Werk

Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
Verlag: Teubner
Jahr: 1926
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN37721857X_0035
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X_0035

LOG Id: LOG_0035
LOG Titel: Aufgaben und Lösungen.
LOG Typ: other

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN37721857X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=37721857X

Terms and Conditions

Contact

Berichtigung zum Mitgliederverzeichnis.

Koebe, P., Dr., Prof. a. d. U. Leipzig, Fockestr. 9.

Ostrowski, A., Dr., Prdzt. a. d. U. Göttingen, Mathematisches Seminar der U

Schmidt, H. Dr., Prdzt. a. d. U. Leipzig, Prof. am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt), Akazienstr. 13a.

Harry S., geb. 21. 6 1894 Hamburg, 1919 prom. Leipzig, 1923 Dozent Cöthen, 1924 Prof. Cöthen 1926 hab. Leipzig.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

43. Differentialgeometrische Bemerkungen zur Variationsrechnung. Es sollen hier drei Lehrsätze angegeben werden, die gegenüber konformen Abbildungen des Raumes invariant sind.

I. *Es sei im Euklidschen Raum ein Variationsproblem*

$$J = \int f ds = \text{Extrem.} \qquad (f > 0)$$

gegeben, worin ds das Bogenelement und f eine Funktion des Ortes bedeutet. Die Krümmungskreise der Extremalen in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen dann immer noch durch einen zweiten Punkt $\mathfrak{y}$ hindurch.

Dies dürfte zuerst von E. Kasner bemerkt worden sein, der überdies noch kennzeichnende Eigenschaften des Systems der Extremalen angegeben hat. E. Kasner, Natural Families . . ., Transactions Amer. Math. Soc. **10** (1909), S. 201—219 und Princeton Colloquium, New York 1913. Ferner: G. Pick, Über Brachistochronenscharen . . ., Wien. Akad. Math. Nat. Sitzungsberichte **120**, IIa (1911), S. 257—268.

II. *Führt man zu unserm Variationsproblem* $J =$ Extrem. *noch die Nebenbedingung ein, daß die zulässigen Kurven auf einer Fläche gelegen sein sollen, so schneiden die zu einem Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche gehörigen Krümmungskreise die Extremalen noch einmal den Kreis, der in $\mathfrak{x}$ die Fläche normal schneidet und durch $\mathfrak{y}$ geht.*

Vgl. dazu W. Blaschke, Über konforme Geometrie IV, Hamburger Abhandlungen **4** (1926), S. 225—231. Um auch über Doppelintegrale einen zu I entsprechenden Satz fassen zu können, benutzen wir die von G. Thomsen eingeführte „Zentralkugel" einer Fläche an einer Stelle, die dort die Fläche berührt und deren Halbmesser sich aus den Hauptkrümmungen der Fläche so zusammensetzt:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Vgl. ebenda **3** (1924), S. 31—56.

III. *Es sei das Variationsproblem gegeben*

$$J^* = \iint f^2 do = \text{Extrem.},$$

worin f dieselbe Ortsfunktion wie in I *und do das gewöhnliche Oberflächenelement bedeutet. Die Zentralkugeln der Extremalflächen in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen dann immer auch durch den zugeordneten Punkt $\mathfrak{y}$ hindurch.*

Hamburg. W. Blaschke.

(Eingegangen am 1. 9. 26.)

44. Ein isoperimetrisches Problem auf der Kugel. Man soll eine auf der ganzen Oberfläche K der Einheitskugel mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion f so ermitteln, daß

$$\iint\limits_K f^4 \, d\omega = 4\pi \quad \text{und} \quad \iint\limits_K f^2 \sqrt{f^2 + 4\nabla(f,f)} \cdot d\omega = \text{Minimum}$$

wird. Dabei sind die Integrale über alle Flächenelemente $d\omega$ der Einheitskugel zu erstrecken und

$$\nabla(f,f) = \frac{Ef_v^2 - 2Ff_u f_v + Gf_u^2}{EG - F^2}, \quad d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

bedeute Beltramis ersten Differentiator zum Bogenelement $d\sigma$ von K. Man zeige: Die einzigen Lösungen der Aufgabe sind die Funktionen $f = \pm 1$.

Hamburg. W. Blaschke.

(Eingegangen am 1. 9. 26.)

45. Die Funktion

$$Q = \sum_{(k_1, \ldots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \cdots \alpha_{nk_n}$$

(Summation über alle Permutationen der Ziffern $1, \ldots, n$) ist unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \alpha_{ik} \geqq 0 & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ik} = n & (k = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} = n & (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

nur positiver Werte fähig (Dénes König, Graphen und ihre Anwendung § 2, Math. Ann. 77, S. 457). Das Minimum der Funktion ist (unter den genannten Nebenbedingungen) zu bestimmen.

Hamburg. B. L. v. d. Waerden.

(Eingegangen am 31. 10. 26.)

Lösungen.

Einfachere Lösung der Aufgabe 28. (Dieser Jahresbericht 34, 1926, S. *157*.)

„Es sei für $\infty > x \geqq 0$ $f(x) > 0$, differentiierbar und es sei für $x \to \infty$ $\frac{xf'(x)}{f(x)} \to \sigma$. Dann sagen wir, $f(x)$ habe den Ordnungsexponenten σ. Es habe nun $f(x)$ den Ordnungsexponenten σ. Konvergiert dann das Integral $\int\limits^{\infty} f(x)\,dx$, so hat $\int\limits_x^{\infty} f(x)\,dx$ den Ordnungsexponenten $\sigma + 1$. Divergiert dagegen $\int\limits^{\infty} f(x)\,dx$, so hat für $c \geqq 0$ $\int\limits_c^x f(x)\,dx$ den Ordnungsexponenten $\sigma + 1$.

A. Ostrowski."

Die beiden auf S. *90—92* des vorliegenden Bandes veröffentlichten Lösungen lassen nicht erkennen, daß man die Aufgabe auch ohne Lebesguesche Integrale im Rahmen einer Anfängervorlesung behandeln kann, nämlich als Anwendung der für die Bestimmung der „unbestimmten Formen" $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\frac{0}{0}$ klassischen Regel. Für den hier vorliegenden Grenzübergang $x \longrightarrow \infty$ lautet dieselbe [nach O. Stolz, Grundzüge der Diff.- und Integralrechnung I (1893), S. 72 unten bzw. 77 oben]:

Wenn $F(x) \longrightarrow \infty$ bzw. $\Phi(x) \longrightarrow 0$, $F(x) \longrightarrow 0$ und in beiden Fällen überdies noch

$$F'(x) \text{ zuletzt } > 0 \text{ sowie } \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} \longrightarrow L, \text{ so ist auch } \frac{\Phi(x)}{F(x)} \longrightarrow L.$$

Hiernach kann man folgendermaßen schließen:

1. Falls $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt \longrightarrow \infty$, so ist (man beachte $F'(x) = f(x) > 0$)

obige Regel anwendbar bei $\Phi(x) = xF'(x) = xf(x)$ und liefert

$$\lim \frac{xF'(x)}{F(x)} = \lim \frac{xf'(x) + f(x)}{f(x)} = \lim \frac{xf'(x)}{f(x)} + 1 = \sigma + 1. \tag{2}$$

2. Falls dagegen $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ konvergiert, so hat man zunächst

$$F(x) = -\int\limits_x^\infty f(t)\,dt \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt bei vorstehendem $\Phi(x)$, weil

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{F(x+h) - F(x)} = \frac{\Phi'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{\xi f'(\xi) + f(\xi)}{f(\xi)}$$

beschränkt ist für alle $x + h > x >$ passendes c, daß $\Phi(x)$ gegen einen Grenzwert strebt, welcher im vorliegenden Falle nur $= 0$ sein kann. Daher ist (man beachte abermals $F'(x) = f(x) > 0$) die obige Regel auch hier anwendbar, und es gilt wieder die Beziehung (2).

Nach Vorstehendem ist es nicht zu verwundern, wenn die zitierten Lösungen stark an die Beweise der obigen Regel anklingen.

Endlich sei bei dieser Gelegenheit noch darauf hingewiesen, daß es im Artikel II 1 der französischen Enzyklopädie [vgl. S. 54, zweitletzter Absatz] im Jahre 1909 seiner Veröffentlichung nicht mehr ganz zeitgemäß war, beim Abdruck der erstgenannten Stolzschen Regel von einer Ableitung $\psi'(x)$ in einem Intervall immer noch vorauszusetzen, daß nicht nur $\psi'(x) \neq 0$ sein, sondern sogar $\psi'(x)$ sein Vorzeichen bewahren solle. Der Darbouxsche Satz, wonach eine Ableitung mit A und B auch jeden Wert dazwischen annimmt, war nämlich damals nicht weniger als 35 Jahre alt.

L. Neder.

(Eingegangen am 11. 10. 26.)

Lösung der Aufgabe 37. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *48.*)

Es sei $g(z)$ eine ganze Funktion, so beschaffen, daß die Fläche, die in rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ durch die Gleichung

$$\zeta = |g(\xi + i\eta)|$$

dargestellt ist, von unten gesehen konvex ist. Dann ist entweder

$$g(z) = (az + b)^n$$

oder

$$g(z) = e^{az+b};$$

a, b sind beliebige komplexe Konstanten, n ist eine positive ganze Zahl.

G. Pólya.

1. Es sei $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, $\alpha \neq \beta$. Wegen der Konvexität der Fläche $\zeta = |g(\xi + i\eta)|$ ist $g(z) = 0$ auf der ganzen Strecke von α bis β, also $g(z) \equiv 0$.

2. Es sei $z = \alpha$ die einzige Nullstelle von $g(z)$. Ist dann $|g(z)| > \delta > 0$ für $|z - \alpha| = 1$, so ist wegen der Konvexität erst recht $|g(z)| > \delta$ für $|z - \alpha| > 1$. $g(z)$ ist also ein Polynom mit genau einer (ein- oder mehrfachen) Nullstelle, d. h. $g(z) = (az + b)^n$.

3. Ist $g(z) \neq 0$, so ist $\log g(z)$ eine ganze Funktion. Die Punktmenge, in der $\Re \log g(z) = c$ ist, ist der Rand des konvexen Bereiches, in dem $|g(z)| \leq e^c$ ist. Wenn $g(z)$ nicht konstant ist, hat dieser innere Punkte und erfüllt nicht die ganze Ebene. Der Rand ist also *ein* Kurvenzug ohne mehrfache Punkte. Längs dieser Kurve ist $\Im \log g(z)$ monoton. Also ist $\log g(z)$ eine ganze Funktion, die keinen Wert zweimal annimmt, d. h. linear.

Greifswald, 16. August 1926. H. Kneser.

(Eingegangen am 17. 8. 26.)

Lösung der Aufgabe 38. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *49.*)

Der absolute Wert der Summe

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \sin \mu x$$

ist für jedes x und n beschränkt, wenn die Zahlen $\mu^2 |a_\mu - a_{\mu+1}|$ beschränkt sind.

(Zum Beispiel, wie Kneser zum erstenmal gezeigt hat, ist $\left|\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\sin \mu x}{\mu}\right|$ für jedes x und n beschränkt.)

Sofia. Nikola Obreschkoff.

1. Lösung. Wie das Beispiel $a_\mu = 1$ zeigt, ist der Satz falsch. Er gilt nur unter der weiteren Voraussetzung $a_\mu \to 0$.

Es sei

$$\mu(\mu + 1) |a_\mu - a_{\mu+1}| < M;$$

dann ist

$$a_\mu < \frac{M}{\mu}.$$

Setzt man

$$S_n = \sum_{\mu=1}^{n} \sin \mu x = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}},$$

so wird
$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \sin \mu x\right| = \left|\sum_{\mu=1}^{n-1} (a_\mu - a_{\mu+1}) S_\mu + a_n S_n\right|$$
$$< M\left(\sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{S_\mu}{\mu(\mu+1)} + 1\right).$$

Es genügt also, die Beschränktheit der innen stehenden Summe

$$\sum = \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{S_\mu}{\mu(\mu+1)} = \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\left|\sin \frac{\mu}{2} x \cdot \sin \frac{\mu+1}{2} x\right|}{\mu(\mu+1)}$$

nachzuweisen. Offenbar darf man sich dabei auf $0 < x \leqq \pi$ beschränken.

$$\sum \leqq \frac{\pi}{x}\left\{\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \frac{\mu x(\mu+1)x}{4\mu(\mu+1)} + \sum_{\mu=\left[\frac{1}{x}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu+1)}\right\}$$
$$= \frac{\pi x}{4}\left[\frac{1}{x}\right] + \frac{\pi}{x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)} < \frac{5\pi}{4}.$$

Greifswald, 16. Aug. 1926. H. Kneser.

(Eingegangen am 17. 8. 26.)

2. Lösung.

Vorbemerkung. Der Satz ist in der obigen Formulierung unrichtig. Ein Gegenbeispiel ist schon $a_\mu = 1$; die Summen

$$s_n(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \sin \mu x$$

sind nämlich in x und n *nicht* beschränkt, da ja bei beliebigem $\alpha \gtrless 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} s_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \int_0^1 \sin \alpha t\, dt = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}$$

gilt. (Man wähle $\alpha \neq 2 m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.) Er wird dagegen richtig, wenn man noch in die Voraussetzung $a_n \to 0$ aufnimmt.[1])

---

1) Hieraus folgt, daß die Behauptung auch für $a_n \to a \neq 0$ unrichtig ist. Es sei übrigens bemerkt, daß aus $\mu^2 |a_\mu - a_{\mu+1}| < A$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ die Konvergenz von a_n folgt. In der Tat gilt ja für $n = 1, 2, \ldots;$ $k = 1, 2, \ldots$

$$|a_n - a_{n+k}| < A\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)^2}\right) < A \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Beweis. Es gilt, $s_0(x) = 0$ gesetzt,

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \sin \mu x = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu (s_\mu(x) - s_{\mu-1}(x)) = \sum_{\mu=1}^{n-1} (a_\mu - a_{\mu+1}) s_\mu(x) + a_n s_n(x),$$

so daß

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \sin \mu x\right| \leqq A \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{|s_\mu(x)|}{\mu^2} + n\,|a_n|,$$

wo $A > 0$ von x und n unabhängig ist.

Man hat nun[1])

$$s_n(x) = \frac{\sin \frac{n}{2} x \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin n x,$$

so daß

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{|s_\mu(x)|}{\mu^2} \leqq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \mu \frac{x}{2}}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2}$$

$$\leqq \frac{x(2\pi - x)}{8 \sin \frac{x}{2}} + \frac{\pi^2}{12},$$ d. h. beschränkt in x und n.

Wegen $a_n \to 0$ gilt anderseits

$$a_n = \sum_{\mu=n}^{\infty} (a_\mu - a_{\mu+1}),$$

d. h. $|a_n| \leqq A \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{1}{\mu^2}$, woraus auch die Beschränktheit von $n\,|a_n|$ folgt.

Damit ist die Behauptung bewiesen. G. Szegö.

Eine Lösung legte auch Herr Emersleben in Kiel vor.

(Eingegangen am 15. 9. 26.)

Lösung der Aufgabe 39. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *49*.)

Hat $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung n-ten Grades nur reelle und verschiedene Wurzeln, und ist $d > 0$ die kleinste Differenz zwischen ihren Wurzeln, dann wird die Gleichung $f'(x) = 0$ wenigstens zwei Nachbarwurzeln haben, deren Differenz größer als $d\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ ist.

Sofia. Nikola Obreschkoff.

Sei

$$f(x) = \sum_{0}^{n} {}^{\nu}\, a_\nu x^{n-\nu} = \prod_{1}^{n} {}^{\nu}\, (x - x_\nu) \quad (a_0 = 1;\ n > 2);$$

$$f'(x) = \sum_{0}^{n-1} {}^{\nu}\, (n-\nu) a_\nu x^{n-\nu-1} = n \prod_{1}^{n-1} {}^{\nu}\, (x - \xi_\nu).$$

1) Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II (Berlin 1925), S. 77, Aufgabe 16.

Die nach Annahme reellen und verschiedenen x_ν seien der Größe nach geordnet: $x_{\nu-1} < x_\nu$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$, ebenso die nach dem Rolleschen Satz gleichfalls reellen und verschiedenen $\xi_\nu : \xi_{\nu-1} < \xi_\nu$ $(\nu = 2 \ldots n-1)$. Man hat zunächst

$$s = \sum_{\nu>\lambda} (x_\nu - x_\lambda)^2 = (n-1)\, a_1{}^2 - 2n a_1, \qquad \text{entsprechend}$$

$$\sigma = \sum_{\nu>\lambda} (\xi_\nu - \xi_\lambda)^2 = (n-2)\frac{(n-1)^2}{n^2} a_1{}^2 - \frac{2(n-1)(n-2)}{n} a_2, \qquad \text{also}$$

$$\text{I.} \qquad \sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} s.$$

Nach Annahme sind nun alle Differenzen

$$1. \qquad x_\nu - x_{\nu-1} \geqq d; \qquad \text{sonach ist}$$

$$\text{II.} \qquad s \geqq d^2 \sum_1^{n-1}{}^k S_k, \qquad \text{wo } S_k = \sum_1^k{}^{\varkappa} \varkappa^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{3!}.$$

Sollte nun gelten

$$2. \qquad \xi_\nu - \xi_{\nu-1} \leqq d\sqrt{\frac{n+1}{n}} \qquad (\nu = 2, \ldots, n-1), \text{ so wäre}$$

$$\text{III.} \qquad \sigma \leqq d^2 \frac{n+1}{n} \sum_1^{n-2}{}^k S_k. \qquad \text{Aus I, II, III folgte dann}$$

$$\text{IV.} \qquad \sum_1^{n-1}{}^k S_k \leqq \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)} \sum_1^{n-2}{}^k S_k,$$

wo das Gleichheitszeichen nur steht, wenn es in 1., 2. für *alle* ν steht. Anderseits ist aber $\sum_1^m{}^k S_k = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{12}$; daraus folgt, daß in IV. *nur* das Gleichheitszeichen stehen kann; wir werden also zu einem Widerspruch geführt, falls in 1. nicht stets das untere Zeichen gilt; dann ist also 2. zu verwerfen, d. h. mindestens eine Differenz $\xi_\nu - \xi_{\nu-1}$ ist $> d\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, w. z. b. w. Ist dagegen $x_\nu - x_{\nu-1} = d$ für alle ν, so werden wir dann und nur dann auf keinen Widerspruch geführt, wenn in 2. lauter Gleichheitszeichen stehen; dann folgt also nur: mindestens eine Differenz $\xi_\nu - \xi_{\nu-1}$ ist $> d\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, es seien denn alle Differenzen gleich $d\sqrt{\frac{n+1}{n}}$. Dieser letzte Fall ist tatsächlich möglich, wie z. B. die Gl. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$ beweist; die Wurzeln von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ haben bzw. die jeweils feste Differenz 1; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

München. HERMANN SCHMIDT.

(Eingegangen am 1. 9. 26.)

Lösung der Aufgabe 40. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *49.*)

Eine Kennzeichnung der Kugel. Die Kugel ist die einzige Eifläche, die mit allen umschriebenen rechtwinkligen Parallelflächen die Mittelpunkte der Seitenflächen gemein hat.

Hamburg, 29. Dez. 1925. W. BLASCHKE.

Es werde zunächst der entsprechende Satz über ebene Eibereiche bewiesen. Durch jeden Randpunkt geht eine Doppelnormale; also hat der Bereich konstante Breite B. Seine Stützfunktion $h(\varphi)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$h(\varphi) + h(\varphi + \pi) = B.$$

Die Forderung, daß die vier Punkte mit den Normalenrichtungen $\varphi + \frac{\nu\pi}{2}$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ (und den Koordinaten

$$h\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right)\cos\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right) - h'\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right),$$
$$h\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right) + h'\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right)\cos\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{2}\right))$$

die Ecken eines Parallelogramms sind, liefert die Gleichungen

$$\left(k(\varphi) + k'\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)\cos\varphi + \left(k\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - k'(\varphi)\right)\sin\varphi = 0,$$
$$\left(k\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - k'(\varphi)\right)\cos\varphi - \left(k(\varphi) + k'\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\varphi = 0,$$

worin
$$k(\varphi) = -k(\varphi + \pi) = h(\varphi) - h(\varphi + \pi)$$

gesetzt ist. Also ist

$$k(\varphi) = -k'\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = k''(\varphi + \pi) = -k''(\varphi),$$
$$k(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$
$$h(\varphi) = \tfrac{1}{2}(B + a\cos\varphi + b\sin\varphi);$$

der Bereich ist ein Kreis.

Ein Eikörper mit der in der Aufgabe verlangten Eigenschaft hat also als umschriebene Zylinder lauter Kreiszylinder; er ist eine Kugel.

Greifswald, 16. Aug. 1926. H. KNESER.

(Eine Lösung legte auch Herr W. Süß in Kagoshima [Japan] vor.)

(Eingegangen am 17. 8. 26.)

Lösung der Aufgabe 41. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *49.*)

Sei C eine einfache geschlossene Kurve in der xy-Ebene, Γ eine ebensolche Kurve in der $\xi\eta$-Ebene. Es seien ferner $u(x, y)$, $v(x, y)$ zwei harmonische Funktionen, die in und auf C stetig, innerhalb C regulär sind. Es sei ferner bekannt, daß durch die Formeln

$$\xi = u(x, y), \quad \eta = v(x, y)$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Linie C auf die Linie Γ dargestellt wird.

Wenn überdies $u(x, y)$ und $v(x, y)$ konjugiert sind, d. h. wenn

$$u(x, y) + iv(x, y)$$

eine analytische Funktion des komplexen Argumentes $z = x + iy$ ist, so besagt ein bekannter Satz aus der Theorie der konformen Abbildung, daß die Formeln

$$\xi = u(x, y), \quad \eta = v(x, y)$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Innern von C auf das Innere von Γ darstellen. Man beweise nun den folgenden Satz:

Wenn die Bildkurve Γ *konvex* ist, so bleibt der Abbildungssatz auch dann richtig, wenn $u(x, y)$, $v(x, y)$ *nicht konjugiert* sind. T. Radó.

Da das Bild Γ von C nicht ganz auf einer Geraden liegt, ist keine Linearkombination $\lambda u + \mu v$ (mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$) konstant. Daher nimmt die Funktion $\lambda u + \mu v$ ihre Extrema nur auf C an; d. h. das Bild eines Punktes innerhalb von C liegt innerhalb von Γ. Denn Γ ist konvex. Die Singularitäten einer Niveaulinie $\lambda u + \mu v = c$ innerhalb von C können nur mehrfache Punkte mit verschiedenen Tangenten sein; also läßt sich die Niveaulinie zusammensetzen aus einfach geschlossenen Kurven und einfachen Bögen, die auf C endigen. Dies kann nur in den höchstens zwei Punkten vorkommen, die die Bilder der Schnittpunkte von Γ mit der Geraden $\lambda\xi + \mu\eta = c$ sind. Gäbe es eine solche geschlossene Kurve oder zwei solche einfache Bögen, so hätte man ein Gebiet innerhalb von C, auf dessen Rand $\lambda u + \mu v$ konstant ist; $\lambda u + \mu v$ wäre überhaupt konstant, was nicht der Fall ist. Also sind die Niveaulinien, soweit sie überhaupt ins Innere von C eintreten, einfache Bögen zwischen zwei verschiedenen Randpunkten.

1. Beweis mit dem Monodromiesatz. Bei keiner Kombination $\lambda u + \mu v$ verschwinden also in einem Punkt innerhalb von C die Ableitungen nach x und y zugleich; d. h. innerhalb von C ist $\partial(u, v)/\partial(x, y) \neq 0$. Die Abbildung ist im Kleinen und, da das Innere von Γ einfach zusammenhängt, überhaupt eindeutig umkehrbar.

2. Beweis ohne den Monodromiesatz. Zwei verschiedene Punkte P und Q innerhalb von C mögen denselben Bildpuukt O haben; einfachheitshalber sei dieser der Nullpunkt $\xi = \eta = 0$. Jede Gerade $\lambda\xi + \mu\eta = 0$ trifft Γ in zwei Punkten R' und S'. Die Niveaulinie $\lambda u + \mu v = 0$ ist ein einfacher Bogen zwischen den Bildern R und S von R' und S'. Auf ihr liegen P und Q. Ist die Bezeichnung so gewählt, daß $SPQR$ die Reihenfolge der vier Punkte ist, so heiße S ein Vorpunkt, R ein Nachpunkt. Jeder Punkt von C ist entweder Vor- oder Nachpunkt. Da sich die Niveaulinien stetig mit λ und μ ändern, gehört zu jedem Vorpunkt ein ihn im Innern enthaltender Bogen von Vorpunkten. Gleiches gilt von den Nachpunkten. C wäre also in zwei fremde, nicht leere, relativ offene Teile zerlegt. Das geht nicht an.

Durch eine leichte Änderung des nach 1. zu Ende geführten Beweises enthält man den Abbildungssatz auch, wenn statt der Konvexität von Γ vorausgesetzt wird, daß Punkte innerhalb von C auf Punkte innerhalb von Γ abgebildet werden.

Greifswald, 16. Aug. 1926. H. Kneser.

(Eingegangen am 17. 8. 26.)