Werk

Jahr: 1924
Kollektion: fid.geo
Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:1
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN101433392X_0001
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0001

LOG Id: LOG_0021
LOG Titel: Die topographische Korrektion bei Schweremessungen mittels einer Torsionswage
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X

Terms and Conditions

Contact

Die topographische Korrektion bei Schweremessungen mittels einer Torsionswage.

Von **W. Schweydar.**

Bei Verwendung der Torsionswage nach dem Prinzip von Eötvös erhält man, wie bekannt, gewisse zweite Differentialquotienten des Potentials der Schwerkraft nach den Koordinaten, d. h. die horizontalen Gradienten der Schwerkraft und gewisse Größen, die sich auf die Krümmung der Niveauflächen beziehen, und im folgenden kurz „Krümmungsgrößen" genannt werden. Die unmittelbaren Meßergebnisse sind beeinflußt durch die Massen unter dem Horizont des Fußpunktes des Instrumentes, wie auch durch alle Massen, die darüberliegen, d. h. durch die Erhebungen und Senkungen, welche das Gelände bildet. Da besonders fur den Geologen nur die Wirkung der unterirdischen Massen von Interesse ist, so muß der Effekt der Unregelmäßigkeiten des Geländes, die sogenannte Geländewirkung berechnet und von dem Meßergebnis in Abzug gebracht werden. Eine solche Berechnung ist nur unter mehr oder minder genauen Angaben über die mathematische Form des Geländes möglich. Hierdurch ist der Genauigkeit der Bestimmung der unterirdischen Massen eine gewisse Grenze gezogen, so daß im allgemeinen eine Steigerung der Meßgenauigkeit über $1 \, . \, 10^{-9}$ bis $2 \, . \, 10^{-9}$ C. G. S. ohne Nutzen sein würde. Die Meßergebnisse werden allgemein in den Einheiten $1 \, . \, 10^{-9}$ angeführt; es scheint mir praktisch zu sein, diese Einheit mit „Eotvös" und dem Buchstaben E zu bezeichnen.

Die Berechnung der Geländewirkung muß im vorliegenden Falle viel genauer durchgeführt sein als bei Schweremessungen mit Pendeln. Eine Methode zur Berechnung der Geländewirkung ist von Eötvos*) angegeben worden. Diese ist aber ganz der äußerst flachen ungarischen Tiefebene, wo Eötvös ausschließlich gemessen hat, angepaßt. In einem mehr kupierten Gelande ist sie zu ungenau und in einem Gebiet mit hoch entwickelter Landwirtschaft nur schwer oder gar nicht anzuwenden. Sie verlangt nämlich, daß der Boden im Umkreis von 1.5 bis 2 m um die Station zu einer ebenen, schwach geneigten Fläche umgestaltet oder völlig planiert wird. So z. B. würde in dem Marschgebiet bei Hamburg und in Holstein ein Planieren der Stationen ganz unmoglich sein, weil dadurch die schmalen, gewölbt geackerten Landstreifen gänzlich zerstört würden. Der Berechnung der Anziehung der weiter abliegenden Massen legt Eötvös einen mathematischen Ausdruck für die Variation der Höhen im Terrain zugrunde, der nur in flachen Gebieten genügend sein kann. Bezeichnet ϱ den Abstand

---

*) Bericht über die geodätischen Arbeiten in Ungarn. Verhandl. der 15. Allgem. Konferenz d. Intern. Erdmessung 1906, I. Teil, S. 358 ff.

eines Geländepunktes von der Station, α die Richtung von ϱ, a, b, c, d gewisse Konstanten, so wird angenommen, daß die Höhen innerhalb kleiner Bezirke gegeben sind durch

$$z = c + a\alpha + b\varrho\alpha + d\varrho.$$

Die Formeln für die Geländewirkung, die hiermit abgeleitet werden, schreiben vor, daß die Geländehöhen in acht Punkten auf verschiedenen, rings um die Station herumgezogenen Kreisen gemessen werden. Die Methode in der veröffentlichten Form gibt keine Möglichkeit, die Zahl der Punkte zu erhöhen, wenn das Terrain sehr unregelmäßig ist. Außerdem sind die numerischen Koeffizienten der a. a. O. veröffentlichten Formeln durch Rechenfehler entstellt. Der Faktor des Hauptgliedes, welches die Wirkung der Neigung des Erdbodens ε und k (in Graden) gegen den Horizont auf die Gradienten gibt, ist 5.77 statt 7.68. In den quadratischen Gliedern der Gradienten sind weder die Vorzeichen noch die Faktoren richtig, doch kommen diese Glieder selten in Betracht. Die Formeln für die Krümmungsgrößen sind auch nicht zuverlässig.

Fur die Berechnung der Gradienten und Krümmungsgrößen, welche das Gelände bewirkt, ist eine mathematische Darstellung der Hohen im Gelande notwendig. Die im folgenden entwickelte Methode verwendet an Stelle der oben angeführten Eötvösschen Annahme und seiner Forderung der Planierung des Bodens um die Station herum Fouriersche Reihen, mit denen man eine beliebige Genauigkeit in der mathematischen Darstellung des Geländes erreichen kann.

Wir legen zugrunde ein ebenes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Stationspunkt. Die positive X-Achse sei nach Norden, die positive Y-Achse nach Osten und die positive Z-Achse nach oben gerichtet. Das Koordinatensystem muß identisch sein mit dem Koordinatensystem, auf welches sich die Ergebnisse der Messungen mit der Torsionswage beziehen, also entweder mit den magnetischen oder astronomischen Hauptrichtungen. Ein beliebiger Geländepunkt im Abstand ϱ von der Station habe gegen die letztere die Höhendifferenz z, der Winkel zwischen der positiven X-Achse und ϱ, im Sinne des Uhrzeigers gezählt, sei α. Dann ist ganz allgemein

$$z = F(\alpha, \varrho) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Wir nehmen nun für $F(\alpha, \varrho = \text{const}) = F_n(\alpha)$ Fouriersche Reihen.

$$F_n(\alpha) = a_n + b_n \sin\alpha + c_n \cos\alpha + d_n \sin 2\alpha + e_n \cos 2\alpha$$
$$+ f_n \sin 3\alpha + g_n \cos 3\alpha + \cdots \quad (2)$$

Wir denken uns um den Stationspunkt Kreise mit den Radien $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$ gezogen. Auf jedem Kreise sind die Höhen durch ein Nivellement in einer beliebigen Zahl von Punkten gemessen. Diese Höhen konnen durch die Funktion (2) mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden, wenn man nur genügend Glieder ansetzt. Es wird unten gezeigt werden, daß für die Berechnung der Geländewirkung eine erschöpfende Darstellung der Höhenvariation nicht nötig ist, sondern daß nur eine beschränkte Zahl der Glieder der Reihen in Frage kommt. Weiter muß die Variation der Höhen von ϱ_n zu ϱ_{n+1} in einer beliebigen Richtung mathematisch festgelegt werden. Diese Variation kann allgemein angesetzt werden zu

$$\gamma \varrho + \gamma_1 \varrho^2 + \gamma_2 \varrho^3 + \cdots \qquad (3)$$

wo γ_1, γ_2 Fouriersche Reihen sind. Diese allgemeine Form würde für die numerische Rechnung kompliziert und unübersichtlich werden. Es ist viel bequemer, nur das erste Glied $\gamma\,\varrho$ zu berücksichtigen und die Kreise wenigstens in der Nähe der Station eng zu nehmen. In weiteren Abstanden kann die Ringbreite größer genommen werden, weil der Einfluß der Massen mit der Entfernung schnell abnimmt. Der Proportionalitätsfaktor ist unbeschadet der Gültigkeit der Formeln von Kreis zu Kreis in jeder beliebigen Richtung verschieden, wie aus der Formel (3) zu ersehen ist.

Die Höhendifferenzen z auf den Kreisen mit den Radien ϱ_1, $\varrho_2 \ldots \varrho_n$ sind durch die Funktionen

$$F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n$$

dargestellt, deren Konstanten aus dem Nivellement zu berechnen sind. Indem wir uns auf das erste Glied in der Formel (3) beschranken, finden wir für die Höhendifferenz eines beliebigen Punktes zwischen zwei beliebigen Kreisen ϱ_n und ϱ_{n+1} im Abstand ϱ von der Station den Wert

$$z_\varrho = F_n - \varrho_n \frac{F_{n+1} - F_n}{\varrho_{n+1} - \varrho_n} + \varrho \frac{F_{n+1} - F_n}{\varrho_{n+1} - \varrho_n} \qquad (4)$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} f_n &= F_n - \varrho_n \frac{F_{n+1} - F_n}{\varrho_{n+1} - \varrho_n} \\ \gamma_n &= \frac{F_{n+1} - F_n}{\varrho_{n+1} - \varrho_n} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

so wird

$$z_\varrho = f_n + \varrho\,\gamma_n \qquad (6)$$

Es ist nun der Einfluß der Massen zu berechnen, welche einerseits durch die Fläche (6), andererseits durch die horizontale Ebene, welche die Station enthalt, begrenzt sind. Dieser Einfluß wird die Geländewirkung genannt. Diese ist für einen Punkt des Instruments zu rechnen, der den vertikalen Abstand h vom Fußpunkt des Instruments hat. Wir werden spater die instrumentelle Bedeutung dieses Punktes feststellen.

Wir legen das oben bereits definierte Koordinatensystem zugrunde. Bezeichnen U das Potential der Anziehung der Geländemassen, G die Konstante der Gravitation, x, y, z die Koordinaten eines Massenelementes dm, g die Beschleunigung der Schwerkraft, so ist

$$U = G \int \frac{dm}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z)^2}}.$$

Wir führen Polarkoordinaten ein:

$$x = \varrho \cos\alpha, \qquad y = \varrho \sin\alpha, \qquad dm = \sigma\,\varrho\, d\varrho\, d\alpha\, dz,$$

wo σ die Dichte des Erdbodens bezeichnet.

Man erhält so die Gradienten:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \equiv U_{xz} = 3\,G\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{z} \frac{\varrho^2 \cos\alpha\, d\alpha\, d\varrho\, dz\,(h-z)}{[\varrho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \;\cdots \quad (7)$$

$$\frac{dg}{dy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \equiv U_{yz} = 3\,G\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{z} \frac{\varrho^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\varrho\, dz\,(h-z)}{[\varrho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \;\cdots \quad (8)$$

und die Krümmungsgrößen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \equiv U_\Delta = -3\,G\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{z} \frac{\varrho^3 \cos 2\alpha\, d\varrho\, d\alpha\, dz}{[\varrho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \;\cdots \quad (9)$$

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \equiv 2\,U_{xy} = 3\,G\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{z} \frac{\varrho^3 \sin 2\alpha\, d\varrho\, d\alpha\, dz}{[\varrho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \;\cdots \quad (10)$$

Unter der Voraussetzung, daß $\frac{z^2 - 2hz}{\varrho^2 + h^2}$ klein ist, kann man nach Potenzen dieser Größe entwickeln und erhält

$$\left.\begin{aligned} U_{xz} &= 3\,G\sigma \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} \varrho^2 \cos\alpha\, d\alpha\, d\varrho \frac{1}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}} \\ &\left\{ hz - \frac{z^2}{2} + \frac{5}{8}\frac{(z^2 - 2hz)^2}{\varrho^2 + h^2} - \frac{35}{16}\frac{(z^2 - 2hz)^3}{(\varrho^2 + h^2)^2} \right\} \end{aligned}\right\} \;\cdots \quad (11)$$

und ähnlich U_{yz}.

Wir beschränken uns nur auf die ersten zwei Glieder in der Reihe unter dem Integralzeichen. Die höheren Glieder sind auch in mehr hügeligem Gelände ohne Bedeutung. Ähnlich ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} U_\Delta &= -3\,G\sigma \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho^3 \cos 2\alpha\, d\varrho\, d\alpha}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}} \left\{ z - \frac{5}{6} z^2 \frac{z - 3h}{\varrho^2 + h^2} \cdots \right\} \\ 2\,U_{xy} &= +3\,G\sigma \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho^3 \sin 2\alpha\, d\varrho\, d\alpha}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}} \left\{ z - \frac{5}{6} z^2 \frac{z - 3h}{\varrho^2 + h^2} \cdots \right\} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (12)$$

Auch hier genügt es, sich nur auf das erste Glied der Reihe zu beschränken.

Für die Größe z unter dem Integralzeichen ist die Funktion (6) zu nehmen. Die Funktionen f_n und γ_n sind Fouriersche Reihen, sie haben die Form

$$\left.\begin{aligned} f_n &= A_n + B_n \sin\alpha + C_n \cos\alpha + D_n \sin 2\alpha + E_n \cos 2\alpha + \cdots \\ \gamma_n &= \alpha_n + \beta_n \sin\alpha + \zeta_n \cos\alpha + \delta_n \sin 2\alpha + \varepsilon_n \cos 2\alpha + \cdots \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \quad (13)$$

Die Konstanten A_n, B_n usw. und α_n, β_n usw. setzen sich nach der Formel (5) aus den Konstanten a_n, b_n zusammen, die aus den Hohenmessungen bestimmt werden. Bezeichnen

$$J_1 = \int \frac{\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}}, \qquad J_2 = \int \frac{\varrho^4 d\varrho}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}}, \qquad J_3 = \int \frac{\varrho^2 d\varrho}{(\varrho^2 + h^2)^{5/2}},$$

so erhält man mit (11) und (12):

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{U_{xz}}{3\,G\sigma\pi} &= h\,C_n\left[J_3\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} + h\,\zeta_n\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} \\
&-{}^1/_2\left[J_3\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2\,A_n\,C_n + B_n D_n + C_n E_n + D_n F_n + E_n\,G_n + \cdots\right\} \\
&-{}^1/_2\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2\,(A_n\zeta_n + C_n\alpha_n) + (B_n\delta_n + D_n\beta_n) + (C_n\varepsilon_n + E_n\zeta_n) + \cdots\right\} \\
&-{}^1/_2\left[J_2\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2\,\alpha_n\zeta_n + \beta_n\delta_n + \zeta_n\varepsilon_n + \delta_n\varphi_n + \varepsilon_n\gamma_n + \cdots\right\} \\
\frac{U_{yz}}{3\,G\sigma\pi} &= h B_n\left[J_3\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} + h\,\beta_n\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} \\
&-{}^1/_2\left[J_3\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2\,A_n B_n - B_n E_n + C_n D_n - D_n\,G_n + E_n F_n + \cdots\right\} \\
&-{}^1/_2\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2(A_n\beta_n + B_n\alpha_n) - (B_n\varepsilon_n + E_n\beta_n) + (C_n\delta_n + D_n\zeta_n) + \cdots\right\} \\
&-{}^1/_2\left[J_2\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\left\{2\,\alpha_n\beta_n - \beta_n\varepsilon_n + \zeta_n\delta_n - \delta_n\gamma_n + \varepsilon_n\varphi_n + \cdots\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
U_\Delta &= -\,3\,G\sigma\pi\left\{E_n\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} + \varepsilon_n\left[J_2\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\right\} \\
2\,U_{xy} &= 3\,G\sigma\pi\left\{D_n\left[J_1\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1} + \delta_n\left[J_2\right]_{\varrho_n}^{\varrho_n+1}\right\}
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots \quad (15)
$$

$$
J_1 = -\frac{\varrho_n^2 + {}^2/_3 h^2}{(\varrho_n^2 + h^2)^{3/2}}, \qquad J_2 = -\frac{4}{3}\,\varrho_n\,\frac{\varrho_n^2 + {}^3/_4 h^2}{(\varrho_n^2 + h^2)^{3/2}} + \log\operatorname{nat}\left(\varrho_n + \sqrt{\varrho_n^2 + h^2}\right),
$$

$$
J_3 = \frac{\varrho_n^3}{3\,h^2(\varrho_n^2 + h^2)^{3/2}}.
$$

Die Integration ergibt die folgenden interessanten Ergebnisse, welche für die praktische Anwendung der Methode sehr wichtig sind.

Der Ausdruck für die Gradienten hängt in seinem bedeutsamsten Teil, der in der Praxis meistens allein in Betracht kommt, nur von den Konstanten b_n und c_n ab, d. h. von den Koeffizienten des Sinus und Kosinus des einfachen Winkels, und zwar ist der Gradient nach x durch die Konstanten c_n, der nach y durch die Konstanten b_n bestimmt. Die Krümmungsgrößen dagegen hängen nur von den Konstanten d_n und e_n ab, also von den Koeffizienten des Sinus und Kosinus des doppelten Winkels. Alle übrigen Konstanten der Fourierschen Reihe kommen nicht in Betracht. Daher ist eine erschöpfende mathematische Darstellung der Höhen auf jedem Kreise nicht erforderlich. Es wird fast immer genügen, nur die ersten vier Konstanten der Reihe (2) zu berechnen, wodurch die Rechenarbeit sehr vereinfacht wird.

Berechnung der Konstanten der Reihen $F_n(\alpha)$. Für jeden Kreis sind die Konstanten der Fourierschen Reihen

$$F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Da es sich um periodische Funktionen handelt, so ist damit eine äußerst geringe Rechenarbeit verknüpft.

Hierbei ergibt sich gegenüber der Eötvösschen Methode der große Vorteil, daß der Beobachter auf einer beliebigen Zahl von Punkten auf jedem Kreise die Höhen bestimmen kann, ohne daß sich die Hauptformeln für die Geländewirkung ändern. Je nach der Gestaltung des Geländes wird er auf 8, 16 oder 32 Punkten eines jeden Kreises die Höhen messen. Die Berechnung der Konstanten wird am einfachsten, wenn die Punkte gleiche Abstände haben. Werden z. B. in 8 Punkten mit gleichen Winkelabständen die Höhendifferenzen z_1, z_2, $z_3 \ldots z_8$ gegen die Station ermittelt, so hat der Winkel α, von Norden anfangend, der Reihe nach die Werte: 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0, und man erhält für jeden Kreis acht Gleichungen von der Form (2), aus denen man die Konstanten a, b, c, d, e folgendermaßen findet:

$$
\begin{aligned}
4\,b_n &= 0.707(z_2 + z_4 - z_6 - z_8) + z_3 - z_7, \\
4\,c_n &= 0.707(z_2 - z_4 - z_6 + z_8) + z_1 - z_5, \\
4\,d_n &= z_2 - z_4 + z_6 - z_8, \\
4\,e_n &= z_1 - z_3 + z_5 - z_7, \\
8\,a_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_8.
\end{aligned}
$$

Werden in 16 gleichmäßig über den Kreis verteilten Punkten die Höhendifferenzen z_1, z_2, $z_3 \ldots z_{16}$ gemessen, so findet man die Konstanten folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
8\,b_n &= z_5 - z_{13} + 0.383(z_2 + z_8 - z_{10} - z_{16}) + 0.707(z_3 + z_7 - z_{11} - z_{15}) + 0.924(z_4 + z_6 - z_{12} - z_{14}), \\
8\,c_n &= z_1 - z_9 + 0.383(z_4 - z_6 - z_{12} + z_{14}) + 0.707(z_3 - z_7 - z_{11} + z_{15}) + 0.924(z_2 - z_8 - z_{10} + z_{16}), \\
8\,d_n &= z_3 - z_7 + z_{11} - z_{15} + 0.707(z_2 + z_4 - z_6 - z_8 + z_{10} + z_{12} - z_{14} - z_{16}), \\
8\,e_n &= z_1 - z_5 + z_9 - z_{13} + 0.707(z_2 - z_4 - z_6 + z_8 + z_{10} - z_{12} - z_{14} + z_{16}), \\
16\,a_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{16}.
\end{aligned}
$$

Um die Berechnung auch in schwierigem Terrain zu ermöglichen, habe ich folgende Werte für die Radien ϱ_n

1.5, 3, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 150, 250, 400, 600, 800, 1100, 1500, 2000, 3000, 5000, 8000, 12000

in Metern gewählt. Die Höhen werden bis 100 m Abstand durch ein Nivellement bestimmt, darüber hinaus entnimmt man die Höhen aus der Karte des Gebietes.

Mit diesen Radien ergibt sich das folgende Schema, worin $\varDelta = \varrho_{n+1} - \varrho_n$ ist:

n	ϱ_n	ϱ_{n+1}	$\varDelta$	f_n	γ_n	A_n	B_n	α_n	β_n usw.
	cm	cm	cm						
0	0	150	150	0	$F_1/150$	0	0	$a_1/150$	$b_1/150$
1	150	300	150	$2F_1-F_2$	$(F_2-F_1)/150$	$2a_1-a_2$	$2b_1-b_2$	$(a_2-a_1)/150$	$(b_2-b_1)/150$
2	300	500	200	$^5/_2 F_2-{}^3/_2 F_3$	$(F_3-F_2)/200$	$^5/_2 a_2-{}^3/_2 a_3$	usw.		
3	500	1000	500	$2F_3-F_4$	$(F_4-F_3)/500$				
4	1000	2000	1000	$2F_4-F_5$	$(F_5-F_4)/1000$				
5	2000	3000	1000	$3F_5-2F_6$	$(F_6-F_5)/1000$				
				usw.					

Wir haben noch die Höhe h über dem Erdboden zu bestimmen, für welche die Geländewirkung zu rechnen ist. Legt man das Koordinatensystem in den Schwerpunkt des Gehänges und bezeichnen $U = f(x, y, z)$ den Wert des Potentials der angreifenden Kräfte im Schwerpunkt, H den Abstand des Schwerpunktes des unteren Belastungsgewichtes von seinem Aufhängepunkt, l die halbe Länge des Wagearmes, so ist der Wert des Potentials im oberen Belastungsgewicht

$$U_1 = f\left(x - l,\ y,\ z + \frac{H}{2}\right),$$

und im unteren

$$U_2 = f\left(x + l,\ y,\ z - \frac{H}{2}\right).$$

Entwickelt man die Funktion und leitet die Gradienten und Krümmungsgroßen ab, so sieht man, daß die Werte der letzteren bis auf Glieder dritter Ordnung fur den Schwerpunkt des Gehänges gelten. Die unmittelbaren Meßergebnisse beziehen sich also mit großer Annäherung auf den Schwerpunkt, und man wird deshalb für die Höhe h die Schwerpunktshohe nehmen. Würde man sich nur mit den linearen Gliedern in der Entwicklung des Potentials begnügen, was im allgemeinen ausreichen würde, so könnte man die Meßergebnisse auf die Balkenhohe beziehen.

Bei den Instrumenten, welche von den mechanischen Werkstätten von Karl Bamberg in Berlin gebaut werden, ist die Schwerpunktshöhe $h = 70$ cm. Die Instrumente werden auf der Station zwecks soliderer Aufstellung mittels dreier Pfähle und einer Fußplatte etwas uber den Erdboden gestellt, so daß der Schwerpunkt des Gehanges 90 cm über dem Erdboden liegt. Wir haben also in den obigen Rechnungen $h = 90$ zu setzen.

Der Raum würde hier nicht ausreichen, um die Formeln fur alle oben angeführten Ringe vollständig wiederzugeben. Der Leser kann sich diese leicht selbst herstellen. Ich begnüge mich im folgenden mit der Angabe von einigen Gliedern der Formel. Der mit Q bezeichnete Teil der Formel enthält die quadratischen Glieder und rührt von dem Gliede z^2 in der Formel (11) her.

Die Konstanten mit den Indizes 1, 2, 3 ... gelten für die Kreise mit den Radien 1.5 m, 3 m, 5 m usw. der Reihe nach, wie die Radien auf S. 86 angegeben sind.

$$U_{xz} = \frac{\sigma}{2} E^{*})\,[2.36\,c_1 + 0.643\,c_2 + 0.239\,c_3 + 0.082\,c_4 + 0.018\,60\,c_5 + \cdots\ 0.000\,428\,c_{10} + \cdots Q]$$

$$U_{yz} = \frac{\sigma}{2} E\,[2.36\,b_1 + 0.643\,b_2 + 0.239\,b_3 + 0.082\,b_4 + 0.018\,60\,b_5 + \cdots 0.000\,428\,b_{10} + \cdots Q_1]$$

$$-U_{\Delta} = \frac{\sigma}{2} E\,[3.302\,e_1 + 1.962\,e_2 + 1.343\,e_3 + 0.844\,e_4 + 0.3570\,e_5 + \cdots 0.047\,228\,e_{10} + \cdots 0.003\,576\,e_{16} + \cdots 0.000\,225\,36\,e_{22}]$$

$$2\,U_{xy} = \frac{\sigma}{2} E[3.302\,d_1 + 1.962\,d_2 + 1.343\,d_3 + 0.844\,d_4 + 0.3570\,d_5 + \cdots 0.047\,228\,d_{10} + \cdots 0.003\,576\,d_{16} + \cdots 0.000\,225\,36\,d_{22} \cdots]$$

*) $E = 1$ „Eötvös" $= 1 \cdot 10^{-9}$ C G S.

$$
\begin{aligned}
Q = & -0.008\,974\,\{2\,a_1 c_1 + d_1 b_1 + e_1 c_1 + d_1 f_1 + e_1 g_1 \cdots\} \\
& -0.001\,016\,2\,\{2\,a_1 c_2 + 2\,a_2 c_1 + d_1 b_2 + b_2 d_1 + c_1 e_2 + e_1 c_2 + d_1 f_2 + f_1 d_2 \\
& \qquad + g_2 e_1 + e_2 g_1 + \cdots\} \\
& -0.002\,250\,7\,\{2\,a_2 c_2 + d_2 b_2 + e_2 c_2 + d_2 f_2 + e_2 g_2 + \cdots\} \\
& -0.000\,887\,5\,\{2\,a_3 c_3 + d_3 b_3 + e_3 c_3 + d_3 f_3 + e_3 g_3 + \cdots\} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

In Q_1 sind die numerischen Koeffizienten und Vorzeichen dieselben wie in Q, die Kombinationen der Konstanten a, b, c, d, e dagegen verschieden. Diese findet man leicht aus den Formeln (14). Doch wird man die Glieder Q_1 und Q nur in seltenen Fällen zu berechnen haben, wie die kleinen Koeffizienten in Q zeigen. Man wird im allgemeinen nur die vier Konstanten b, c, d, e in der einfachen, oben mitgeteilten Weise ableiten, so daß die gesamte, mit der vorliegenden Methode verknüpfte Rechenarbeit gering ist.

Die Wirkung der Massen in Abständen von mehr als 100 m nennt Eötvos kartographische Wirkung. Er berechnet sie in der Weise, daß er die Formeln für den Einfluß eines Massenelements verwendet, also die Ausdrücke unter den Integralzeichen in (7) bis (11). In diesen setzt er $h = 0$ neben ϱ und z. Dann werden von der Station aus so viel Strahlen gezogen mit dem Winkelabstand $d\alpha$, als nötig erscheint, d. h. das Gelände wird in radiale Segmente mit kleinen gleichen Winkeln geteilt, dann wird die Wirkung der Massen, welche durch zwei aufeinanderfolgende Höhenlinien (Isohypsen) aus den Segmenten herausgeschnitten werden, berechnet und die Wirkung aller dieser Parzellen addiert. Diese Methode ist sehr nützlich, wenn die Massen einseitig zu der Station liegen. Sind jedoch in größerer Entfernung die Massen rings um die Station verteilt, so ist die oben mitgeteilte Methode einfacher und führt schneller zum Ziele, auch können Karten ohne Höhenlinien verwendet werden. Man zeichnet auf der Karte Kreise um die Station herum, etwa mit den Radien wie oben angegeben, liest auf den einzelnen Kreisen in beliebig gewählten Punkten die Höhen ab und berechnet die Konstanten b, c, d, e. Im allgemeinen wird es sich bei größeren Entfernungen nur um die Wirkung auf die Krummungsgrößen handeln.

Aus den obigen Formeln sieht man, daß ein Gelände, das einer geneigten Fläche ähnlich ist, großen Einfluß auf die Gradienten, aber kleinen Einfluß auf die Krümmungsgrößen hat. Ist das Terrain dagegen kuppenartig gekrümmt, so ist der Einfluß auf die Gradienten klein und groß auf die Krümmungsgrößen. Bei der Auswahl der Station wird man hierauf Rücksicht nehmen müssen.

Stellt man das Instrument hoher über den Erdboden, so wird in den Geländeformeln der Koeffizient der Konstanten b, c, d, e für den ersten Kreis merklich kleiner, für die nächsten Kreise in den Gradienten etwas größer als in den obigen Formeln. Liegt der Schwerpunkt 140 cm über dem Erdboden, so gelten an Stelle der obigen die folgenden Formeln, wobei ich mich hier nur auf wenige der ersten Ringe beschranken kann:

$$U_{xz} = \frac{\sigma}{2} E[1.366\, c_1 + 0.704\, c_2 + 0.330\, c_3 + \cdots]$$

$$-U_\Delta = \frac{\sigma}{2} E[1.424\, e_1 + 1.425\, e_2 + 1.204\, e_3 + \cdots]\cdot$$

U_{yz} und U_{xy} findet man durch Vertauschung von c mit b bzw. e mit d.

Ist die Hohe des Schwerpunkts 160 cm, so ist der Koeffizient für den ersten Kreis in den Gradienten (Faktor von c und b) 1.10 und in den Krümmungsgrößen (Faktor von e und b) 1.04. Bei 180 cm Schwerpunktshöhe gehen diese beiden Koeffizienten auf 0.88 bzw. 0.77 zurück. Die Koeffizienten für die ubrigen Kreise ändern sich naturgemäß auch etwas.

Man würde hiernach die Wirkung der allernächsten Umgebung der Station abschwachen, wenn man das ganze Instrument mittels längerer in den Boden eingeschlagener Pfähle höher stellte oder seinen Oberteil auf ein hoheres Stativ setzte. Es ist aber zweifelhaft, ob man dadurch etwas gewinnt, weil die Aufstellung des Instruments vielleicht an Festigkeit verliert und dieses leichter Erschütterungen ausgesetzt ist.

Wird das Gebiet in der Nähe der Station von einem Flusse, Graben oder Damm durchschnitten, so ist der Einfluß dieser Massen, die meist einer einfachen mathematischen Gestalt sehr ähnlich sind, gesondert zu berechnen.

Liegen dicht unter der Erdoberfläche Schichten mit einer gegen die Oberfläche stark abweichenden Dichte, z. B. Gestein unter einer dünnen Humusschicht, so kann hierdurch die zu suchende Wirkung tiefliegender Massen mehr oder minder verfälscht werden. Ist die zweite Schicht leicht, z. B. mit einem Handbohrer zu erreichen, so läßt sich ihr Einfluß in einfacher Weise berechnen. Hierüber werde ich in einer nächsten Mitteilung berichten.

Schweremessungen mit zwei und vier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingenden Pendeln.

Von **A. Berroth** in Potsdam.

Eine wesentliche Verkleinerung der Stativbewegung beim Pendeln wird dadurch erzielt, daß man die paarweise gegenüberliegenden Pendel mit möglichst 180° Phasenunterschied und Amplitudenverhältnis = 1 schwingen läßt. Es treten dann schwach gekoppelte Schwingungen auf. Hierzu sind Gebrauchsformeln angegeben, wie die ermittelten Schwingungszeiten reduziert werden müssen, um für absolut starres Stativ zu gelten.

Man arbeitet bei den Messungen der Schwerebeschleunigung jetzt allgemein mit Vierpendelapparaten. Der Grund, vier Pendel zu benutzen, liegt darin, daß bei den Pendeln die Gefahr besteht, daß sprunghafte Änderungen ihrer Länge vorkommen, und man diese Unsicherheit verringern will. Außerdem sind die kleinen