

## Werk

**Jahr:** 1927

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:3

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0003

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0003](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0003)

**LOG Id:** LOG\_0036

**LOG Titel:** Über den Einfluß der Elastizität des Pendelstativs auf die Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Über den Einfluß der Elastizität des Pendelstativs auf die Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel.

Von H. Schmehl, Potsdam.

Zur Bestimmung von Schwerkraftdifferenzen gelangen Messungen von Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel mehr und mehr zur Verwendung. Durch das Verfahren des „Gegeneinanderschwingens“ der Pendel kann der Einfluß der bei den Messungen auftretenden Pendelstativbewegung auf die Schwingungszeiten der Pendel sehr herabgemindert, zum Teil gänzlich eliminiert werden. Es werden einfache, diesen Einfluß in Rechnung ziehende, für ein- und zweiseitige Phasen gültige Formeln angegeben, die im Vergleich zu anderen, von A. Berroth abgeleiteten Formeln (Zeitschr. f. Geophys., Jahrgang 1, 1925, Heft 3, S. 93) die Kenntnis der zeitlichen Differenzen zwischen dem Anfangsphasenunterschied und dem Phasenunterschied  $180^\circ$  und zwischen diesem und dem Endphasenunterschied der beiden Pendel nicht benötigen, außerdem auch bei einseitigen Phasen im Hauptglied frei von dem nur durch Extrapolation zu ermittelnden Amplitudenverhältnis der Pendel zur Zeit des während der Beobachtungszeit nicht auftretenden Phasenunterschiedes  $180^\circ$  sind.

Schwingen zwei Pendel mit gleicher Schwingungsdauer mit gleichen Amplituden und entgegengesetzter Phase in ein und derselben Schwingungsebene auf demselben Stativ, so kann dadurch eine horizontale Bewegung der Schneidenauflageflächen nicht stattfinden, wenn die gemeinsame Unterlage zwischen den beiden Schneiden als starr vorausgesetzt wird. Es wird indessen weder möglich sein, zwei invariable Pendel mit genau gleicher Schwingungsdauer herzustellen, noch gelingt es, ohne besondere Einrichtungen bei den Beobachtungen die Pendel mit gleichen Amplituden genau gleichzeitig mit entgegengesetzter Phase in Bewegung zu setzen. Zwei Pendel mit ungleichen Schwingungszeiten können überhaupt nicht während der Dauer der notwendigen Beobachtungszeit mit gleichen Amplituden und mit gleicher Phasendifferenz schwingen. Dennoch läßt sich das Verfahren des Gegeneinanderschwingens auch für solche Pendel verwenden, deren Schwingungszeiten um einige  $\frac{1}{100\,000}$  Sekunden voneinander abweichen.

Es seien  $T_1, T_2$  die beobachteten Schwingungszeiten der Pendel I und II,  
 $a_1, a_2$  ihre momentanen Amplituden,  
 $\varphi_1, \varphi_2$  ihre momentanen, von einem gewissen Anfangspunkt gezählten Phasen,

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  die Vergrößerungen der Schwingungszeiten der Pendel,  
 die sie durch das Mitschwingen des Stativs erfahren, wenn sie einzeln auf demselben elastischen Stativ schwingen.

Zur Abkürzung sei

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = T, \quad \frac{a_1}{a_2} = a_{12}, \quad \frac{a_2}{a_1} = a_{21}, \quad |\varphi_2 - \varphi_1| = \varphi$$

gesetzt.

Schwingen die beiden Pendel gleichzeitig auf demselben Stativ, so sind die momentanen Reduktionen  $\mathcal{A}T_1$  und  $\mathcal{A}T_2$  der beobachteten Schwingungszeiten auf starres Stativ

$$\mathcal{A}T_1 = -\gamma - \gamma a_{21} \cos \varphi \dots \dots \dots (1)$$

$$\mathcal{A}T_2 = -\gamma - \gamma a_{12} \cos \varphi \dots \dots \dots (2)$$

(Ph. Furtwängler, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1902, XII, S. 251. — F. A. Vening-Meinesz, Observations de pendule dans les Pays-Bas, Delft 1923, S. 26.) Durch Integration dieser Gleichungen über die Beobachtungszeit ergeben sich praktische Formeln zur Bestimmung von  $\mathcal{A}T_1$  und  $\mathcal{A}T_2$ . Diese Rechnung führen wir, wie es auch Berroth a. a. O. getan hat, mittels Reihenentwicklungen nach steigenden Potenzen der Beobachtungszeit aus. Indessen wollen wir keinen Unterschied machen zwischen Beobachtungen, während deren der Phasenunterschied  $180^\circ$  durchschritten wird, und solchen, während deren er nicht erreicht wird (zweiseitige und einseitige Phasen). Unsere Schlußformeln werden für beide Fälle gelten.

Beginne die Beobachtung zur Zeit  $t_1$ , sei sie zur Zeit  $t_2$  beendet, und werde die Beobachtungszeit

$$t_2 - t_1 = \mathcal{A}t$$

gesetzt, so ist

$$\mathcal{A}T_1 = -\gamma - \frac{\gamma}{\mathcal{A}t} \int_{t_1}^{t_2} a_{21} \cos \varphi dt \dots \dots \dots (3)$$

$$= -\gamma + \frac{\gamma}{\mathcal{A}t} \left( \int_{t_0}^{t_1} a_{21} \cos \varphi dt - \int_{t_0}^{t_2} a_{21} \cos \varphi dt \right); \dots \dots \dots (4)$$

$t_0$  sei der Zeitpunkt, in dem die Phasendifferenz  $180^\circ$  beträgt oder betragen würde. Nun ist

$$\begin{aligned} (a_{21} \cos \varphi)_t = & -(a_{21})_{t_0} + \left[ \frac{d(a_{21} \cos \varphi)}{dt} \right]_{t_0} \cdot (t - t_0) + \left[ \frac{d^2(a_{21} \cos \varphi)}{dt^2} \right]_{t_0} \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} \\ & + \left[ \frac{d^3(a_{21} \cos \varphi)}{dt^3} \right]_{t_0} \cdot \frac{(t - t_0)^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Furtwänglerschen Gleichungen [a. a. O. S. 248] \*)

$$\frac{d a_{21}}{dt} = -\frac{\pi \gamma}{T^2} (1 + a_{21}^2) \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{d (\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} = -\frac{\pi}{T^2} [T_2 - T_1 + \gamma (a_{12} - a_{21}) \cos (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

---

\*) Die von  $\gamma$  abhängigen Glieder in diesen Formeln hat Berroth irrtümlich mit dem falschen Vorzeichen übernommen.

folgen die Differentialquotienten:

$$\frac{d(a_{21} \cos \varphi)}{dt} = \frac{\pi a_{21} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{T^2} [T_2 - T_1 - 2\gamma a_{21} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)],$$

d. h.

$$\left[ \frac{d(a_{21} \cos \varphi)}{dt} \right]_{t_0} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2(a_{21} \cos \varphi)}{dt^2} \right]_{t_0} &= \left[ \frac{\partial \frac{d(a_{21} \cos \varphi)}{dt}}{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} \right]_{t_0} \\ &= \frac{\pi^2}{T^4} [(T_2 - T_1)^2 a_{21} + \gamma (T_2 - T_1) (3a_{21}^3 - 1) + 2\gamma^2 a_{21} (a_{21}^2 - 1)]; \\ &\quad \{a_{21} = (a_{21})_{t_0}\}. \end{aligned}$$

Das Glied  $2\gamma^2 a_{21} (a_{21}^2 - 1)$  in der eckigen Klammer kann vernachlässigt werden, wie die Endformeln zeigen, da  $a_{21} \approx 1$ . Ferner ist

$$\left[ \frac{d^3(a_{21} \cos \varphi)}{dt^3} \right]_{t_0} = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{\pi^2}{2T^4} (T_2 - T_1) [(T_2 - T_1) a_{21} + \gamma (3a_{21}^3 - 1)] = d_2,$$

dann wird

$$(a_{21} \cos \varphi)_{t_1} = -(a_{21})_{t_0} + d_2 \cdot (t_1 - t_0)^2,$$

$$(a_{21} \cos \varphi)_{t_2} = -(a_{21})_{t_0} + d_2 \cdot (t_2 - t_0)^2;$$

hieraus ergibt sich

$$(a_{21})_{t_0} = -\frac{(a_{21} \cos \varphi)_{t_1} + (a_{21} \cos \varphi)_{t_2}}{2} + d_2 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2 + (t_2 - t_0)^2}{2}. \quad (5)$$

Durch Integration folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{\mathcal{A}t} \int_{t_0}^{t_1} a_{21} \cos \varphi dt = -(a_{21})_{t_0} \cdot \frac{t_1 - t_0}{\mathcal{A}t} + \frac{d_2}{3} \cdot \frac{(t_1 - t_0)^3}{\mathcal{A}t},$$

$$\frac{1}{\mathcal{A}t} \int_{t_0}^{t_2} a_{21} \cos \varphi dt = -(a_{21})_{t_0} \cdot \frac{t_2 - t_0}{\mathcal{A}t} + \frac{d_2}{3} \cdot \frac{(t_2 - t_0)^3}{\mathcal{A}t},$$

die voneinander subtrahiert unter Beachtung von (5)

$$-\frac{1}{\mathcal{A}t} \int_{t_1}^{t_2} a_{21} \cos \varphi dt = -\frac{(a_{21} \cos \varphi)_{t_1} + (a_{21} \cos \varphi)_{t_2}}{2} + \frac{d_2}{6} \cdot (\mathcal{A}t)^2$$

ergeben; mithin wird

$$\Delta T_1 = -\gamma \left( 1 + \frac{(p_{21})_{t_1} + (p_{21})_{t_2}}{2} - \frac{\pi^2 (T_2 - T_1) [(T_2 - T_1) a_{21} + \gamma (3 a_{21}^2 - 1)] (\Delta t)^2}{12 T^4} \right) \quad (6)$$

und

$$\Delta T_2 = -\gamma \left( 1 + \frac{(p_{12})_{t_1} + (p_{12})_{t_2}}{2} - \frac{\pi^2 (T_1 - T_2) [(T_1 - T_2) a_{12} + \gamma (3 a_{12}^2 - 1)] (\Delta t)^2}{12 T^4} \right), \quad (7)$$

worin

$$a_{12} = (a_{12})_{\varphi = 180^\circ}, \quad a_{21} = (a_{21})_{\varphi = 180^\circ} \quad \text{und z. B.} \quad (p_{21})_{t_1} = (a_{21} \cdot \cos \varphi)_{t_1}$$

bedeuten. Die Korrektur (7) ergibt sich aus (6) durch Vertauschen der Indizes 1 und 2, weil (2) aus (1) wegen  $\cos \varphi = \cos (\varphi_1 - \varphi_2) = \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$  gleichfalls durch Vertauschen dieser Indizes hervorgeht.

Da über die zeitliche Lage von  $t_0$  in bezug auf  $t_1$  und  $t_2$  in unserer Ableitung keinerlei Annahmen gemacht sind, gelten die Korrekturen (6) und (7) sowohl für einseitige als auch für zweiseitige Phasen.

Unter der sicherlich immer erfüllten Voraussetzung, daß

$$a_{21}^2 \text{ bzw. } a_{12}^2 > \frac{1}{3},$$

ist für dasjenige der beiden Pendel, das die kleinere Schwingungszeit besitzt, in der Korrektur auf starres Stativ das von dem Quadrat der Beobachtungszeit  $\Delta t$  abhängige Glied stets positiv; für dasjenige mit der größeren Schwingungsdauer ist es  $\geq 0$ , je nachdem

$$\gamma \leq \frac{|T_1 - T_2| a_{21}}{3 a_{21}^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \gamma \leq \frac{|T_1 - T_2| a_{12}}{3 a_{12}^2 - 1}$$

ist. Da ferner

$$(\varphi_2 - \varphi_1)_{t_2} - (\varphi_2 - \varphi_1)_{t_1} \approx \frac{(T_1 - T_2) \Delta t}{T^2} \cdot 180^\circ \dots \dots (8)$$

ist, so läßt sich mit Hilfe der Beziehungen (6), (7) und (8) leicht angeben, in welchem Intervall sich der den Pendeln bei Beginn der Beobachtungen zu erteilende Phasenunterschied halten muß und über welche Zeitdauer die Beobachtung ausgedehnt werden darf, wenn sich der Einfluß des Mitschwingens des Stativs auf die Schwingungszeiten der Pendel in vorgegebenen Grenzen halten soll. Die Beobachtungszeit ist verhältnismäßig am längsten, wenn

$$|180^\circ - \varphi|_{t_1} \approx |180^\circ - \varphi|_{t_2}^*)$$

ist.

---

\*) Diesen Sonderfall hat Vening-Meinesz behandelt in: Bijdragen tot de theorie der slingerwaarnemingen, Amsterdam 1915, S. 99—101.