

Werk

Jahr: 1924

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:1

Werk Id: PPN101433392X_0001

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0001 | LOG_0013

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Windverteilung über dem Erdboden, errechnet aus den Gesetzen der Rohrströmung.

Von L. Prandtl und W. Tollmien.

Die in letzter Zeit sehr verfeinerten Kenntnisse von der Strömung durch Rohre mit rauher Wand geben die Möglichkeit, mit Hilfe gewisser Analogien Einzelheiten über die Windbewegung über dem rauhen Erdboden auszusagen. Die Ergebnisse der bezüglichen Rechnungen werden mitgeteilt und diskutiert.

1. Die Kenntnis von denjenigen turbulenten Flüssigkeitsbewegungen, die in der Technik eine Rolle spielen, hat in den letzten Jahren sehr gute Fortschritte gemacht. Es ist z. B. gelungen, aus den durch eine empirische Formel zusammengefaßten Versuchsergebnissen über den Widerstand des Wassers in glatten Rohren den Reibungswiderstand einer glatten, längs ihrer Ebene bewegten rechteckigen Platte und auch den einer rotierenden glatten Kreisscheibe vorherzusagen¹⁾, und zwar stimmen die so abgeleiteten Formeln sehr gut mit den Versuchen über Platten- und Scheibenreibung. Ferner ist der Zusammenhang des Widerstandsgesetzes mit dem der Geschwindigkeitsverteilung in der Nahe der Wand weitgehend aufgeklärt¹⁾. Nachdem nun auch bezüglich der rauhen Rohre und Kanäle durch neue Arbeiten von Hopf und Fromm²⁾ die entsprechenden Versuchsgrundlagen geschaffen sind, ist auch die Berechnung des Widerstandes von rauhen Flächen und der Geschwindigkeitsverteilung über ihnen möglich.

Da die Erdoberfläche als eine raue Fläche von allerdings stark wechselnder Rauigkeit anzusehen ist, hat es gewisse Aussichten, die Frage zu bearbeiten: Welche Beziehungen ergeben sich für die Windverteilung über der Erdoberfläche und für die Reibungskraft des Windes, wenn man nach den in der technischen Hydrodynamik und Aerodynamik*) bewährten Ansätzen vorgeht? Wenn im folgenden das Ergebnis einer solchen Rechnung mitgeteilt wird, so mag gleich vorweg gesagt werden, daß es nicht unbedingt nötig ist, daß die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit in jedem Fall so gut sein mußte wie beim Widerstand der Platten und Scheiben. Die Übereinstimmung wird nur dann zu erwarten sein, wenn die Luftmasse des ersten Kilometers über dem Boden im indifferenten Gleichgewicht ist, also konstante potentielle Temperatur besitzt, und wenn nicht durch Strahlungseinflüsse zu der mechanischen Turbulenz eine thermische dazukommt. Da bei starkem Winde die Durchmischung der Atmosphäre für konstante potentielle Temperatur in den unteren Schichten sorgt, wird hier vor allem Übereinstimmung zu erhoffen sein, wobei Wolkenbedeckung die Vorbedingungen noch verbessern wird. Die folgenden Rechnungen nehmen einen örtlich und zeitlich konstanten Druckgradienten an, deshalb gehört natürlich eine Annäherung an diesen Zustand ebenfalls zu den Vorbedingungen der Übereinstimmung.

2. Die für unsere Frage grundlegenden Beziehungen aus der Strömungslehre mögen hier kurz auseinandergesetzt werden. Wir gehen aus von der

*) Zwischen Wasser und Luft braucht, wie zuverlässig nachgewiesen ist, bei diesen Anwendungen ein Unterschied nicht gemacht zu werden.

Reibungskraft auf der Flächeneinheit der Wand, die wir auch als „Schubspannung“ in den wandnahen Flüssigkeitsschichten wiederfinden und mit τ_0 bezeichnen. Für glatte Flächen ist aus Rohrversuchen hergeleitet worden, daß

$$\tau_0 = \text{Zahl} \cdot \rho u_m^{7/4} v^{1/4} r^{-1/4} \dots \dots \dots (1)$$

ist. Hierin ist ρ = Dichte, u_m mittlere (oder maximale) Geschwindigkeit, $v = \eta/\rho$ kinematische Zähigkeit, r der hydraulische Radius = Querschnitt: benetzten Umfang (beim Fluß die Tiefe, beim Rohr = $1/4$ des Durchmessers usw.).

Die Geschwindigkeit nimmt nach der Wand hin ab, erst nur langsam, dann etwas rascher; bei oberflächlicher Betrachtung hat man den Eindruck, als ob sie an der Wand selbst noch endlich wäre, und zwar noch etwa gleich der Hälfte der größten Geschwindigkeit oder noch mehr. Genaue Messungen haben aber die Voraussage der Theorie bestätigt, daß die Geschwindigkeit in einer sehr dünnen Grenzschicht an der Wand bis auf Null abnimmt. Das Verhalten außerhalb dieser Grenzschicht wird ziemlich gut durch eine Potenzformel von der Gestalt $u = ay^\alpha$ wiedergegeben, wo y der Wandabstand und α positiv und klein gegen 1 ist. Die naheliegende Vermutung, daß die Wandreibung τ_0 in der Hauptsache von den Vorgängen in unmittelbarer Nähe der Wand (also z. B. von der Größe a in der Potenzformel), nicht aber von der Entfernung der übrigen Wände (also dem hydraulischen Radius r) abhängen müsse, führte den einen von uns 1920 zu einer Berechnung von α , die sich durch die Experimente gut bestätigt hat. Setzt man nämlich, mit u_1 = Geschwindigkeit in der Entfernung r , $u_1 = ar^\alpha$, und führt diese Geschwindigkeit an Stelle von u_m in Formel (1) ein, indem man gegebenenfalls einen passenden Zahlenfaktor zufügt, so führt die Forderung, daß r aus der Formel verschwinde, zu dem Wert $\alpha = 1/7$. Damit erhalten wir für die Wandreibung die rationelle Formel

$$\tau_0 = \text{Zahl} \cdot \rho a^{7/4} v^{1/4} \dots \dots \dots (2)$$

und für die Geschwindigkeit im Abstand y von der Wand

$$u = ay^{1/7} \dots \dots \dots (3)$$

Gewisse Überlegungen sprachen dafür, daß Gleichung (3) auch in mäßig rauhen Rohren genähert gelten müsse. Nimmt man an der einzelnen Rauigkeit, die durch eine Längenabmessung k charakterisiert wird, einen Widerstand nach dem gewöhnlichen quadratischen Gesetz an, und setzt die zugehörige Geschwindigkeit $u_0 = \text{Zahl} \cdot a k^{1/7}$, dann wird man zu folgender Formel für die Wandreibung geführt*):

$$\tau_0 = \text{Zahl} \cdot \rho a^2 k^{2/7} \dots \dots \dots (4)$$

Diese von dem einen von uns und von v Kármán¹⁾ unabhängig aufgestellte Formel findet eine genäherte Bestätigung durch die Arbeiten von Hopf und Fromm²⁾. Diese geben für den Druckabfall in einem Kanal von der Rauigkeit k eine Formel an, die in unsere Größen umgerechnet

$$\tau_0 = 0.0089 \rho a^2 k^{0.314} \dots \dots \dots (5)$$

*) Widerstand eines Höckers = Zahl. $\rho u_0^2 \cdot k^2$; Zahl der Höcker auf der Flächeneinheit proportional $1/k^2$.

lautet. Nach Formel (4) sollte der Exponent von k 0.286 sein. Bei der ziemlich beschränkten Genauigkeit solcher Messungen kann die Übereinstimmung als befriedigend angesehen werden. Für das Folgende soll immer die Gleichung (5) zugrunde gelegt werden. Dieselben Überlegungen, die zu Formel (4) geführt haben, geben rückwärts angewandt mit Formel (5) als Ausgangspunkt

$$u = ay^{0.157} \dots \dots \dots (6)$$

Über das Rauigkeitsmaß k (nach obigem eine Länge) sei bemerkt, daß Hopf und Fromm in Ermangelung eines rationellen Verfahrens einer bestimmten rauhen Oberfläche, die sie verwendeten, willkürlich das Rauigkeitsmaß $k = 1$ mm zugeordnet haben. Diese war durch ein Drahtsieb von 1.6 mm Maschenweite und 0.45 mm Drahtdurchmesser gebildet, das in einer bestimmten reproduzierbaren Weise mit Paraffin ausgeschmiert war. Die Höhenunterschiede in der Oberfläche waren im Mittel 0.23 mm.

3. Für die geplante Anwendung muß aus der Formel für τ_0 zunächst noch eine Formel für die turbulente Reibungsgröße im Innern der Flüssigkeit gewonnen werden, die an Stelle der Zähigkeit einzuführen ist, um der Mischbewegung Rechnung zu tragen, und die wir mit W. Schmidt „Austauschgröße“ nennen wollen. Wir setzten diese = $\rho \cdot \epsilon$, wobei dann ϵ der „kinematische Austausch“ wird, der genau analog der „kinematischen Zähigkeit“ ν ist, und wie diese die Dimension $L^2 T^{-1}$ hat.

Die bisherigen Theorien der Meeresströmungen ³⁾ und der Windbewegung über der Erdoberfläche ⁴⁾ — beide beruhen auf denselben Formelansätzen — nehmen immer ϵ als konstant über der ganzen Höhe der strömenden Schicht an und geben infolge dieser Annahme besonders in der Nähe des Bodens keine Übereinstimmung mit der Wirklichkeit. Die Ablenkung des Bodenwindes gegen die Gradientrichtung ergibt sich bei Abwesenheit von Gleitung am Boden zu 45°. Wir wollen im Gegensatz dazu annehmen, daß jedenfalls in Bodennahe die Gleichungen (5) und (6) gelten. In Analogie mit den bisherigen Ansätzen nehmen wir als Ausdruck für die Schubspannung der turbulenten Flüssigkeitsreibung im Innern der Flüssigkeit die Formel

$$\tau = \rho \epsilon \frac{du}{dy} \dots \dots \dots (7)$$

Mit (6) ergibt sich hieraus

$$\epsilon = \frac{1}{0.157} \frac{\tau}{\rho a} \cdot y^{0.843};$$

da die Formel zunächst nur für Bodennahe gilt, setzen wir $\tau = \tau_0$ und führen dessen Wert nach Gleichung (5) ein. So wird

$$\epsilon = 0.057 a k^{0.314} y^{0.843} \dots \dots \dots (8)$$

In dem allgemeinen Teil der Rechnungen wollen wir statt Gleichung (6) und (8) schreiben:

$$u = ay^\alpha \dots \dots \dots (6a)$$

und

$$\epsilon = cy^{1-\alpha} \dots \dots \dots (8a)$$

Wir begehen nun in vorläufiger Ermangelung von etwas Besserem die Willkur, die Formel (8) durch die ganze in Betracht kommende Schicht der Atmosphäre als gültig anzusehen und sorgen dadurch jedenfalls dafür, daß in unmittelbarer Bodennahe die Übereinstimmung mit den Rohrreibungsgesetzen hergestellt wird. Für die größeren Hohen dürfen wir freilich unseren Formeln keine allzu große Beweiskraft zumessen.

4. Die weitere Rechnung vollzieht sich nach geläufigen Ansätzen der Hydrodynamik. Wir wollen die Aufgabe für einen räumlich und zeitlich konstanten Druckgradienten lösen. Wir legen die Z -Achse des Koordinatensystems lotrecht (so daß z an Stelle von y der Wandabstand wird), ferner soll die Y -Achse in Richtung des Druckgradienten gelegt werden. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v sind dann Funktionen von z allein, w ist $\equiv 0$ (später wird der Buchstabe w für die resultierende Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2}$ wieder eingeführt). Die Dichtigkeit der Luft setzen wir der Einfachheit halber konstant.

Als Kräfte, auf die Volumeneinheit bezogen, haben wir in Richtung der X - bzw. Y -Achse:

1. Druckunterschiede: $-\frac{\partial p}{\partial x}$ bzw. $-\frac{\partial p}{\partial y}$,
2. Reibungskräfte: $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ " $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$.

(Die Schubspannung in irgend einer wagerechten Schnittfläche hat die Komponenten τ_{xz} und τ_{yz} ; betrachtet man eine Schicht von der Dicke dz , so wirkt in Richtung der X -Achse unten nach links τ_{xz} , oben nach rechts $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot dz$.)

3. Corioliskräfte: $2\omega'v$, bzw. $-2\omega'u$.

(Ausdruck der Erddrehung, mit $\omega' = \omega \sin \varphi$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite ist.)

Die Beschleunigung ist überall Null. In Analogie zu Gleichung (7) und (8a) setzen wir

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \varepsilon \rho \frac{\partial u}{\partial z} = \rho c z^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \tau_{yz} &= \varepsilon \rho \frac{\partial v}{\partial z} = \rho c z^{1-\alpha} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

und erhalten somit als Ausdruck des Kräftegleichgewichts, indem wir noch durch ρ dividieren:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega'v + c \frac{\partial}{\partial z} \left(z^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega'u + c \frac{\partial}{\partial z} \left(z^{1-\alpha} \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Nehmen wir entsprechend unserer Voraussetzung $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ und $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ konstant = G an, so vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\left. \begin{aligned} 2\omega'v + c \frac{d}{dz} \left(z^{1-\alpha} \frac{du}{dz} \right) &= 0, \\ G - 2\omega'u + c \frac{d}{dz} \left(z^{1-\alpha} \frac{dv}{dz} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Als Randbedingungen ergeben sich

a) für $z = 0$ Verschwinden der Geschwindigkeit, also

- 1) $u = 0,$
- 2) $v = 0,$

b) für $z = \infty$ Verschwinden der Reibung, also

- 3) $\frac{du}{dz} = 0,$
- 4) $\frac{dv}{dz} = 0.$

Aus 3) und 4) ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (10) sofort, daß für $z = \infty,$ $v = 0$ und $u = \frac{G}{2\omega'}$ ist. Es herrscht also dort der „Gradientwind“.

Da diese Werte von u und v eine partikuläre Lösung des Systems (10) darstellen, so brauchen wir bloß das System der homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung bzw. die daraus resultierende homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung zu lösen. Setzen wir

$$\xi = \left(\frac{2\omega'}{c} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot z$$

und

$$\xi^{1+\alpha} = \xi^q = \eta,$$

so erhalten wir ein Fundamentalsystem von Lösungen durch folgenden Reihenansatz:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_2 \eta^2 + a_4 \eta^4 + a_6 \eta^6 + \dots, \\ u_2 &= a_1 \eta + a_3 \eta^3 + a_5 \eta^5 + a_7 \eta^7 + \dots, \\ u_3 &= \xi^\alpha (b_0 + b_2 \eta^2 + b_4 \eta^4 + b_6 \eta^6 + \dots), \\ u_4 &= \xi^\alpha (b_1 \eta + b_3 \eta^3 + b_5 \eta^5 + b_7 \eta^7 + \dots). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_0, a_1, b_0, b_1 sind willkürlich und sollen sämtlich gleich 1 gesetzt werden; die übrigen bestimmen sich aus den Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} a_{n-2} + n \cdot q [2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \alpha^2 + (1 - \alpha)(2 - 5\alpha)(nq - 1) \\ + (4 - 4\alpha)(nq - 1)(nq - 2) + (nq - 1)(nq - 2)(nq - 3)] a_n &= 0, \\ b_{n-2} + (nq + \alpha) [2(1 - \alpha)\alpha^2 + (1 - \alpha)(2 - 5\alpha)(nq + \alpha - 1) \\ + (4 - 4\alpha)(nq + \alpha - 1)(nq + \alpha - 2) + (nq + \alpha - 1)(nq + \alpha - 2) \\ (nq + \alpha - 3)] b_n &= 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten enthalten wegen der Einführung von ζ bzw. η weder ω' noch c . Die Reihen konvergieren im vorliegenden Fall für alle ζ . Aus den Randbedingungen 1) und 2) folgt für die Lösung:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{G}{2\omega'} [1 - (u_1 + Au_3 + Bu_4)], \\ v &= \frac{G}{2\omega'} \left[-\frac{u_2}{\alpha + 1} - \frac{Au_4}{2\alpha^2 + 3\alpha + 1} + B(2\alpha^2 + 3\alpha + 1)u_3 \right] \\ &= \frac{G}{2\omega'} [-0.865 u_2 - 0.658 Au_4 + 1.52 Bu_3]. \end{aligned} \right\} \cdot (11)$$

Die beiden restlichen Konstanten A und B erhält man aus den Randbedingungen 3) und 4) auf folgendem Wege mit ausreichender Genauigkeit. Wir setzen für genügend große endliche ζ zur Erfüllung der Randbedingungen 3) und 4).

$$\begin{aligned} u_1 + Au_3 + Bu_4 &= 0, \\ -0.865 u_2 - 0.658 Au_4 + 1.52 Bu_3 &= 0 \end{aligned}$$

und berechnen daraus A und B . Sobald man bei Vergrößerung von ζ keine merklichen Abweichungen in den berechneten Werten von A und B bekommt, hat man ζ groß genug gewählt und A und B mit genügender Genauigkeit bestimmt. Man erhält $A = -1.1$; $B = 0.16$ und als Lösung des Problems

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{G}{2\omega'} [1 - (u_1 - 1.1 u_3 + 0.16 u_4)], \\ v &= \frac{G}{2\omega'} [-0.865 u_2 + 0.724 u_4 + 0.243 u_3]. \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Um die Art des Überganges in den Gradientwind noch näher zu studieren, haben wir die asymptotische Lösung für $\zeta = \infty$ aufgestellt. Sie lautet:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{G}{2\omega'} [1 - e^{-\beta \zeta^p} (C \cos \beta \zeta^p + D \sin \beta \zeta^p)], \\ v &= \frac{G}{2\omega'} e^{-\beta \zeta^p} [C \sin \beta \zeta^p - D \cos \beta \zeta^p]. \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Dabei ist

$$p = \frac{1 + \alpha}{2} = 0.578,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{0.5}}{p} = 1.22,$$

C und D sind Konstanten, deren Bestimmung uns nicht weiter interessiert. In der üblichen Darstellung des Windvektors als Funktion der Höhe erhält man also für große z als Grundrißprojektion eine logarithmische Spirale mit 45° Steigung um den Punkt, dessen Radiusvektor den Gradientwind darstellt, gerade wie auch im Falle $\varepsilon = \text{const.}$

Damit sind wir in der Lage, numerische Resultate über die Windverteilung nach dieser Theorie abzuleiten. Bezeichnet man mit w den Absolutwert der

Geschwindigkeit und mit ψ den Ablenkungswinkel vom Gradienten, so erhält man nach (12) ganz allgemein folgende Tabelle:

| ξ | 0 | 0.01 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{2\omega'n}{G}$ | 0 | 0.533 | 0.758 | 0.890 | 0.932 | 0.989 | 1.008 | 1.017 |
| $\frac{2\omega'v}{G}$ | 0 | 0.115 | 0.144 | 0.136 | 0.116 | 0.078 | 0.050 | 0.034 |
| ψ | 77.5° | 77.8° | 79.2° | 81.3° | 82.9° | 85.5° | 87.2° | 88.1° |
| $\frac{2\omega'w}{G}$ | 0 | 0.545 | 0.772 | 0.899 | 0.941 | 0.993 | 1.009 | 1.017 |

In der Figur ist einmal $\frac{2\omega'w}{G}$ als Funktion von ξ , das andere Mal die Grundrißprojektion des Windvektors gezeichnet worden. Die Windverteilung bleibt nach dieser Theorie für verschiedene physikalische Parameter sich selbst ähnlich; denn ξ geht aus z durch eine Ähnlichkeits-transformation hervor. Ganz allgemein kann man feststellen, daß die Geschwindigkeit unmittelbar am Boden sehr rasch anwächst, in größeren Höhen schwächer, wobei in einem Gebiet der Wert des Gradientwindes um ein geringes überschritten wird. Der Winkel des Bodenwindes gegen den Gradienten ergibt sich nach dieser Theorie zu 77.5°.

Da unsere Annahme über den Austausch [Gleichung (8)] besonders in größerer Entfernung vom Boden recht willkürlich war, so sind natürlich diese Teile der Lösung, wo sich allerdings die Geschwindigkeit wenig mehr ändert, sehr wenig beweiskräftig. Die Partien in Bodennähe, bis etwa $\xi = 0.5$, dürften dagegen besser begründet sein.

Um die Windverteilung in einem speziellen Falle zu erhalten, braucht man nur die Transformation festzustellen, die ξ wieder in z überführt. Es war

$$\xi = \left(\frac{2\omega'}{c}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot z,$$

$$c = 0.057 a k^{0.314}.$$

a war bisher frei geblieben und bestimmt sich laut Definition aus

$$a = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{w}{z^\alpha} = \sqrt{A^2 + (2\alpha^2 + 3\alpha + 1)^2 B^2} \frac{G}{2\omega'} \cdot \left(\frac{2\omega'}{c}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Es ergibt sich hiernach

$$a^{1.136} = 1.67 \frac{G}{2\omega'} \cdot \left(\frac{2\omega'}{k^{0.314}}\right)^{0.186}.$$

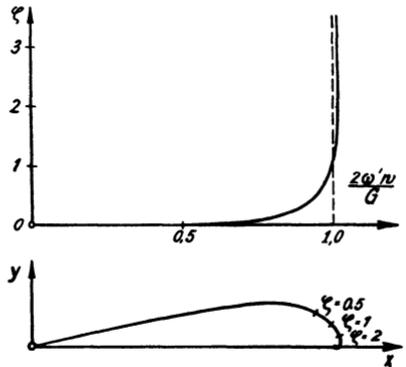


Fig 1.
Windverteilung über dem Erdboden.

Setzt man diesen Wert von a in c ein, so erhält man

$$z = 0.126 \left(\frac{G}{4 \omega'^2} \right)^{0.762} k^{0.238} \cdot \zeta.$$

Dabei ist $0.762 = \frac{1}{1 + 2\alpha}$, $0.238 = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$. Nehmen wir die geographische Breite des Beobachtungsortes gleich 50° an und den Gradientwind $\frac{G}{2 \omega'}$ nacheinander gleich 10 m/sec, 20 m/sec und 30 m/sec, so ergibt sich für verschiedene Rauigkeitslängen k :

| | $\frac{G}{2 \omega'} = 10 \text{ m/sec}$ | $\frac{G}{2 \omega'} = 20 \text{ m/sec}$ | $\frac{G}{2 \omega'} = 30 \text{ m/sec}$ |
|---------------------------------------|--|--|--|
| $k = 0.1 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $z = 440 \zeta \text{ m}$ | $z = 740 \zeta \text{ m}$ | $z = 1000 \zeta \text{ m}$ |
| $1 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $z = 760 \zeta \text{ m}$ | $z = 1280 \zeta \text{ m}$ | $z = 1740 \zeta \text{ m}$ |
| $10 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $z = 1320 \zeta \text{ m}$ | $z = 2220 \zeta \text{ m}$ | $z = 3010 \zeta \text{ m}$ |
| $100 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $z = 2270 \zeta \text{ m}$ | $z = 3880 \zeta \text{ m}$ | $z = 5200 \zeta \text{ m}$ |

Durch diese Umrechnungsformeln ist die Windverteilung nach der ersten Tabelle bestimmt.

Von Interesse ist ferner τ_0 , d. i. die Reibungskraft am Erdboden. Diese Reibungskraft ist z. B. bei der Trift des Polareises in Tätigkeit. Die Größe der Eispresungen in Abhängigkeit vom Winde läßt sich hieraus ermitteln. Setzt man in die Formel (5) für τ_0 den Wert von a ein, so erhält man

$$\tau_0 = 0.022 \rho \left(\frac{G}{2 \omega'} \right)^2 \left(\frac{k \cdot 4 \omega'^2}{G} \right)^{0.238},$$

wobei $0.238 = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$ ist.

Nimmt man die geographische Breite wiederum gleich 50° an und drückt die Reibungskraft im technischen Maßsystem aus, so erhält man

$$\tau_0 = 0.000328 \left(\frac{G}{2 \omega'} \right)^{1.76} k^{0.238} \text{ kg/m}^2.$$

Für verschiedene Werte des Gradientwindes $\frac{G}{2 \omega'}$ und der Rauigkeitslänge k erhält man folgende Tabelle der τ_0 :

| | $\frac{G}{2 \omega'} = 10 \text{ m/sec}$ | $\frac{G}{2 \omega'} = 20 \text{ m/sec}$ | $\frac{G}{2 \omega'} = 30 \text{ m/sec}$ |
|---------------------------------------|--|--|--|
| $k = 0.1 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $\tau_0 = 0.011 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.037 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.075 \text{ kg/m}^2$ |
| $1 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $\tau_0 = 0.019 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.064 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.130 \text{ kg/m}^2$ |
| $10 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $\tau_0 = 0.033 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.111 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.225 \text{ kg/m}^2$ |
| $100 \text{ m} \dots \dots \dots$ | $\tau_0 = 0.057 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.192 \text{ kg/m}^2$ | $\tau_0 = 0.390 \text{ kg/m}^2$ |

Es ist natürlich noch unsicher, welche Geländearten durch obige Rauigkeitslängen dargestellt werden. Hier kann nur der Vergleich mit der Wirklichkeit die Entscheidung bringen. Mit Vorbehalt könnte man aber sagen, daß $k = 1 \text{ m}$ etwa Feldern und Wiesen, $k = 10 \text{ m}$ gleichmäßigem Wald und $k = 100 \text{ m}$ einer Großstadt entspreche.

Literatur.

1) Th. v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech **1**, 233 (1921) = Abh. a. d. Aerodyn. Inst. d. Techn. Hochschule Aachen. 1. Lief., S. 1.

2) L. Hopf. Die Messung der hydraulischen Rauigkeit; K. Fromm: Strömungswiderstand in rauen Rohren. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 329 u. 339 (1923) = Abh. a. d. Aerodyn. Inst. d. Techn. Hochschule Aachen. 3. Lief., S. 1 u. 13.

3) V. W. Ekman On the Influence of the Earth's rotation on Ocean currents. Arkiv for math. astr. och fysik 2. Bd., Nr. 11, 1905; Beitrag zur Theorie der Meeresströmungen. Ann. d. Hydr. u. marit. Meteorol. 1906.

4) F. A. Åkerblom, Recherches sur les courants les plus bas de l'atmosphère au dessus de Paris. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsalensis 1908.

Weitere meteorologische Literatur in Hesselberg u. Sverdrup: Die Reibung der Atmosphäre. Veröffentl. d. Geophys. Inst. d. Univ. Leipzig, 2. Serie, Heft 10.

Die Verwertung von Sonnenstrahlungsmessungen in Luftfahrzeugen.

Von **F. Linke.**

I. Vor wenigen Tagen gingen mir die Ergebnisse der ersten systematischen Luftexpedition zur Messung der Sonnenstrahlung zu, die am 18. März 1921 unter Leitung von R. Suring von Bitterfeld aus vorgenommen ist, und über die W. Marten im Bericht über die Tätigkeit des Preußischen Meteorologischen Instituts für die Jahre 1920 bis 1923 berichtet. Marten beschränkt sich auf eine dankenswert ausführliche Veröffentlichung der beobachteten Werte und meint: „Genauere Vergleiche lassen sich erst durch langwierige Reduktionen unter Verwendung der Bouguer'schen Formeln anstellen. Hierbei sind zwei Variablen, Änderung der Meereshöhe und des Sonnenortes, zu berücksichtigen, wodurch eine Bearbeitung sehr kompliziert wird.“

In früheren Veröffentlichungen *) habe ich nun gezeigt, daß es zweckmäßig ist, die Bouguer'sche Formel dadurch zu verändern, daß man den Transmissionskoeffizienten q konstant hält, und zwar als Transmissionskoeffizienten einer idealen trockenen und reinen Atmosphäre, und eine neue Variable einführt, den „Trübungsfaktor“ T , der in weitgehender Annäherung vom Sonnenstande unabhängig ist. Allerdings muß man für jede durchstrahlte Luftmasse m die von mir am angeführten Ort berechneten Transmissionskoeffizienten q_m benutzen. T ist definiert als die Zahl der reinen, trockenen Atmosphären, die zusammen die gleiche Extinktion bewirken würden wie die feuchte, dunstige Atmosphäre bei der Beobachtung. Die neue Formel lautete:

$$J_m = J_0 q_m^{Tm} \dots \dots \dots (1)$$

*) Beitr. z. Phys. d. freien Atm **10**, 91; Meteorol. Zeitschr. **39**, 161, 1922.