$$p = 31. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (3) = (3),\ (5) = (5). \\ (2) = (2, \theta)\,(2, \theta_1)\,(2, \theta_2). \end{cases}$$

$$p = 37. \quad (1) = (1),\ (2) = (2),\ (3) = (3),\ (5) = (5),\ (7) = (7).$$

$$p = 43. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (3) = (3),\ (5) = (5),\ (7) = (7). \\ (2) = (2, \theta)\,(2, \theta_1)\,(2, \theta_2). \end{cases}$$

$$p = 61. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (2) = (2),\ (5) = (5),\ (7) = (7),\ (13) = (13). \\ (3) = (3, \alpha)\,(3, \alpha + 1)\,(3, \alpha - 1). \\ (11) = (11, \theta + 1)\,(11, \theta + 2)\,(11, \theta - 3). \end{cases}$$

$$p = 67. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (2) = (2),\ (7) = (7),\ (11) = (11),\ (13) = (13). \\ (3) = (3, \alpha)\,(3, \alpha + 1)\,(3, \alpha - 1). \\ (5) = (5, \theta)\,(5, \theta + 1)\,(5, \theta - 1). \end{cases}$$

$$p = 73. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (2) = (2),\ (5) = (5),\ (11) = (11),\ (13) = (13). \\ (3) = (3, \alpha)\,(3, \alpha + 1)\,(3, \alpha - 1). \\ (7) = (7, \theta)\,(7, \theta + 3)\,(7, \theta - 3). \end{cases}$$

$$p = 79. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (2) = (2),\ (3) = (3),\ (5) = (5),\ (7) = (7). \\ (11) = (11),\ (13) = (13). \\ (17) = (17, \theta)\,(17, \theta + 4)\,(17, \theta - 4). \end{cases}$$

$$p = 97. \quad \begin{cases} (1) = (1),\ (2) = (2),\ (3) = (3),\ (5) = (5),\ (7) = (7), \\ (11) = (11),\ (13) = (13),\ (17) = (17). \\ (19) = (19, \theta)\,(19, \theta + 5)\,(19, \theta - 5). \end{cases}$$

Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums.

Von OSKAR PERRON in Tübingen.

Unter allen geschlossenen ebenen Linien gleicher Länge hat bekanntlich der Kreis die Eigenschaft, den größten Flächeninhalt zu umschließen. Daß die Steinerschen Beweise für diesen Satz lückenhaft sind, indem sie die Existenz eines Maximums voraussetzen, hat schon Dirichlet erkannt.[1]) Mit größerem Nachdruck hat Weierstraß bei dem sogenannten Dirichletschen Prinzip den gleichen Fehler bekämpft, und seiner Wirksamkeit ist es wohl in erster Linie zuzuschreiben, daß heute die Einsicht in die Mangelhaftigkeit einer derartigen Beweisführung Allgemeingut der Mathematiker ist. Da jedoch gerade bei dem obigen isoperimetrischen Problem die Lösbarkeit für unsere Anschau-

1) Nach E. Lampe, Bibliotheca Mathematica (3) 1, S. 134.

ung fast evident ist, so daß ein Beweis überflüssig scheinen möchte, so dürften Beispiele ähnlicher Art, bei denen aber ein Extremum *nicht* existiert, stets willkommen sein. Nachdem kürzlich Herr R. Sturm in einer Note, die an meine Adresse gerichtet zu sein scheint[1]), um Angabe solcher Beispiele gebeten hat, sei es mir gestattet, in Kürze einige sehr einfache (zum Teil übrigens bekannte) zusammenzustellen.

I. Unter allen *Polygonen* von gegebenem Umfang soll dasjenige gefunden werden, das die größte Fläche umschließt. Die Aufgabe hat ersichtlich keine Lösung. Aber vielleicht wendet man ein, sie sei boshafterweise falsch formuliert; es müßten hier krumme Linien als Grenzgebilde von Polygonen zur Konkurrenz zugelassen werden. So nichtig dieser Einwand auch ist, will ich doch das folgende Problem nicht unterdrücken, bei dem die Sache sich gerade umgekehrt verhält.

II. Unter allen Flächeninhalten, die so groß sind, daß sie nicht in ein Polygon vom Umfang 2π eingeschlossen werden können, soll der kleinste bestimmt werden. Diese Aufgabe hat eine Lösung. Denn eine Fläche vom Inhalt $\geqq \pi$ kann nicht eingeschlossen werden, wohl aber eine vom Inhalt $\pi - \varepsilon$, wie klein auch ε sei. Also ist π die kleinste nicht einschließbare Fläche, womit die Aufgabe gelöst ist. Läßt man dagegen neben den Polygonen auch krumme Linien zur Konkurrenz zu, so gibt es keine Lösung.

III. Weierstraß gibt folgendes Beispiel[2]): Von allen im Intervall $(-1,1)$ stetigen und stetig differentiierbaren reellen Funktionen $\varphi(x)$, für welche $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(1) = 1$ ist, soll diejenige gefunden werden, welche das Integral

$$\int_{-1}^{1} \left(x \frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

zu einem Minimum macht. Die Aufgabe hat keine Lösung; denn unter den zugelassenen Funktionen finden sich solche, für die das Integral beliebig klein wird, zum Beispiel

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig klein}),$$

aber keine, für die das Integral gleich Null wird. Die untere Grenze ist also Null; *sie wird aber nicht erreicht.*

Bestechender wie dieses rein analytische Problem ist vielleicht das folgende, welches anschaulicher und zugleich isoperimetrisch ist, so daß man die Existenz einer Lösung eigentlich für wahrscheinlich hält:

1) Seite 43 dieses Bandes.

2) Mathematische Werke, II, S. 53.

IV. Seien in einer Ebene drei Punkte O, A, B gegeben. Man soll unter allen Kurven gegebener Länge l mit den Endpunkten A und B diejenige finden, deren Trägheitsmoment (bei konstanter linearer Dichte) in bezug auf den Punkt O möglichst klein ist. Hier ist, wenn ds das Bogenelement, r den Abstand von O bedeutet,

$$\int ds = l = \text{gegeben},$$

und es soll

$$\int r^2 ds = \text{Minimum}$$

sein. Setzt man $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, so hat die Aufgabe wider Erwarten keine Lösung, wenn die gegebene Länge l größer als $a + b$ ist. Alsdann wird nämlich

$$\int r^2 ds > \int_{AO} r^2 dr + \int_{OB} r^2 dr = \frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}.$$

Das Integral ist also niemals gleich $\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$, sondern stets größer. *Es kommt aber diesem Wert beliebig nahe*, indem man die Kurve in folgender Weise wählt: Um O als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis K von beliebig kleinem Radius ϱ, der OA in A', OB in B' schneidet. Dann lasse man die Kurve zuerst gradlinig von A nach A' laufen, zuletzt gradlinig von B' nach B, und dazwischen zur Ausfüllung ihrer vorgeschriebenen Länge l irgendwie im Kreis K von A' nach B'. In der Tat ist für eine solche Kurve

$$\int r^2 ds \leqq \int_{AA'} r^2 dr + \int_{B'B} r^2 dr + \int_{A'B'} \varrho^2 ds$$

$$= \frac{a^3 - \varrho^3}{3} + \frac{b^3 - \varrho^3}{3} + \varrho^2[l - (a - \varrho) - (b - \varrho)],$$

also beliebig nahe an $\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$, wenn nur der Radius ϱ hinreichend klein gewählt wird. Dieses Beispiel ist ein spezieller Fall eines von Herrn Hadamard gegebenen.[1])

V. Schließlich seien noch die folgenden Bemerkungen angeschlossen, welche die Fehlerhaftigkeit der Steinerschen Beweisführung in helles Licht setzen. Wir wollen nämlich auf analoge Art „beweisen“, daß von allen positiven ganzen Zahlen die Zahl 1 die größte ist, und machen der Deutlichkeit halber die folgende Gegenüberstellung:

Behauptung. Von allen Kurven gegebener Länge umschließt der Kreis die größte Fläche.	*Behauptung.* Von allen positiven ganzen Zahlen ist die Zahl 1 die größte.

1) Annales de l'école normale (3) 24, p. 205.

Beweis. Hat man irgendeine vom Kreis verschiedene Kurve, so gibt es ein ganz bestimmtes Verfahren (nämlich Steiner hat ein solches angegeben), durch welches man eine Kurve mit größerem Inhalt findet.

Also hat der Kreis den größten Inhalt.

Beweis. Hat man irgendeine von 1 verschiedene ganze positive Zahl, so gibt es ein ganz bestimmtes Verfahren (nämlich ins Quadrat erheben), durch welches man eine größere ganze positive Zahl findet.

Also ist die Zahl 1 die größte.

In den Sätzen mit „also" liegt natürlich der Fehler, der links nicht geringer ist wie rechts. Rechts müßte es korrekterweise heißen: „Für die Zahl 1 liefert das angegebene Verfahren des Quadraterhebens keine Erkenntnis, ob es eine größere gibt; *möglicherweise kann man aber durch ein anderes Verfahren eine größere finden.*" In der Tat hat jedermann ein solches Verfahren sofort zur Hand. Aber analog müßte es links heißen: „Für den Kreis gibt das Steinersche Verfahren keine Erkenntnis, ob es eine Kurve mit größerem Inhalt gibt; *möglicherweise läßt sich aber durch ein anderes Verfahren eine solche Kurve finden.*" Und nun kommt der Unterschied: Es gibt tatsächlich kein solches Verfahren; aber das bedarf doch sehr eines Beweises, der bei Steiner fehlt.

Noch ein Weiteres. Wir stellen folgenden Satz auf:

A. „Im Vergleich zu jedem von Sokrates verschiedenen Menschen gibt es einen weiseren."

Mancher ist vielleicht versucht, daraus zu schließen:

B. „Sokrates ist der weiseste Mensch,"

und hält wohl beide Aussagen für äquivalent. Aber das ist falsch. Aus dem richtigen Satz

C. „Im Vergleich zu jeder von 1 verschiedenen Zahl gibt es eine größere"

folgt doch auch nicht, daß 1 die größte ist. Tatsächlich läßt sich aus C nicht das geringste über die Zahl 1 folgern; aber ebensowenig kann man aus A über Sokrates folgern, und ebensowenig aus den Steinerschen Sätzen über den Kreis. Wenn es bei C wohl niemand einfallen wird, den übereilten Schluß zu ziehen, wohl aber bei A oder auch beim Kreis, so liegt das daran, daß man in diesen Fällen heimlich oder unbewußt sich etwas Unausgesprochenes hinzudenkt oder irgendwelche Vorkenntnisse benutzt. Man mag etwa hinzudenken: „Es gibt einen Menschen, der von keinem andern an Weisheit übertroffen wird" („es gibt eine Linie, die von keiner andern in bezug auf die Größe der umschlossenen Fläche übertroffen wird"); oder auch: „Es gibt nur eine endliche Anzahl Menschen." Daraus kann dann im Verein mit A allerdings B gefolgert werden (und entsprechend beim Kreis). Im Fall C dagegen wird niemand etwas Analoges hinzudenken, weil hier die analogen Sätze augenfällig falsch sind.

Aber beim richtigen Schließen in der Mathematik kommt es eben immer darauf an, daß man sich zu den ausgesprochenen Voraussetzungen nichts Unausgesprochenes vielleicht unbewußt hinzudenkt, daß man von Vorkenntnissen absieht, Vorurteile abstreift.

Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfliesschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebietes.

Herrn A. Schoenflies zum sechzigsten Geburtstage gewidmet von

LUDWIG BIEBERBACH in Basel.

Einleitung.

1. Seit den grundlegenden Arbeiten von Jordan[1]) und Schoenflies[2]) sind der Jordansche Kurvensatz mit seinen Schoenfliesschen Ergänzungen von Erreichbarkeit und Unbewalltheit[3]) und der Satz von der Invarianz des Gebietes[4]) Gegenstand sehr vieler Arbeiten gewesen. Wegen ihrer großen Wichtigkeit für viele Gebiete der mathematischen Forschung haben diese Sätze und ihre mehrdimensionalen Verallgemeinerungen von jeher das Interesse der Mathematiker wach gehalten. Bekannt sind die großen Erfolge, die namentlich Herr Brouwer in den letzten Jahren auf diesem dornenreichen Gebiete erzielt hat. Für den Jordanschen Satz insbesondere gab erst kürzlich Herr Brouwer zwei verblüffend einfache Beweise.[5]) Die nachfolgenden Zeilen beabsichtigen für die erwähnten Sätze einen gleichfalls ganz elementaren Beweis zu erbringen.

1) Jordan, Cours d'analyse, 1. Aufl. Bd. III (1887). S. 587ff. 2. Aufl. Bd. I (1893). S. 90ff.

2) Schoenflies, Göttinger Nachrichten 1899. S. 282ff. Math. Ann. Bd. 62. S. 296ff.

3) Das Wort Unbewalltheit wurde erst von Herrn Brouwer eingeführt. Ann. 71 Seite 321.

4) Zuerst von Jürgens in seiner Hallenser Habilitationsschrift 1879 bewiesen.

5) Brouwer, Mathematische Annalen, Bd. 69 (1900). S. 169ff. Bd. 72 (1912). S. 422ff.