# Ueber Enveloppen geodätischer Linien.

Von

A. v. Braunmühl in München.

(Mit 1 lithogr. Tafel.)

---

## § 1.

### Einleitung.

Im Folgenden soll ein Beitrag zur Geometrie auf den Rotationsflächen zweiten Grades durch Betrachtung jener Enveloppen gegeben werden, welche von allen durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien erzeugt werden. Die erste Bemerkung über diese Curven findet sich in Jacobi's Dynamik pag. 46, woselbst der Autor angiebt, dass im Schnittpunkte zweier unendlich benachbarter geodätischer Linien die zweite Variation verschwindet, in Folge dessen die Construction einer Enveloppe mit der Aufsuchung des geometrischen Ortes der Verschwindungspunkte der zweiten Variation übereinstimmt. Ausserdem stellt er den Satz auf, dass auf Flächen, welche in allen ihren Punkten negatives Krümmungsmass besitzen, überhaupt keine Enveloppen zustande kommen. Der Beweis dieses Satzes, der übrigens nur von einem gewissen Gesichtspunkte aufgefasst Gültigkeit hat, wurde von Hrn. Christoffel in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1868 erbracht. Vorliegender Aufsatz, der der Hauptsache nach in meiner vor kurzem erschienenen Doctordissertation enthalten, verdankt, wie diese, seine Entstehung der Anregung und gütigen Unterstützung meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Dr. A. Brill, dem ich hierfür meinen innigsten Dank ausspreche.

An der oben erwähnten Stelle giebt Jacobi nur im Allgemeinen durch eine beigegebene Figur die Gestalt einer Enveloppe auf dem Ellipsoide an. Ich werde nun einmal näher ausführen, in welcher Weise eine solche Einhüllende zustande kommt, und werde dann die gestaltlichen Veränderungen betrachten, welche die Einhüllenden erleiden, wenn der Ausgangspunkt der sie erzeugenden geodätischen Linien einen Meridian durchläuft. Hierauf wende ich mich zur Betrachtung der Veränderungen, die durch den Uebergang des verlängerten

Ellipsoides durch die Kugel in das Sphäroid und durch die Deformation des zweischaligen Hyperboloides in den Kegel und das einschalige Hyperboloid hervorgerufen werden. Hiebei soll gezeigt werden, dass es doch auch auf dem einschaligen Hyperboloid Einhüllende giebt, trotzdem diese Fläche rein negatives Krümmungsmass besitzt, wenn man nämlich die geodätischen Linien das Unendliche durchlaufen und wieder auf der Fläche erscheinen lässt, wie es ihre analytische Betrachtung verlangt. Zum Schlusse weise ich nach, dass auf dem Paraboloide die Enveloppen sich auf den unendlich entfernten Kreis reduciren, so dass im Endlichen keine Einhüllende existirt, obgleich die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung positiv gekrümmt ist. Hiermit ist dann auch ein Beispiel für die Frage geliefert, welche Jacobi l. c. noch offen lässt, indem er sagt: es soll durch den bereits erwähnten Satz über negativ gekrümmte Flächen nicht ausgeschlossen sein, dass es nicht auch concav-concave Flächen gäbe, auf welchen keine Einhüllenden existiren.

## § 2.

## Enveloppen auf Rotationsflächen überhaupt.

Bezieht man eine Rotationsfläche auf ein rechtwinkliges dreiaxiges Coordinatensystem, indem man $y = f(r)$ die Gleichung des Meridians bedeuten lässt, wo $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ und $y$ die Rotationsaxe ist, so lassen sich die geodätischen Linien darstellen durch:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{r^2 - \nu^2}}. \tag{1}$$

Hiebei bedeutet $\varphi$ den Drehungswinkel der Ebene des Meridians, $r_0$ den Radius des Parallelkreises, auf welchem die geodätische Linie beginnt und $\nu$, wie man sich leicht überzeugt, den Halbmesser eines andern Parallelkreises, den die Linie in ihrem Laufe tangirt. Sind auf einer Fläche zwei solche Kreise $\nu$ vorhanden, so oscillirt die Linie periodisch auf dem zwischen diesen Parallelkreisen befindlichen Flächentheile, indem sie jenen Theil nicht betritt, für welchen $r < \nu$ ist. In diesem Falle giebt es auch immer zwei Kreise $r = r_0$, die ich künftig mit $r_0$ und $r_0'$ bezeichne. Geht dann eine geodätische Linie von einem Punkte des Kreises $r_0$ aus, berührt ihren einen Grenzkreis $r = \nu$, durchschneidet dann abermals $r_0$ und trifft den andern Kreis $r_0'$, so nenne ich das so beschriebene Stück der geodätischen Linie ihre *halbe Periode*.*) Ist nur ein Grenzkreis $\nu$ vorhanden, wie beim Paraboloid, so laufen die Linien auf einer Seite ins Unendliche. Für

*) In Figur 2 ist also $AB$ die halbe Periode.

jede kürzeste Linie hat $\nu$ einen andern Werth; hält man daher $r_0$ fest und lässt $\nu$ variiren, so ergeben sich alle durch einen auf $r_0$ befindlichen Punkt $A$ gehende Linien; mithin kann man die Einhüllende derselben erhalten, wenn man Gleichung (1) nach $\nu$ differentiirt, das erhaltene Integral:

$$J = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{(r^2-\nu^2)^3}} \tag{2}$$

mit Null vergleicht und die Gleichungen (1) und $J = 0$ nebeneinander bestehen lässt. Giebt es nun für jeden Werth von $\nu$ einen Werth von $r$, welcher $J = 0$ befriedigt, so liefert dieser als obere Grenze des Integrales (1) genommen den jedesmal zugehörigen Werth von $\varphi$. Es kommt also darauf an, ob die Gleichung $J = 0$ reelle Lösungen besitzt oder nicht. Im ersten Falle existiren Enveloppen, im zweiten nicht. Im folgenden Paragraphen werde ich nun nachweisen, dass für die Rotationsflächen zweiten Grades in jedem Falle die Gleichung $J = 0$ reelle Lösungen besitzt.

## § 3.

## Rotationsflächen zweiten Grades.

Für Rotationsflächen zweiten Grades ist $y$ eine Function von $r^2$, da für zwei *entgegengesetzt gleiche* Werthe von $r$ ein und derselbe Werth von $y$ folgen muss. Dasselbe gilt natürlich auch für $\sqrt{1+f'^2}$, so dass man $r^2$ als die Variable betrachten kann. Nun wird $\frac{\partial f}{\partial r} = f'$ für jenen einen Punkt der Meridiancurve unendlich, dessen Tangente parallel zur Rotationsaxe ist; $\sqrt{1+f'^2} = \frac{1+f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}$ besitzt somit zwei Verzweigungspunkte. Die beiden Integrale (1) und (2), welche ausserdem noch den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt $r^2 = \nu^2$ haben, sind mithin gleichverzweigte elliptische Integrale, und der Unendlichkeitspunkt kann als vierter Verzweigungspunkt aufgefasst werden.

Betrachtet man jetzt das Integral (2), so ergiebt sich sofort, dass es im Punkte $r^2 = \nu^2$ algebraisch unendlich wird und ein Integral zweiter Gattung ist, während (1) in diesem Punkte endlich bleibt. Da man ferner (2) in der Form schreiben kann:

$$J = -\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}} + \sqrt{\frac{1+f_0'^2}{r_0^2-\nu^2}} + \int_{r_0}^{r} \frac{f'f''\,dr}{\sqrt{r^2-\nu^2\cdot 1+f'^2}},$$

so erkennt man weiter, dass es in diesem Punkte $r^2 = \nu^2$ von $+\infty$ auf $-\infty$ überspringt, wenn $r^2$ von $r_0{}^2$ bis $\nu^2$ abnimmt und dann wieder von $\nu^2$ ab wächst. Denn das Unendlichwerden von $J$ im Punkte

$r^2 = \nu^2$ hängt augenscheinlich nur von der Function $\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}}$ ab, in welcher $r^2 = \nu^2$ ein einfacher Verzweigungspunkt ist, bei dessen Umgehung die Function ihr Zeichen wechselt. In diesem Zeichenwechsel des Integrales $J$ im Punkte $r^2 = \nu^2$ ist allein der Grund dafür zu suchen, dass $J$ für reelle Werthe von $r^2$ zu Null werden kann, d. h. Enveloppen vorhanden sind.

Die Werthe, welche $r$ in den Integralen (1) und (2) durchläuft, liegen für die beiden Ellipsoide und die Kugel zwischen dem Radius $a$ des Aequators und dem Werthe Null, während $r$ bei den Hyperboloiden einmal von Unendlich bis Null, das anderemal von Unendlich bis zum Radius $a'$ des Kehlkreises sich bewegt. Man kann also bei allen Flächen ausser dem einschaligen Hyperboloide $\nu$ von $a$ bis Null oder von Unendlich bis Null abnehmen lassen und erhält immer solche geodätische Linien, welche zwischen den beiden, dem jedesmaligen Werthe von $\nu$ entsprechenden Parallelkreisen um die Fläche oscilliren, wobei man sich natürlich das zweischalige Hyperboloid durch das Unendliche geschlossen denken muss. Nur auf dem einschaligen Hyperboloide giebt es verschiedene Gattungen von Linien. Setzt man nämlich $\nu > a'$ ($a' =$ dem Radius des Kehlkreises), so erhält man die eben besprochene Gattung, setzt man aber $\nu < a'$, so ergeben sich geodätische Linien, die die ganze Fläche durchlaufen, ohne an Grenzkreisen umzukehren, da solche ja nicht mehr vorhanden sind, und deren ganze Züge sich periodisch wiederholen. Zwischen beiden Gattungen liegt eine specielle Linie, die man für $\nu = a'$ erhält, und die sich dem Kehlkreise in unzähligen Windungen asymptotisch nähert; dies erkennt man aus Gleichung (1). Denn ist $\nu^2 = a'^2$, so fallen die beiden Verzweigungspunkte $r^2 = \nu^2$ und $r^2 = a'^2$ in einen einzigen zusammen, und $\varphi$ wird für $r^2 = a'^2$ logarithmisch unendlich.

Lässt man jetzt $J$ im Punkte $r_0$ mit dem Werthe Null beginnen, so wird es in $r^2 = \nu^2$ positiv unendlich, springt auf $-\infty$ über und langt, nachdem $r^2$ bei den Ellipsoiden den Punkt $a^2$, bei den Hyperboloiden den Unendlichkeitspunkt durchschritten, wieder im Punkte $r_0$ (eigentlich $r_0'$) mit irgend einem Werthe $J_0$ an, der nichts anderes als *der reelle Periodicitätsmodul des Integrales* ist. Hat dieser nun einen positiven Werth, so muss $J$, bevor es wieder nach $r_0$ gelangt ist, durch Null hindurch gegangen sein, da es in $r^2 = \nu^2$ negativ unendlich war; ist hingegen $J_0$ negativ, so muss $J$ nach der abermaligen Ueberschreitung von $r_0$ verschwinden, da es in $r^2 = \nu^2$ wieder positiv unendlich wird. In jedem der beiden Fälle sind also reelle Nullpunkte vorhanden, es existiren Enveloppen. Ausserdem ergiebt sich der Satz: *Besitzt der Periodicitätsmodul das positive Vorzeichen, so schneiden sich je zwei benachbarte geodätische Linien vor Vollendung ihrer halben*

*Perioden, besitzt er hingegen das negative, so tritt der Schnitt erst nach Vollendung derselben ein.* Der Zwischenfall $J = 0$ erledigt sich von selbst. Hat nämlich das Integral $J$ keine reelle Periode, so schneiden sich die benachbarten geodätischen Linien sämmtlich in Punkten des Parallelkreises $r = r_0'$.

Die im Vorstehenden gewonnenen allgemeinen Gesichtspunkte wenden wir nun auf die speciellen Flächen zweiten Grades an.

## § 4.

## Die beiden Ellipsoide und die Kugel.

Ich beginne mit den Gestalten der Enveloppen auf den beiden Ellipsoiden. Sei:

$$\frac{y^2}{(ca)^2} + \frac{r^2}{a^2} = 1$$

die Gleichung derselben, so erhält man das verlängerte Ellipsoid für $c^2 > 1$, die Kugel für $c^2 = 1$ und das Sphäroid für $c^2 < 1$. Der reelle Periodicitätsmodul $J_0$ aber ist:

$$J_0 = \frac{c^2 - 1}{a^2 - \nu^2} \cdot \int_{\nu}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \cdot d(r^2)}{\sqrt{r^2 - \nu^2 \cdot (c^2 - 1) r^2 + a^2}}, \tag{3}$$

woraus man sieht, dass $J_0$, im Falle $c^2 > 1$, für jeden Werth von $\nu$ positiv ist, dagegen verschwindet, wenn $c^2 = 1$, und für $c^2 < 1$ einen negativen Werth annimmt. *Also schneiden sich auf dem verlängerten, beziehungsweise abgeplatteten Ellipsoide je zwei unendlich benachbarte geodätische Linien vor, beziehungsweise nach Vollendung ihrer halben Perioden, während sie sich auf der Kugel mit Vollendung derselben treffen.*

Lässt man die geodätischen Linien von einem Punkte $A$ des Aequators $r = a$ ausgehen, so giebt es augenscheinlich zwei, die dem Aequator unendlich benachbart sind, und diese schneiden denselben wegen der herrschenden Symmetrie in zwei zu beiden Seiten ihres Ausgangspunktes gelegenen Punkten $C$ und $D$, welche somit als Anfangspunkte der Enveloppe zu betrachten sind (man vergl. Figur 1 auf der beigegebenen Tafel). Die nachfolgenden beiden Linien schneiden die vorausgehenden einzeln in je zwei Punkten und zwar bevor sie ihre halbe Periode vollenden, d. h. hier, den Aequator abermals erreichen. Man sieht also, dass jede geodätische Linie die unmittelbar vorhergehende in zwei Punkten trifft, die natürlich auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, und da es immer zwei symmetrische Linien durch den Ausgangspunkt giebt, so entstehen im Ganzen vier Zweige, welche die Einhüllende bilden. Diese setzen sich, wie die Entstehung zeigt, in zwei Spitzen am Aequator an und enden in zwei Spitzen, die auf jenem Meridiane liegen, der durch $A$ geht, da ja dieser ebenfalls geodätische Linie ist, und die übrigen Linien sich ihm zu beiden Seiten des Aequators von je zwei Richtungen her immer näher anschliessen, indem ihre Culminationspunkte, d. h. ihre Berührungspunkte mit den zugehörigen Kreisen $r^2 = v^2$, den beiden Polen sich nähern.

Lässt man jetzt Punkt $A$ auf einem Meridian weiter rücken bis auf einen Parallelkreis $r = r_0$ (vgl. Fig. 2), so treten an die Stelle des Aequators einerseits die zwei auf beiden Seiten des letzteren gelegenen Parallelkreise $r = r_0$ und $r = r_0'$, andererseits jene geodätische Linie, welche durch $A$ geht und den Kreis $r_0$ in $A$ berührt. Diese hat mit $r_0'$ zwei Berührungspunkte und in ihnen befinden sich jetzt die beiden Spitzen, die früher auf dem Aequator gelegen, wie sich aus Gleichung (2) unschwer ergiebt, wenn man daselbst $v = r_0$ setzt. Ausserdem sind natürlich wieder zwei Spitzen auf dem Meridiane vorhanden, die jedoch diesmal jenem Pole der Fläche näher liegen, bei dem sich der Parallelkreis $r_0'$ befindet. Lässt man nunmehr $A$ dem einen Pole der Fläche näher rücken, so werden $r_0$ und $r_0'$ immer kleiner, und die Einhüllende zieht sich immer mehr in der Nähe des andern Poles zusammen, bis sie in diesen übergeht, sobald $A$ den ersten Pol erreicht hat, und die geodätischen Linien sämmtlich Meridiane geworden sind.

Nähert sich nun das verlängerte Ellipsoid der Kugel, indem die Grösse $c^2$ gegen die Eins abnimmt, so wird $J_0$, wie man aus Gleichung (3) sieht, immer kleiner. Das heisst aber nach der in § 3. angestellten Betrachtung nichts anderes, als sämmtliche Punkte der Enveloppe, die dem Ausgangspunkte $A$ auf dem Parallelkreise $r_0$ entspricht, rücken $r_0'$ immer näher. Zu gleicher Zeit bewegen sich aber auch die auf $r_0'$ befindlichen Spitzen gegeneinander,*) so dass die ganze Enveloppe

*) Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Um die Spitzen zu finden, hat man die Berührungspunkte der für $v = r_0$ resultirenden geodätischen Linie mit dem zweiten Kreise $r_0'$ zu suchen, d. h.

$$\varphi_0 = 2r_0 \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2 - v^2}} = 2r_0 \int_{r_0}^{a} \frac{dr \cdot (a^2 + (c^2-1)r^2)}{r\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}$$

zu bilden. Dieses Integral zerlegt sich in die beiden:

$$\varphi_0 = 2r_0 a^2 \int_{r_0}^{a} \frac{dr}{r\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}$$

$$+ 2r_0(c^2-1) \int_{r_0}^{a} \frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(r^2-r_0^2)\cdot(a^2+(c^2-1)r^2)}}.$$

Nähert sich nun $c^2$ der Einheit, so rückt das erste dieser beiden Integrale dem immer kleiner wird und, sobald die Kugel erreicht ist, in einen Punkt übergeht. Das gilt natürlich für jeden Werth von $r_0$, d. h. für alle auf einem Meridian gelegene Punkte $A$ als Ausgangspunkte kürzester Linien (man vergl. Fig. 1 und Fig. 3).

Fährt man mit der Deformation fort, indem man die Kugel in ein abgeplattetes Ellipsoid übergehen lässt, so wird $c^2 < 1$, und alsbald treten wieder Einhüllende auf, die immer grösser werden, je mehr $c^2$ abnimmt, und die nämliche Gestalt haben, wie die des verlängerten Ellipsoides (vergl. Fig. 1 u. 3). Sie kommen jedoch, wie man aus der Figur erkennt, auf eine andere Weise zustande, indem jetzt der Schnitt zweier Nachbarlinien erst nach Vollendung der halben Perioden eintritt.

## § 5.

## Die beiden Hyperboloide und der Kegel.

Es stelle $\frac{y^2}{(a'c)^2} - \frac{r^2}{a'^2} = 1$ die Gleichung der Hyperboloide dar, dann erhält man für ein reelles $a'$ das zweischalige, für ein rein imaginäres $a'$ das einschalige Hyperboloid und für $a' = 0$ den Kegel. Der Periodicitätsmodul $J_0$ ist ausgedrückt durch:

$$J_0 = c^2 a'^2 \int_{\nu}^{\infty} \frac{d(r^2)}{\sqrt{(a'^2 + r^2)^3 \cdot (r^2 - \nu^2)(a'^2 + (c^2+1) r^2)}}, \tag{4}$$

woraus man unmittelbar ersieht, dass derselbe für die erste der genannten Flächen positiv, für die zweite negativ wird, für den Kegel aber verschwindet. Man sieht also: *Auf dem zweischaligen, beziehungsweise einschaligen Hyperboloide schneiden sich die von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien vor, beziehungsweise nach Vollendung ihrer halben Perioden, auf dem Kegel aber mit Vollendung derselben.*

Da sich das zweischalige Hyperboloid ganz an das verlängerte Rotationsellipsoid anschliesst, indem es ebenfalls zwei Pole hat, denen sich die Culminationspunkte der einzelnen geodätischen Linien immer mehr nähern (vergl. § 4.), und $J_0$ ebenfalls das positive Zeichen besitzt, so sind hier die Gestalten der Einhüllenden die nämlichen wie dort, nur sind die einzelnen Theile durch das Unendliche zusammengeschlossen oder die Enveloppe verläuft wie in Fig. 4 ganz auf dem einen Flächentheile, auf welchem der Ausgangspunkt der geodätischen Linien sich nicht befindet. Von Jacobi's Standpunkte aus giebt es dann in diesem letzteren Falle auch auf dem zweischaligen Hyperboloide keine Einhüllenden*).

Werthe $\pi$ immer näher, das zweite aber der Null, so dass $\varphi_0$ für $c^2 = 1$, d. h. für die Kugel, den Werth $\pi$ annimmt. Das heisst die beiden Spitzen fallen auf dem Meridian, auf welchem $A$ liegt, in einen Punkt zusammen.

*) Da nach den Erörterungen des § 4., je mehr $A$ sich dem einen Pole der Fläche nähert, desto näher die zwei auf dem Meridiane durch $A$ gelegenen Spitzen

Fasst man jetzt irgend eine Einhüllende ins Auge, für welche der Ausgangspunkt $A$ wieder auf dem Parallelkreise $r = r_0$, zwei Spitzen aber auf $r_0'$ liegen, und lässt die Fläche dem Asymptotenkegel sich nähern, so wird $J_0$ immer kleiner. Das heisst nach § 3., sämmtliche Punkte der Enveloppe rücken dem Kreise $r = r_0$ näher. Berechnet man aber die Lage der Spitzen auf $r_0'$ für den Kegel ähnlich, wie es in der Anmerkung zu § 4. geschehen, so wird der Drehungswinkel $\varphi$ für diese: $\varphi_0 = \pm \sqrt{1+c^2} \cdot \pi$. Das heisst die Spitzen fallen nicht mehr, wie bei der Kugel in einen Punkt zusammen, der auf dem durch $A$ laufenden Meridiane liegt, sondern sie haben die Entfernung $2\pi - 2\pi\sqrt{1+c^2}$ von einander. Geht also das Hyperboloid vollständig in einen Kegel über, so artet die Enveloppe in jenes doppelgezählte Stück des Parallelkreises $r_0'$ aus, welches sich zwischen den beiden eben bestimmten Punkten erstreckt, während die geodätischen Linien zur einen Hälfte durch den ersten, zur andern Hälfte durch den zweiten dieser Punkte hindurchlaufen. Ebenfalls kann die Erzeugende, welche an Stelle des Meridians tritt, insofern mit zu der Enveloppe gerechnet werden, als auf ihr kurz vor Uebergang des Hyperboloids in den Kegel noch die zwei weitern Spitzen der Enveloppe lagen, die jetzt beim Kegel in den Durchschnitt dieser Erzeugenden mit dem Parallelkreise $r_0'$ zusammengefallen sind.

Es muss noch bemerkt werden, dass natürlich hier von Enveloppen auf dem Kegel nur insofern die Rede sein konnte, als die auf der einen Flächenhälfte entspringenden Linien erst nach Durchlaufung des Unendlichen auf der andern Flächenhälfte sich trafen.

Lässt man den Kegel in ein einschaliges Hyperboloid übergehen, so erweitert sich der Doppelpunkt (vergl. Fig. 4 u. 5) zu einem Kehlkreis und es tritt an Stelle der genannten Erzeugenden eine geodätische Linie, die sich demselben, wie bereits § 3. erwähnt, asymptotisch anschliesst und zu seinen beiden Seiten ins Unendliche verläuft; diese ersetzt den Meridian, auf welchem bei dem zweischaligen Hyperboloide zwei Spitzen der Einhüllenden lagen. Der Meridian gehört also hier gar nicht mit in das System jener geodätischen Linien, welche zur Erzeugung der Enveloppe beitragen. In der That, von jenen geodä-

---

dem andern Pole rücken, so wird es beim zweischaligen Hyperboloide eine Lage von $A$ geben, für welche die eine dieser Spitzen gerade mit dem unendlich fernen Kreise zusammentrifft, diese erhält man, wenn man in $J$ $v = 0$ und $r = \infty$ setzt und die untere Grenze $r_0$ als unbekannt betrachtet; dadurch ergiebt sich für die vorliegende Fläche:

$$0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \cdot r^2(1+c^2) + a'^2}{r^2\sqrt{(r^2+a'^2)\cdot(r^2(1+c^2)+a'^2)}}\,.$$

woraus man $r_0$ findet.

tischen Linien, für welche $v < a'$ ist, d. h., die sich über die ganze Fläche hinziehen ohne an bestimmten Grenzkreisen $r = v$ umzukehren, schneiden sich zwei benachbarte nicht mehr. Setzt man nämlich $v < a'$ voraus, so kann $r$ im Integral $J$ den Werth $v$ gar nicht mehr erreichen, da $a'$ der kleinste Parallelkreis ist, folglich kann von einem Unendlichwerden und einer Zeichenumkehr des $J$ für die in Betracht kommenden Werthe von $r$, d. h. von Enveloppen, keine Rede sein. Die andern Curven durch $A$ hingegen schliessen sich immer mehr an die statt des Meridians eintretende Grenzlinie an, die sich dem Kehlkreise asymptotisch nähert, folglich rücken ihre successiven Schnittpunkte, die Punkte der Enveloppe, diesem Kehlkreise der Fläche ebenfalls immer näher. Dasselbe ergiebt sich auch analytisch aus der Betrachtung von $J_0$. Dieses wächst, je mehr $v$ gegen $a'$ abnimmt, und wird für $v = a'$ unendlich; da $J_0$ ferner negativ ist, also der Nullpunkt von $J$ jedesmal zwischen $r = r_0$ und $r = v$ liegen muss, so erkennt man aus den Betrachtungen des § 3. augenblicklich, dass dieser Nullpunkt mit $v$ dem Werthe $a'$ sich nähert. Also tritt hier an Stelle der beiden Spitzen auf dem Meridiane die Eigenthümlichkeit, dass die Einhüllende sich asymptotisch dem Kehlkreise anschliesst. Dies gilt natürlich, wo auch $A$ liegen mag, da ja $J_0$ hievon unabhängig ist. *Es besteht somit eine Enveloppe auf dem einschaligen Hyperboloide aus einem zweispitzigen Zuge, dessen Spitzen auf jenem Kreise liegen, der den nämlichen Radius, wie der zum Ausgangspunkte der Linien gehörige besitzt, und dessen vier Aeste sich auf beiden Seiten dem Kehlkreise asymptotisch nähern, nachdem zwei davon das Unendliche passirt haben.*

Da nun gezeigt worden, dass es auf dem einschaligen Hyperboloide ebenso gut wie auf positiv gekrümmten Flächen Einhüllende giebt, muss noch erläutert werden, dass hiedurch doch keineswegs der von Jacobi aufgestellte und § 1. angeführte Satz seine Gültigkeit verliert. Es wurde nämlich bemerkt, dass für die in Rede stehende Fläche der Periodicitätsmodul $J_0$ immer das negative Zeichen besitzen muss, und deshalb der Schnittpunkt zweier Nachbarlinien erst nach Vollendung der halben Perioden eintritt. Eine Linie, die von einem Punkte $A$ auf $r_0$ (vergl. Fig. 5) ausgeht, vollendet ihre halbe Periode, sobald sie $r_0'$ erreicht, d. h. sie muss auf unserer Fläche in jedem Falle zuerst durch's Unendliche gegangen sein, bevor sie ihre Nachbarlinie trifft. *Beschränkt man sich also darauf, wie es Jacobi gethan, den Verlauf einer geodätischen Linie von einem Punkte aus in's Unendliche allein zu verfolgen, so existiren allerdings auf dem einschaligen Hyperboloide gar keine Enveloppen. Stellt man sich hingegen auf den allgemeinern Standpunkt, von welchem aus betrachtet die Flächen im Unendlichen zusammenhängen, so existiren auf dem einschaligen Hyperboloide so gut wie auf dem zweischaligen oder dem Ellipsoide Enveloppen.*

## § 6.

## Das Paraboloid und der Cylinder.

Das Paraboloid kann man dadurch aus dem verlängerten Ellipsoide entstehen lassen, dass man den auf der einen Seite des Aequators befindlichen Flächentheil mit diesem ins Unendliche rücken lässt. Dabei verändern sich die Enveloppen in folgender Weise. Je mehr das Ellipsoid dem Paraboloid sich nähert, desto näher rücken jene zwei Spitzen dem Parallelkreise $r_0'$, welche auf dem durch den Ausgangspunkt $A$ gehenden Meridiane liegen, während die beiden auf $r_0'$ selbst befindlichen Spitzen sich immer weiter von einander entfernen. Es schliesst sich also die Enveloppe enger und enger an den Parallelkreis $r_0'$ an. Nun fällt aber, sobald das Paraboloid wirklich erreicht ist, $r_0'$ mit dem unendlich entfernten Parallelkreise zusammen, und somit besteht jetzt die Enveloppe nur mehr aus diesem Kreise, dem sich natürlich sämmtliche geodätische Linien asymptotisch nähern. Analytisch erkennt man dies, wenn man den Meridian des Paraboloides in der Form $y = \frac{r^2}{2p}$ aufstellt. Die Gleichung der geodätischen Linien ist dann nach 1) § 1.:

$$\varphi = \frac{v}{p} \int_{r_0}^{r} \frac{dr \sqrt{p^2 + r^2}}{r\sqrt{r^2 - v^2}},$$

welches Integral für $r = \infty$ logarithmisch unendlich wird. Der unendlich ferne Kreis wird somit von sämmtlichen geodätischen Linien berührt, er ist also ihre gemeinsame Enveloppe. Der Meridian hingegen, welcher auch zu den kürzesten Linien gehört, sondert sich wieder ab; natürlich, denn kurz vor Erreichung des Paraboloides lagen ja auf ihm noch zwei Spitzen der Einhüllenden, die jetzt in den Durchschnittspunkt dieses Meridians mit dem unendlich fernen Kreis zusammengefallen sind. Fassen wir das Resultat zusammen, so folgt: *Auf dem Rotationsparaboloide artet jede Enveloppe geodätischer Linien, die von einem Punkte ausgehen, in den unendlich fernen Kreis aus.*

Was schliesslich noch den Cylinder betrifft, so sind die geodätischen Linien auf ihm gerade Erzeugende und Schraubenlinien. Construirt man aber alle durch einen Punkt gehende Schraubenlinien, so haben je zwei unendlich benachbarte offenbar keinen weitern Schnittpunkt mit einander gemein, also ist hier von Einhüllenden keine Rede.

Dies ergiebt sich auch, wenn man den Cylinder aus dem Kegel dadurch entstehen lässt, dass der Doppelpunkt desselben ins Unendliche rückt. Mit ihm entfernt sich dann jenes Stück des Kreises $r_0'$, das als Einhüllende auf dem Kegel aufzufassen war, ins Unendliche, und es bleibt nur noch die durch $A$ laufende Erzeugende übrig.

München, im November 1878.