenn folgendes der Fall ist: Die a_ν lassen sich, eventuell unter mehrfachem Aufschreiben derselben Zahl, so zu einer Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

anordnen, daß jede Spalte von $\mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{C}_1$, jede Zeile von $\mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{C}_2$ bildet. Entsprechend wird

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r \tag{4}$$

für $r > 2$ definiert: Dann und nur dann ist

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

ein Element des Komplexes (4), wenn man die a_ν so zu einer r-dimensionalen Matrix $(a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r})$ anordnen kann, daß alle Matrixelemente, für die die Indizes

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\varrho-1}, \nu_{\varrho+1}, \ldots, \nu_r$$

denselben Wert haben, ein Element von $\mathfrak{C}_\varrho$ bilden ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Die Vielfachheit der betreffenden Zahlen spielt dabei keine Rolle. Nun kann man die zu Satz VIII und IX analogen Sätze von dem jetzigen allgemeineren Standpunkt aus formulieren. Ich gehe schrittweise vor: Von den folgenden drei Sätzen enthält jeder etwas speziellere Voraussetzungen als der vorhergehende, dafür aber auch weitergehende Behauptungen. Meine Voraussetzungen bezeichne ich folgendermaßen:

a) $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ sind beliebige Komplexe.

b) Zu jedem $n \prec \mathfrak{Z}$ gibt es eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, reguläre Komplexe $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \ldots, \mathfrak{C}_{r-1}'$ und den k-fach regulären Komplex $\mathfrak{C}_r'$, so daß gilt: Zu jeder Wahl von

$$1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_r \leqq n, \qquad 1 \leqq \varrho \leqq r, \qquad \mathfrak{N}'_\varrho \prec \mathfrak{C}'_\varrho$$

gibt es $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$\mathfrak{N}_\varrho \lessdot f(a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}, \mathfrak{N}'_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots, a_r).$$

c) Zu jedem $n \prec \mathfrak{Z}$ gibt es eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, reguläre Komplexe $\mathfrak{C}'_1, \ldots, \mathfrak{C}'_{r-1}$ und den k-fach regulären Komplex $\mathfrak{C}'$, so daß gilt: Zu jeder Wahl von

$$1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_r \leqq n, \qquad 1 \leqq \varrho \leqq r, \qquad \mathfrak{N}'_\varrho \prec \mathfrak{C}'_\varrho$$

gibt es $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$\mathfrak{N}_\varrho = f(a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}, \mathfrak{N}'_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots, a_r). \tag{5}$$

Jetzt lauten die Sätze:

Satz XIV$^{(1)}$. a) *und* b) *sei erfüllt. Dann ist*

$$\mathfrak{C}_1 \mathbin{+\!\!\!+} \mathfrak{C}_2 \mathbin{+\!\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!\!+} \mathfrak{C}_r$$

ein k-fach regulärer Komplex.

Satz XIV$^{(2)}$. a) *und* c) *sei erfüllt. Dann ist*

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_r$$

ein k-fach regulärer Komplex.

Satz XIV$^{(3)}$. a) *und* c) *sei erfüllt. In jedem $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$ sei ferner ein Element ausgezeichnet, und zwar derart, daß mittels* (5) *das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}'_\varrho$ in das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}_\varrho$ übergeht. Dann gibt es bei jedem $\mathfrak{V}$ mit k Klassen Mengen $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$, welche alle in derselben Klasse liegen und dasselbe ausgezeichnete Element haben.*

Beweis von Satz XIV$^{(1)}$:

Lemma. *$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)$ seien beliebige Funktionen, $\mathfrak{C}$ ein k^N-fach regulärer Komplex, $\mathfrak{V}$ eine Verteilung auf k Klassen. Dann gibt es $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit*

$$f_\nu(\mathfrak{N}) \prec \mathfrak{V} \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq N, \tag{6}$$

$$\mathfrak{N} \lessdot \mathfrak{Z}_{C(k, N, \mathfrak{C})}. \tag{7}$$

($C(k, N, \mathfrak{C})$ ist eine passend gewählte, nur von k, N, $\mathfrak{C}$ abhängende Konstante.)

Beweis des Lemmas. Es sei

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[f_\nu(\xi)(1 \leqq \nu \leqq N)]. \tag{8}$$

$\mathfrak{V}'$ hat k^N Klassen. Also gibt es $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V}'. \tag{9}$$

Aus Satz III′ folgt noch, daß $\mathfrak{N}$ gemäß einer Relation (7) wählbar ist. Wegen (8) ist (9) identisch mit (6), womit das Lemma schon bewiesen ist.

Jetzt zum Beweis des Satzes: Man wähle die in der Voraussetzung b) vorkommende Zahl n so groß, daß alle im folgenden vorkommenden Zahlen unterhalb n wählbar sind. Dieses ist nach Satz III′ immer möglich, wie man sehen wird. Zu diesem festen n gehören nach Voraussetzung b) Komplexe $\mathfrak{C}_1', \ldots, \mathfrak{C}_r'$ und eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ mit den angegebenen Eigenschaften. $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ seien zunächst noch beliebige natürliche Zahlen. Im folgenden interessiert mich die Abhängigkeit gewisser Schranken von diesen Zahlen. Die Abhängigkeit dieser Schranken von anderen Größen notiere ich nicht, da diese Größen konstant gehalten werden.

1. Man wende das Lemma an auf die n_1^{r-1} Funktionen

$$f(x, a_2, a_3, \ldots, a_r)$$

für alle konstanten a_ϱ mit

$$1 \leqq a_2, a_3, \ldots, a_r \leqq n_1,$$

auf den regulären Komplex $\mathfrak{C}_1'$ und die Verteilung $\mathfrak{V}$. Danach gibt es $\mathfrak{N}_1' \prec \mathfrak{C}_1'$ mit

$$(10) \qquad f(\mathfrak{N}_1', a_2, a_3, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{V} \quad \text{für alle} \quad 1 \leqq a_2, a_3, \ldots, a_r \leqq n_1,$$

$$\mathfrak{N}_1' \prec \mathfrak{Z}_{c(n_1)}.$$

Man wähle ein festes $a_1' \prec \mathfrak{N}_1'$.

2. Die Anwendung des Lemmas auf die Funktionen

$$f(a_1', x, a_3, a_4, \ldots, a_r) \qquad (1 \leqq a_3, a_4, \ldots, a_r \leqq n_2),$$

auf $\mathfrak{C}_2'$ und $\mathfrak{V}$ liefert die Existenz von $\mathfrak{N}_2' \prec \mathfrak{C}_2'$ mit

$$f(a_1', \mathfrak{N}_2', a_3, a_4, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{V} \qquad (1 \leqq a_3, a_4, \ldots, a_r \leqq n_2),$$

$$\mathfrak{N}_2' \prec \mathfrak{Z}_{c(n_2)}.$$

Man wähle ein festes $a_2' \prec \mathfrak{N}_2'$ usw.

Der ϱ-te Schritt $(2 \leqq \varrho \leqq r-1)$ liefert

ϱ) Es gibt $\mathfrak{N}_\varrho' \prec \mathfrak{C}_\varrho'$ mit

$$(11) \quad f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{V} \quad (1 \leqq a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots, a_r \leqq n_\varrho),$$

$$(12) \qquad \mathfrak{N}_\varrho' \prec \mathfrak{Z}_{c(n_\varrho)}.$$

Man wähle $a_\varrho' \prec \mathfrak{N}_\varrho'$ $(2 \leqq \varrho \leqq r-1)$.

r) Man wende das Lemma an auf die eine Funktion

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{r-1}', x),$$

$\mathfrak{C}_r'$ und $\mathfrak{V}$. Da hier $k^N = k$ ist, sind seine Voraussetzungen erfüllt. Denn $\mathfrak{C}_r'$ ist ja k-fach regulär. Es gibt also $\mathfrak{N}_r' \prec \mathfrak{C}_r'$ mit

$$(13) \qquad f(a_1', a_2', \ldots, a_{r-1}', \mathfrak{N}_r') \prec \mathfrak{V},$$

$$(14) \qquad \mathfrak{N}_r' \prec \mathfrak{Z}_{C(1)}.$$

Man wähle eine Zahl $a_r' \prec \mathfrak{N}_r'$.

Durch passende Wahl der Zahlen n_ϱ will ich nun erreichen, daß in (10) und (11)

$$a_\sigma = a_\sigma'$$

zulässig ist für alle in Betracht kommenden σ. Dazu ist nach (12) und (14) hinreichend

$$(15) \qquad C(n_\sigma) \leqq n_\varrho \quad \text{für alle } \varrho, \sigma \text{ mit } 1 \leqq \varrho < \sigma \leqq r.$$

Dabei ist $n_r = 1$ gesetzt. (15) ist leicht zu erfüllen, z. B. durch

$$n_r = 1, \quad n_{\varrho-1} = n_\varrho + C(n_\varrho) \quad \text{für } 2 \leqq \varrho \leqq r.$$

Denn bestimmt man die n_ϱ auf diese Weise, dann ist für $2 \leqq \sigma \leqq r$

$$C(n_\sigma) \leqq n_{\sigma-1} \leqq n_{\sigma-2} \leqq \ldots \leqq n_1.$$

Das ist dasselbe wie (15).

Bei dieser Wahl der n_ϱ folgt also aus (10), (11), (13)

$$(16) \qquad f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r') \prec \mathfrak{V} \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r.$$

Nun gibt es nach Voraussetzung b) Mengen $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$(17) \qquad \mathfrak{N}_\varrho \prec f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r') \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r.$$

Aus (17) und (16) folgt

$$\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{V} \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r.$$

$\mathfrak{N}_\varrho$ liegt nach (17) in derselben Klasse wie die Menge

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r'),$$

diese letztere wiederum in derselben Klasse wie die Zahl

$$(18) \qquad f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', a_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r').$$

Diese Zahl ist für alle ϱ dieselbe, liegt also mit sämtlichen $\mathfrak{N}_\varrho$ in derselben Klasse. In dieser Klasse liegt daher ein Element von

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_r,$$

nämlich die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_r$.

B e w e i s v o n $\mathrm{XIV}^{(2)}$. Aus Voraussetzung c) folgt Voraussetzung b). Es gelten also alle Resultate des vorhergehenden Beweises. Wegen der schärferen Voraussetzung (5) kann man in (17) das Gleichheitszeichen schreiben. Wenn man jedes a'_ϱ alle Elemente des zugehörigen $\mathfrak{N}'_\varrho$ durchlaufen läßt, dann durchläuft (18) alle Zahlen eines Elementes von

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r, \tag{19}$$

und diese Zahlen liegen alle in derselben Klasse von $\mathfrak{V}$. Damit ist die k-fache Regularität von (19) bewiesen.

Beweis von $\mathrm{XIV}^{(3)}$. Wählt man als a'_ϱ das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}'_\varrho$, dann ist (18) auf Grund der Voraussetzung das ausgezeichnete Element aller $\mathfrak{N}'_\varrho$, womit der Beweis erbracht ist.

Als Verallgemeinerung von Satz VIII kann man folgenden Satz auffassen:

Satz VIII′. Voraussetzung. *$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von regulären Komplexen, $f(x, y)$ sei eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Wenn*

$$\mathfrak{C} \prec \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}, \quad a \prec \mathfrak{Z},$$

dann ist

$$f(\mathfrak{N}, a) \prec \mathfrak{C}, \quad f(a, \mathfrak{N}) \prec \mathfrak{C}.$$

Behauptung. *Bei jeder Verteilung $\mathfrak{V}$ gibt es mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}_0$, so daß zu jedem $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{M}$ mindestens ein $\mathfrak{N}$ existiert mit*

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{K}_0.$$

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \prec \mathfrak{M}.$$

Nach $\mathrm{XIV}^{(1)}$ ist

$$\mathfrak{C}_{1,2} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

regulär. Wenn

$$\mathfrak{N}_{1,2} \prec \mathfrak{C}_{1,2}, \quad a \prec \mathfrak{Z},$$

dann ist

$$f(\mathfrak{N}_{1,2}, a) \prec \mathfrak{C}_{1,2}, \tag{20}$$

$$f(a, \mathfrak{N}_{1,2}) \prec \mathfrak{C}_{1,2}. \tag{21}$$

Denn

$$\mathfrak{N}_{1,2} = \text{Vereinigungsmenge von } \mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{C}_1 \text{ mit } \mathfrak{N}_2 \prec \mathfrak{C}_2.$$

Also ist

$$f(\mathfrak{N}_{1,2}, a) = \text{Vereinigungsmenge von } f(\mathfrak{N}_1, a) \text{ und } f(\mathfrak{N}_2, a).$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$f(\mathfrak{N}_1, a) \prec \mathfrak{C}_1, \quad f(\mathfrak{N}_2, a) \prec \mathfrak{C}_2.$$

Also ist (20) richtig. Entsprechend wird (21) bewiesen. Ist

$$\mathfrak{C}_3 \prec \mathfrak{M},$$

dann ist daher auf $\mathfrak{C}_{1,2}$ und $\mathfrak{C}_3$ wieder Satz $\mathrm{XIV}^{(1)}$ anwendbar, was Regularität von

$$\mathfrak{C}_{1,2} + \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3$$

liefert usw. Wenn allgemein

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r \prec \mathfrak{M}, \tag{22}$$

dann ist

$$\mathfrak{C}_1 \mathbin{+\!\!\!+} \mathfrak{C}_2 \mathbin{+\!\!\!+} \ldots \mathbin{+\!\!\!+} \mathfrak{C}_r \tag{23}$$

regulär. Der weitere Beweis verläuft jetzt wörtlich so wie der Beweis von Satz VIII.

Offenbar kann man in Satz VIII′, ähnlich wie in den drei vorhergehenden Sätzen, die Voraussetzungen noch erheblich einschränken. Die Voraussetzungen brauchen ja nur zu ermöglichen, mit Hilfe von Satz XIV[1] aus (22) immer auf die Regularität von (23) zu schließen, dann gilt schon die Behauptung von Satz VIII′.

(Eingegangen am 15. Februar 1932.)