Eine Berechnung des horizontalen Wärmeaustausches in der Atmosphäre mit Hilfe der Stratosphärentemperatur.

Von **R. Mügge.** — (Mit fünf Abbildungen.)

Die Stratosphärentemperatur T_φ ist wesentlich bestimmt durch die kurzwellige Zustrahlung I_φ und die langwellige Rückstrahlung. Die Differenz beider ist ein Maß für die Energiebeträge R_φ, die in der Breite φ innerhalb der Troposphäre durch horizontalen Wärmetransport den Strahlungsströmen entnommen oder zugefügt werden. Aus der bekannten Zustrahlung und T_φ ist daher die Berechnung dieser Energiemengen R_φ für jede Breite möglich. Hieraus folgt weiter die Berechnung des ganzen die Troposphäre durchsetzenden Wärmestroms $\overline{R}_\varphi$. Aus der Randbedingung, daß dieser Strom am Äquator und am Pol verschwinden muß, folgt eine bestimmte Temperaturverteilung in der Stratospäre, die mit den Beobachtungen in guter Übereinstimmung steht.

Wenden wir die Theorie des Strahlungsgleichgewichts in einer Sternatmosphäre, wie sie von Schwarzschild, Gold und Emden ausführlich entwickelt worden ist, auf die Erdatmosphäre an, so erhalten wir eine Erklärung für die in der Stratosphäre beobachtete vertikale Temperaturkonstanz. Auch die Temperatur der Stratosphäre selbst ist unter der Annahme geeigneter Konstanten mit der Theorie in Einklang zu bringen, doch gelingt es nicht, die in der Stratosphäre beobachteten Temperaturänderungen nach Ort und Zeit mit den strahlungstheoretischen Überlegungen zu deuten. Diese Schwankungen zeigen nämlich eine sehr eigentümliche Beziehung zu den parallel gehenden Temperaturänderungen im unteren Teil der Troposphäre und lassen sich durch die einfache Gesetzmäßigkeit beschreiben: Die Stratosphäre ist um so kälter und ihre untere Grenze liegt um so höher, je wärmere Luft wir in den unteren Schichten der Troposphäre vorfinden.

Die erwähnte Anwendung der Strahlungstheorie liefert uns die Stratosphärentemperatur als eine Funktion der zugeführten kurzwelligen Sonnenstrahlung, der von Erde und Troposphäre zurückgesandten und im wesentlichen langwelligen Wärmestrahlung, der Albedo der Erde und gewisser Absorptionskoeffizienten a und b, für kurze und lange Wellen, deren numerische Werte sich aus der Absorption und Emission des Wasserdampfes als dem für die Strahlung der Atmosphäre wichtigsten Bestandteil ergeben.

Im Mittel, d. h. für die Erde als Ganzes ist zugeführte und ausgesandte Strahlung gleich, da die Erde als Ganzes ihre Temperatur nicht merklich verändert. Indem nun jedes Volumenelement der Stratosphäre gleiche Mengen Strahlungsenergie absorbiert wie emittiert, stellt es sich auf eine ganz bestimmte Temperatur ein, die wir die Temperatur des Strahlungsgleichgewichts nennen. Für größere Höhen ist sie nach folgender einfachen Formel darstellbar*):

$$\sigma . T^4 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

*) Die Formel ist, der Emdenschen Theorie folgend, in meiner Arbeit: Beitrag zur Kenntnis der warmen Hochdruckgebiete, Gött. Dissert. 1921, S. 24, abgeleitet.

Hier ist J die effektiv zur Verfügung stehende Zustrahlung, abhängig von Solarkonstante, Albedo und geographischer Breite, a und b die erwähnten Absorptionskoeffizienten des Wasserdampfes für kurze und lange Wellen, und endlich σ die bekannte Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes. Die Gleichung (1) gilt nur für die Stratosphäre, d. h. für solche Höhen, in denen bereits Unabhängigkeit der Temperatur von der Höhe eingetreten ist. Wie Hergesell*) gezeigt hat, würden wir diese vertikale Temperaturkonstanz schon gleich vom Erdboden an vorfinden, wenn die Strahlungsvorgänge allein maßgebend wären. Die Vertikalbewegungen mit ihrer thermodynamischen Temperatureinstellung verdecken dies Bild, es muß aber betont werden, daß die Dicke dieser „thermodynamischen Schicht“ oder die Ränder der Troposphäre wieder durch zwei Strahlungsgrößen bestimmt werden; denn einerseits ist die Temperatur des Bodens und damit die Temperatur am unteren Rande der Troposphäre abhängig von der Größe der zugeführten Sonnenstrahlung, andererseits bestimmt die Strahlungstemperatur der Stratosphäre die tiefsten Temperaturwerte, welche die darunter befindlichen Luftmassen der Troposphäre durch dynamische Vorgänge noch erreichen können. Dringen diese infolge gewisser Trägheitsbewegungen einmal in die Stratosphäre ein, so müssen sie doch bei weiterem Aufsteigen einen immer mehr zunehmenden Abtrieb in der wärmeren Umgebung erfahren. Die häufig an der Stratosphärengrenze beobachtete Inversion kann von solchen Trägheitsbewegungen, im übrigen auch von seitlicher Advektion herrühren, indem Luftmassen der Substratosphäre aus Gebieten mit kälterer Stratosphäre nach solchen wärmerer transportiert werden.

Es ist nun sofort klar, daß wir mit der Gleichung (1) um so höhere Temperaturen errechnen, je größer die effektive Zustrahlung ist. Diese ist abhängig von Breite und Albedo. Rechnen wir mit der Solarkonstanten $J_0 = 2$ cal/min und cm², so wird für die Breite φ die pro Minute einem Quadratzentimeter zugestrahlte Wärmemenge im Mittel von Tag und Nacht:

$$J_\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \cos\varphi = 2/\pi \,.\, \cos\varphi = 0{,}636 \,.\, \cos\varphi \text{ cal/min und cm}^2.$$

Berücksichtigen wir noch die Albedo, die nach neueren Messungen zu etwa 43 Proz. angenommen werden muß, so wird die effektive Zustrahlung in der Breite φ:

$$J_\varphi = 0{,}636 \,.\, 0{,}57 \,.\, \cos\varphi = 0{,}363 \,.\, \cos\varphi \text{ cal/min und cm}^2.$$

Der Quotient a/b ist das Verhältnis der beiden Absorptionskoeffizienten für kurze und lange Wellen, bezogen auf Wasserdampf. Da dieser lange Wellen ungleich stärker absorbiert als kurze, so wird a/b eine kleine Zahl, deren Betrag sich aus dem Maße ergibt, in dem einerseits die kurzwellige Sonnenstrahlung bei ihrem Lauf durch die Atmosphäre herab geschwächt; andererseits die dunkle Erdstrahlung auf dem Wege nach oben absorbiert wird. Abbot und Fowle haben nach solchen Messungen das Verhältnis a/b zu dem Wert 0,046 bestimmt. Unter Zugrundelegung dieses Wertes und unter Einsetzen der Konstante $\sigma = 7{,}68 \,.\, 10^{-11}$

---

*) Arbeiten des Preußischen aeronautischen Observatoriums bei Lindenberg; Bd. 13. wissensch. Abhdl.

erhalten wir aus Gleichung (1) für verschiedene Breiten folgende Strahlungstemperaturen für die Stratosphäre:

$\varphi =$	0^0	30^0	60^0	90^0 Breite,
$J_\varphi =$	0,363	0,315	0,182	0 cal/min u. cm²,
$T =$	223^0	216^0	188^0	0^0 abs.,
oder $T' =$	-50^0	-57^0	-85^0	-273^0 C,
während $T'' =$	etwa -80^0	etwa -65^0	etwa -50^0	? C

als Beobachtungswerte gelten müssen. Nun hat es nicht an Versuchen gefehlt, diesem Mißverhältnis zwischen Theorie und Beobachtung abzuhelfen, durch sorgfältige Berücksichtigung der Verteilung des Wasserdampfes, der Auswahl der Konstanten, der Albedo usw., doch haben alle derartigen Überlegungen zu einem numerisch befriedigenden Resultat bisher noch nicht geführt. Wie die Gleichung (1) zeigt, steht das Verhältnis a/b in der Klammer $(1 + a/b)$, und daher ist bei der Kleinheit dieses Verhältnisses die Temperatur T nur schwach von a/b abhängig. Erst wenn wir a/b größer annehmen, wenn wir also stärkere Absorption auch der kurzen Wellen zulassen, gewinnt $(1 + a/b)$ an Einfluß, und die errechneten Temperaturwerte des Strahlungsgleichgewichts liegen höher. Ob diese stärkere selektive Absorption der kurzen Wellen dem Wasserdampf oder anderen an der Zusammensetzung der Atmosphäre beteiligten Stoffen zuzuschreiben ist, bleibt dabei belanglos. Für sehr hohe Schichten der Atmosphäre, etwa für das Gebiet oberhalb 30 km Höhe, hat diese theoretische Tatsache eine Bedeutung, da die Beobachtungen auf eine allmähliche Zunahme der Strahlungstemperaturen mit der Höhe innerhalb der Stratosphäre hinweisen.

Um den merkwürdigen Temperaturverlauf in der Stratosphäre vom Pol zum Äquator zu erklären, könnte man neben einer eingehenderen Betrachtung der Absorptions- und Emissionsverhältnisse auch an eine genauere Berücksichtigung der Albedo denken, welche in der Tat in den Tropen größer sein dürfte als in den wolkenärmeren höheren Breiten. Nimmt man jedoch für 0^0 Breite eine Albedo derart, daß Gleichung (1) die dort beobachtete Stratosphärentemperatur von -80^0 C ergibt (es würde dann die äquatoriale Albedo etwa 70 Proz. betragen), so müßten auch die Bodentemperaturen daselbst gegenüber den benachbarten Gegenden mit kleinerer Albedo eine Verminderung zeigen. Dies ist aber nicht der Fall.

Bei stark überwiegender Absorption der langwelligen Wärmestrahlung, wie wir sie für den unteren Teil der Stratosphäre noch als geltend annehmen müssen, ist für die Temperatur wesentlich maßgebend die zur Verfügung stehende Menge solcher langwelligen Strahlung. Diese ist nun aber durchaus nicht überall gleich der Menge herabgesandter kurzwelliger Sonnenstrahlung, da bei den Wärmeprozessen der Troposphäre und namentlich in deren unteren Schichten Wärmemengen durch horizontale Konvektion fort- oder herbeigeschafft werden. Hierdurch wird der in den Weltenraum zurückgehende Strom langwelliger Strahlung je nachdem vermindert oder vermehrt, was auf die Temperatur der hohen durch diese Strahlung geheizten Schichten einen starken Einfluß haben muß. Sind die Wärmeprozesse der Troposphäre einigermaßen stationär, wie beispielsweise in den Tropen oder in den warmen Hochdruckgebieten höherer Breiten, so kann in den hohen Schichten auch jetzt wieder Strahlungsgleichgewicht eintreten, indem jedes Volumenelement gleiche Strahlungsmengen absorbiert wie emittiert, dabei aber einen einseitig gerichteten Strahlungsstrom fortwährend hindurchläßt.

Auch in diesem allgemeineren Falle ist für große Höhen die mathematische Beziehung der einzelnen Größen leicht darstellbar; neben den aus der Formel (1) bekannten Gliedern tritt jetzt noch jene Energiemenge R auf, die unterhalb der Stratosphäre in einer Säule von Troposphärenhöhe und 1 cm² Querschnitt pro Zeiteinheit nach seitwärts heraus- oder von seitwärts hereintransportiert wird. Die jetzt zur Berechnung der Temperatur dienende Formel lautet *):

$$\sigma . T^4 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (1 + a/b) - \frac{1}{2} \cdot R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

R kann positiv oder negativ sein. Im ersten Falle haben wir ein Einstrahlungsgebiet, d. h. ein Gebiet, in dem mehr eingestrahlt als ausgestrahlt wird. Der Überschuß der eingestrahlten über die ausgestrahlte Energie beträgt pro Minute und Quadratzentimeter R cal. Solche Gebiete sind die warmen Zonen der Erde, die für den Wärmehaushalt der Atmosphäre als Sammelstellen potentieller Energie eine wichtige Rolle spielen. Ihre Wärmeabgabe an die Nachbarschaft ist nun so groß, daß der in den Weltenraum zurückgehende langwellige Strahlungsstrom verhältnismäßig sehr klein wird, und daher sehr tiefe Stratosphärentemperaturen gerade über solchen unten warmen Gebieten eintreten können. Das Umgekehrte ist der Fall in Ausstrahlungsgebieten, welche innerhalb der Troposphäre Wärme zugeführt bekommen. Neben der hohen Stratosphärentemperatur zeigen sie das typische Kennzeichen für die Vermehrung der Entropie oder die Umwandlung von Wärme höherer in solche niederer Temperatur, nämlich das stärkere Auftreten anderer Zwischenformen der Energie, insbesondere der Bewegungsenergie.

Die Gleichung (2) gestattet nun, für eine bestimmte Menge zugeführter Strahlungsenergie und eine bestimmte Strahlungstemperatur T jene Energiemenge R zu berechnen, die in der darunterliegenden konvektiven Zone fort- oder herbeigeschafft wird. Da T einen ganz bestimmten Gang mit der geographischen Breite φ zeigt, soll hier der Versuch gemacht werden, den entsprechenden in der Troposphäre bestehenden Energiestrom zu berechnen, wobei wir die Sonne als im Äquator stehend annehmen wollen.

Die in der Minute einem Quadratzentimeter unter der Breite φ zugeführte Sonnenstrahlung betrug unter Berücksichtigung der Albedo:

$$J_\varphi = 2/\pi \,.\, 0.57 \,.\, \cos \varphi = 0.363 \,.\, \cos \varphi \text{ cal} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Stratosphärentemperatur in der Breite φ wollen wir durch die empirische Funktion

$$T_\varphi = p + q \,.\, \sin \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ausdrücken, wo p und q zwei noch zu bestimmende Parameter sind **). Zu ihrer Bestimmung gehen wir aus von einem mehrfach geprüften Beobachtungswert

---

*) Vgl. meine erwähnte Arbeit, S. 34.

**) Statt der hier gewählten Sinusfunktion für T_φ hätten wir auch eine andere, z. B. lineare Funktion ($T_\varphi = p + q \,.\, \varphi$) annehmen können, ohne das Resultat wesentlich zu beeinflussen; nur gestaltet sich die spätere Integration dann weniger bequem.

der Stratosphärentemperatur, nämlich $T = -53^0$ C oder 220^0 abs., wie er in Europa unter rund 52^0 Breite im Mittel beobachtet wird. Setzen wir den entsprechenden Wert für $\sin \varphi = 0.789$ in Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$220 = p + 0.789 \, . \, q \quad \text{oder} \quad p = 220 - 0.789 \, . \, q \quad . \; . \; . \; . \quad (4\,\mathrm{a})$$

als erste Bestimmungsgleichung für p und q. Eine zweite erhalten wir aus folgender Überlegung: Die Energiemenge R, welche innerhalb der Troposphäre pro Quadratzentimeter heraus- oder hereingeschafft wird, berechnet sich nach Gleichung (2) zu:

$$R_\varphi = J_\varphi \, . \, (1 + a\, b) - 2 \, . \, \sigma \, . \, T_\varphi^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2\,\mathrm{a})$$

Ein Ring in der Breite φ und der Randausdehnung $r \, . \, \varDelta_\varphi$ liefert oder entzieht mithin den horizontalen Konvektionsströmen pro Minute die Wärmemenge:

$$2 \, . \, r^2 \, . \, \pi \, . \cos \varphi \, . \, R_\varphi \, . \, \varDelta_\varphi .$$

Für die ganze die Atmosphäre durchsetzende Konvektionsströmung liefert nun jeder Ring einen derartigen Beitrag, so daß bei stationärem Zustande die gesamte Energiemenge, welche über den begrenzenden Parallelkreis in der Breite φ mit den Konvektionsströmen hinwegschreitet, sich nach der Gleichung berechnet:

$$R_\varphi = 2 \, . \, r^2 \, . \, \pi \, . \int\limits_0^\varphi R_\varphi \, . \cos \varphi \, . \, d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Dieser Gesamtstrom muß aber am Pol verschwinden, so daß wir als Randbedingung haben:

$$0 = 2 \, . \, r^2 \, . \, \pi \, . \int\limits_0^{\pi/2} R_\varphi \, . \cos \varphi \, . \, d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5\,\mathrm{a})$$

Unter Einsetzung der Gleichungen (2a), (3) und (4) erhalten wir die Gleichung

$$0 = 2 \, . \, r^2 \, . \, \pi$$

$$\cdot \left[\int\limits_0^{\pi/2} 0.363 \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi - 1.536 \cdot 10^{-10} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} (p + q \cdot \sin \varphi)^4 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right]$$

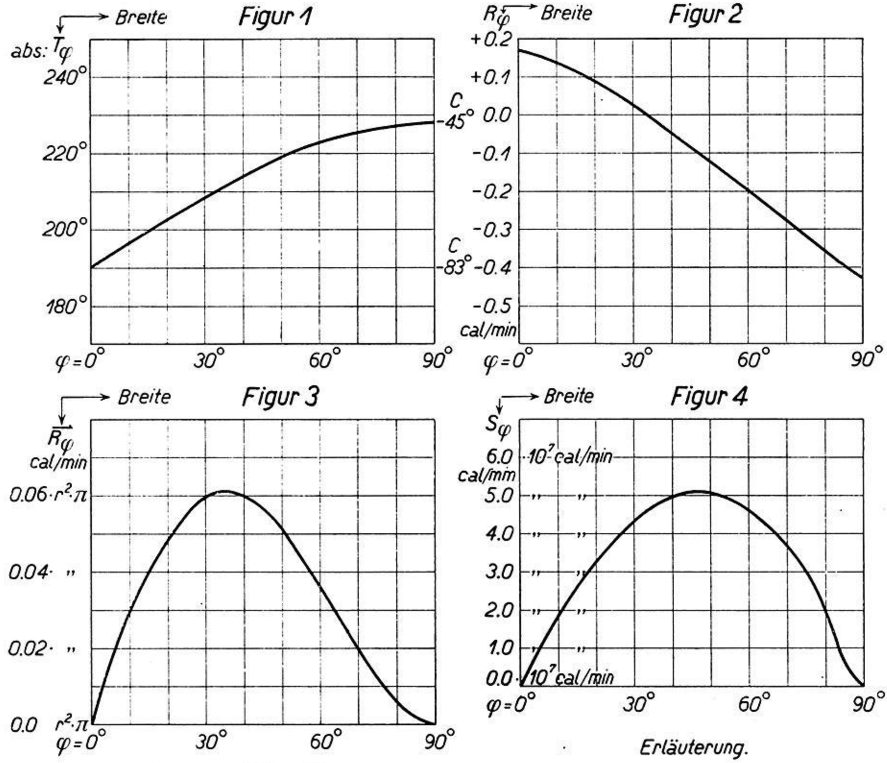
und nach Ausführung des Integrals

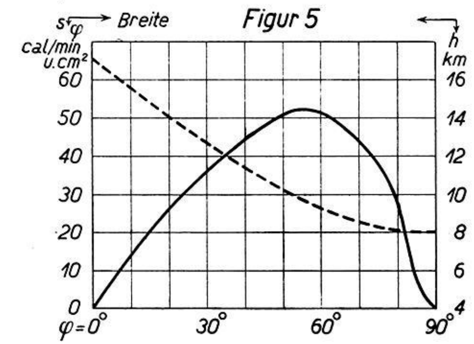
$$0 = 0.298 - 1.536 \, . \, 10^{-10} \, (p^4 + 2 \, . \, p^3 \, . \, q + 2 \, . \, p^2 \, . \, q^2 \, . + p \, . \, q^3 + 0.2 \, . \, q^4)$$

als zweite Bestimmungsgleichung für p und q.

Wir setzen ein $p = 220 - 0.789 \, . \, q$ nach Gleichung (4a) und erhalten als reellen positiven Lösungswert $q = 38.0$ und damit aus (2a): $p = 190$.

Mit diesen beiden Zahlwerten ergibt sich nach Gleichung (4) für jede Breite die Stratosphärentemperatur, wie wir sie durch die in Fig. 1 gezeichnete Kurve graphisch dargestellt haben. Danach finden wir am Pol -45^0 C, unter 30^0 Breite -64^0 C, und am Äquator -83^0C in guter Übereinstimmung mit den bisher vorliegenden Beobachtungswerten. Diese Übereinstimmung darf man als Beweis für die Richtigkeit unserer Annahmen ansehen, nicht nur des Ausgangswertes 220^0 abs. als Stratosphärentemperatur unter 52^0 Breite, sondern auch für die Brauchbarkeit der Formel (2a) zur Berechnung der Wärmemenge R_φ, welche den horizontalen Wärmeumsatz in der Troposphäre mißt. Das Ergebnis einer solchen Berechnung ist in der Tabelle der folgenden Seite sowie durch die Fig. 2 dargestellt. Danach herrscht wirkliches Gleichgewicht, also Ausstrahlung gleich Einstrahlung, unter etwa 35⁰ Breite, weiter äquatorwärts ist die Einstrahlung,





Erläuterung.

Fig. 1: Stratosphärentemperatur T_φ.

Fig. 2: Wärmemenge R_φ, welche pro Minute einer Troposphärensäule von ein cm² Querschnitt entzogen ($R_\varphi > 0$) oder zugeführt wird ($R_\varphi < 0$)

Fig. 3: Wärmemenge $\overline{R_\varphi}$, welche pro Minute den Parallelkreis in der Breite φ überschreitet.

Fig. 4: Stromdichte S_φ, welche pro Minute in der Breite φ ein Rechteck von ein cm Basis und Troposphärenhöhe durchsetzt.

Fig. 5: Auf den cm² berechnete Stromdichte s_φ, welche pro Minute in der Breite φ durch einen vertikal stehenden Quadratcentimeter strömt; gestrichelt: Höhe der Troposphäre.

polwärts die Ausstrahlung überwiegend. Am Pol, wo die Einstrahlung $J_\varphi = 0$ ist, bekommt doch jede Luftsäule von 1 cm² Querschnitt noch etwa 0.4 cal pro Minute zugeführt, ein Betrag, der absolut noch die am Äquator zugestrahlte kurzwellige Energie übertrifft.

Die Auswertung des in Gleichung (5) wiedergegebenen Integrals zwischen den Grenzen 0 und φ gibt für jede Breite φ die Gesamtenergiemenge $\overline{R}_\varphi$ an, die zwischen Äquator und dem Parallelkreis der Breite φ pro Minute der horizontalen Strömung zugeführt wird. Diese Energiemenge, die wir in der vierten Spalte der folgenden Tabelle von 9 zu 9 Grad berechnet finden, stellt gleichzeitig

φ	T abs.	R_φ	$\overline{R}_\varphi : \cdot r^2 \pi \cdot 2$	$S_\varphi \cdot 10^7$	h : km	s_φ
0^0	190	+ 0.175	0.0000	0.000	17.0	0.0
9	196	+ 0.147	0.0275	1.772	15.6	11.8
18	202	+ 0.106	0.0453	3.03	14.3	23.3
27	207	+ 0.053	0.0574	4.10	13.0	32.5
36	212	— 0.008	0.0606	4.77	11.8	40.6
45	217	— 0.074	0.0561	5.05	10.8	47.3
54	221	— 0.142	0.0458	4.95	9.8	51.4
63	224	— 0.214	0.0310	4.35	9.0	48.7
72	226	— 0.281	0.0171	3.53	8.4	41.4
81	227	— 0.350	0.0046	1.88	8.1	23.5
90	228	— 0.418	0.0000	0.00	8.0	0.0

den Wärmestrom dar, der bei stationärem Zustande über den nördlich oder südlich gelegenen Begrenzungskreis hinwegwandert. Er wächst vom Werte 0 unter dem Äquator an bis zu einem Maximum unter etwa 35^0 Breite, wo R_φ das Vorzeichen wechselt und das Einstrahlungsgebiet in ein Ausstrahlungsgebiet übergeht. Dividieren wir diesen Wärmestrom $\overline{R}_\varphi$ durch $2 . r . \pi . \cos \varphi$, so erhalten wir die Stromdichte S_φ, d. h. jene Wärmemenge, welche pro Minute ein Rechteck von der Basis 1 cm und der Höhe der Troposphäre durchsetzt. Zwischen 0^0 und 35^0 Breite, dem „Quellgebiet" dieses Stromes, nimmt der Querschnitt des Strombettes langsam ab, weiterhin „versickert" der Strom allmählich, infolge der jetzt immer stärker werdenden Querschnittsverengerung wächst aber die Stromdichte S_φ zunächst noch weiter an. Ihr Maximum liegt erst unter 45^0 Breite. Die sich hier überlagernden Einflüsse spiegeln sich in der eigenartigen Form der Fig. 4 wieder, welche die Stromdichte S_φ als Funktion der Breite darstellt.

Endlich zeigt die Fig. 5 noch die auf den Quadratzentimeter berechnete Stromdichte s_φ. Wir erhalten sie durch Division von S_φ mit der jeweiligen Troposphärenhöhe h_φ unter der Breite φ. Diese ist nach der empirischen Formel

$$h_\varphi = (17 - 9 . \sin \varphi) . \mathrm{km}$$

berechnet und ebenfalls in der Fig. 5 zur Darstellung gebracht. Das Maximum der Stromdichte s_φ verschiebt sich nun noch weiter polwärts bis unter etwa 56^0 Breite, wo rund 50 cal pro Minute durch einen vertikal stehenden Quadratzentimeter transportiert werden. Diese Zahl steht ihrer Größenordnung nach in guter Übereinstimmung mit dem Resultat der Defantschen Berechnungen*); außerdem erscheint es sehr bemerkenswert, daß das Maximum des horizontalen Wärmetransports sich in Breiten findet, die durch besonders starke Luftbewegung ausgezeichnet sind.

Göttingen, den 24. Oktober 1925.

*) Geografiska Annaler 1921, Heft 3, S. 209.