# LA FONCTION SOMME DES DIVISEURS

par

J. MARTINET, J. M. DESHOUILLERS et H. COHEN

(rédaction de H. COHEN)

-:-:-:-

La séance du séminaire du 23 janvier a été consacrée à l'exposé de quelques propriétés très disparates de la fonction

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d \quad .$$

Trois sujets ont été abordés :

- Itération de la fonction $s(n) = \sigma(n) - n$ (H. Cohen)
- Densité des nombres tels que $\sigma(n)/n \geq x$ (J. M. Deshouillers)
- Calcul de la fonction zêta de Dedekind d'un corps quadratique réel à l'aide de la fonction $\sigma$ (J. Martinet).

## §. I. - ITERATION DE LA FONCTION $s(n) = \sigma(n) - n$ .

Convenons de poser $s(0) = 0$ . Pour tout $n \geq 1$ considérons les suites $a(n)$ définies de la façon suivante :

$$a_o(n) = n \quad ; \quad a_k(n) = s(a_{k-1}(n)) \quad \text{pour } k \geq 1 \quad .$$

Il est clair que si $a_k(n)$ est borné quand $k \to \infty$, $a(n)$ est périodique puisque $a_k(n)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

La suite $a(n)$ ne peut donc avoir que trois comportements essentiellement distincts :

a) La suite converge, c'est-à-dire il existe $k$ pour lequel $a_k = 0$ (si $k$ est le plus petit tel indice, $a_{k-1} = 1$, $a_{k-2}$ est premier).

b) La suite est périodique de période $t$ : il existe $k_o$ tel que

$$a_{k+t} = a_k \quad \text{pour tout } k \geq k_o \ .$$

Si on peut prendre $k_o = 0$, la suite est purement périodique. Dans ce cas si $t = 1$ on dit que $n$ est un nombre parfait ; si $t = 2$, $(n, s(n))$ est une paire de nombres amiables ; pour $t$ quelconque on dit que le $t$-uplet $(a_o, \ldots, a_{t-1})$ est un groupe sociable d'ordre $t$.

c) La suite est non bornée.

Les exemples de a) abondent : par exemple voici la suite $a(20)$ $a(20) = (20, 22, 14, 10, 8, 7, 1, 0, 0, \ldots)$.

Nous allons donc nous occuper surtout des cas b) et c).

Nombres parfaits

D'après ce qui précède, un nombre $n$ est parfait quand il vérifie $s(n) = n$. On connaît jusqu'à maintenant 24 nombres parfaits, les premiers étant 6, 28, 496, 8128, et le plus grand étant $2^{19936}(2^{19937} - 1)$. On a d'ailleurs le

THEOREME (Euler). - Soit $n$ un nombre pair. Pour que $n$ soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1) \ , \quad \text{avec } 2^m - 1 \text{ premier}$$

(c'est-à-dire $2^m - 1$ nombre premier de Mersenne).

Ce théorème est très facile à démontrer, et fournit les 24 nombres parfaits connus, avec successivement :

$$m = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 61,\ 89,\ 107,\ 127,\ 521,\ 607,\ 1279,\ 2203,\ 2281,\ 3217,\ 4253,\ 4423,\ 9689,\ 9941,\ 11213,\ 19937.$$

Ce théorème appelle les conjectures suivantes :

CONJECTURE 1. - Il existe une infinité de nombres premiers de Mersenne (et donc de nombres parfaits pairs).

On possède de bons arguments heuristiques en faveur de cette conjecture. D'ailleurs si $2^{m_n}-1$ est le $n^e$ nombre premier de Mersenne, on conjecture que $\mathrm{Log}\, m_n \sim \frac{n}{2} \mathrm{Log}\, 2$ .

CONJECTURE 2. - Il n'existe pas de nombre parfait impair.

On connaît peut de choses pour ou contre cette conjecture. Tout au plus a-t-on des conditions nécessaires sur $n$ pour qu'il soit parfait impair, telles que : $n > 10^{50}$ , $n$ a au moins 7 diviseurs premiers distincts, etc....

<u>Nombres amiables</u> (cf [1])

Une paire $(n, m)$ est une paire de nombres amiables si $s(n) = m$ et $s(m) = n$ . Par exemple :

$$(220,\ 284)\ ;\ (1184,\ 1210)\ ;\ (2620,\ 2924)\ .$$

On connaît jusqu'à présent 1107 paires de nombres amiables (cf [1]), la plus grande étant :

$$\begin{cases} 4522265534545208537974785 = 3^6 .\ 5 .\ 19 .\ 23 .\ 137 .\ 547 .\ 1093 .\ 359 .\ 911 .\ 105983 \\ 4539801326233928286140415 = 3^6 .\ 5 .\ 19 .\ 23 .\ 137 .\ 547 .\ 1093 .\ 61559 .\ 565247 \end{cases} .$$

On conjecture qu'il existe une infinité de paires amiables, et même plus précisément :

CONJECTURE 3. - Soit $A(x)$ le nombre de paires amiables dont le plus petit élément est plus petit que $x$ . Alors il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\mathrm{Log}\, A(x) \sim \beta\ .\ \mathrm{Log}\, x\ .$$

Des calculs heuristiques tendent à montrer que $\beta = \frac{1}{2}$. Toutefois, les données numériques que l'on possède, jusqu'à $x = 10^8$ (cf [2]) font penser que ceci est trop élevé, et que $\beta = 0,29$ est plus proche de la réalité.

Rappelons au sujet de la conjecture 3 le théorème d'Erdös affirmant que à $t$ fixé, la densité des groupes sociables d'ordre $t$ est nulle (en particulier $\frac{A(x)}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$).

CONJECTURE 4. - Il n'existe pas de paires amiables $(m, n)$ où $m$ et $n$ sont de parité différentes.

Il existe des paires $(m, n)$ avec $m$ et $n$ impairs, la plus petite étant (12285, 14595).

Nombres sociables d'ordre $t > 2$

Le résultat numérique le plus général est le suivant : il n'existe que 10 groupes sociables d'ordre $t \leq 10$ dont le plus petit élément est $< 8.10^7$ (cf [2]) : l'un est d'ordre 5 (découvert en 1918) les 9 autres d'ordre 4 (découverts en 1969). En plus de ceux-ci on connaît 5 autres groupes sociables d'ordre 4 (découverts également en 1971), et un groupe d'ordre 28 (découvert en 1918) (on a peine à imaginer la patience de l'auteur !). En résumé :

Ordre 3 : Inconnu.
Ordre 4 : 14 connus, le plus petit commençant par $n = 1.264.460$
Ordre 5 : 1 connu commençant par $n = 12496$
Ordre 28 : 1 connu commençant par $n = 14316$.

Vu la très maigre moisson (15 en tout) on peut difficilement énoncer des conjectures.

Suites non bornées

Il nous reste à étudier le comportement c) . Ici la conjecture est fort simple.

CONJECTURE 5. - Il n'existe pas de $n$ pour lequel $a(n)$ est non bornée. En d'autres termes $a(n)$ est toujours convergente ou périodique.

Le plus petit $n$ pour lequel on ne sache pas encore si $a(n)$ est bornée est $n = 276$ . Les Lehmer ont calculé $a_k(276)$ jusqu'à $k = 433$ et manipulent des nombres de 36 chiffres, ce qui rend les calculs fort longs.

En rapport avec cette conjecture, mentionnons le résultat suivant dû à Lenstra (non publié) : Pour tout $N$ il existe une suite $a(n)$ de longueur supérieure à $N$ (la longueur étant le nombre de termes non nuls).

## §. II. - DENSITE DES NOMBRES TELS QUE $\sigma(n)/n \geq x$

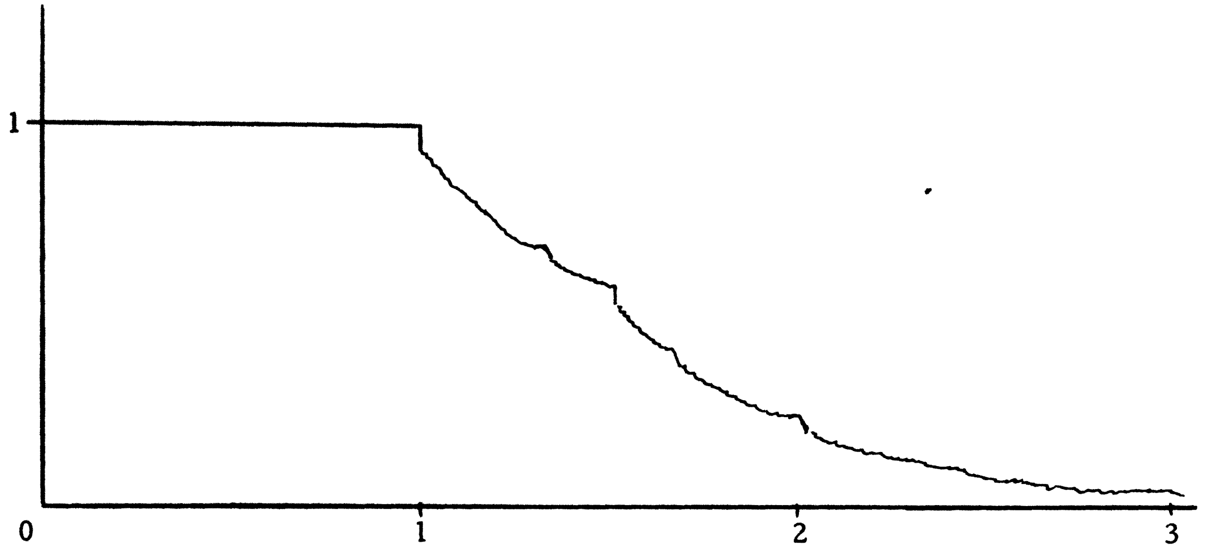
Posons $S_x(N) = \text{Card}\,\{n \leq N \mid \sigma(n)/n \geq x\}$ .

Davenport [3] a démontré que $\lim_{N \to \infty} (S_x(N)/N)$ existe, donc que l'ensemble des entiers $n$ tels que $\sigma(n)/n \geq x$ possède une densité. Si on pose

$$A(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{Card}\{n \leq N \mid \sigma(n)/n \geq x\}}{N} .$$

Alors dans [3] on démontre aussi que $A(x)$ est continue (et bien entendu monotone décroissante). Il en résulte que $A(x)$ est dérivable sauf sur un ensemble de mesure nulle, et de fait on peut montrer que $A(x)$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si il n'existe <u>pas</u> de $n$ tel que $\sigma(n)/n = x_0$ .

Comme on a $A(x) = 1$ pour $x \leq 1$ , et $A(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ , le graphe de $A(x)$ sera approximativement le suivant (cf [4]).




Un problème ouvert intéressant est de calculer $A(2)$ avec une certaine précision ; $A(2)$ est la densité des nombres abondants, c'est-à-dire des nombres tels que $s(x) \geq x$. Les meilleurs bornes connues sont $0,244 < A(2) < 0,291$ (cf [ 4]) donc on ne connaît $A(2)$ qu'à 20 % près ! C'est une situation tout à fait étrange pour une constante mathématique. Pour terminer, citons les formules suivantes qui se démontrent sans difficulté :

$$\int_0^\infty A(x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty x\,A(x)\,dx = \frac{5}{4}\,\zeta(3)$$

et plus généralement pour tout $s$ complexe $\mathrm{Re}\, s > 0$

$$\int_0^\infty x^s A(x)\,dx = \frac{1}{s+1} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \left(\frac{\sigma(n)}{n}\right)^{s+1}$$

$$= \frac{1}{s+1} \prod_{p\geq 2} \left(1 + \frac{(1+1/p)^{s+1}-1}{p} + \frac{(1+1/p+1/p^2)^{s+1}-(1+1/p)^{s+1}}{p^2} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{s+1} \prod_{p\geq 2} \frac{1}{(1-\frac{1}{p})^s} \sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{p^\ell} \left(1 - \frac{1}{p^{\ell+1}}\right)^{s+1} .$$

## §. III. - CALCUL DE LA FONCTION ZETA DE DEDEKIND D'UN CORPS QUADRATIQUE REEL A L'AIDE DE LA FONCTION $\sigma$

Siegel [5] a démontré le théorème suivant :

THEOREME. - Soit $K$ un corps totalement réel de degré $r$ sur $\mathbb{Q}$, $k$ un entier pair $\geq 2$. Posons :

$$g_k = \sum_{n\geq 0} a_n(k)\, e^{2i\pi nz}$$

avec
$$a_o(k) = 2^{-r}\, \zeta_K(1-k)$$

$$a_n(k) = \sum_{\substack{Tr(x)=n \\ x\in\delta^{-1} \\ x\gg 0}} \ \sum_{\mathfrak{a}\supset x\delta} (N\mathfrak{a})^{k-1} \qquad \text{pour } n\geq 1$$

où $\delta$ est la différente, $x$ parcourt les éléments totalement positifs de trace $n$ de $\delta^{-1}$, et $\mathfrak{a}$ les idéaux entiers contenant $x\delta$.

Alors si $(r,k)\neq(1,2)$ la série $g_k$ est une forme modulaire de poids $rk$ (sur le groupe modulaire tout entier). En particulier $\zeta_K(1-k)$ est un nombre rationnel.

Considérons le cas particulier $r = 2$ de ce théorème. On démontre alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Soit $K$ un corps quadratique réel de discriminant $D$. Alors les coefficients de la forme modulaire de poids $2k$ ci-dessus sont donnés par :

$$a_o(k) = \frac{1}{k}\, \zeta_K(1-k)$$

$$a_n(k) = \sum_{\substack{|a|<n\sqrt{D} \\ a\,\equiv\, nD \pmod 2}} \ \sum_{d\,\mid\,\frac{n^2D-a^2}{4}} d^{k-1} \prod_p c(p,d)$$

<u>avec</u> $c(p,d) = 0$ <u>si</u> $p$ <u>est inerte et</u> $v_p(d) \notin 2\mathbb{Z}$ [<u>si</u> $p$ <u>est inerte et</u> $p^{\alpha} | d$ <u>on a</u> $p^{\alpha} | (a,n)^2$]

$c(p,d) = 1$ <u>si</u> $p$ <u>est inerte et</u> $v_p(d) \in 2\mathbb{Z}$, <u>ou si</u> $p$ <u>est ramifié</u>

$c(p,d) = \alpha+1$ <u>si</u> $p$ <u>est décomposé</u>, <u>avec</u> $\alpha = v_p((a,n,d,\frac{a^2-n^2D}{4d}))$.

On déduit de ce corollaire, en posant $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ :

$$a_1(k) = \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-a^2}{4}\right)$$

$$a_2(k) = \sum_{|a|<\sqrt{D}} \sigma_{k-1}(D-a^2) + \left(\frac{D}{2}\right).\ 2^{k-1} \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-a^2}{4}\right)$$

et d'une manière générale

$$a_n(k) = \sum_{d|n} d^{k-1}\left(\frac{D}{d}\right) \sum_{\substack{|a|<\frac{n}{d}\sqrt{D} \\ a \equiv nD/d \pmod 2}} \sigma_{k-1}\left(\frac{(n/d)^2 D - a^2}{4}\right)$$

où $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ est le caractère non trivial de $K$, i. e. le symbole de Kronecker relativement à $D$.

Puisque l'on connaît explicitement une base de l'espace des formes modulaires de poids donné, on peut déduire des égalités ci-dessus des identités "remarquables". Par exemple :

$$\sum_{|a|<\sqrt{D}} \sigma(D-a^2) = \left(9-2\left(\frac{D}{2}\right)\right) \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma\left(\frac{D-a^2}{4}\right) .$$

Mais surtout on peut en déduire le terme constant $a_o(k)$, et donc $\zeta_K(1-k)$. On obtient ainsi :

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma\left(\frac{D-a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-3) = \frac{1}{120} \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma_3\left(\frac{D-a^2}{4}\right)$$

$$\zeta_K(-5) = \frac{1}{49140} \left[ \sum_{|a|<\sqrt{D}} \sigma_5(D-a^2) + \left(24+32\left(\frac{D}{2}\right)\right) \sum_{\substack{|a|<\sqrt{D} \\ a \equiv D \pmod 2}} \sigma_5\left(\frac{D-a^2}{4}\right) \right]$$

et ainsi de suite.

Ces identités sont fort utiles pour calculer les $\zeta_K(1-2k)$ , et il est beaucoup plus rapide de les calculer de cette manière qu'en utilisant les formules contenant les caractères, telles que :

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{24D} \sum_{1 \leq k \leq D} k^2 \left(\frac{D}{k}\right) .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE


[1] E. J. LEE, J. S. MADACHY. - The History and Discovery of Amicable Numbers. Journ. of Recr. Math., vol. 5, n° 2, 3, 4, 1972.

[2] H. COHEN. - On Amicable and Sociable Numbers. Math. Comp., vol. 24, April 1970, pp. 423-429.

[3] H. DAVENPORT. - Über Numeri Abundantes. Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber. 26/29 (1933), pp. 830-837.

[4] C. R. WALL. - Density bounds for the sum of divisors function. Lecture notes n° 251, Springer Verlag, pp. 283-287.

[5] C. L. SIEGEL. - Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. Gött. Nach., 10, 1969, pp. 87-102.

-:-:-:-

U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE