Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik.

Rede gehalten in der Festsitzung der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 13. Februar 1905

von HERMANN MINKOWSKI in Göttingen.

Mit einem Bildnis Lejeune Dirichlets als Titelbild.

Hochgeehrte Anwesende!

Gedanken an Zeit und Raum sind des Mathematikers ständige Gefährten, die er aber von sich weist, wenn er das Reich der reinen Zahl betritt. Heute werden wir an Herrlichkeiten tief im Innern des Zahlenreiches herantreten, und die weihevolle Stimmung des Augenblicks, der Einfluß des Ortes gerade sind es, die unsere Schritte dorthin lenken.

Wir begehen die hundertjährige Wiederkehr des Geburtstages von LEJEUNE DIRICHLET, und wir denken zuerst an die Umstände, die uns das Recht geben, DIRICHLET als zu Göttingen gehörig zu betrachten.

Am 23. Februar 1855 war GAUSS gestorben. Der damalige Kurator VON WARNSTEDT wandte sich an WILHELM WEBER als das zunächst kompetente Mitglied der Honorenfakultät mit dem Ersuchen, ihm Bericht zu erstatten, wie die im Lehrkörper der Universität entstandene Lücke so würdig als möglich ausgefüllt werden könnte. Für die Entschließungen leitend, hieß es in dem Schreiben, werde vor allem die Rücksicht sein, welche bisher in ähnlichen Lagen der Universität festgehalten sei. Es ist das der Gesichtspunkt, daß die Universität nicht bloß eine hohe Schule für den Unterricht der Studierenden, nicht bloß eine Bewahrerin bereits erworbener wissenschaftlicher Kenntnisse sein, sondern auch an dem Fortbau der Wissenschaft als eines Gemeinguts der Menschheit arbeiten soll. Diesem als leitend festgehaltenen Gesichtspunkt verdankt Göttingen die ihm eigentümliche Weltstellung. Im Gebiete der höheren Mathematik und der auf die Mathematik begründeten naturwissenschaftlichen Untersuchungen hat die GEORGIA AUGUSTA vielleicht diesen Rang am glänzendsten bewährt. Universitäten, welche eine wesentliche und bedeutsame Stellung in dem geistigen Leben der Nation einnehmen, sind Individuen mit einem geschichtlich festgestellten Charakter, in dessen Bewahrung die Gewähr ihrer Kraft und ihres Segens für das Ganze ruht.

WEBER sandte ein eingehendes Gutachten, er verbreitete sich ausführlich über das Verhältnis der Mathematik zu den ihr verwandten Naturwissenschaften, denn GAUSS hatte seine Wirksamkeit zugleich über alle von der Mathematik beherrschten Wissenschaften, über die Physik ebenso wie über die Astronomie, ausgedehnt. WEBER kam zu dem Schlusse, daß als der würdigste Nachfolger von GAUSS wohl einstimmig, in und außer Deutschland, LEJEUNE DIRICHLET, damals in Berlin tätig, betrachtet werden möchte. Es wurden auf der Stelle Verhandlungen mit DIRICHLET eingeleitet. Dieser selbst legte auf Beschleunigung der Vokation Wert, weil sonst alle die Versuche, ihn in Berlin zu halten, ihm die Annahme des Rufes sehr erschweren würden. Schon nach kurzer Frist konnte WARNSTEDT an den Minister berichten: DIRICHLET kommt gerne nach Göttingen, weil er es für den höchsten Ruhm hält, GAUSS' Nachfolger zu werden. Es ist das eine wahrhaft glanzvolle Acquisition, die schönste, die Göttingen in diesem Fache hätte machen können.

Der Universität Göttingen, welche ein halbes Jahrhundert hindurch den Ruhm genossen hatte, den ersten aller lebenden Mathematiker zu besitzen, war es gelungen, sich diesen Ruhm auch ferner zu erhalten.

Einige Daten aus dem Leben DIRICHLETS werden Ihr Interesse beanspruchen dürfen, sie sind zumeist der ausgezeichneten Gedächtnisrede entnommen, die KUMMER in der Berliner Akademie seinem um fünf Jahre älteren Freunde gewidmet hat.

PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET wurde in Düren bei Aachen geboren, heute vor hundert Jahren. Auf dem Gymnasium in Köln hatte er zu seinem Lehrer in der Mathematik den nachmals in der Elektrodynamik berühmt gewordenen GEORG SIMON OHM. 16 Jahre alt, kehrte er mit dem Abgangszeugnis für die Universität nach Hause zurück und beredete die anfänglich widerstrebenden Eltern, seinem entschiedenen Wunsche nachzugeben, ihn Mathematik studieren zu lassen.

Das mathematische Studium auf den preußischen und auf den übrigen deutschen Universitäten lag damals arg darnieder. Die Vorlesungen erhoben sich nur wenig über das Gebiet der Elementar-Mathematik. In Frankreich dagegen stand die Mathematik in voller Blüte. LAPLACE, LEGENDRE, FOURIER, POISSON, CAUCHY wirkten zusammen, Paris zu einem glänzenden Sitze der mathematischen Wissenschaft zu machen.

DIRICHLET wandte sich nach Paris, er verblieb dort $4^1/_2$ Jahre, den größten Teil der Zeit als Lehrer im Hause des Generals FOY tätig, der eine hervorragende Persönlichkeit war und als Politiker eine bedeutende Rolle gespielt hat. Mehr noch als das Hören der Vorlesungen wurde in dieser Zeit für DIRICHLETS spätere wissenschaftliche Richtung bestimmend das Studium der GAUSSischen Disquisitiones Arithmeticae. DIRICHLET hat dieses Werk nicht nur einmal oder mehrere Male durchstudiert, sein ganzes Leben hindurch hat er nicht aufgehört, die Fülle der tiefen Gedanken, die es enthält, sich immer wieder zu vergegenwärtigen. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN erzählte einmal: So wie gewisse Geistliche mit ihrem Gebetbuch umherziehen, pflegt DIRICHLET nur in Begleitung eines ganz verlesenen, aus dem Einband gewichenen Exemplars der Disquisitiones Arithmeticae auf alle seine Reisen zu gehen.

Durch eine Arbeit zum FERMATschen Satze erweckte DIRICHLET die Aufmerksamkeit der Pariser Akademie. Infolge dieses glänzenden Debuts kam DIRICHLET namentlich mit FOURIER in nähere Verbindung. FOURIER fand in ihm einen jungen Mann, dem er sein mathematisches Herz ganz eröffnen konnte und von dem er nicht bloß bewundert, sondern auch verstanden wurde. Durch FOURIER wurde ALEXANDER VON HUMBOLDT auf DIRICHLET aufmerksam gemacht. HUMBOLDT glaubte, daß unter den damaligen Verhältnissen Frankreichs der Aufschwung der Wissenschaften gehemmt und auch für große Talente in Paris wenig Aussicht wäre, und er brachte in DIRICHLET den schon erwogenen Entschluß zur Rückkehr ins Vaterland zur Reife. Durch Verwendung HUMBOLDTS, dessen Bemühungen auch GAUSS unterstützte, erhielt DIRICHLET 1827 eine Anstellung in Breslau. Auf der Reise dorthin wählte er den Weg über Göttingen, um GAUSS persönlich kennen zu lernen.

In Breslau blieb DIRICHLET wenig über ein Jahr, dann wurde er nach Berlin gerufen, wo er zuerst einen Lehrauftrag an der Kriegsschule erhielt und bald für die dortige Universität und die Akademie gewonnen wurde. DIRICHLET wirkte an der Berliner Hochschule in ausgezeichneter Weise 27 Jahre hindurch, davon 7 Jahre im Verein mit seinem Freunde JACOBI. Eine Berufung nach Heidelberg im Jahre 1846 hat er abgelehnt.

Im Berichte WEBERS findet sich noch eine Tatsache, die nicht bekannt geworden ist. Schon im Jahre 1828 hegte GAUSS im Interesse der Universität und in der Hoffnung des gemeinsamen wissenschaftlichen Zusammenwirkens den lebhaftesten Wunsch und sprach ihn gelegentlich gegen HUMBOLDT aus, daß DIRICHLET nach Göttingen berufen werden möge. Nach THIBAUTS Tode 1832 wollte GAUSS selbst einen entsprechenden Antrag bei dem Kuratorium stellen, er nahm davon nur Abstand, weil er sich sagen mußte, DIRICHLET würde Berlin nicht verlassen haben infolge der soeben erst durch seine Verheiratung eingegangenen Verbindung mit dem MENDELSSOHNschen Hause, welches damals in Berlin den ausgezeichnetsten Vereinigungspunkt für Kunst und Wissenschaft bildete. DIRICHLET hatte sich im Jahre 1831 mit REBECCA MENDELSSOHN-BARTHOLDY, der jüngeren Schwester von FELIX MENDELSSOHN und von FANNY HENSEL, vermählt.

„Im Herbst 1855 siedelte DIRICHLET nach Göttingen über. Er richtete sich hier in einem eigenen, angenehm gelegenen Hause mit Garten (Mühlenstraße 1) ganz nach seinem Gefallen ein, und die Ruhe der kleineren Stadt, welche er seit seiner Jugend nicht mehr genossen hatte, ersetzte ihm hinreichend die äußeren Annehmlichkeiten des großstädtischen Lebens in Berlin.“ An der Universität fand er zwar nicht einen so großen Kreis von Zuhörern, als er in Berlin verlassen hatte, allein sein Ruf als Lehrer war nicht minder anerkannt als sein wissenschaftlicher Ruf und zog viele junge Mathematiker nach Göttingen.

Es sollte ihm jedoch nur noch eine kurze Wirksamkeit gegönnt sein.

Im Sommer des Jahres 1858, nach dem Schlusse seiner Vorlesungen, reiste er nach der Schweiz und hielt sich in Montreux auf, weniger zu seiner Erholung, als mit dem Vorhaben, daselbst eine in der Göttinger Sozietät zu haltende Gedächtnisrede auf GAUSS auszuarbeiten. Dort wurde er plötzlich von einer akuten Herzkrankheit ergriffen und kehrte todkrank nach Göttingen zurück. Die augenblickliche Lebensgefahr konnte zwar abgewandt werden, da traf DIRICHLET der plötzliche Verlust seiner Frau. Dieser Schlag wendete seine Krankheit wieder zum Schlimmeren und nach schweren Leiden erlag er derselben am 5. Mai 1859, nur 54 Jahre alt, in der besten Schaffenskraft, in frischem Besitze wunderbarer Geheimnisse, die er mit sich hinübernahm. Er ruht auf dem alten Kirchhofe, der an der Weender Chaussee liegt, das Grab, das ihn und seine Frau aufnahm, befindet sich wenige Schritte rechts hinter dem BÜRGERdenkmal und ist leicht kenntlich an einer hohen steinernen Umfriedung.

Seit jener Zeit ist fast ein halbes Jahrhundert weiterer intensivster Entwicklung der mathematischen Wissenschaft vorübergezogen. In allen ihren Teilen sehen wir noch die Impulse des DIRICHLETschen Geistes nachwirken. Suchen wir das Lebenswerk DIRICHLETS als Ganzes zu beurteilen, so ist es ein ununterbrochenes Zeugnis für die Verbrüderung der mathematischen Disziplinen, für die Einheit unserer

Wissenschaft. Unablässig war sein Sinnen darauf gerichtet, zwischen getrennt bestehenden Gedankensphären die Brücke zu schlagen und unabhängig gezeitigte Erfolge zu fruchtbarer Wechselwirkung zu verschmelzen.

Das Feld, auf welchem unstreitig die bewundernswürdigsten Offenbarungen DIRICHLETS liegen, ist die höhere Arithmetik, die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen. Es kann nur derjenige DIRICHLET in richtigem Lichte erfassen, der die Eigenart dieses Zweiges der Mathematik zu schätzen versteht.

Ich muß davon etwas ausführlicher sprechen, wenn ich Ihr Interesse für DIRICHLETS größte Leistungen wachrufen will. Freilich, die Arithmetik von heute ist nicht ganz die Arithmetik aus den Zeiten der Disquisitiones. An die Stelle der erfindungsreichen schöpferischen Phantasie eines GAUSS und DIRICHLET, die ein verheißenes Land suchte, ist mehr der systematische Anbau eines sicher erworbenen Bodens getreten. Für GAUSS war die Arithmetik die Königin der Mathematik, sie ist es auch heute noch. Aber ihr Wesen ist selbst vielen Mathematikern unnahbar, man hört von der fortschreitenden Arithmetisierung aller mathematischen Wissenzweige sprechen, und manche halten deshalb die Arithmetik nur noch für eine zweckmäßige Staatsverfassung, die sich das ausgedehnte Reich der Mathematik gibt. Ja, zuletzt werden einige in ihr nur noch die hohe Polizei sehen, welche befugt ist, auf alle verbotenen Vorgänge im weitverzweigten Gemeinwesen der Größen und Funktionen zu achten. Die Arithmetik steht einzig da durch „die Einfachheit ihrer Grundlagen, die Genauigkeit ihrer Begriffe, die Reinheit ihrer Wahrheiten“, diese Ruhmestitel ihrer Unbestechlichkeit werden ihr von niemandem aberkannt.

Erwecken wir für einen Moment die alte Arithmetik aus ihrem Dornröschenschlaf.

Fast alle, die sich ernstlich um die Arithmetik bemüht haben, gaben sich ihr bald mit einer gewissen Leidenschaft hin. Mit einer leichten Variation des Ausspruchs, den NOVALIS auf die Mathematiker im allgemeinen geprägt hat, darf füglich behauptet werden: Der echte Arithmetiker ist Enthusiast per se. Ohne Enthusiasmus keine Arithmetik.

Allerdings sind unter den Mathematikern selbst manche anzutreffen denen der Reiz für dieses Gebiet vollkommen abzugehen scheint. Vielleicht liegt die Ursache davon in dem hohen Grade von Abstraktionsfähigkeit, welchen die arithmetischen Begriffe zu ihrer völligen Beherrschung erfordern. Vielleicht auch rührt jene Abneigung von einer

Ungeduld her, die der mathematischen Gedankenarbeit erst im Momente unmittelbarer praktischer Verwendbarkeit ihr Interesse zuwenden mag. In letzterer Hinsicht bin ich übrigens für die Zahlentheorie Optimist und hege still die Hoffnung, daß wir vielleicht gar nicht weit von dem Zeitpunkt entfernt sind, wo die unverfälschteste Arithmetik gleichfalls in Physik und Chemie Triumphe feiern wird, und sagen wir z. B., wo wesentliche Eigenschaften der Materie als mit der Zerlegung der Primzahlen in zwei Quadrate im Zusammenhang stehend erkannt werden. An jenem Tage werden den Arithmetikern von allen Seiten Huldigungen dargebracht werden. Einstweilen aber würden in einen Briefsteller für Arithmetiker noch zweckmäßig alle die resignierten Äußerungen hineingehören, die GAUSS und DIRICHLET sich über die geringe Verbreitung zahlentheoretischen Sinnes schrieben.

Schon jetzt nehmen wir in der Zahlentheorie mehrere, wenn auch vielleicht nur äußerliche Analogien mit der Physik wahr. Durch die unendliche Reihe der Zahlen bietet sich die weiteste Möglichkeit des Experimentierens. Jede Zahl ist wie ein Individuum für sich, das in der mannigfaltigsten Weise die Eigenschaften großer Klassen in sich vereinigt. Jede Zahl ist daher ein Objekt für Versuche zur Entdeckung allgemeiner Gesetze. Dem Arithmetiker werden in seiner Beschäftigung die Ziffern das, was die Farben dem bildenden Künstler sind. Er mischt dieses Handwerkszeug, um wunderbare Geschehnisse, eindrucksvolle Charaktere festzuhalten, indes ein anderer Mathematiker höchstens mit rohen Strichen den Effekt von Groß und Klein hervorzurufen, die Distanz der Fixsterne neben dem Durchmesser eines Moleküls zu malen versteht.

Auch, daß auffällige Zusammenhänge oft früher wahrgenommen werden, als die inneren Gründe dafür offenbar liegen, ist ganz ein Charakteristikum einer Erfahrungswissenschaft. Manche derartige Erscheinungen in der Zahlentheorie mögen in den Folgen, wie sie den Weg zeigten, um in neue unbekannte Tiefen der Wissenschaft einzudringen, wohl mit der Feststellung von WEBER und KOHLRAUSCH zu vergleichen sein, daß der Quotient der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektrizitätsmenge genau mit der Größe der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt. So bildete ein merkwürdiges Endergebnis, auf das DIRICHLET bei der Berechnung der Klassenanzahl der quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten geführt wurde, für einen mathematischen Forscher der Gegenwart das Einfallstor, durch welches er in das Reich der Zahlentheorie eindrang, um dort neue blühende Provinzen zu erschließen.

Andererseits finden wir in der Geschichte der Arithmetik, daß oft bedeutende Fortschritte an ganz unscheinbare Phänomene anknüpfen. In der Theorie der Kreisteilung war Gauss darauf geführt worden, gewisse Ausdrücke zu betrachten, — jetzt nennt man sie kurzweg die Gaussischen Summen, — sie definieren im wesentlichen in einem regulären Polygon von n Seiten einen gewissen ausgezeichneten Punkt. Es ergab sich, daß der Punkt auf einer bestimmten Geraden durch den Mittelpunkt in bestimmter Entfernung von letzterem liegen müsse, es blieb aber zweifelhaft, ob rechts oder links. In jedem Versuchsfalle ergab sich die Lage rechts, aber der Beweis dieser so einfach klingenden Tatsache bot die allergrößten Schwierigkeiten dar und führte Gauss tief in das Formelgebiet der elliptischen Funktionen hinein. Dirichlet hat später auf einem sehr sinnreichen neuen Wege, durch Benutzung der Fourierschen Reihen und eines Integrals, das in der Fresnelschen Theorie der Beugung des Lichtes eine Rolle spielt, die Gaussischen Summen mitsamt dem zweifelhaften Vorzeichen zu berechnen gelehrt.

Ich habe etwas ausführlicher von dem Wesen der Zahlentheorie gesprochen. Nun will ich auf einzelne Funde von Dirichlet eingehen, wie sie sich in den heutigen Stand der mathematischen Wissenschaft einordnen. Der Brennpunkt der heutigen Zahlentheorie, von dem aus auch ihre funktionentheoretischen Beziehungen ausstrahlen, ist die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Diese Theorie ruht auf drei Grundpfeilern, dem Satze von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primideale, dem Satze von der Existenz der Einheiten und dem Satze von der transzendenten Bestimmung der Klassenanzahl[1]). Von diesen Pfeilern hat die beiden letzten Dirichlet allein errichtet, den zuerst genannten hat Kummer entworfen und es haben ihn dann Dedekind und Kronecker, Schüler Dirichlets, in unabhängiger Arbeit ausgebaut, und jener hat ihn sogleich jedermann sichtbar aufgeführt, dieser ihn lange hindurch verhüllt gehalten. Nun einiges Nähere zum Verständnis jener glänzendsten Entdeckungen Dirichlets.

Selbst die in der Zahlenlehre wenig Bewanderten wissen von der Gaussischen Abhandlung, in der die geometrische Deutung der komplexen Größen gelehrt wurde. In jener Abhandlung hat Gauss das Feld der Zahlentheorie außerordentlich erweitert. Die konsequente Fortentwicklung des Gaussischen Gedankens hat dazu geführt, dem Begriffe der ganzen Zahl eine noch unendlich mannigfaltigere Ausbildung zu geben. Während die früheren ganzen Zahlen, nun zur Unterscheidung ganze rationale genannt, sich additiv und subtraktiv

1) Vgl. Hilbert in Bd. IV dieser Jahresberichte.

aus 1 zusammensetzen, haben die neuen ganzen Zahlen, die algebraischen ganzen Zahlen genannt, die charakteristische Eigenschaft, daß irgend eine Potenz von ihnen sich additiv und subtraktiv aus früheren Potenzen zusammensetzen läßt. Derartige Mengen von Zahlen, welche auseinander ausschließlich durch Anwendung der vier Spezies hervorgehen, werden zu den sogenannten Zahlkörpern zusammengefaßt. Auch in diesen erweiterten Zahlbereichen blieb der multiplikative Aufbau aller ganzen Zahlen aus möglichst einfachen Primelementen das grundlegende Problem. Vor allem erhebt sich da die Frage nach allen denjenigen ganzen Zahlen, welche auch in der Eins als Faktor enthalten sein können, wie dieses von den rationalen ganzen Zahlen nur ausschließlich die zwei Werte 1 und —1 tun. Diese Zahlen eines Zahlkörpers werden Einheiten genannt, sie durchdringen die übrigen Zahlen und beeinflussen deren innerste Natur, ich möchte sagen, wie der Lichtäther die Erscheinungen der Materie.

Vor DIRICHLET war die Frage nach den Einheiten nur für den einfachsten Fall der reellen Körper, welche von einer quadratischen Gleichung abhängen, erledigt. Aber indem hier der Nachweis der Existenz der Einheit gleichzeitig mit einem speziellen Verfahren zur Auffindung der Einheit Hand in Hand ging, konnte man versucht sein, die Wichtigkeit des besonderen Algorithmus zu überschätzen, und hätte alle Kräfte vergeuden können in dem Unternehmen, das angetroffene formale Hilfsmittel auf allgemeinere Fälle zu übertragen. Hier hat nun DIRICHLET mit der ganzen Schärfe vorurteilsfreier Auffassung eingesetzt, den tiefliegenden Kern des Problems herausgeschält und den ganzen merkwürdigen Organismus der Einheiten in vollster Klarheit auseinandergelegt. Er zeigte, daß in der Regel in einem Zahlkörper unendlich viele Einheiten vorhanden sind, und daß sie sich alle aus einer endlichen Anzahl unter ihnen durch Multiplikation und Potenzierung ableiten lassen. Es ist wahrhaft bewundernswürdig, in welche einfache Form DIRICHLET zuletzt den Beweis seines gewaltigen Theorems zu gießen verstand. Fast sieht es aus, als ob als wesentlichstes Hilfsmittel nur ein ganz alltägliches Prinzip verbleibt: Tut man in eine Anzahl von Schubfächern eine größere Anzahl von Gegenständen, als man Schubfächer hat, so finden sich notwendig in wenigstens einem Fache gleichzeitig zwei oder mehrere Gegenstände vor. Allerdings werden die DIRICHLETschen Schubfächer Größenbereiche und die darin aufgehobenen Gegenstände natürliche Logarithmen.

Es wird erzählt, daß nach langjährigen vergeblichen Bemühungen um das schwierige Problem DIRICHLET die Lösung in Rom in der Sixtinischen Kapelle während des Anhörens der Ostermusik ergründet hat. Inwieweit dieses Faktum für die von manchen behauptete Wahlverwandtschaft zwischen Mathematik und Musik spricht, wage ich nicht zu erörtern.

Die zweite große zahlentheoretische Entdeckung DIRICHLETs, die Formel für die Klassenanzahl, lag in einem Gebiete, das vollkommen unabhängig von der Theorie der algebraischen Zahlkörper aufwuchs, in der Theorie der quadratischen Formen. Es sind aber inzwischen die Zweige der Arithmetik so dicht zusammengewachsen, daß ich auch die Bedeutung dieser anderen DIRICHLETschen Großtat auseinandersetzen kann, während wir in dem zuletzt berührten Ideenkreise verbleiben.

In den höheren Zahlkörpern hörte höchst merkwürdigerweise die Eindeutigkeit der Zerfällung der ganzen Zahlen in unzerlegbare Primelemente auf. Fast schien es, als wenn an dieser Schwierigkeit überhaupt die Weiterführung der Theorie der Körper in der einmal eingeschlagenen Richtung scheitern müßte. Aus dem Labyrinthe, in das die Arithmetik hier verstrickt erschien, fand KUMMER durch einen gänzlich neuen Gedanken den rettenden Ausweg. Die nicht weiter zerlegbaren Zahlen durften eben noch nicht als die letzten Urelemente angesehen werden, auch sie waren das Produkt einer weiter reichenden Zusammensetzung, die wahren letzten Primelemente freilich ließen sich nicht mehr als reine Zahlen abscheiden. Aber es ergab sich ein Hilfsmittel, das Vorhandensein eines bestimmten Primelementes unzweifelhaft nachzuweisen, und der fundamentale Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Faktoren blieb gerettet.

KUMMER nannte die neuen Bildungen, über deren Vorhandensein als Faktoren in jedem einzelnen Falle mit Sicherheit entschieden werden konnte, ohne daß eine tatsächliche Division ausführbar war, ideale Zahlen. DEDEKIND gestaltete in der Folge diesen Begriff noch durchsichtiger. Eine bestimmte ideale Zahl ist völlig charakterisiert durch die Gesamtheit aller wirklichen Zahlen, in denen sie sich als Faktor zeigt, diese Gesamtheit ist geradezu ihr Abbild, und bei dieser Auffassung ersetzte DEDEKIND die KUMMERsche Bezeichnung ideale Zahl durch den kürzeren Namen Ideal. So ist es gekommen, daß die Mathematiker auch solche Ideale besitzen, die ausschließlich durch die Vernunft geboten sind; es sind das nicht die einzigen Ideale des Mathematikers, aber auch sie sind derart, daß derjenige, der sie kennt, sich an ihnen begeistert.

Nun vermögen sich zwei verschiedene Ideale in gewisser Weise auszutauschen, ein Vorgang, der durch die Analogie mit den chemischen Umwandlungen sehr einleuchtend sein wird. Man fügt zu den sämtlichen Zahlen, die ein gegebenes Ideal enthalten, einen wirklichen

Faktor hinzu; es läßt sich aus den zusammengesetzten Produkten ein anderer wirklicher Faktor abspalten, und nun bleiben genau die sämtlichen Zahlen übrig, die ein bestimmtes zweites Ideal enthalten. In solchem Falle heißen die betreffenden zwei Ideale einander äquivalent und sie werden zu einer Klasse gerechnet. In denjenigen besonderen Fällen, wo der ursprüngliche Begriff der Primzahlen in Kraft bleibt, sind alle Ideale gegenseitig austauschbar und gibt es daher nur eine einzige Idealklasse. In allen Fällen aber erweist sich für einen Zahlkörper die Anzahl der sämtlichen vorhandenen Idealklassen als eine endliche, und diese Anzahl der Idealklassen ist das bedeutungsvollste Attribut eines algebraischen Zahlkörpers. DIRICHLET nun ist es zuerst gelungen, das große Rätsel der Klassenanzahl durch ihre Bestimmung auf transzendentem Wege zu lösen. DIRICHLET behandelte nur die quadratischen Zahlkörper, aber seine Methode ist in der Folge für die Erledigung der allgemeinsten Fälle zureichend geblieben.

In dem Nachlasse von GAUSS fand sich ein Fragment einer Abhandlung, die der Sozietät überreicht werden sollte. Sie beginnt: Sechsunddreißig Jahre sind schon verflossen, seit ich die Prinzipien des wunderbaren Zusammenhangs, welchem die vorliegende Arbeit gewidmet ist, entdeckte. Aus diesem Fragmente geht unzweifelhaft hervor, daß GAUSS, wie er in so vielen Richtungen spätere Funde vorweggenommen hat, so auch den Ausdruck für die Klassenanzahl schon 1801 gekannt hat. Aber der Weg, den GAUSS bei dessen Herleitung einschlug, bricht in dem Fragment mit der Schwierigkeit eines Konvergenznachweises ab, dessen vermutliche Erledigung zu rekonstruieren nicht gelungen ist. Das GAUSSsische Fragment handelt in seinem ausgeführten Teile von der Bestimmung des Flächeninhalts einer Figur, speziell des Kreises. Sie ersehen daraus, wie die höchsten Probleme, welche die Arithmetik darbietet, immer wieder zu neuer Durchforschung elementarer Begriffe, die man schon längst gesichert wähnen würde, die Veranlassung werden.

Daß DIRICHLET die fragliche Schwierigkeit überhaupt nicht antraf, liegt daran, daß er von einem gänzlich neuen Ausdruck für den Flächeninhalt einer Figur ausgehen konnte. Die gewöhnliche, ich möchte sagen, mikroskopische Bestimmung eines Flächeninhalts, welche auch GAUSS auseinandersetzt, besteht darin, auf die zu untersuchende Figur Quadratnetze mit immer engeren und engeren Maschen zu legen und die in die Figur fallenden Maschen zu zählen. DIRICHLET denkt sich ein für allemal ein bestimmtes, unendliches Quadratnetz fest über die Ebene gebreitet. Die zu untersuchende Figur wird nun von einem festen Anfangspunkte aus kontinuierlich in allen Dimensionen gleichmäßig vergrößert, und für jeden Kreuzungspunkt des Netzes wird angemerkt, bei welchem Vergrößerungsverhältnis er gerade auf den Rand der Figur treten würde. Die Summe der reziproken Werte aller so bestimmten Vergrößerungszahlen für alle vorhandenen Netzpunkte würde noch unendlich sein; man summiere nun aber bestimmte gleich hohe, etwa $2s^{\text{t}}$ Potenzen aller dieser reziproken Werte, so kommt man auf eine durch die ursprüngliche Figur völlig charakterisierte Funktion $\zeta(s)$; diese gestattet eine analytische Fortsetzung für alle komplexen s und weist dann insbesondere für $s = 1$ einen einfachen Pol auf, dessen CAUCHYsches Residuum genau der Flächeninhalt der Figur wird. Ich möchte vorschlagen, zur leichteren Einbürgerung dieser fundamentalen Überlegung in der Analysis die eben beschriebene Formel den DIRICHLETschen makroskopischen Ausdruck eines Flächeninhalts zu nennen.

Daß DIRICHLET auf diesen merkwürdigen Ausdruck überhaupt verfiel, hatte er dem glücklichen Umstande zu verdanken, daß dergleichen Summen aus gleich hohen Potenzen positiver abnehmender Größen, die man heutzutage allgemein als DIRICHLETsche Reihen bezeichnet, sich ihm bei einer früheren Gelegenheit ganz von selbst dargeboten hatten. Es handelte sich damals darum, einen Beweis für den Satz zu finden, daß jede arithmetische Progression von Zahlen, bei welcher nicht alle Individuen einen gemeinschaftlichen Faktor haben, stets auch unendlich viele Primzahlen enthält. LEGENDRE hatte richtig erkannt, daß dieser Satz durch seinen elementaren Charakter sich als ein äußerst einschneidendes Reagensmittel bei den mannigfachsten arithmetischen Überlegungen darstellt. Aber der Versuch LEGENDRES, einen Beweis des Satzes zu erbringen, scheiterte kläglich, darf man mit gutem Grunde sagen.

Es ist nun ein weiterer Ruhmestitel von DIRICHLET, zuerst jenes fundamentale Theorem über die Primzahlen in arithmetischen Progressionen bewiesen zu haben. Die Idee des Beweises war ihm durch Reflexion über die Art erwachsen, wie EULER aus der Verwandlung der Summe der reziproken Werte der natürlichen ganzen Zahlen in ein nur von der Reihe der Primzahlen abhängendes Produkt geschlossen hatte, daß die Anzahl der Primzahlen notwendig eine unendliche ist. Die größte Schwierigkeit, welche DIRICHLET an dieser Stelle entgegentrat, bestand in der Notwendigkeit, das Nichtverschwinden des Wertes einer gewissen Summe einzusehen; und gerade diese Schwierigkeit löste sich in höchst überraschender Weise und wurde der Anlaß zu der vorhin geschilderten Entdeckung. Nämlich jene Summe erwies sich als eine Klassenanzahl quadratischer Formen, und als Anzahl mußte sie notwendig mindestens 1, also von Null verschieden sein. Ich kann hier vielleicht hinzufügen, daß vor wenigen Jahren MERTENS in Wien das Nichtverschwinden der fraglichen Summe auf einem direkten Wege durch Größenabschätzung in betreff der Glieder darzutun vermochte. Aber diese kühne Methode von MERTENS ist, als wenn man durch Gestrüpp auf steilstem Wege zu einer Bergspitze emporklimmt, anstatt durch eine Landschaft mit herrlichen Ausblicken sanft anzusteigen.

Nur ein Teil der zahlentheoretischen Arbeiten von DIRICHLET ist hier flüchtig berührt worden. Mit besonderer Hingabe war DIRICHLET unablässig bemüht, die schwer zugänglichen Ideen von GAUSS den Mathematikern näherzubringen, die starren Beweise desselben in flüssige und durchsichtige Methoden umzuwandeln. Von mancher der in diesem Sinne unternommenen Arbeiten, wie z. B. seiner geometrischen Theorie der ternären quadratischen Formen, gingen in der Folge starke Anregungen aus.

Kürzer wollen wir der zweiten Hauptrichtung folgen, die uns in den publizierten Arbeiten von DIRICHLET hervortritt, und auf seine Beiträge zur mathematischen Physik eingehen. Diese zwei Richtungen, die Zahlentheorie und die mathematische Physik, so divergierend sie scheinen mögen, sind bei DIRICHLET harmonisch vereinigt durch das Band der Integralrechnung. Wie man oft einen Maler aus jedem seiner Werke auf den ersten Blick an eigentümlichen Farbeneffekten oder häufiger wiederkehrenden Stimmungen erkennt, so ist es eine anziehende und stets erfolgreiche Handhabung der Integrale, welche vielen Werken DIRICHLETS ein charakteristisches Gepräge verleiht.

Zu den Entdeckungen DIRICHLETS, die, ich möchte sagen, am populärsten geworden sind, gehören seine Methoden und Resultate im Gebiete der FOURIERschen Reihen; sie sind bahnbrechend geworden für die moderne Behandlung der reellen Funktionen und in ihrem Werte geradezu unschätzbar wegen des Anstoßes, den sie zur Ausbildung der Mengenlehre gegeben haben. Die den Mathematikern sehr geläufige Geschichte der trigonometrischen Reihen ist ein fortwährender Kampf um die Beseitigung von Vorurteilen. Nur unter lebhaftem Widerstreit der Meinungen hatte die Tatsache Anerkennung gefunden, daß willkürliche Funktionen sich in nach den Sinus und Kosinus der Vielfachen des Arguments fortschreitende Reihen entwickeln lassen. Aber ein strenger Beweis für die Konvergenz und damit die Zulässigkeit der Reihen war noch nicht erbracht worden. CAUCHY zog Hilfsmittel heran, die im Falle analytischer Funktionen zu partiellen Erfolgen führten, und vermochte von diesen Mitteln nicht abzugehen. Es erging dem großen Analytiker hier etwa wie den Brüdern MONTGOLFIER, die nach der ersten geglückten Auffahrt ihrer Luftballons sich von dem dabei verwandten Heizmaterial nicht trennen konnten, weil sie auf Erzeugung elektrischen Rauches bedacht waren, wo es auf Verdünnung der Luft ankam. DIRICHLET aber erkannte die wahren Bedingungen für den erstrebten Aufstieg zur vollen Höhe der willkürlichen Funktionen.

DIRICHLETs durch wunderbare Klarheit und Einfachheit berühmter Beweis, daß jedem Minimum potentieller Energie Stabilität des Gleichgewichts entspricht, ist eine zweite Tat solcher Art, daß er sich von verkehrten Hilfsmitteln freimachte, indem er statt der analytischen Regeln für die Bestimmung der Minima einer Funktion nur den ursprünglichen Begriff des Minimums heranzog. Immer wieder sind doch bedeutende Fortschritte in der Mathematik auf der Stelle errungen, sowie man nur wahrnimmt, daß Umstände, die stets als zusammengehörig betrachtet wurden, nichts miteinander zu tun haben. Hierin mag auch ein wesentlicher Grund liegen, weshalb so oft Mathematiker schon in jungen Jahren ganz unerwartete Erfolge davontragen. Sie blicken in vielen Dingen weniger voreingenommen. Es trägt jeder mathematische Soldat den Marschallstab im Tornister, wenn er nicht aus purer Disziplin auf alles Vorhandene schwört.

Leicht und von Grund aus zerstörte DIRICHLET die naive Auffassung, welche die für endliche Reihen gültigen Rechnungsregeln sorglos auch auf die unendlichen Reihen übertrug: er setzte unmittelbar in Evidenz, daß die nicht absolut konvergenten Reihen bei gehöriger Gliederumstellung jede beliebige Summe ergeben können.

Besonderen Stolz legte DIRICHLET auf seine Methode des diskontinuierlichen Faktors zur Bestimmung vielfacher Integrale. Er pflegte zu sagen, es ist das ein sehr einfacher Gedanke, und schmunzelnd hinzuzufügen, aber man muß ihn haben. Die Methode gestattet bekanntlich, sich über die Grenzen eines Integrationsraumes hinwegzusetzen durch Verwendung eines zweckmäßig geformten Faktors, der im Innern des Raumes 1 und außerhalb 0 ist. Wenn der Gedanke, aus 0 und 1, dem Nichts und dem All, nach dem dyadischen System die ganze Größenwelt aufzubauen, LEIBNIZ schon derart gefiel, daß er sich dadurch eine Bekehrung des damaligen für Wissenschaft interessierten Kaisers von China vom Heidentume versprach, welche Hoffnungen auf die Vervollkommnung der Welt hätte nicht LEIBNIZ aus einer Kenntnis des DIRICHLETschen diskontinuierlichen Faktors geschöpft.

DIRICHLETs Verdienste um die mathematische Physik sind besonders hoch darum einzuschätzen, daß er durch seine Vorlesungen außerordentlich für die Verbreitung dieser Lehren in Deutschland gewirkt hat. Gewaltige Offenbarungen auf diesem Gebiete hätten sich an seinen Namen geknüpft, wenn nicht sein Leben so jäh abgebrochen wäre. Er hatte einen mathematisch strengen Beweis für die Stabilität unseres Planetensystems gefunden, und er war in den Besitz einer ganz neuen, allgemeinen Methode der Behandlung und Auflösung der Differentialgleichungen der Mechanik gelangt. Aber es sind kaum Andeutungen darüber verblieben, denn er entschloß sich immer nur schwer zu der Niederschrift des Erforschten.

Gerade seine Göttinger Zeit war besonders ausgefüllt durch Nachdenken über physikalische Fragen. Und gerade im Hinblick auf die angewandten Gebiete der Mathematik hatte auch WILHELM WEBER DIRICHLETS Berufung hierher so warm befürwortet. Ich möchte eine allgemein gehaltene Stelle aus WEBERS Bericht wiedergeben, die hierzu als Einleitung diente und die Ihr Interesse erwecken wird:

Für die anregende Kraft, welche die Forschungen der einen Wissenschaft auf die der anderen ausübt, zeigt sich die enge Verwandtschaft allein nicht entscheidend, es kommt vielmehr auf die Verschiedenartigkeit und gegenseitige Ergänzung der von zwei Seiten dargebotenen Elemente an. Der Astronom, welcher sich mit einem Physiker, der Physiker, welcher sich mit einem Astronomen zu einer physikalischen oder astronomischen Forschung verbinden wollte, würde keine wesentlich neuen Elemente dazu mitbringen. Der Mathematiker kann dagegen alle Reichtümer seiner Wissenschaft und die Resultate seiner eigenen Forschungen bei einer schicklich gewählten astronomischen oder physikalischen Untersuchung, zu der er sich mit einem Astronomen oder Physiker verbindet, entfalten und gewinnt dadurch selbst wieder Antrieb und Anregung zur Erforschung neuer Gebiete mathematischer Probleme. GAUSS, so fährt WEBER fort, hat keine Opfer gescheut, um sich selbst aller Elemente der praktischen Astronomie vollkommen zu bemächtigen; er hätte dasselbe in Beziehung auf die Physik vermocht: nur die Vermeidung von Störungen in seinen mathematischen Forschungen, wo der Verlust noch größer gewesen sein würde, sind der Grund seiner Verbindung mit mir zu physikalischen Untersuchungen gewesen, die unter seiner Leitung zu so großen Resultaten geführt haben. Nicht bloß zum Fortbau der höheren Mathematik also, sondern auch zu dem der Astronomie und Physik ist ein Mathematiker hervorragender Art das größte Bedürfnis.

In seinen Vorlesungen behandelte DIRICHLET mit Vorliebe diejenigen Gebiete, an deren Ausbau er selbst reichen Anteil hatte. Sein

Vortrag war dadurch so eindringlich, weil es schien, als wenn er im Begriffe stünde, eben erst den ganzen Bau zu schaffen; es war in hohem Grade fesselnd, ihm bei dieser Arbeit zu folgen. Er entwickelte den Stoff in vollster Natürlichkeit. Kein Kunstgriff trat auf als deus ex machina, tragisch geschürzte Knoten zu unerwartet günstiger Lösung zu führen.

So außerordentlich anregend DIRICHLET als Lehrer gewirkt hat, eine besondere mathematische Schule hat er nicht gegründet. Aber viele, die sich hernach auf individuell sehr verschiedene Wege zerstreuten, verdankten ihm die stärksten Impulse ihres wissenschaftlichen Strebens. Seinen Enthusiasmus für die Anregungen DIRICHLETS meinte der junge EISENSTEIN nicht warm genug schildern zu können, auch wenn ihm ein ehernes Herz und eine tausendfältige Zunge verliehen wären. Welcher Mathematiker hätte kein Verständnis dafür, daß die leuchtende Bahn RIEMANNS, dieses riesigen Meteors am mathematischen Himmel, vom Sternbilde DIRICHLETS ihren Ausgangspunkt nahm. Mag auch das von RIEMANN DIRICHLETsches Prinzip benannte scharfe Schwert zuerst von WILLIAM THOMSONS jungem Arm geschwungen sein, von dem anderen DIRICHLETschen Prinzipe, mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen, datiert die Neuzeit in der Geschichte der Mathematik. Niemals vergaß KRONECKER zu sagen, wieviel von seiner mathematischen Existenz er DIRICHLET schulde, wenn auch DIRICHLET selbst KRONECKER nur in die unteren Regionen einer der Wissenschaften eingeführt haben wollte, auf deren Höhen dieser als Meister einherschreite. Erst hier in Göttingen trat DEDEKIND in Beziehung zu DIRICHLET; wir verehren in ihm den einzigen uns übriggebliebenen Heros aus der größten Epoche in der Arithmetik. Ganz in den Ideenkreis von DIRICHLET trat auch LIPSCHITZ ein, der in seinen jüngeren Jahren zu HELMHOLTZ und später zu HERTZ seine hohe Begeisterung für DIRICHLET kundgab. Alle diese Männer von unvergleichlichen Verdiensten um die heutige Mathematik, den besten Teil ihrer mathematischen Kraft gewannen sie durch DIRICHLET, und wir heute, wenn wir uns mehr als je bemühen, die Wissenschaft in ihrer einfachen Wahrheit zu erkennen und darzustellen, stehen wir nicht in der Schule DIRICHLETS?