Entfernungsberechnungen von Orten auf der Erde bei kleineren Abständen.

Von **E. Wiechert.**

Im folgenden sollen bequeme Näherungsformeln angegeben werden, um für geophysikalische Zwecke Abstände von Orten auf der Erde bis zu einigen hundert Kilometern zu berechnen, wenn die geographischen Koordinaten vorgegeben sind. Der verhältliche Fehler der Formeln wächst proportional dem Quadrat des Abstandes. Es wird erreicht, daß er bis 55^0 Breite bei 660 km Abstand $^1/_{1000}$ des Wertes nicht überschreitet.

§ 1. Bezeichnungen; Grundlegendes. Mit J. F. Hayford (1909) setzen wir:

$$a = 6378.388\,\mathrm{km}; \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{296.96}; \qquad e^2 = \frac{1}{148.73} \quad \ldots \quad (1)$$

Es bezeichnet a die äquatoriale, c die polare Halbachse, $\mathfrak{a}$ die Abplattung, e die Exzentrizität:

$$\mathfrak{a} = \frac{a-c}{a}; \qquad e^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Der von F. R. Helmert aus Schwerkraftmessungen abgeleitete Wert $\mathfrak{a} = 1/296.7$ ist vielleicht besser als der Hayfordsche, doch kommt der Unterschied für uns nicht in Betracht.

B_1, B_2, L_1, L_2 geben in den Formeln die geographischen Breiten und Längen in Bogenmaß an. Mit $(B_2 - B_1)_s$ und $(L_2 - L_1)_s$ werden lineare Strecken bezeichnet werden, welche sich bei vorgegebenen Radien den Zentriwinkeln $B_2 - B_1$, $L_2 - L_1$ zuordnen. Dabei werden wir für $(B_2 - B_1)_s$ den Krümmungsradius der Erdoberflache unter 45^0 Breite im Meridian, fur $(L_2 - L_1)_s$ den Krümmungsradius ebenda senkrecht zum Meridian wählen. Es ist besonders zu beachten, daß bei dieser Festsetzung nicht nur fur $(B_1 - B_1)_s$, sondern auch für $(L_2 - L_1)_s$ zu je 1^0 der Winkeldifferenz etwa 111 km gehören. — s bedeutet den linearen (geodätischen) Abstand der Orte B_1, L_1, B_2, L_2, gemessen längs der Erdoberflache.

Unter β wird die sogenannte reduzierte Breite verstanden werden. Man denke sich um den Erdmittelpunkt zwei Kugeln mit den Radien a und c gelegt und vom Erdmittelpunkt aus einen Radiusvektor unter dem Winkel β gegen die Äquatorebene gezogen. Wird dann durch den Schnittpunkt des Radiusvektors mit der Kugel (a) das Lot auf die Äquatorebene und durch den Schnittpunkt mit der Kugel (c) das Lot auf die Erdachse gefällt, so schneiden sich die beiden Lote in jenem Punkte der Erdoberfläche, dem β zugeordnet wird. Es ist

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \qquad \cos\beta = \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\sin(\beta_2-\beta_1) = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(B_2-B_1)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \quad \ldots \quad (4)$$

$$1-e^2\cos^2\beta = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 B} \quad \ldots \quad (5)$$

Der Abstand x eines Punktes auf der Erdoberfläche mit der Breite β von der Erdachse und der Abstand z von der Äquatorebene sind gegeben durch

$$x = a\cos\beta, \qquad z = c\sin\beta \quad \ldots \quad (6)$$

In diesen einfachen Beziehungen liegt die Bedeutung der reduzierten Breite für die theoretischen Untersuchungen.

§ 2. Ableitung der Rechenformeln für die Entfernung. Der pythagoreische Lehrsatz ergibt mittels der Formeln (6) für den Sehnenabstand der beiden Punkte:

$$(\text{Sehne})^2 = a^2\left(1-e^2\cos^2\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\right)4\sin^2\frac{\beta_2-\beta_1}{2} + a^2\cos\beta_2\cos\beta_1\, 4\sin^2\frac{L_2-L_1}{2}. \quad (7)$$

Ist r der Krümmungsradius der Oberfläche dort, wo die Sehne liegt, so kann bis auf Glieder höherer Ordnung in (7)

$$(\text{Sehne})^2 = 4r^2\sin^2\frac{s}{2r} \quad \ldots \quad (8)$$

geschrieben werden. Werden nun die Sinus

$$\sin(s/2r), \quad \sin(\beta_2-\beta_1)/2, \quad \sin(L_2-L_1)/2$$

durch die Bogen ersetzt, so geht (7) über in

$$s^2 = b^2 + l^2 \quad \ldots \quad (9)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} b &= a\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{\beta_2+\beta_1}{2}}\,(\beta_2-\beta_1); \\ l &= \sqrt{\cos\beta_2\cos\beta_1}\, a(L_2-L_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

(9) werde ich weiterhin die „Pythagorasformel" für den Abstand s nennen.

Diese Formel ist nicht genau, sondern nur näherungsweise richtig. Ihre Fehler müssen wir abschätzen. Es ist bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\sin\alpha = \alpha(1-\tfrac{1}{6}\alpha^2) \quad \ldots \quad (11)$$

r liegt in der Nähe von a, für $s = 660$ km ist also $s/2r =$ etwa $1/20$. (11) lehrt, daß die Vertauschung von Sinus und Winkel dann für s einen Fehler von etwa $1/6 \cdot 20 \cdot 20 = 1/2400$ des Wertes bedingt. Entgegengesetzte Fehler entstehen rechts in (7). Am stärksten kann $(L_2 - L_1)$ wirken; wenn die Breite 55^0 erreicht wird $(\cos 55^0 =$ etwa $1/\sqrt{3})$, kann $L_2 - L_1$ etwa $\sqrt{3}$ mal so groß werden als s/r und also eine dreifache Wirkung ausüben. So ergibt die Pythagorasformel einen verhältlichen Fehler proportional mit s^2, der bei 55^0 Breite bis $s = 660$ km höchstens etwa $^1/_{1000}$ erreicht. — Die Umformungen der Werte für b und l, welche wir weiter vornehmen werden, um von der reduzierten Breite zur geographischen überzugehen, haben eine nicht merklich in Betracht kommende Verschlechterung der Genauigkeit zur Folge.

Wir beginnen mit der Umformung von b, uns gegeben durch (10). Werden in (4) die Sinus der Winkeldifferenzen durch die Winkel ersetzt, so entsteht

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}\,(B_2 - B_1)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}\,\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

Die verhältliche Umänderung der linken Seite ist dabei nach (11) $(\beta_2 - \beta_1)^2/6$, die der rechten Seite $(B_2 - B_1)^2/6$. Nehmen wir entsprechend einem Abstand von 660 km als Höchstwert von $B_2 - B_1$ den Betrag 6^0 an, so wäre $(B_2 - B_1)^2/6 = {}^1/_{600}$. Nach (12) sind $\beta_2 - \beta_1$ und $B_2 - B_1$ höchstens um $^1/_{300}$, also $(\beta_2 - \beta_1)^2$ und $(B_2 - B_1)^2$ höchstens um $^1/_{150}$ voneinander verschieden. So heben sich beim Übergang von (4) zu (12) die Fehler rechts und links bis auf weniger als 1 Proz., d. h. bis auf weniger als $^1/_{60000}$ auf. Hiernach erscheint (12) für uns gleichwertig mit (4). — Es ist

$$\left.\begin{aligned}(1-e^2\sin^2 B_2)(1-e^2\sin^2 B_1) &= \left(1-e^2\sin^2\frac{B_2+B_1}{2}\right)^2 - 2e^2\cos \\ (B_2+B_1)\sin^2\frac{B_2-B_1}{2} &- 2e^4\sin^2\frac{B_2+B_1}{2}\sin^2\frac{B_2-B_1}{2} + e^4\sin^4\frac{B_2-B_1}{2}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Bedenkt man, daß $B_2 - B_1$ höchstens entsprechend 660 km den Wert $^1/_{10}$ erhält, so folgt, daß bis auf $^1/_{60000}$

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}\,\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1} = 1 - e^2\sin^2\frac{B_2+B_1}{2} \quad \cdot \cdot \cdot (14)$$

ist. So können wir denn nun an Stelle von (12) schreiben

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}\,(B_2 - B_1)}{1 - e^2\sin^2\frac{B_2+B_1}{2}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15)$$

Nach (5) ist

$$\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{\beta_2+\beta_1}{2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$

wobei B den zu $(\beta_2 + \beta_1)/2$ gehörigen Wert bezeichnet. B und β unterscheiden sich allgemein höchstens um etwa $^1/_{10}$ Grad; selbst eine Änderung von B um 1^0 ändert $\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$ höchstens um etwa $^1/_{20000}$. Wir können also schreiben

$$\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{\beta_2+\beta_1}{2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\frac{B_2+B_1}{2}}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (16)$$

(15) und (16) zusammen, sowie eine kleine Umstellung, verwandeln die erste der Gleichungen (10) in

$$b = a \frac{(1-e^2)(B_2 - B_1)}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos(B_2 + B_1)}^{\,3}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

Für die zweite der Gleichungen (10) ergibt (3) unter Rücksicht auf (14) entsprechend

$$l = a \frac{\sqrt{\cos B_2 \cos B_2}\,(L_2 - L_1)}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos(B_2 + B_1)}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

In den Formeln (17) und (18) spiegelt sich der Umstand wieder, daß, wie bekannt, die Krümmungsradien r_m und r_n im Meridian und senkrecht dazu für die Erdoberfläche gegeben sind durch

$$r_m = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos 2B}^{\,3}}; \qquad r_n = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos 2B}} \quad \cdot\cdot (19)$$

Für praktische Rechnungen wären die Formeln (17) und (18) in Verbindung mit der Pythagorasformel (9) höchst unbequem, wenn man sie direkt verwenden wollte. Da helfen Reihenentwicklungen. Bis auf Glieder höherer Ordnung folgt:

$$\left.\begin{aligned} b &= r_m^{(45)}(B_2 - B_1)\left(1 + \frac{15}{16}\frac{e^2}{4} - \frac{3}{2}\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2B + \frac{15}{16}\frac{e^4}{4}\cos 4B\right), \\ l &= r_n^{(45)}\sqrt{\cos B_2 \cos B_1}\,(L_2 - L_1)\left(1 + \frac{3}{16}\frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2B \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16}\frac{e^4}{4}\cos 4B\right), \qquad B = \frac{B_2 + B_1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Dabei sind

$$\left.\begin{aligned} r_m^{(45)} &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2}}^{\,3}} = a\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{9}{8}\frac{e^4}{4}\right) = 6367.59\,\text{km}, \\ r_n^{(45)} &= \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{2}}} = a\left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{3}{8}\frac{e^4}{4}\right) = 6389.13\,\text{km} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot (21)$$

die Krümmungsradien im Meridian und senkrecht dazu unter 45° Breite. — Die Formeln (20) zeigen, daß es bei der von uns verlangten Genauigkeit genügt, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} b &= r_m^{(45)}(B_2 - B_1)\left(1 - 3\frac{e^2}{4}\cos(B_2 + B_1)\right), \\ l &= \sqrt{\cos B_2 \cos B_1}\, r_n^{(45)}(L_2 - L_1)\left(1 - \frac{e^2}{4}\cos(B_2 + B_1)\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot (22)$$

§ 3. **Rüstzeug für die Rechnungen.** Gemäß (22) ordnen wir den Winkeln $B_2 - B_1$ die linearen Längen $(B_2 - B_1)_s = r_m^{(45)}(B_2 - B_1)$ zu, wobei $r_m^{(45)} = 6367.59$ km den Meridiankrümmungsradius unter 45⁰ Breite bedeutet. Es folgt für Bogenminuten- und Gradanteile von $B_2 - B_1$:

Anteile von $(B_2 - B_1)_s$ in Kilometern.

B_2-B_1	$+0'$	$+1'$	$+2'$	$+3'$	$+4'$	$+5'$	$+6'$	$+7'$	$+8'$	$+9'$	$+10'$
0' . .	0.00	1.85	3 70	5 56	7 41	9 26	11.11	12.97	14.82	16 67	18.52
10' . .	18.52	20.37	22.23	24.08	25.93	27.78	29 64	31 49	33.34	35.19	37.05
20' . .	37.05	38.90	40.75	42 60	44 45	46.31	48.16	50.01	51.86	53.72	55.57
30' . .	55.57	57.42	59.27	61.12	62.98	64.83	66.68	68.53	70 39	72 24	74.09
40' . .	74.09	75.94	77 79	79 65	81 50	83.35	85.20	87.06	88 91	90.76	92.61
50' . .	92.61	94.47	96.32	98.17	100 02	101 87	103.73	105.58	107 43	109.28	111.14

$B_2 - B_1 =$	1⁰	2⁰	3⁰	4⁰	5⁰	6⁰
$(B_2 - B_1)_s =$	111.14	222.27	333.41	444.54	555.68	666.81

Ebenso werden gemäß (22) den Winkeln $L_2 - L_1$ die linearen Langen $(L_2 - L_1)_s = r_n^{(45)}(L_2 - L_1)$ zugeordnet, wobei $r_n^{(45)} = 6389.13$ km den Krümmungsradius quer zum Meridian in 45⁰ Breite bedeutet. Es folgt:

Anteile von $(L_2 - L_1)_s$ in Kilometern.

L_2-L_1	$+0'$	$+1'$	$+2'$	$+3'$	$+4'$	$+5'$	$+6'$	$+7'$	$+8'$	$+9'$	$+10'$
0' . .	0.00	1.86	3.72	5.58	7.43	9.29	11.15	13.01	14.87	16.73	18.59
10' . .	18.59	20.44	22.30	24.16	26.02	27 88	29.74	31.59	33.45	35.31	37.17
20' . .	37.17	39 03	40 89	42.75	44.60	46.46	48 32	50.18	52.04	53.90	55.76
30' . .	55.76	57.61	59.47	61.33	63.19	65.05	66 91	68.77	70 62	72.48	74 34
40' . .	74.34	76.20	78.06	79 92	81.77	83.63	85.49	87.35	89.21	91.07	92 93
50' . .	92.93	94.78	96.64	98.50	100.36	102.22	104.08	105 94	107.79	109.65	111.51

$L_2 - L_1 =$	1⁰	2⁰	3⁰	4⁰	5⁰	6⁰
$(L_2 - L_1)_s =$	111.51	223.02	334.53	446.04	557.56	669 07

Die Anteile von $(B_2 - B_1)_s$ und $(L_2 - L_1)_s$, die zu Bruchteilen der Minuten (Zehntel eventuell auch Hundertstel) gehören, kann man ohne weiteres den ersten Reihen der Tabellen für Bogenminuten entnehmen.

Die Entfernung s der Orte B_1, L_1, B_2, L_2 ergibt sich durch die Pythagorasformel

$$s^2 = b^2 + l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} b &= (B_2 - B_1)_s + \frac{(B_2 - B_1)_s}{200}\sin(B_2 + B_1 - 90^0), \\ l &= \sqrt{\cos B_2 \cos B_1}\,(L_2 - L_1)_s + \frac{\sqrt{\cos B_2 \cos B_1}\,(L_2 - L_1)_s}{600}\sin(B_2 + B_1 - 90^0). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Es sind dies mit geringen Umanderungen die Formeln (22); dabei wurde e^2 durch $^1/_{150}$ ersetzt, was erlaubt ist. Bei der Kleinheit der „Korrektur", die in (24) durch die letzten Glieder dargestellt wird, genügt es durchaus, beim Aufsuchen des Sinus den Winkel $B_2 + B_1$ auf Grad abzurunden. In gleicher Weise genügt es für l, bei dem Aufsuchen von $\cos B_2$ und $\cos B_1$ die Winkel auf ganze Minuten abzurunden.

Wer Rechenmaschine und Quadratzahlentafeln (z. B. F. G. **Gauß**, Fünfstellige Tafeln für Maschinenrechnen, Halle a. S., Verlag E. Strien, 1901) benutzt, wird die Formeln (24) quadriert anwenden:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= (B_2 - B_1)_s^2 + \frac{(B_2 - B_1)_s^2}{100} \sin(B_2 + B_1 - 90^0), \\ l^2 &= \cos B_2 \cos B_1 (L_2 - L_1)_s^2 + \frac{\cos B_2 \cos B_1 (L_2 - L_1)_s^2}{300} \sin(B_2 + B_1 - 90^0). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Um das Schreiben zu vieler Ziffern zu vermeiden, ist es nützlich, 100 oder 10 km als Längeneinheit zu wählen. — Bei logarithmischer Rechnung empfiehlt es sich, (24) zu ersetzen durch die für dekadische Logarithmen gültigen Formeln

$$\left.\begin{aligned} \log b &= \log(B_2 - B_1)_s && + 0.0022 \sin(B_2 + B_1 - 90^0), \\ \log l &= \log\left(\sqrt{\cos B_2 \cos B_1}\,(L_2 - L_1)_s\right) && + 0.0007 \sin(B_2 + B_1 - 90^0). \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Fuhrt man dann durch

$$\operatorname{tg} q = \frac{l}{b} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (27)$$

die Hilfsgröße q ein, so ergibt sich s mittels

$$s = \frac{b}{\cos q} = \frac{l}{\sin q} \quad \dots\dots\dots\dots (28)$$

Hier ist die Verwendung von $b/\cos q$ oder $l/\sin q$ zu vermeiden, wenn b oder l sehr klein ist. — Die genaueren Werte der Zahlenfaktoren in den Korrekturen von (26) sind 0.002 17 und 0.000 72. Eine Einheit in der vierten Stelle der Logarithmen bedeutet $^1/_{4348}$. Man wird die fünfte Stelle also meist gar nicht oder doch nur in Annaherung zu berücksichtigen brauchen.

Der verhältliche Fehler unserer Formeln darf — abgesehen von der eben besprochenen kleinen Ungenauigkeit der Korrekturen in (26) — proportional mit dem Quadrat des Abstandes angenommen werden. Der für sich genommene maximale Fehler wächst demgemäß proportional mit der dritten Potenz des Abstandes. Bei 660 km erreicht der verhältliche Fehler höchstens $^1/_{1000}$, der für sich genommene Fehler höchstens etwa $^2/_3$ km. Dies gilt bis 55^0 Breite, bei 60^0 Breite sind die möglichen Fehler $^3/_2$ mal so groß.

Die neue Isoseistenkarte des mitteldeutschen Erdbebens vom 6. März 1872.

Von Prof. Dr. **J. Gómez de Llarena,** Gijón — (Mit einer Abbildung.)

Das Epizentrum des sehr heftigen mitteleuropäischen Erdbebens vom 6. Marz 1872 verlegte v. Seebach auf Grund einer Bearbeitung nach der Homoseistenmethode nach Gehren (Thüringer Wald). Die wesentlich sicherere Isoseistenmethode ergibt dagegen, wie nachstehend gezeigt wird, als Epizentrum das Bruchfeld von Posterstein bei Gera.

Für eine Reihe bedeutungsvoller Erdbeben, die in Deutschland während der zweiten Halfte des verflossenen Jahrhunderts aufgetreten sind, liegen ausführliche monographische Bearbeitungen vor. So verdienstlich sie fur ihre Zeit auch