

## **Werk**

**Jahr:** 1927

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:3

**Werk Id:** PPN101433392X\_0003

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X\\_0003](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0003) | LOG\_0034

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Über die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität und die Dichte eines engmaschigen Netzes von Pendelstationen\*).

Von **Karl Jung**. — (Mit sieben Abbildungen.)

Die Pendelmessungen von Berroth über dem Salzhorst Oldau-Hambühren zeigen die Möglichkeit der genaueren Vermessung eines Gebietes mit einem engmaschigen Netz von Pendelstationen. Während bei großen Stationsabständen Untersuchungen über die notwendige Dichte des Stationsnetzes eine geringe Rolle spielen, sind bei kleinen Abständen derartige Überlegungen wichtig, um unnötige Arbeit zu sparen. — In zwei Stationen  $B_1$  und  $B_2$  sei die Schwere gemessen. Zwischen  $B_1$  und  $B_2$  kann die Schwere nicht um beliebige Beträge von den in diesen Stationen gemessenen Werten abweichen, da die Einbettungen nur endliche Dichteunterschiede gegen ihre Umgebung haben und der Verlauf der Schwere stetig ist. Für den Fall, daß die Schwere in  $B_1$  gleich der in  $B_2$  ist, wird die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität zwischen  $B_1$  und  $B_2$  unter Annahme „zweidimensionaler“ Massenordnungen berechnet, abhängig von den Tiefen  $t$  und  $T$ , zwischen denen sich die Einbettung erstreckt. Auch die Massenordnung, die diese Schwankung verursacht, wird angegeben. Aus den Ergebnissen wird die Mindestentfernung bestimmt, die die Stationen  $B_1$  und  $B_2$  haben müssen, damit die Schwankung der Schwereintensität im Intervall  $B_1 B_2$  die Genauigkeit des Pendels erreicht. Erst von dieser Entfernung an hat es Sinn, Zwischenstationen einzulegen.

### A. Fragestellung.

Bisher waren die Arbeitsgebiete des Pendels und der Drehwage so verteilt, daß dem Pendel in weitmaschigen Stationsnetzen mit Abständen von mehreren Kilometern Entfernung die Bestimmung der Intensität im großen zukam, während die Drehwage in Abständen von höchstens einigen hundert Metern die Bestimmung der Schweregradienten vornahm und so der Vermessung im kleinen diene, insbesondere praktischen Zwecken, z. B. der Auffindung nutzbarer Lagerstätten. In letzter Zeit jedoch tauchen Fragen auf, die die Verwendung des Pendels in engmaschigen Stationsnetzen teils notwendig machen, teils als der Anwendung der Drehwage ebenbürtig, wenn nicht gar überlegen erscheinen lassen.

Eine während der Abfassung der vorliegenden Arbeit erschienene Veröffentlichung von Berroth<sup>1)</sup> zeigt, daß das Pendel zur Vermessung eines Salzhorstes durchaus geeignet ist. Überlegen ist es der Drehwage, wenn eine Schwereänderung mit einem kleinen Gradienten sich über ein größeres Gebiet erstreckt. So ist z. B. aus Amerika ein Fall bekannt, in dem auf eine Entfernung von 30 km eine Schweredifferenz von  $10 \cdot 10^{-3}$  cgs/Einheiten festgestellt ist. Da die Genauigkeit des Pendels bis zu  $1 \cdot 10^{-3}$  cgs/Einheiten beträgt, ist diese Schweredifferenz leicht zu messen. Der Gradient von etwa  $3.3 \cdot 10^{-9}$  cgs/Einheiten liegt zwar noch über der Genauigkeitsgrenze der Drehwage — etwa  $1 \cdot 10^{-9}$  cgs/Einheiten —; da aber die nur ungenau fest-

\*) Die vorliegende Arbeit ist ein Teil einer Dissertation, die im Geodätischen Institut zu Potsdam auf Anregung von Herrn Prof. Angenheister entstanden ist.

stellbaren Geländekorrekturen den zehnfachen Betrag erreichen können und das Ergebnis stark fälschen, ist eine Vermessung dieses großen Gebiets mit der Drehwage als aussichtslos zu betrachten.

Allein verwendbar ist das Pendel bei Schweremessungen auf der See, da man die Drehwage bekanntlich nur auf festem Boden anwenden kann. Die Schweremessungen mit dem Pendel geben, wie v. Meinesz<sup>2)</sup> gezeigt hat, die Schwereintensität auf 4 bis  $5 \cdot 10^{-3}$  cgs/Einheiten genau an, also nur wenig ungenauer als auf dem Lande. Wegen des großen Dichteunterschiedes zwischen dem Meerwasser und den Gesteinen am Grunde des Ozeans sind verhältnismäßig große Schweredifferenzen zu erwarten, und deshalb ist selbst eine Vermessung im kleinen nicht als aussichtslos zu betrachten. Eine solche Vermessung kann einerseits bei bekanntem Dichteunterschied zur genaueren Bestimmung des Bodenreliefs nützlich sein, andererseits kann versucht werden, bei bekanntem Bodenrelief die Dichte des Ozeanbodens zu ermitteln, ein Problem, das für die Theorie der Kontinentalverschiebung und der Isostasie von Wichtigkeit ist und das nur durch eine Fernmethode gelöst werden kann, da man bei Lotungen nur Proben der allerobersten Sedimentschicht erhält.

Bei den weitmaschigen Stationsnetzen spielen Überlegungen über den Stationsabstand eine untergeordnete Rolle. Bei engmaschigen Netzen dagegen sind derartige Betrachtungen notwendig, um unnötige Arbeit zu vermeiden. Da die Schwere als erster Differentialquotient des Schwerepotentials überall stetig ist und die Dichteunterschiede in ihrem Betrag beschränkt sind, können zwischen je zwei Stationen keine beliebig großen Schwankungen der Schwereintensität vorkommen. Der mögliche Betrag der Schwankung zwischen zwei bereits vermessenen Pendelstationen ist proportional dem Dichteunterschied der die Schwankung verursachenden Masseneinbettung gegen ihre Umgebung und proportional der Entfernung der beiden Stationen, wie weiterhin gezeigt werden soll. Liegen die Stationen bereits so dicht, daß die Schwankungen unter der Genauigkeit des Pendels bleiben, so ist es sinnlos und bedeutet eine Verschwendung von Zeit und Arbeit, wenn man Zwischenstationen einlegt.

So ergibt sich die Notwendigkeit, Betrachtungen über die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität zwischen zwei Stationen anzustellen. Kann man eine bestimmte Tiefe angeben, bis zu der keine Masseneinbettungen vorkommen, und eine Tiefe, bis zu der sie hinabreichen, so braucht man nur mit geringeren Schwankungen zu rechnen, kommt also mit einem weitmaschigeren Stationsnetz aus, als wenn man gar nichts über die Masseneinbettungen aussagen kann. So ergibt sich die Frage nach der größten möglichen Schwankung der Schwereintensität zwischen den vermessenen Stationen, nach der Massenanordnung, die diese Schwankung verursacht, und nach der Antwort auf diese beiden Fragen, wenn die beiden Tiefen bekannt sind, zwischen denen sich die Einbettung erstreckt.

Daß unter einfachen Annahmen eine strenge mathematische Lösung dieser Fragen möglich ist, sollen die folgenden Ausführungen zeigen.

## B. Theoretische Untersuchungen.

**I. Definition und vereinfachende Annahmen.** In den Stationen  $B_1$  und  $B_2$  sei die Schwereintensität gemessen. Sie werde mit  $S_{B_1}$  und  $S_{B_2}$  bezeichnet.  $A$  sei der Punkt im Intervall  $B_1B_2$ , in dem die Schwereintensität den größten Betrag aufweist.  $A$  kann zwischen  $B_1$  und  $B_2$  liegen oder mit einem dieser Punkte zusammenfallen. Unter Schwankung sei die Differenz zwischen der Schwere in  $A$  ( $S_A$ ) und dem arithmetischen Mittel von  $S_{B_1}$  und  $S_{B_2}$  verstanden. Es ist demnach zu untersuchen, bei welcher Massenanordnung die Differenz  $S_A - \frac{S_{B_1} + S_{B_2}}{2}$  den größten möglichen Betrag erreicht und wie hoch dieser Betrag ist.

In dieser allgemeinen Form ist das Problem der mathematischen Behandlung schwer zugänglich. Deshalb werden vereinfachende Annahmen gemacht.

1. Die Erdoberfläche wird als eine Ebene angesehen. Es werden somit alle Einflüsse des Terrains als bereits wegkorrigiert angenommen, und die Gültigkeit der folgenden Untersuchungen werden auf den Bereich beschränkt, in dem man von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann. Die Annahme der Erdoberfläche als Ebene und der Erde als Halbraum läßt unendlich große Massenanordnungen zu. Da selbst sehr weit entfernte Masseneinbettungen, wenn sie nur hinreichend groß sind, erhebliche Wirkung auf die Differenz  $S_A - \frac{S_{B_1} + S_{B_2}}{2}$  haben können, ist diese Annahme nicht ohne Einfluß auf das Resultat. Daß sie im vorliegenden Falle die praktische Verwendbarkeit der Resultate nicht beeinträchtigt, wird sich später zeigen.

2. Die Erde und die Masseneinbettung werden homogen vorausgesetzt, so daß nur ein Dichteunterschied besteht. Kommen Einbettungen mit verschiedener Dichte vor, so gibt es mehrere Dichteunterschiede, und man kann je nach dem Ziel der Untersuchung einen mittleren oder den größten Dichteunterschied den Betrachtungen zugrunde legen.

Setzt man die Annahmen 1. und 2. voraus, so ist die ungestörte Schwere, d. h. die Schwere bei einer überall homogenen Erde, konstant. Bezeichnet man ihren Wert mit  $g$  und die Wirkung einer hinzukommenden Einbettung mit  $W$ , so folgt wegen  $S = g + W$ :

$$S - \frac{S_{B_1} + S_{B_2}}{2} = W - \frac{W_{B_1} + W_{B_2}}{2},$$

und es genügt also, die Wirkung der Einbettung allein zu betrachten.

3. Die Einbettung möge einfach zusammenhängend sein.

4. Es werden nur sogenannte „zweidimensionale“ Probleme behandelt. Die Einbettung möge die Form eines horizontal gelagerten Zylinders mit zunächst beliebigem Querschnitt haben, der sich nach beiden Seiten ins Un-

endliche erstreckt. Die Wirkung solcher Massenanordnungen ist von einer der horizontalen Koordinaten unabhängig, und es genügt, den Querschnitt der Einbettung zu betrachten. Hierdurch wird eine wesentliche Erleichterung der mathematischen Behandlung erzielt.

5. Die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  mögen auf der eben gedachten Erdoberfläche in ein und derselben Querschnittsebene liegen, d. h. ihre Verbindungslinie steht auf der Längsrichtung der Einbettung senkrecht.

6. Der Querschnitt soll von keiner zur Erdoberfläche parallelen Geraden mehr als einmal durchdrungen werden.

7. Um eine weitere Vereinfachung zu erreichen, wird angenommen, daß die in  $B_1$  und  $B_2$  gemessenen Beträge der Schwereintensität gleich sind,  $S_{B_1} = S_{B_2}$ ,  $W_{B_1} = W_{B_2}$ . Unter dieser Annahme ist  $W_A = \frac{W_{B_1} + W_{B_2}}{2} = W_A - W_{B_1}$ , und  $A$  liegt zwischen  $B_1$  und  $B_2$ , wenn die Schwere im Intervall nicht konstant ist. Diese sehr einschneidende Bedingung ist selten in der Praxis erfüllt. Da jedoch oft nur Abschätzungen nötig sind, mag in vielen Fällen die strenge Lösung dieses einfachsten Problems genügen.

**II. Der mathematische Ansatz, Aufstellung des Variationsproblems.** Die ungestörte Schwere im Punkt  $P$  werde durch den Vektor  $g$  (Fig. 1) mit dem Absolutbetrag  $g$  dargestellt, der rechtwinklig zur Erdoberfläche nach unten zeigt. Die punktförmige Einbettung  $M$  möge die Anziehung  $a$  auf den Punkt  $P$  ausüben.  $a$  wird dargestellt durch einen Vektor mit dem Absolutbetrag  $a$ , ausgehend von  $P$  in der Richtung  $PM$ . Wirksam ist dann die Resultante  $r = g + a$ . Ihren Absolutbetrag  $r$  mißt man mit dem Pendel.

$W_P$  bezeichnet die Wirkung, die das Hintzutreten des Massenüberschusses in  $M$  auf das Resultat der Pendelmessung ausübt. Es ist also  $W_P = r - g$ .

Legt man die  $Z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallel zum Vektor  $g$  und die  $X$ -Achse so, daß  $g$  und  $a$  in einer zur  $XZ$ -Ebene parallelen Ebene liegen, so gilt für die Komponenten von  $g$ ,  $a$  und  $r$

$$g_x = 0, g_y = 0, g_z = g; \quad a_y = 0, r_y = 0.$$

Es ist  $r = r_z \cdot \frac{1}{\cos \epsilon}$ , wobei  $\epsilon$  den Winkel zwischen  $r$  und  $g$  bedeutet. Nun

ist  $r_z = g + a_z$ , also  $r = \frac{1}{\cos \epsilon} (g + a_z)$ .  $\epsilon$  ist sehr klein. Man kann  $\cos \epsilon = 1$  setzen und erhält  $r = g + a_z$ ,  $W_P = a_z$ .

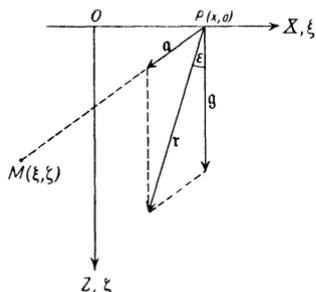


Fig. 1.

$U$  sei das Potential der von der Einbettung in  $M$  verursachten Anziehung. Dann ist

$$W = a_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Bei dem vorliegenden zweidimensionalen Problem legt man die  $X$ -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems zweckmäßig in die Verbindungslinie der Punkte  $B_1$  und  $B_2$ . Die  $Z$ -Achse zeigt im Mittelpunkt  $O$  der Strecke  $B_1 B_2$  rechtwinklig zur Erdoberfläche nach unten, während die  $Y$ -Achse in der Erdoberfläche parallel zum Streichen der Einbettung liegt. Alsdann sind alle Wirkungen von der  $Y$ -Koordinate unabhängig.

Bei zweidimensionalen Problemen tritt an die Stelle des Newtonschen Potentials  $\frac{1}{R}$  das „logarithmische“ Potential  $2 \ln \frac{1}{R}$ . Die Wirkung einer solchen „zweidimensionalen“ Massenordnung, bei der jeder Punkt des Querschnittes als Spur einer mit Masse belegten nach beiden Richtungen ins Unendliche erstreckten Geraden aufzufassen ist, darf nicht verwechselt werden mit der Wirkung einer Flächenbelegung, bei der jeder Punkt der Fläche nichts anderes repräsentiert als sich selbst. Das drückt sich in dem anderen Potential und Anziehungsgesetz aus.

Es mögen  $(\xi, \zeta)$  die Koordinaten der Spur  $M$  der den Querschnitt senkrecht durchsetzenden Massenlinie sein,  $(x, 0)$  die Koordinaten des Aufpunktes  $P$ . Ferner sei  $\varrho_P = \sqrt{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$  der Abstand des Aufpunktes  $P$  vom Punkt  $M$ , und es mögen  $\gamma$  die Gravitationskonstante  $\left(= \frac{200}{3} \cdot 10^{-9} \text{ cgs/Einheiten} \right)$  und  $\sigma$  den Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung bedeuten. Dann ist

$$U = 2 \gamma \sigma \iint_F \ln \frac{1}{\varrho_P} d\xi d\zeta,$$

wobei über den Querschnitt  $F$  zu integrieren ist.

Hieraus folgt

$$W_P = \frac{\partial U}{\partial z} = 2 \gamma \sigma \iint_F \frac{\xi d\xi d\zeta}{\varrho_P^2} = 2 \gamma \sigma \iint_F \frac{\xi d\xi d\zeta}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}.$$

Wendet man diese Formel auf die Punkte  $A (a, 0)$ ,  $B_1 (b, 0)$  und  $B_2 (-b, 0)$  an, so erhält man das folgende Variationsproblem:

$$W_A - W_{B_1} = 2 \gamma \sigma \iint_F f d\xi d\zeta = \max. \dots \dots \dots (1)$$

mit der Nebenbedingung

$$W_{B_1} - W_{B_2} = 2 \gamma \sigma \iint_F g d\xi d\zeta = 0 \dots \dots \dots (2)$$

wobei

$$f = \xi \left\{ \frac{1}{Q_A^2} - \frac{1}{Q_{B_1}^2} \right\} = \xi \left\{ \frac{1}{(\xi - a)^2 + \xi^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \xi^2} \right\}$$

und

$$g = \xi \left\{ \frac{1}{Q_{B_2}^2} - \frac{1}{Q_{B_1}^2} \right\} = \xi \left\{ \frac{1}{(\xi + b)^2 + \xi^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \xi^2} \right\}$$

gesetzt ist. Gesucht ist die Gleichung  $\xi = \Xi(\zeta)$  der Randkurve des Querschnittes.

Der Querschnitt wird nach Annahme 6. von keiner zur  $X$ -Achse parallelen Geraden mehr als einmal durchdrungen. Die Gleichung seiner Randkurve ist

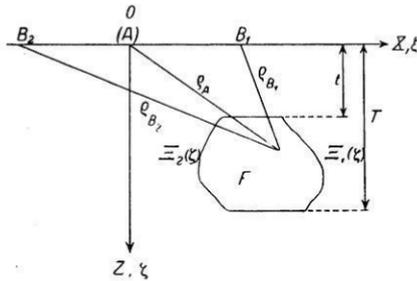


Fig. 2.

also zweideutig. Der rechte Teil sei mit  $\Xi_1(\zeta)$ , der linke Teil mit  $\Xi_2(\zeta)$  bezeichnet. Die obere und untere Begrenzung des Querschnittes bilden Stücke der Geraden  $\zeta = t$  und  $\zeta = T$ , wie Fig. 2 zeigt. Die Länge eines dieser Stücke oder beider kann gleich 0 sein. Das Doppelintegral ist demnach zu erstrecken über  $\xi$  von  $\Xi_2$  bis  $\Xi_1$ , über  $\zeta$  von  $t$  bis  $T$ .

Über den Flächeninhalt des Querschnittes ist keine Voraussetzung gemacht und keine Bedingung gestellt. Um auch über Querschnitte von gegebenem Flächeninhalt Aufschluß zu erhalten, wird zu der Nebenbedingung (2) die weitere hinzugefügt:

$$F = \iint_F d\xi d\zeta = \text{const} \dots \dots \dots (3)$$

Vorläufig mögen  $t$  und  $T$  als gegeben angesehen werden. Alsdann sind  $\Xi_1(\zeta)$ ,  $\Xi_2(\zeta)$  und  $a$  so zu bestimmen, daß das Integral in (1) einen möglichst großen Wert annimmt. Dementsprechend liefert die Forderung (1) drei Gleichungen: Die Eulerschen Differentialgleichungen (a) und (b) für  $\Xi_1(\zeta)$  und  $\Xi_2(\zeta)$ ; sowie eine Gleichung (c) für  $a$ , die durch Differenzieren des Ausdrucks (1) nach  $a$  entsteht.

Die Eulerschen Differentialgleichungen sind leicht aufzustellen. (1) hat die Form

$$\int_{\xi=t}^T \Phi[\Xi_1(\zeta), \Xi_2(\zeta), \zeta] d\zeta = \max \dots \dots \dots (1)$$

wobei  $\Phi[\Xi_1(\zeta), \Xi_2(\zeta), \zeta] = \int_{\xi=\Xi_1(\zeta)}^{\Xi_2(\zeta)} f d\xi$  ist. Da  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$  hierin nicht vorkommt, lauten

die Eulerschen Differentialgleichungen einfach  $\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi_1} = 0$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial \Xi_2} = 0$ , also:

$$f(\Xi_1) = 0 \dots \dots \dots (a)$$

$$f(\Xi_2) = 0, \Xi_1 \neq \Xi_2 \dots \dots \dots (b)$$

Die dritte Gleichung lautet:

$$\int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2}^{\bar{\varepsilon}_1} \frac{\partial}{\partial a} f d\xi = 0 \dots \dots \dots (c)$$

Nun sind noch die Nebenbedingungen (2) und (3) zu berücksichtigen. Nach dem Verfahren von Lagrange erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$f[\bar{\varepsilon}_1(\xi), \xi, a] - \lambda \cdot g[\bar{\varepsilon}_1(\xi), \xi] - \mu = 0 \dots \dots \dots (a)$$

$$f[\bar{\varepsilon}_2(\xi), \xi, a] - \lambda \cdot g[\bar{\varepsilon}_2(\xi), \xi] - \mu = 0 \dots \dots \dots (b)$$

$$\int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(\xi)}^{\bar{\varepsilon}_1(\xi)} \frac{\partial}{\partial a} f(\xi, \xi, a) d\xi = 0 \dots \dots \dots (c)$$

$$\int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(\xi)}^{\bar{\varepsilon}_1(\xi)} g(\xi, \xi) d\xi = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(\xi)}^{\bar{\varepsilon}_1(\xi)} d\xi = \text{const} \dots \dots \dots (3)$$

Gesucht sind die Funktionen  $\bar{\varepsilon}_1(\xi)$  und  $\bar{\varepsilon}_2(\xi)$ , ferner  $a$  und die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Konstante  $b$  und die Integrationsgrenzen  $t$  und  $T$  werden als bekannt vorausgesetzt.

Ist eine der Integrationsgrenzen oder sind beide unbekannt, so muß unter den Lösungen des eben formulierten Problems diejenige ausgesucht werden, die bei variabel gedachten Integrationsgrenzen das Integral (1) zum Maximum macht. Zu ihrer Bestimmung findet man unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(\xi)}^{\bar{\varepsilon}_1(\xi)} \{f(\xi, \xi, a) - \lambda \cdot g(\xi, \xi) - \mu\} d\xi \\ = - \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(t)}^{\bar{\varepsilon}_1(t)} \{f(\xi, t, a) - \lambda \cdot g(\xi, t) - \mu\} d\xi = 0 \dots \dots (d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_{\xi=t}^T d\xi \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(\xi)}^{\bar{\varepsilon}_1(\xi)} \{f(\xi, \xi, a) - \lambda \cdot g(\xi, \xi) - \mu\} d\xi \\ = \int_{\xi=\bar{\varepsilon}_2(T)}^{\bar{\varepsilon}_1(T)} \{f(\xi, T, a) - \lambda \cdot g(\xi, T) - \mu\} d\xi = 0 \dots \dots (e) \end{aligned}$$

Je nachdem, ob  $t$ ,  $T$  oder beide Integrationsgrenzen unbekannt sind, ist Gleichung (d), (e) oder sind beide den Gleichungen (a) bis (3) hinzuzufügen.

**III. Die Lösung des Variationsproblems.** a)  $t, T$  und der Flächeninhalt sind gegeben. Die physikalische Natur der soeben formulierten Aufgabe läßt vermuten, daß die gesuchten Querschnitte symmetrisch zur  $Z$ -Achse, der Senkrechten in  $O$  sind. Alsdann ist  $\Xi_1(\xi) = -\Xi_2(\xi)$ , und aus Symmetriegründen fällt  $A$  mit  $O$  zusammen, so daß  $a = 0$  ist. In der Tat läßt sich zeigen, daß unter diesen Annahmen die Gleichungen (c) und (2) erfüllt sind, wenn man dem Multiplikator  $\lambda$  den Wert  $\frac{1}{2}$  gibt, und daß alsdann die Gleichungen (a) und (b) identisch werden. Aus (a) und (3) werden sodann die gesuchten Querschnitte bestimmt. Ferner kann gezeigt werden, daß bei diesen Querschnitten tatsächlich ein Maximum vorliegt, womit das Variationsproblem gelöst ist.

Für  $a = 0$  erhält man:

$$f(\Xi_1, \xi, 0) - \lambda \cdot g(\Xi_1, \xi) = \xi \left\{ \frac{1}{\Xi_1^2 + \xi^2} - \frac{1 - \lambda}{(\Xi_1 - b)^2 + \xi^2} - \frac{\lambda}{(\Xi_1 + b)^2 + \xi^2} \right\},$$

$$f(\Xi_2, \xi, 0) - \lambda \cdot g(\Xi_2, \xi) = \xi \left\{ \frac{1}{\Xi_2^2 + \xi^2} - \frac{1 - \lambda}{(\Xi_2 - b)^2 + \xi^2} - \frac{\lambda}{(\Xi_2 + b)^2 + \xi^2} \right\},$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial a} f(\xi, \xi, a) \right]_{a=0} = \frac{2\xi\xi}{|\xi^2 + \xi^2|^2}$$

und wie bisher ist

$$g(\xi, \xi) = \xi \left\{ \frac{1}{(\xi + b)^2 + \xi^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \xi^2} \right\}.$$

Nimmt man an, daß  $\Xi_1(\xi) = -\Xi_2(\xi) = \Xi(\xi)$  ist, so existiert zu jedem Punkte  $(\xi, \xi)$  des Querschnitts ein zu diesem symmetrischer Punkt  $(-\xi, \xi)$ . Setzt man überdies  $\lambda = \frac{1}{2}$ , so gilt

$$f(\Xi_1, \xi, 0) - \frac{1}{2} \cdot g(\Xi_1, \xi) \equiv f(\Xi_2, \xi, 0) - \frac{1}{2} g(\Xi_2, \xi)$$

$$= \xi \left\{ \frac{1}{\Xi^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi - b)^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi + b)^2 + \xi^2} \right\},$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial a} f(\xi, \xi, a) \right]_{a=0} = - \left[ \frac{\partial}{\partial a} f(-\xi, \xi, a) \right]_{a=0}$$

$$g(\xi, \xi) = -g(-\xi, \xi).$$

Hieraus ergibt sich

$$\int_{\xi=-\Xi(\zeta)}^{+\Xi(\zeta)} \left[ \frac{\partial}{\partial a} f(\xi, \xi, a) \right]_{a=0} d\xi = 0,$$

$$\int_{\xi=-\Xi(\zeta)}^{+\Xi(\zeta)} g(\xi, \xi) d\xi = 0.$$

Somit sind die Gleichungen (c) und (2) für symmetrische Querschnitte erfüllt, wenn man  $\lambda = \frac{1}{2}$  setzt. Die Gleichungen (a) und (b) werden identisch. An ihre Stelle tritt

$$\xi \left\{ \frac{1}{\Xi^2 + \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi - b)^2 + \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi + b)^2 + \zeta^2} \right\} - \mu = 0 \quad \dots (A)$$

Zu Gleichung (A) kommt Gleichung (3). Dieselbe dient zur Bestimmung der Konstanten  $\mu$ , wenn der Flächeninhalt gegeben, oder zur Berechnung des Flächeninhalts, wenn  $\mu$  ein bestimmter Wert zuerteilt ist.

Durch Gleichung (A) ist eine Schar von Kurven gegeben, die im folgenden „Hauptkurven“ genannt seien. Es wird sich zeigen, daß sie geschlossen sind. Die von ihnen eingeschlossenen Flächen mögen „Hauptquerschnitte“ heißen.

Die Hauptkurven sind unabhängig von  $t$  und  $T$ , da diese Größen in (A) nicht vorkommen. Ferner ist ihre geometrische Gestalt unabhängig von der Länge der Strecke  $b$ . Setzt man nämlich  $t = t^* \cdot b$ ,  $T = T^* \cdot b$ ,  $\Xi = \Xi^* \cdot b$ ,

$\zeta = \zeta^* \cdot b$ ,  $\mu = \frac{1}{\nu \cdot b}$ , so erhält man:

$$\xi^* \left\{ \frac{1}{\Xi^{*2} + \zeta^{*2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi^* - 1)^2 + \zeta^{*2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Xi^* + 1)^2 + \zeta^{*2}} \right\} - \frac{1}{\nu} = 0$$

oder

$$\nu \xi^* \{ 3 \Xi^{*2} - \zeta^{*2} - 1 \} + \{ (\Xi^{*2} + \zeta^{*2} + 1)^2 - 4 \Xi^{*2} \} \{ \Xi^{*2} + \zeta^{*2} \} = 0 \quad (A^*)$$

eine Gleichung, in der  $b$  nicht mehr vorkommt.

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich die Gestalt aller Hauptkurven bestimmen. Rechnerisch übersichtlich sind die Fälle  $\nu = \infty$  und  $\nu = 0$ , die dem größten und dem kleinsten Hauptquerschnitt entsprechen. Für  $\nu = \infty$  erhält man

$$3 \Xi^{*2} - \zeta^{*2} = 1 \quad \text{oder} \quad 3 \Xi^2 - \zeta^2 = b^2.$$

Der größte Hauptquerschnitt wird eingeschlossen von einem Stück der X-Achse und den beiden Ästen der Hyperbel  $3 \Xi^2 - \zeta^2 = b^2$ , die als „Haupthyperbel“ bezeichnet werde. Sie schneidet die X-Achse in den Punkten

$\xi = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$  und nähert sich den Asymptoten  $\xi = \pm \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$ , deren Öffnungswinkel  $60^\circ$  beträgt.

Für  $\nu = 0$  erhält man  $\Xi^{*2} + \zeta^{*2} = 0$ . Die kleinsten Hauptquerschnitte ziehen sich also in dem Punkt  $O$  zusammen. Ihre Form erhält man, indem man  $\nu$ ,  $\Xi^*$  und  $\zeta^*$  so klein wählt, daß man in (A\*) die Glieder von dritter und höherer Ordnung vernachlässigen kann. So ergibt sich  $-\nu \xi^* + \Xi^{*2} + \zeta^{*2} = 0$ ,

und wenn man auf beiden Seiten  $\frac{\nu^2}{4}$  addiert, erhält man  $\Xi^{*2} + \left( \zeta^* - \frac{\nu}{2} \right)^2$

$= \left( \frac{\nu}{2} \right)^2$ . Die kleinsten Hauptquerschnitte sind also Kreise mit dem Durchmesser  $\nu$ , die die X-Achse in  $O$  berühren.

Die übrigen Hauptkurven lassen sich am einfachsten graphisch bestimmen. Das Ergebnis ist in Fig. 3 eingezeichnet.

Die  $Z$ -Achse wird von den Hauptkurven zweimal geschnitten, und zwar in den Punkten  $\xi^* = 0$  und  $\xi^* = \tau_v^*$ , wobei  $\tau_v^*$  durch die Beziehung  $\tau_v^*(\tau_v^{*2} + 1) = \nu$  gegeben ist. Wegen der Annahme 6., daß keine zur  $X$ -Achse parallele Gerade einen der Querschnitte mehr als einmal durchdringt, ist ( $\xi^* = 0, \xi^* = 0$ ) der höchste und ( $\xi^* = 0, \xi^* = \tau_v^*$ ) der tiefste Punkt des betreffenden Hauptquerschnitts.

Aus den Hauptquerschnitten lassen sich die gesuchten Querschnitte gewinnen. Sind  $t$  und  $T$  gegeben, so sind von den Hauptquerschnitten die Teile oberhalb  $t$  und unterhalb  $T$  abzuschneiden, wie es in Fig. 3 für die Werte  $t = 1 \cdot b$  und  $T = 3 \cdot b$  angedeutet ist. Von den Resten ist derjenige mit dem gegebenen Flächeninhalt auszuwählen.

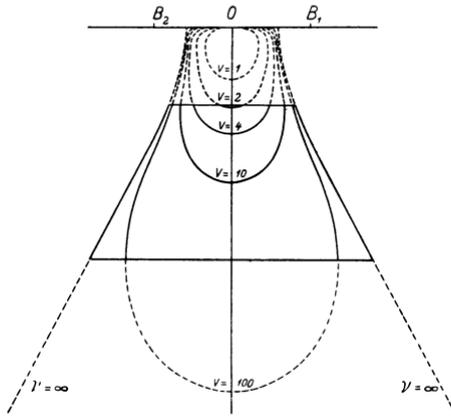


Fig. 3.

Hierbei ist zu bemerken, daß das Problem nicht immer eine Lösung hat. Der Flächeninhalt darf nicht größer gegeben sein als die von  $\xi = t, \xi = T$  und der Haupthyperbel begrenzten Fläche und nicht kleiner als die Fläche, die von  $\xi = t$  und derjenigen Hauptkurve begrenzt wird, die  $\xi = T$  berührt, d. h. für die  $\tau_\nu = T$  ist.

b) Der Flächeninhalt ist gegeben, eine der Tiefen  $t$  und  $T$  oder beide sind unbestimmt.

Hier sind die Gleichungen (d) und (e) anzuwenden. Für  $a = 0, \lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\mathfrak{L}_1 = -\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}$  erhält man

$$2 \int_{\xi=0}^{\xi(t)} \left[ t \left\{ \frac{1}{\xi^2 + t^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi - b)^2 + t^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi + b)^2 + t^2} \right\} - \mu \right] d\xi = 0 \quad \text{.. (d)}$$

$$2 \int_{\xi=0}^{\xi(T)} \left[ T \left\{ \frac{1}{\xi^2 + T^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi - b)^2 + T^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi + b)^2 + T^2} \right\} - \mu \right] d\xi = 0 \quad \text{.. (e)}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn  $\mathfrak{E}(t) = 0$  bzw.  $\mathfrak{E}(T) = 0$  ist. Dann muß  $\frac{t}{T} = \begin{cases} 0 \\ \tau_v \end{cases}$  sein. Da  $t$  die obere und  $T$  die untere Grenze des Querschnitts bedeutet, ist bei unbekanntem Integrationsgrenzen  $t = 0$  und  $T = \tau_v$  zu setzen.

Durch den gegebenen Flächeninhalt ist bestimmt, welche der Hauptkurven die seitliche Begrenzung des gesuchten Querschnitts bildet.

Folgende Fälle sind möglich:

- α)  $t$  gegeben,  $T$  unbestimmt: vom Hauptquerschnitt ist nur der Teil oberhalb  $t$  abzuschneiden.
- β)  $T$  gegeben,  $t$  unbestimmt: es ist nur der Teil unterhalb  $T$  abzuschneiden. Eine Lösung existiert nur, solange der Flächeninhalt nicht kleiner gegeben ist als der des Hauptquerschnitts, der bis zur Tiefe  $T$  reicht, und nicht größer als die von  $\xi = 0$ ,  $\xi = T$  und der Haupthyperbel eingeschlossene Fläche.
- γ)  $t$  und  $T$  sind unbestimmt: Lösung ist der Hauptquerschnitt selbst.

Im Fall α) gibt es stets eine Lösung, im Fall γ) ebenfalls.

c) Über den Flächeninhalt besteht keine Bedingung.

Bei der ursprünglichen Fragestellung ist über den Flächeninhalt keine Aussage gemacht. Alsdann ist Gleichung (3) fortzulassen, und mit ihr verschwinden in den mathematischen Entwicklungen alle Glieder mit  $\mu$  bzw.  $1/\nu$ .

Als seitliche Begrenzung aller Querschnitte erhält man die Haupthyperbel  $3\mathfrak{E}^2 - \xi^2 = b^2$ . Der Hauptquerschnitt reicht in unendliche Tiefe. Bezüglich  $t$  und  $T$  gilt das unter a) und b) Gesagte.

Hat man die Symmetrie der Lösungen des Variationsproblems erkannt und sucht man die Gestalt der Randkurve, wenn keine Bedingung über den Flächeninhalt gestellt ist, so kann man auf einem einfacheren Wege zur Haupthyperbel gelangen. Ist nämlich folgende Ungleichung für alle Punkte des symmetrischen Querschnitts erfüllt:

$$W_A - \frac{W_{B_1} + W_{B_2}}{2} = \xi \left\{ \frac{1}{\mathfrak{E}^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{E} - b)^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{E} + b)^2 + \xi^2} \right\} \geq 0,$$

so erhöhen je zwei symmetrisch liegende Punkte die Wirkung in  $A$  stärker als die in  $B_1$  bzw.  $B_2$ . Ein Querschnitt, der nur solche und alle derartigen Punkte enthält, muß also den größten möglichen Wert von  $W_A - W_{B_1} = W_A - W_{B_2}$  erzeugen. Seine Randkurve hat die Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{E}^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{E} - b)^2 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathfrak{E} + b)^2 + \xi^2} = 0.$$

Durch Beseitigen der Brüche erhält man  $3\xi^2 - \zeta^2 - b^2 = 0$ , und man findet, daß der Querschnitt aus der inneren, von den beiden Ästen der Hyperbel  $3\xi^2 - \zeta^2 = b^2$  eingeschlossenen Fläche bestehen muß. Da keiner der Hauptquerschnitte über diese Fläche hinausragt, liegt stets ein Maximum vor, und es erübrigt sich, die zweite Variation des Integrals  $\iint_F (f - \lambda \cdot g - \mu) d\xi d\zeta$  heranzuziehen, um zu untersuchen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Zusammenfassend läßt sich also aussprechen: Unter allen „zweidimensionalen“, senkrecht zur Verbindungslinie  $B_1 B_2$  der Stationspunkte streichenden Massenanordnungen erzeugt diejenige Einbettung die größte Schwankung  $W_A - W_{B_1} = W_A - W_{B_2}$  der Schwereintensität, die als Querschnitt die von den beiden Ästen der „Haupthyperbel“  $3\xi^2 - \zeta^2 = b^2$  eingeschlossene Fläche hat, wobei  $b$  die halbe Entfernung  $B_1 B_2$  bedeutet. Sind zwei Tiefen  $t$  und  $T$  bekannt, zwischen denen sich die Einbettung erstreckt, so erhält man deren Gestalt, indem man von dem soeben angegebenen Querschnitt die Teile oberhalb von  $t$  und unterhalb von  $T$  abschneidet. Ist der Flächeninhalt gegeben, so hat der Querschnitt eine der in Fig. 3 eingezeichneten „Hauptkurven“ als seitliche Begrenzung. Die Schwankung der Schwereintensität wird gegeben durch das Integral

$$2\gamma\sigma \iint_F \xi \left\{ \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \zeta^2} \right\} d\xi d\zeta,$$

wobei über den Querschnitt  $F$  zu integrieren ist.

**IV. Bemerkung über die Beseitigung einiger der vereinfachenden Annahmen.** 1. Ganz unwesentlich ist die Annahme 5., daß die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  in derselben Querschnittsebene liegen. Da die Wirkung der Einbettung von der  $Y$ -Koordinate unabhängig ist, können  $B_1$  und  $B_2$  beliebige  $Y$ -Koordinaten haben. Alle bisherigen Überlegungen bleiben ungeändert. Unter  $b$  ist dann die Entfernung  $OB'_1 = OB'_2$ , d. h. die  $X$ -Koordinate des Punktes  $B_1$  zu verstehen (Fig. 4). Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel, den die Verbindungslinie  $B_1 B_2$  mit der  $X$ -Achse bildet, so ist  $B_1 B_2 = \frac{2b}{\cos \alpha}$ .

2. Die Beschränkung auf das „zweidimensionale“ Problem ist eine wesentliche Einschränkung. Die der Haupthyperbel  $3\xi^2 - \zeta^2 = b^2$  im dreidimensionalen Falle entsprechende Fläche ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{\varrho_A^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_{B_1}^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_{B_2}^3} = 0.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \varrho_{A_1}^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2, \\ \varrho_{B_1}^2 &= (\xi - b)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2 - 2b\xi + b^2, \\ \varrho_{B_2}^2 &= (\xi + b)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2 + 2b\xi + b^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung hat die Form  $G(\varrho, \xi) = 0$ .  $\varrho$  ist nur von  $\xi$  abhängig. Die durch  $G(\varrho, \xi) = 0$  gegebene Fläche ist also eine Rotationsfläche mit der X-Achse als Rotationsachse. Die gesuchte Massenordnung besteht aus der unter der Erdoberfläche liegenden Hälfte des von der Fläche  $G(\varrho, \xi) = 0$  eingeschlossenen Rotationskörpers.

Beseitigt man die in der Gleichung auftretenden Wurzeln und multipliziert man aus, so erhält man eine algebraische Gleichung 22. Grades in  $\xi$  und  $\varrho$  (da die Glieder 24. Grades sich aufheben), die nur Glieder von gerader Ord-

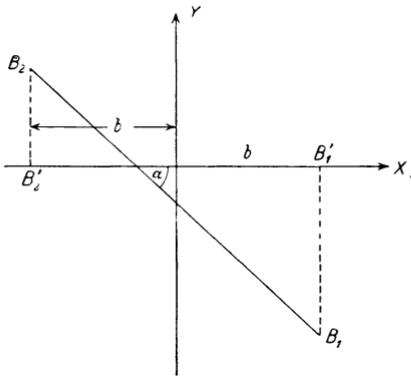


Fig. 4.

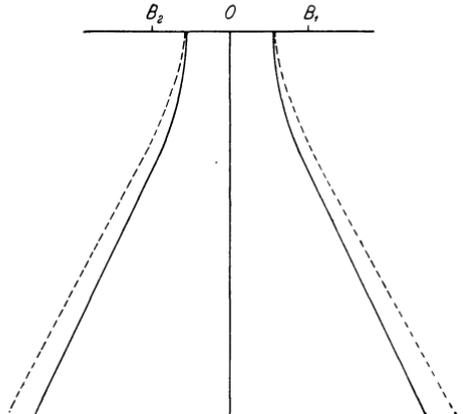


Fig. 5.

nung in  $\xi$  und  $\varrho$  enthält. Der Rotationskörper ist also symmetrisch zur  $YZ$ -Ebene und zentralsymmetrisch zur Mitte  $O$  der Strecke  $B_1B_2$ . Die Glieder 22. Grades lauten:

$$3\varrho^{22} - 15\varrho^{20}\xi^2.$$

Durch Nullsetzen dieses Ausdrucks erhält man die Asymptoten der Meridiankurve

$$\begin{aligned} \varrho^2 - 5\xi^2 &= 0, \\ \xi^2 - 4\xi^2 &= 0, \\ \xi &= \pm \frac{\xi}{2}. \end{aligned}$$

Die Asymptoten bilden miteinander einen Winkel von  $53^\circ 8'$ , also einen kleineren Winkel als im zweidimensionalen Falle. Im übrigen hat die Meridiankurve einen hyperbelähnlichen Verlauf, wie die nach einer numerischen Näherungsmethode bestimmte, ausgezogene Kurve der Fig. 5 zeigt. Die X-Achse wird

in den Punkten  $\pm 0.555 \cdot b$  geschnitten. Zum Vergleich mit der Lösung des zweidimensionalen Problems ist die Haupthyperbel  $3\xi^2 - \zeta^2 = b^2$  punktiert eingezeichnet. Der Körper des zweidimensionalen Problems ist in der Nähe der  $XZ$ -Ebene ausgedehnter als der Rotationskörper des dreidimensionalen Problems. In größerer Entfernung jedoch taucht er in denselben ein und verläuft weiterhin stets innerhalb.

Da die Lösung des zweidimensionalen Problems von der des dreidimensionalen abweicht, kann sie nur als rechnerisch bequeme Annäherung an die Lösung der im Anfang gestellten Aufgabe angesehen werden.

3. Für den allgemeinen Fall, daß  $W_{B_1} \neq W_{B_2}$  ist, ist eine rohe Abschätzung auf Grund der bisherigen Überlegungen möglich. In  $B_1$  sei die Schwereintensität größer als in  $B_2$ . Ist die Schwere in  $A$  größer als in  $B_1$ , so existiert ein Punkt  $B_3$ , für den  $W_{B_3} = W_{B_1}$  ist. Auf  $B_1$  und  $B_3$  lassen sich die bisherigen Überlegungen anwenden. In der Praxis kann  $B_1 B_3$  meist mit der für Abschätzungen nötigen Genauigkeit aus dem bereits bekannten Verlauf der Schwereintensität gefunden werden [siehe z. B. Beispiel 1, S. 155.]

## C. Numerische Betrachtungen im Hinblick auf die praktische Anwendung.

**I. Die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität.** Es ist das Integral

$$\frac{(W_A - W_{B_1})_{\max}}{2 \gamma \sigma} = \int_F \int \xi \left\{ \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \zeta^2} \right\} d\xi d\zeta$$

für die Querschnitte der Fig. 3 auszuwerten. Nach einem graphischen oder numerischen Verfahren ist dies stets möglich. Im folgenden soll nun der wichtigste Fall der Querschnitte  $\nu = \infty$ , deren seitliche Begrenzung die Haupthyperbel bildet, betrachtet werden. Die Einbettung möge sich von der Tiefe  $t$  bis zur Tiefe  $T$  erstrecken.

Alsdann ist:

$$\frac{(W_A - W_{B_1})_{\max}}{2 \gamma \sigma} = \int_{\zeta=t}^T \int_{\xi=-\sqrt{\frac{\zeta^2+b^2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{\zeta^2+b^2}{3}}} \xi \left\{ \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} - \frac{1}{(\xi - b)^2 + \zeta^2} \right\} d\xi d\zeta.$$

Führt man  $t^* = \frac{t}{b}$ ,  $T^* = \frac{T}{b}$ ,  $\xi^* = \frac{\xi}{b}$  und  $\zeta^* = \frac{\zeta}{b}$  ein, so erhält man:

$$w(t^*, T^*) = \frac{(W_A - W_{B_1})_{\max}}{2 \gamma \sigma \cdot b} = \int_{\zeta^*=t^*}^{T^*} \int_{\xi^*=-\sqrt{\frac{\zeta^{*2}+1}{3}}}^{+\sqrt{\frac{\zeta^{*2}+1}{3}}} \xi^* \left\{ \frac{1}{\xi^{*2} + \zeta^{*2}} - \frac{1}{(\xi^* - 1)^2 + \zeta^{*2}} \right\} d\xi^* d\zeta^*.$$

Die Integration über  $\xi^*$  ergibt:

$$w = \int_{\xi^*=t^*}^{T^*} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi^*} \sqrt{\frac{\xi^{*2} + 1}{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi^*} \left( \sqrt{\frac{\xi^{*2} + 1}{3}} - 1 \right) - \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi^*} \left( \sqrt{\frac{\xi^{*2} + 1}{3}} + 1 \right) \right\} d\xi^* = \int_{\xi^*=t^*}^{T^*} J d\xi^*.$$

Das Integral wird in eine Summe zweier Integrale zerlegt:  $\int_{t^*}^{T^*} = \int_{t^*}^{\infty} - \int_{T^*}^{\infty}$ .

Diese Integrale geben die Wirkung von Massen an, deren Querschnitt von der Haupthyperbel begrenzt wird und die sich von der Tiefe  $t^*$  bzw.  $T^*$  bis ins Unendliche erstrecken. Beide Integrale haben die Form  $\int_{\vartheta^*}^{\infty} J d\xi^*$ , wobei  $\vartheta^*$  in dem einen Fall  $t^*$ , im anderen  $T^*$  bezeichnet.

Bei großen Werten von  $\vartheta^*$  läßt sich das Integral selbst berechnen. Für große Werte von  $\xi^*$  erhält man:

$$\int_{\xi^*=\vartheta^*}^{\infty} J d\xi^* = \int_{\xi^*=\vartheta^*}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\xi^*} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\xi^*} \right) \right\} d\xi^*.$$

Entwickelt man  $\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\xi^*} \right)$  und  $\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\xi^*} \right)$  in Taylorsche Reihen, so erhält man, wenn man nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt:

$$\int_{\xi^*=\vartheta^*}^{\infty} J d\xi^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^2 \int_{\xi^*=\vartheta^*}^{\infty} \frac{d\xi^*}{\xi^{*2}} = 0.649 \cdot \frac{1}{\vartheta^*}.$$

Die hiernach berechneten Werte sind in Tabelle a (S. 152) angegeben.

Bei kleinen Werten von  $\vartheta^*$  berechnet man am einfachsten den Wert des Integranden  $J$  für hinreichend viele Werte von  $\xi^*$  und integriert nach einem Näherungsverfahren aus, wobei man den letzten der in Tabelle a verzeichneten Werte der Berechnung zu Grunde legt. Tabelle b zeigt das Ergebnis. Benutzt wurden teils die Simpsonsche Regel, teils die Trapezformel.

Jedem Wertepaar ( $t^*$ ,  $T^*$ ) entspricht ein Wert von  $w$ . Diesen Wert erhält man durch Subtrahieren der den Werten  $\vartheta^* = t^*$  und  $\vartheta^* = T^*$  entsprechenden Beträge des Integrals  $\int_{\vartheta^*}^{\infty} J d\xi^*$ . Für  $t^*$  wurden die in den linken

Spalten der Tabellen verzeichneten Beträge gewählt und für  $T^*$  die Werte 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 5, 7, 10, 20, 50,  $\infty$ . Das Ergebnis zeigt Fig. 6. Auf der Abszissenachse ist  $t^*$ , auf der Ordinaten-

achse  $w$  aufgetragen. Die Kurven geben den Betrag von  $w$  für die angegebenen Werte von  $T^*$  an. Sie liegen so dicht, daß man leicht interpolieren kann.

Tabelle a.		Tabelle b.	
$\vartheta^*$	$\int_{\vartheta^*}^{\infty} J d\zeta^*$	$\vartheta^*$	$\int_{\vartheta^*}^{\infty} J d\zeta^*$
$\infty$	0	3.0	0.217
100	0.0065	2.6	0.249
70	0.0093	2.3	0.278
50	0.0130	2.0	0.316
40	0.0163	1.8	0.348
30	0.0217	1.6	0.388
20	0.0325	1.4	0.438
15	0.0433	1.2	0.502
10	0.0649	1.0	0.585
7.0	0.0928	0.8	0.699
5.0	0.130	0.6	0.859
4.0	0.162	0.4	1.094
3.5	0.186	0.2	1.450
3.0	0.217	0.1	1.687
		0.0	1.974

Ist die Stationsdichte gegeben, so beträgt die größte mögliche Schwankung bei gegebenen Tiefen  $t^*$  und  $T^*$ :  $(W_A - W_{B_1})_{\max} = 2\gamma\sigma \cdot b \cdot w(t^*, T^*)$ . Die größte überhaupt mögliche Schwankung beträgt  $2\gamma\sigma \cdot b \cdot w(0, \infty) = 2\gamma\sigma \cdot b \cdot 1.974$ .

**II. Die Dichte eines engmaschigen Netzes von Pendelstationen.** Die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität ist proportional dem Dichteunterschied  $\sigma$  der Einbettung gegen ihre Umgebung und der Entfernung  $2b$  der Stationen  $B_1$  und  $B_2$ . Da der Dichteunterschied in seinem Betrag beschränkt ist, kann die Schwankung nicht beliebig groß werden. Bei sehr kleinen Entfernungen der Stationen  $B_1$  und  $B_2$  bleibt sie kleiner als die Genauigkeit des Pendels. Dann hat es keinen Sinn, zwischen  $B_1$  und  $B_2$  eine Zwischenstation einzufügen. Kennt man die Genauigkeit des Instruments, so läßt sich aus der Beziehung  $(W_A - W_{B_1})_{\max} = 2\gamma\sigma \cdot b \cdot w$  eine Mindestentfernung  $2b$  bestimmen, die die Stationen haben müssen, damit sich das Einfügen einer Zwischenstation lohnt. Man hat nur für  $(W_A - W_{B_1})_{\max}$  die Genauigkeit des Pendels einzusetzen.

Die Genauigkeit des Instruments sei  $n \cdot 0.001$  cgs/Einheiten =  $n$  Milligal, wenn man mit „Gal“ die cgs/Einheit der Beschleunigung bezeichnet. Alsdann ist  $2b = \frac{n \cdot 0.001}{\gamma \cdot \sigma \cdot w}$  cm. Setzt man den Wert der Gravitationskonstanten  $\gamma$  ( $= \frac{200}{3} \cdot 10^{-9}$ ) ein, so erhält man:

$$\frac{\sigma}{n} \cdot 2b = \frac{1}{w} \cdot 150 \text{ m} = \frac{1}{w} \cdot 0.15 \text{ km.}$$

$w$  ist aus Fig. 6 abzulesen.

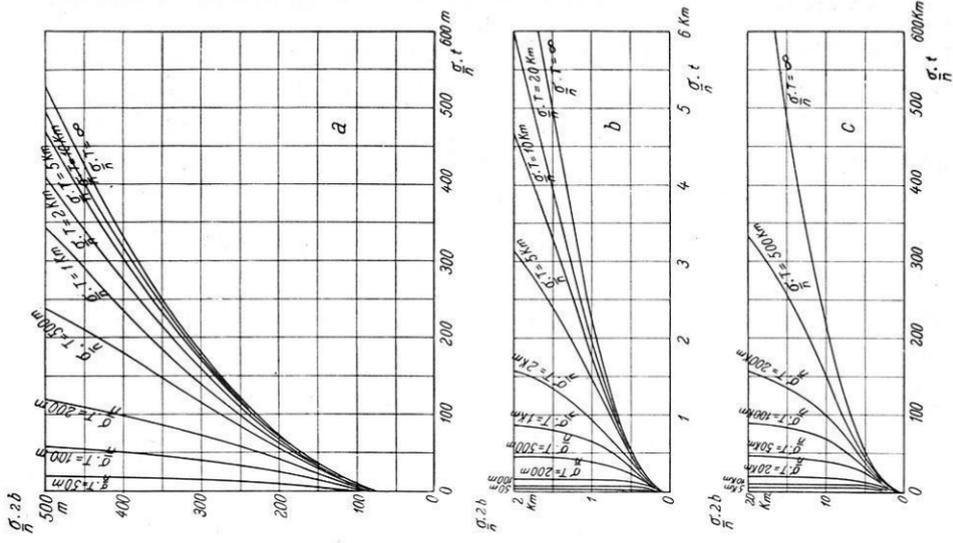


Fig. 7.

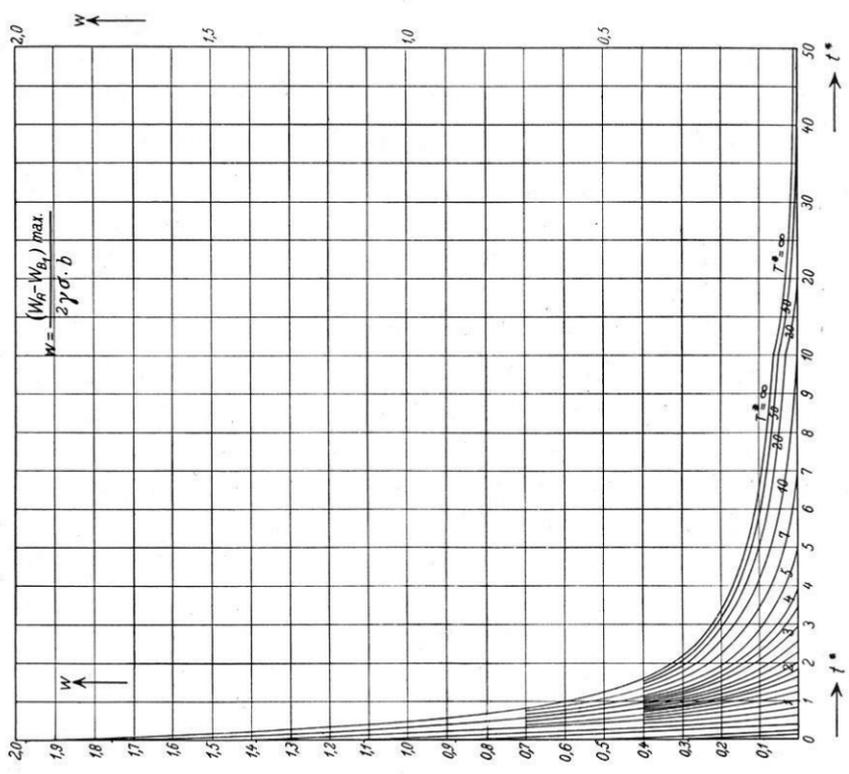


Fig. 6.

Fig. 7 a, b, c zeigt die Beziehung zwischen den Tiefen  $t$  und  $T$  und der Stationsentfernung  $2b$ . Auf der Abszissenachse ist  $\frac{\sigma}{n} \cdot t$ , auf der Ordinatenachse  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b$  abgetragen, Kurven sind berechnet für  $\frac{\sigma}{n} \cdot T = 50, 100, 200, 500$  m, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 km,  $\infty$ .

Die Berechnung geschieht folgendermaßen. Man nimmt geeignete Wertepaare  $\left(\frac{\sigma}{n} T, T^*\right)$  und berechnet  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b$  nach der Formel  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b = \frac{\sigma}{n} \cdot T \cdot \frac{2}{T^*}$ .

Sodann berechnet man  $w \left[ = \frac{150}{\frac{\sigma}{n} (2b)_m} = \frac{0.15}{\frac{\sigma}{n} (2b)_{km}} \right]$  und liest in Fig. 6 den

zum Wertepaar  $(w, T^*)$  gehörenden Betrag von  $t^*$  ab. Aus  $\frac{\sigma}{n} \cdot t = \frac{\sigma}{n} \cdot 2b \cdot \frac{t^*}{2}$  erhält man  $\frac{\sigma}{n} \cdot t$ .

Der kleinste überhaupt mögliche Betrag von  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b$  entspricht den Tiefen  $t = 0, T = \infty$ , d. h. dem Querschnitt, der aus der ganzen von den beiden Ästen der Haupthyperbel eingeschlossenen Fläche besteht. In diesem Fall ist  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b = 76.0$  m. Es hat also keinesfalls Sinn, Zwischenstationen einzulegen, wenn die Entfernung der Pendelstationen kleiner ist als  $76 \cdot \frac{n}{\sigma}$  Meter. Da im allgemeinen  $t \neq 0$  und  $T$  kleiner als unendlich angenommen werden kann, muß man mit größeren Stationsentfernungen rechnen. Die Mindestentfernungen, abhängig von  $t$  und  $T$ , gibt Fig. 7 an.  $t$  und  $T$  werden als bekannt vorausgesetzt.

Die berechneten maximalen Schwankungen der Schwereintensität und die ihnen entsprechenden Mindestentfernungen der Stationen  $B_1$  und  $B_2$  haben bestimmte Massenanordnungen zur Voraussetzung. Da in der Natur meist andere Massenanordnungen vorliegen werden, kann man annehmen, daß die Schwankungen der Schwereintensität die berechneten Beträge nicht erreichen. Dann kann das Einfügen der Zwischenstationen unterbleiben, und die Entfernungen  $2b$  selbst sind ein Maß für die Dichte des Stationsnetzes, die hinreichend ist, wenn man alles mit dem Pendel erfassen will, was mit dem Pendel erfaßt werden kann.

**III. Rechtfertigung der wesentlichsten vereinfachenden Annahmen.** Die zu Beginn der theoretischen Untersuchungen gemachten vereinfachenden Annahmen bleiben mit Ausnahme der als unwesentlich erkannten fünften Annahme bestehen. Hierdurch wird die praktische Anwendungsfähigkeit der ausgeführten Berechnungen nicht wesentlich eingeschränkt.

Am einschneidendsten ist die Forderung  $W_{B_1} = W_{B_2}$ . Es wurde bereits gezeigt, daß von der Lösung dieses Falles ausgehend eine rohe Abschätzung in allgemeineren Fällen möglich ist.

Daß durch die Beschränkung auf zweidimensionale Massenanordnungen eine Erleichterung der mathematischen Behandlung erzielt wird, liegt angesichts der Meridiankurve 22. Grades der Lösung des dreidimensionalen Problems auf der Hand. Mehr noch fällt ins Gewicht, daß die zweidimensionale Massenanordnung in der Natur bei Magmaintrusionen, Salzhorsten, Korallenriffen usw. angenähert verwirklicht sein kann, während der Rotationskörper des dreidimensionalen Problems wohl nirgends anzutreffen ist. Die Behandlung dieses viel schwierigeren und unbequemerer Falles bringt also nur die Lösung eines rein mathematischen Problems, während die Durchführung des zweidimensionalen Falles praktisch wichtige Ergebnisse liefert.

Die Annahme 6., daß keine zur X-Achse parallele Gerade den Querschnitt mehr als einmal durchdringt, schließt die Fälle aus, in denen seitliche Massen das Maximum der Schwereintensität zwischen  $B_1$  und  $B_2$  abflachen oder zum Auftreten mehrerer Maxima und Minima führen. In diesen Fällen wird die größte mögliche Schwankung der Schwereintensität zwischen  $B_1$  und  $B_2$  augenscheinlich nicht erreicht, und es ist somit berechtigt, nur solche Massenanordnungen zu untersuchen, die der Annahme 6. genügen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es für die praktische Verwendbarkeit der Berechnungen zulässig ist, die Erdoberfläche eben und die Erde als Halbraum anzunehmen. Man beweist leicht, daß für hinreichend ferne, ähnliche Massenanordnungen, die in bezug auf  $A$  ähnlich liegen und denselben Dichteunterschied  $\sigma$  gegen ihre Umgebung haben, die Differenz  $W_A - W_{B_1}$  denselben Betrag hat. Dies ist für alle von der Haupthyperbel begrenzten und in großer Tiefe beginnenden Querschnitte der Fall und infolgedessen auch für solche, die in derselben Tiefe  $t$  beginnen und bis zu hinreichend großer, sonst beliebiger Tiefe  $T$  hinabreichen. Es kommt also bei großen Tiefen  $T$  auf deren Betrag nicht an. In den Fig. 6 und 7 zeigt sich dies darin, daß sich die Kurven für große Werte von  $T^*$  und  $T$  den Kurven  $T^* = \infty$  und  $T = \infty$  anschmiegen. Für die von der Haupthyperbel begrenzten Querschnitte kann demnach die Erdoberfläche eben angenommen werden.

**IV. Beispiele.** 1. Ein Salzhorst soll mit dem Pendel vermessen werden. Er reiche von der Tiefe 50 m so weit abwärts, daß man  $T = \infty$  annehmen kann. Der Dichteunterschied gegen die Umgebung sei 0,3. Die Genauigkeit sei 1,5 Millgal. Es ist also  $\frac{\sigma}{n} \cdot t = \frac{0.3}{1.5} \cdot 50 = 10$  m, und man liest aus Fig. 7 a ab:  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b = 103$  m. Somit ergibt sich  $2b = 103 \cdot \frac{1.5}{0.3} = 515$  m.

Man vergleiche hiermit die Messung von Berroth<sup>1)</sup> über den Salzhorst Oldau-Hambühren. Die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  mögen in der Station VII und in

dem Mittelpunkt der Verbindung von Station III und Station IV liegen. In beiden Punkten ist die Anomalie + 14 Milligal. Nimmt man als Minimum der Schwere den in Station I gemessenen Betrag mit der Anomalie + 3 Milligal an, so erhält man einen Unterschied von 11 Milligal bei der Entfernung  $2b =$  etwa 4.2 km. Dies entspricht einem Unterschied von 1,5 Milligal bei einer Entfernung von  $2b = 570$  m oder 1,35 Milligal bei  $2b = 515$  m, ein Ergebnis, das mit dem berechneten gut übereinstimmt, wobei zu bedenken ist, daß die wahre Gestalt des Salzhorstes Oldau-Hambühren der in dieser Arbeit angenommenen Form nicht genau entspricht.

2. Die Dichte eines Ozeanbodens sei etwa 3, der Dichteunterschied gegen das Meerwasser also 2. Eine untermeerische Aufwölbung möge sich bis 1000 m unter dem Meeresspiegel erheben. Sonst sei der Ozean so tief, daß für die erste Überschlagsrechnung seine Tiefe gleich unendlich angenommen werden kann. Die Genauigkeit des Pendels im Unterseeboot sei 4 Milligal. Dann ist

$$\frac{\sigma}{n} \cdot t = \frac{2}{4} \cdot 1000 = 500 \text{ m.}$$

Aus Fig. 7 a liest man hierzu ab:  $\frac{\sigma}{n} \cdot 2b = 487 \text{ m.}$

Hiernach ergibt sich:  $2b = \frac{4}{2} \cdot 487 = 974 \text{ m.}$

3. Eine ebensolche Aufwölbung des Meeresbodens möge sich aus einer Tiefe von 2000 m emporheben. Es ist:  $\frac{\sigma}{n} \cdot t = 500 \text{ m,}$   $\frac{\sigma}{n} \cdot T = 1 \text{ km.}$  Hierzu

liest man ab:  $\frac{\sigma}{n} 2b = 730 \text{ m,}$  und man berechnet  $2b = \frac{4}{2} \cdot 730 = 1460 \text{ m.}$

Bei der auch in der Natur vorkommenden Annahme  $T = 5000 \text{ m}$  hat man:

$$\frac{\sigma}{n} \cdot t = 500 \text{ m,} \quad \frac{\sigma}{n} \cdot T = 2.5 \text{ km,} \quad \frac{\sigma}{n} \cdot 2b = 570 \text{ m,} \quad 2b = 1140 \text{ m.}$$

#### Literatur.

1) A. Berroth, Referenzpendelmessungen am Salzhorst Oldau-Hambühren (Hann.). Zeitschr. f. Geophys. 3, 1—16, 1927.

2) V. Meinesz, Observations de pendule sur la mer pendant un voyage en sous-marin de Hollano à Java. Publ. de la comm. géodésique Néerlandais 1923.

Potsdam, Geophysik. Abteilung des Geodätischen Instituts, April 1927.