Innern des Intervalls stetig ist, so ist der Koeffizient $B_n^{(2\mu)}$ in der entsprechenden Entwicklung ihrer $(2\mu)^{\text{ten}}$ Ableitung gegeben durch:

$$(663)\qquad (-1)^\mu B_n^{(2\mu)} = n^{2\mu} B_n - \frac{2}{\pi} n^{2\mu-1}[f(0) - (-1)^n f(\pi)]$$
$$+ \frac{2}{\pi} n^{2\mu-3}[f''(0) - (-1)^n f''(\pi)] - + - \cdots$$
$$+ (-1)^\mu \frac{2n}{\pi}[f^{(2\mu-2)}(0) - (-1)^n f^{(2\mu-2)}(\pi)].$$

Läßt sich B_n in der Form (650) darstellen, so kann man das Resultat auch so aussprechen[1077]): man erhält die Koeffizienten der Entwicklung von $f^{(\mu)}(x)$, wenn man gliedweise differentiiert, dabei aber aus der Formel (650) alle Glieder wegläßt, die zu divergenten Bestandteilen Veranlassung geben würden[1076]). Die Entwicklung von $f'(x)$ in eine Sinusreihe kann, wenn $f(x)$ im Innern des Intervalls keine Unstetigkeiten aufweist, ohne weiteres aus der Entwicklung von $f(x)$ in eine Cosinusreihe durch gliedweise Differentiation gefunden werden; aus ihr ergeben sich dann die Entwicklungen der Ableitungen ungerader Ordnung durch das vorhin genannte Verfahren.

O. Bonnet[1078]) sieht den Grund dafür, daß man eine trigonometrische Reihe nicht immer gliedweise differentiieren könne, in dem Umstande, daß die Konvergenz der Reihe den Vorzeichen ihrer Glieder und nicht allein ihrem Abnehmen zuzuschreiben sei.

42. Verhalten der Reihe an Sprungstellen der zu entwickelnden Funktion. Schon *D. Bernoulli*[1079]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß man beim Übergang von (25) zu (110) für jedes der Intervalle $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$ die Integrationskonstante anders bestimmen müsse, und daß infolgedessen die letztere Reihe eine an den Trennungsstellen dieser Intervalle unstetige Funktion vorstellt. Auch *Euler* hat bemerkt[1080]), daß die Gleichung (111) für $x = \pi$ nicht mehr richtig sein kann; er legt sich die Sache so zurecht: für $x = \pi - \delta$ wird jedes Glied der Reihe nahezu gleich δ, die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen kann aber sehr wohl einen end-

1077) p. 258 = 547.

1078) Brux. mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 24.

1079) Petrop. n. comm. 17 (1772), p. 8: „integer transitus perficitur non in arculo dx, sed in unico puncto vere mathematico". *J. Fr. Pfaff* (Versuch [48])) p. 18 ist mit dieser Erklärung nicht zufrieden, weiß aber auch nichts Besseres beizubringen als die Berufung darauf, daß schon die [divergente] Reihe (25) bei $x = 0$ nicht $\frac{1}{2}$, sondern ∞ zur Summe habe.

1080) opuscula analytica 1, Petrop. (1783), p. 169 = institut. calc. integr. 4, suppl. V, § 48? (von 1772).

lichen Wert haben. Immerhin blieben diese Bemerkungen vereinzelt; noch *Ch. Babbage* meint[1081]): die Reihe (110) zeige, daß die willkürliche Integrationskonstante nicht für die ganze Ausdehnung eines Integrals denselben Wert zu haben brauche; der Grund hiervon sei noch nicht genügend aufgeklärt; man könne ihn in Unstetigkeiten von Ableitungen des Integranden oder in besonderen Eigentümlichkeiten der Exponentialfunktion suchen.

Dann hat *A. Cauchy*[1082]) aus seinen Residuensätzen gefolgert, daß auch die Summen der Reihen (282), (283) in verschiedenen Intervallen verschiedenen analytischen Funktionen gleich sind.

Allgemein ist die Frage aber erst von *S. D. Poisson* behandelt worden.[1083]) Er zeigt zunächst, daß:

$$(664)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha)d\alpha + \frac{2}{\pi}\lim_{\delta=0}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\pi e^{-n\delta}\cos(nx-n\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2} f(x) \text{ für } x=0 \text{ und für } x=\pi, \\ f(x) \text{ für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

1081) Mem. of the analytical society, Cambr. 1813, p. VIII; die Vorrede, die wie auch die Abhandlungen des Bandes keinen Verfassernamen trägt, rührt nach Angabe von *W. W. R. Ball*, history of the study of mathematics at Cambridge 1889, p. 120, von Babbage her.

1082) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 471 (von 1814). Vgl. die auf Verlangen der akademischen Kommission [*Legendre*] hinzugefügten Erläuterungen p. 493, 503. Betr. Legendre's eigene Darstellung vgl. man hier Note 400.

1083) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 423. Er leitet daraus ab, daß die Reihen, die nur Sinus- oder nur Cosinusglieder enthalten, an den Grenzen ihrer Gültigkeitsintervalle selbst Null sind, bzw. verschwindende Ableitungen liefern (p. 428), sowie entsprechende Sätze für die Reihen, die nach den Funktionen der ungeraden Vielfachen des Arguments fortschreiten. Infolgedessen vermeidet er es, direkten Gebrauch von Entwicklungen von Funktionen zu machen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, und hilft sich, um das vermeiden zu können, damit, daß er eine der erwähnten einfachen Funktionen mit derselben Art von Unstetigkeit addiert und ihre Entwicklung wieder subtrahiert (ib. p. 467, 489; 19 (1823), p. 58, 443). Noch im traité de mécanique (1833), leitet er 2, p. 337 die Entwicklung von x nach den Sinus und p. 344 die von $\pi/4$ nach den Cosinus der Vielfachen von x nicht direkt mit Hilfe der Integraldarstellungen der Koeffizienten ab, sondern gewinnt auf diesem Wege nur die Entwicklungen von x^2 nach den Cosinus bzw. von πx nach den Sinus und differentiiert dann. — Auch *J. Liouville* hat diese Bedenken ursprünglich geteilt (J. de math. 1, 1836, p. 27, 30), aber bald bemerkt (ib. 2, 1837, p. 421, 433), daß sie grundlos sind.

ist; weiter[1084]) überhaupt, daß dieselbe Summe, wie auch die Summe (384), wenn $f(x)$ nur in einem Teil des Gültigkeitsintervalls von Null verschieden ist, an den Grenzen dieses Teilintervalls nicht $= f(x)$, sondern nur $= 1/2 f(x)$ ist; sowie[1085]), daß der Wert der letzteren Summe, für $x = -\pi$ und für $x = \pi$, wenn $f(-\pi)$ und $f(\pi)$ voneinander verschieden sind, keinem von beiden, sondern ihrem arithmetischen Mittel gleich ist. Derselbe Satz sowie der allgemeinere: wenn für einen besonderen Wert von x die Grenzwerte $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ und $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon)$ zwar beide existieren, aber voneinander verschieden sind, so ist an einer solchen Stelle die Summe der Reihe gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte — ergibt sich dann sofort aus *Dirichlets* Beweisverfahren, wie dieser auch selbst hervorhebt[1086]).

Die nähere Untersuchung des Verhaltens der Reihensumme in der Umgebung einer singulären Stelle hat *Fr. W. Newman* begonnen; zunächst für die Reihe (410). Er stellt die Summe ihrer $2m$ ersten Glieder in der Form dar[1087]):

$$y_m = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin 4mx}{\cos x}\,dx \tag{665}$$

1084) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 430; 19 (1823), p. 435; chaleur p. 190.

1085) Ib. 19, p. 434. — Bei *Fourier* findet sich hierüber nur eine Andeutung, théorie Nr. 423 = Oeuvres 1, p. 511, die erst *Darboux* in einer Note dazu ausführt.

1086) J. f. Math. 4 (1829), p. 168; Repert. Phys. 1 (1837), p. 170 = Werke 1, p. 130, 156; ausführlich erörtert auch von *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 311. Daß die gegenteilige Angabe bei *Dirksen,* J. f. Math. 4 (1829), p. 178 falsch ist, bemerkt bereits *B. Riemann,* Gött. Abhandl. 13 (1868) (von 1854) = Werke p. 238. In der ausführlicheren Abhandlung Dirksens, Berl. Abhandl. 1829 [32], p. 186, die Riemann nicht kennt [oder ignoriert?], steht übrigens die richtige Angabe.

Übrigens steht noch *G. Piola* (mem. soc. ital. 20_2 (1831), p. 603) der Schwierigkeit ratlos gegenüber, daß die Sinusreihe die zu entwickelnde Funktion an der Grenze nicht mehr darstellen kann, wenn diese dort von Null verschieden ist. Er meint: wenn auch die Interpolationsformel an der Grenze nicht mehr richtig sei, könne man doch die zur Darstellung der Koeffizienten der Reihe dienenden Integrale bis an die Grenze erstrecken, da eine unendlich kleine Änderung der Grenzen das Integral nur unendlich wenig ändere. Da er aber doch weiß, daß diese letztere Behauptung nur „im allgemeinen richtig" ist, so verzichtet er in Erkenntnis seiner unzureichenden Kräfte auf eine klare Auseinandersetzung.

1087) Cambr. Dubl. math. J. 3 (1848), p. 108. Er meint die Frage, ob m von x abhängig sein könne, sei vom „algebraischen" Standpunkt aus jedenfalls zu bejahen, bei physikalischen Problemen im einzelnen Fall zu untersuchen.

und setzt darin

(666) $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{4m};$$

indem er den Grenzübergang ohne weiteres unter dem Integralzeichen vornimmt, erhält er für dieses Argument

(667) $$\lim_{m=\infty} y_m = \frac{1}{2} \int_0^u \frac{\sin u}{u} \, du.$$

Er meint, man könne so durch geeignete Wahl von u jeden Wert zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{2}$ erhalten, da dies die Werte sind, die das Integral für $u = \pm \infty$ annimmt. Demgegenüber macht *H. Wilbraham*[1088]) darauf aufmerksam, daß die äußersten Werte, die dieses Integral annehmen kann, vielmehr

(668) $$\pm \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} \, du$$

sind, daß also das geometrische Bild der Reihensumme nicht einfach ein aus abwechselnd horizontalen und vertikalen Strecken zusammengesetzter Linienzug sei, sondern daß die vertikalen Strecken beiderseits um ein endliches Stück zu verlängern sind.

Wenn *J. R. Young*[1089]) behauptet, die Gleichung (111) sei noch für $x = \pi$ und die Gleichung (410) noch für $x = \frac{\pi}{2}$ richtig, so meint er dabei doch nur: wenn x sich der betr. Grenze unbegrenzt nähert.

O. Bonnet überträgt das Hauptresultat dieser Nummer auf Potenzreihen komplexen Arguments. Aus seinen Untersuchungen ergibt

---

Analog, nur kürzer, behandelt er auch die Reihe (111). Auch bei *A. Cauchy*, Paris C. R. **36** (1853), p. 457 = Oeuvres (1) 12, p. 33, findet sich die Bemerkung (1091), daß die Summe der in der Reihe (110) auf das $n$te noch folgenden Glieder für $x = \frac{1}{n}$ näherungsweise durch das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin u}{u} \, du \sim 0{,}6244$$

sich darstellen läßt.

1088) Ib. p. 198. Er erläutert die Verhältnisse durch Figuren. Übrigens ist bei ihm weder bewiesen, daß man (665) durch (667) ersetzen darf, noch daß man durch Annahme anderer Beziehungen zwischen x und n keine andern Werte erhalten könne; überhaupt liegt der ganzen Untersuchung kein scharfer Grenzbegriff zugrunde.

1089) Phil. mag. **27** (1845), p. 91 Dubl. proc. 3_2 (1846), p. 46. Cambr. trans. 8_4 (1847), p. 437.

sich[1090]): wenn die Werte einer solchen Funktion in einem Punkt z_0 des Konvergenzkreises einen endlichen Stetigkeitssprung aufweisen, so nähert sich die Funktion dem arithmetischen Mittel aus diesen beiden Werten, wenn die Variable sich dem Punkte z auf einem Radius nähert. Auch den Fall untersucht er, daß die zu entwickelnde Funktion in einem Punkte des Konvergenzkreises so unendlich wird, daß

$$\lim_{z=z_0} (z - z_0)^{1-\delta} f(z) \tag{669}$$

für einen positiven Wert von δ existiert; er zeigt, daß auch in diesem Falle die Entwicklung in allen übrigen Punkten des Konvergenzkreises noch konvergiert[1091]).

III. Unharmonische trigonometrische Reihen.

43. Erste Beispiele solcher Reihen. Die Methode der ausgezeichneten Lösungen zur Integration partieller Differentialgleichungen (Nr. **69**) führt auch dann nicht immer auf die im bisherigen allein besprochenen „harmonischen" trigonometrischen Reihen, wenn der eine Faktor der Elementarlösung ein Cosinus oder Sinus ist; das ist vielmehr nur dann der Fall, wenn die zu erfüllenden Grenzbedingungen die einfache Form $u = 0$ oder $\partial u/\partial x = 0$ haben. Treten kompliziertere Grenzbedingungen oder neben den Grenzbedingungen für einzelne Innenwerte des Intervalls (bei den Anwendungen auf physikalische Probleme an Stellen, an welchen die Materialkonstanten sich sprungweise ändern) noch „Übergangsbedingungen" auf, so erhält man zur Bestimmung der zulässigen Frequenzzahlen bzw. Abklingungskonstanten kompliziertere determinierende Gleichungen. Derartige Gleichungen sind bereits im Laufe des 18. Jahrhunderts mehrfach aufgestellt, zum Teil auch diskutiert worden. So erhalten etwa gleichzeitig *D. Bernoulli*[1092]) für die Schwingungszahlen einer Orgelpfeife „à che-

1090) Brux. mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 103. Der Satz ist bei Bonnet nicht so bestimmt ausgesprochen; er redet ganz allgemein von dem Wert der Reihe für $z = z_0$.

1091) p. 104. Für den Fall, daß der Grenzwert (669) für keinen positiven Wert von δ existiert, aber für $\delta = 0$ gleich Null ist, zieht Bonnet p. 105 noch logarithmische Kriterien herbei.

1092) Paris mém. 1762 [64], p. 466. *S. D. Poisson* (Paris mém. 2 (1817) [19], p. 361) — der übrigens glaubt, man müsse das Problem als ein solches erzwungener Schwingungen behandeln, und deshalb die Eigenschwingungen gerade ausschließt — kommt bei anderen Annahmen über die Grenzbedingungen auf die Form:

$$\operatorname{tg} a\lambda \cdot \cot b\lambda = c.$$

Weitere Ausführungen über solche Orgelpfeifen bei *J. M. C. Duhamel,* J. de