

Werk

Jahr: 1927

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:3

Werk Id: PPN101433392X_0003

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0003 | LOG_0052

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfacher Massenformen unter Ver- wendung von Gradient und Krümmungsgröße *).

Von **Karl Jung**. — (Mit achtzehn Abbildungen.)

Nikiforov, Meisser und andere veröffentlichten Methoden zur Bestimmung von Lage und Gestalt unterirdischer Masseneinbettungen aus dem mit der Eötvösschen Drehwage gemessenen Verlauf des Gradienten. Darüber hinausgehend werden in der vorliegenden Arbeit graphische und rechnerische Verfahren abgeleitet, die außer dem Gradienten auch die Krümmungsgröße benutzen, um einfache Formen „zweidimensionaler“ Einbettungen zu bestimmen, d. h. solcher Einbettungen, die die Gestalt eines sehr langen, horizontal gelagerten Zylinders oder Prismas mit beliebigem Querschnitt haben. Es werden Probleme mit zwei oder drei Unbekannten behandelt. In den einfacheren Fällen (Kreisquerschnitt, senkrechte Stufe, senkrecht aufsteigender Spalt) ist die Verwendung von Krümmungsgröße oder Gradient allein ausreichend, dagegen erfordert eine einfache Bestimmung der Einbettungen mit drei Unbekannten (rechteckiger Querschnitt, schiefe Stufe, schief aufsteigender Spalt) die gemeinsame Verwendung von Krümmungsgröße und Gradient. In den erstgenannten Fällen werden gebrauchsfertige Formeln gebracht. In den anderen Fällen jedoch erweisen sich ganz oder teilweise graphische Methoden als besonders vorteilhaft, die in für die Praxis gebrauchsfertigen Diagrammen wiedergegeben sind. Bei der praktischen Anwendung muß der Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung bekannt sein. Ferner wird eine ungefähre Anschauung von der Gestalt der Einbettung vorausgesetzt. Anhaltspunkte hierfür geben schon der allgemeine Verlauf der Krümmungsgröße und des Gradienten. In manchen Fällen ergeben sich Kriterien, die die Entscheidung gestatten, ob die vorläufig angenommene Gestalt der Einbettung tatsächlich vorhanden und die genauere Bestimmung nach einer der angeführten Methoden möglich ist. In beschränktem Maße ist eine Anwendung der Methoden auch auf dreidimensionale Einbettungen gestattet, deren Gestalt durch die Rotation des Querschnitts der entsprechenden „zweidimensionalen“ Einbettung entsteht.

I. Die Aufgabe.

1. Der Gehängeschwerpunkt O der Drehwage sei der Anfangspunkt eines Koordinatensystems. Die Z -Achse zeigt in Richtung der Schwerkraft, also senkrecht zur Niveaulfläche, während die X -Achse und die Y -Achse Tangenten

*) Diese Arbeit bildet den dritten und letzten Teil der in der Fußnote auf S. 137 erwähnten Dissertation. Sie ist im Geodätischen Institut zu Potsdam auf Anregung von Herrn Prof. Angenheister entstanden und von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen angenommen. Die beiden ersten Teile der Dissertation befinden sich auf S. 137 und S. 201 dieser Zeitschrift.

an die Niveaulfläche sind. Das Schwerepotential in O sei U . Dann werden mit der Drehwage bekanntlich die folgenden Größen gemessen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \dots \dots \dots \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \dots \dots \dots \quad (b)$$

Die unter (a) angegebenen Größen geben Auskunft über die Krümmungen der Niveaulfläche und werden deshalb unter dem Namen „Krümmungsgröße“ zusammengefaßt; die unter (b) angeführten Größen bilden den „Gradienten“ und geben die Veränderlichkeit der vertikalen Schwerekomponente beim Fortschreiten in horizontaler Richtung an. Näheres hierüber befindet sich in allen eingehenderen Abhandlungen über die Drehwage — z. B. bei Eötvös^{1) 2)}, Nikiforov^{3) 4) 5)} und anderen — und soll hier nicht weiter besprochen werden.

Das Schwerepotential U setzt sich zusammen aus dem Schwerepotential U_0 der homogen geschichteten, rotierenden Erde, der Terrainwirkung U_T und dem Potential U_S etwaiger Masseneinbettungen, die die Homogenität der Erdkruste stören.

$$U = U_0 + U_T + U_S.$$

Die zweiten Differentialquotienten von U_0 sind bekannt und können von jeder Drehwagenmessung subtrahiert werden. Die Terrainkorrektion beseitigt den Einfluß der Unebenheiten des Geländes, so daß der Rest nur von den unterirdischen Einbettungen abhängt.

Ist die Masseneinbettung bekannt, so liegt im Prinzip keine Schwierigkeit vor, Krümmungsgröße und Gradient in allen Punkten der Oberfläche auf graphischem oder rechnerischem Wege zu ermitteln. In der Praxis jedoch liegt das inverse Problem vor: aus dem bekannten Verlauf von Krümmungsgröße und Gradient soll Form und Dichte der Einbettung bestimmt werden.

Mathematisch ist dies Problem nicht eindeutig. Kann man jedoch von vornherein einige Aussagen über die Masseneinbettung machen, so ist es vielfach möglich, weitere Einzelheiten eindeutig zu erhalten. So kennt man in vielen Fällen den Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung, und oft hat man eine rohe Vorstellung von ihrer Gestalt, z. B. ob eine senkrechte oder schiefe Stufe, ein senkrecht aufsteigender Spalt oder sonst eine geometrisch leicht zu beschreibende Einbettungsform vorliegt. Im folgenden soll gezeigt werden, wie bei Kenntnis des Dichteunterschieds und einer ungefähren Anschauung von der Gestalt der Einbettung weitere Einzelheiten aus dem Verlauf der Krümmungsgröße und des Gradienten gefunden werden können.

2. Man kann bei der Lösung der soeben formulierten Aufgabe indirekt vorgehen, indem man hinreichend viele, den natürlichen Verhältnissen einigermaßen angepaßte Massenordnungen auswählt, für diese den Verlauf von Krümmungsgröße und Gradient bestimmt, diesen Verlauf aufzeichnet und

schließlich die durch Messung in der Natur erhaltenen Resultate damit vergleicht. Versuche, auf diese Art die unter der Erdoberfläche vorhandenen Massen zu bestimmen, sind vielfach unternommen worden, von denen die veröffentlichten in der Literaturübersicht von Ambronn⁶⁾ zu finden sind*).

Seltener ist man direkt vorgegangen und hat aus den Eigentümlichkeiten des Verlaufs von Krümmungsgröße und Gradient — Lage und Betrag der Extreme, Lage der Nullstellen usw. — die Einzelheiten der Massenordnung zu bestimmen versucht. So gibt Meisser⁷⁾ eine Methode zur Bestimmung der Tiefe des Mittelpunkts einer kugelförmigen Einbettung, und Nikiforov⁸⁾ bringt Verfahren, die die Lage und Ausdehnung „zweidimensionaler“ Massenordnungen zu bestimmen gestatten, d. h. solcher Einbettungen, die sich längs einer der horizontalen Koordinaten nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken. Meisser und Nikiforov verwenden nur den Gradienten und lassen die Krümmungsgröße unberücksichtigt**). Bei den im folgenden auszuführenden Methoden sollen Krümmungsgröße und Gradient gemeinsam herangezogen werden. Hierdurch wird es möglich, teils über die Ergebnisse Nikiforovs hinauszugehen, teils die Methoden zu vereinfachen.

Die Verwendung der Krümmungsgröße bedingt genauere Terrainkorrekturen, wie oftmals erwähnt und von Berroth⁹⁾ zahlenmäßig ausgeführt wurde. Diese Tatsache mag von der Berücksichtigung der Krümmungsgröße abschrecken und ist vielleicht eher ein stichhaltiger Grund als ihre Eigenschaft, nicht so anschaulich vorstellbar zu sein wie der Gradient. Letztere Schwierigkeit ist nur eine scheinbare, da man sich auf den Standpunkt stellen kann, daß Krümmungsgröße und Gradient zwei durch die Messungen gegebene Größen sind, deren Verlauf je nach der Art der Einbettung charakteristische Merkmale zeigt und deren mathematisch-geodätische Bedeutung für die praktische Verwendung zunächst unberücksichtigt bleiben kann. Um dies auch äußerlich auszudrücken, soll bei den im folgenden zu entwickelnden Methoden die Krümmungsgröße mit „ K “ und der Gradient mit „ G “ bezeichnet werden, so daß die zweiten Differentialquotienten von U als Bezeichnungen nicht mehr vorkommen.

II. Annahmen und Vereinfachungen.

1. Wie bereits angedeutet, können die Ergebnisse von Drehwagenmessungen stets von dem Anteil, den das homogene rotierende Erdellipsoid und die Geländeunebenheiten hervorrufen, befreit werden. Wenn dies mit hinreichender Genauigkeit geschehen ist, enthält das Resultat nur den Einfluß der unter der Erdoberfläche befindlichen Einbettungen. Es genügt also, diese allein zu betrachten. Hierzu ist es ausreichend, wenn man die Erdoberfläche eben annimmt.

*) Anmerkung bei der Korrektur: Sehr schöne Beispiele der indirekten Methode finden sich in der kürzlich erschienenen Arbeit von M. Matuyama⁹⁾. Leider ist die Anzahl der mit der Drehwaage vermessenen Stationen zu gering, um die Genauigkeit der Methode voll auszunutzen.

***) Anmerkung bei der Korrektur: Eine neue Veröffentlichung von J. Koenigsberger¹⁰⁾ behandelt die senkrechte Stufe unter alleiniger Verwendung des Gradienten.

2. Die zu entwickelnden Methoden beziehen sich auf Einbettungen von bestimmter geometrischer Gestalt. Die Ausarbeitung der Methoden geschieht ohne Rücksicht darauf, daß die in der Natur vorkommenden Einbettungen in den seltensten Fällen genau diese Formen aufweisen. Dies beeinträchtigt die Anwendungsmöglichkeit, und die Entscheidung, ob eines der folgenden Verfahren anwendbar ist, muß dem Praktiker überlassen bleiben.

3. Um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, werden nur homogene Einbettungen in Betracht gezogen. Es liegt also nur ein Dichteunterschied vor.

4. Der Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung und ihre ungefähre geometrische Gestalt werden als bekannt vorausgesetzt. Die Annahme der ungefähren Gestalt ist nicht ganz willkürlich; wichtige Anhaltspunkte gibt der allgemeine Verlauf von Krümmungsgröße und Gradient (s. u.).

5. Es werden nur „zweidimensionale“ Massenordnungen betrachtet, das sind solche Einbettungen, die sich längs einer der horizontalen Koordinaten, z. B. der Y -Koordinate, ins Unendliche erstrecken, d. h. die Form eines unendlich langen, horizontal gelagerten Zylinders haben. Wie bereits mehrfach ausgeführt (S. 139 und 210 in dieser Zeitschrift), hängt die Wirkung solcher Massenordnungen nur von deren Querschnitt, einem zweidimensionalen Gebilde, ab und ist von der Y -Koordinate unabhängig.

Hierdurch ergeben sich Vereinfachungen. Sämtliche Differentialquotienten, in denen y vorkommt, sind gleich Null, Krümmungsgröße und Gradient werden durch je eine Größe dargestellt. Bedeutet γ die Gravitationskonstante ($= \frac{200}{3} \cdot 10^{-9}$), σ den Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung, so gilt an der Erdoberfläche ($z = 0$):

$$U = 2\gamma\sigma \cdot \int_F \int \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \zeta^2}} d\xi d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\gamma\sigma \cdot K = 2\gamma\sigma \cdot \int_F \int \frac{(x-\xi)^2 + \zeta^2}{[(x-\xi)^2 + \zeta^2]^2} d\xi d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\gamma\sigma \cdot G = -2\gamma\sigma \cdot \int_F \int \frac{2(x-\xi)\zeta}{[(x-\xi)^2 + \zeta^2]^2} d\xi d\zeta.$$

Zu integrieren ist über den Querschnitt F .

III. Koordinatensystem, Bezeichnungen.

1. Am einfachsten legt man ein mit der Erde verknüpftes Koordinatensystem zugrunde, in dessen XZ -Ebene sich der Querschnitt der Einbettung befindet. Die X -Achse liegt in der Erdoberfläche, die Z -Achse zeigt hierzu rechtwinklig nach unten, der Koordinatenanfang kann auf der X -Achse beliebig gewählt werden.

Strenggenommen ist das nicht ohne weiteres zulässig, denn die Drehwagemessungen beziehen sich auf Koordinaten (\bar{X}, \bar{Z}) , die nicht mit der Erde, sondern mit der Niveauläche verknüpft sind, da die \bar{Z} -Achse in Richtung der Schwerkraft liegt und die \bar{X} -Achse die Niveauläche berührt (Fig. 1). Die beiden Systeme unterscheiden sich in der für die zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials belanglosen Lage des Nullpunkts und in der Richtung der Achsen. Nimmt man den einfachsten Fall an, daß die Y -Achsen gleichgerichtet sind, so sind die beiden anderen Achsen gegeneinander um den Winkel λ der Lotabweichung gedreht. Zwischen den beiden Koordinatensystemen besteht dann folgende Beziehung:

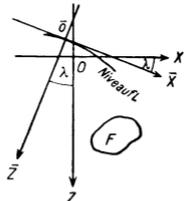


Fig. 1.

$$x = \cos \lambda \cdot \bar{x} - \sin \lambda \cdot \bar{z}, \quad z = \sin \lambda \cdot \bar{x} + \cos \lambda \cdot \bar{z}.$$

Für Krümmungsgröße und Gradient ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \cos 2\lambda + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cdot \sin 2\lambda, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cdot \cos 2\lambda - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \sin 2\lambda, \end{aligned}$$

wobei die bei „zweidimensionalen“ Massenanordnungen gültige Beziehung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0^*$) benutzt worden ist. λ ist sehr klein, daher läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\lambda \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - 2\lambda \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Man kann theoretisch Fälle angeben, in denen die Lotabweichung Werte annimmt, die nicht vernachlässigt werden dürfen. In fast allen praktisch vorkommenden Fällen jedoch bleibt sie noch unter 0.5'. Damit erreicht bei den in der Natur vorkommenden Beträgen von $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ keines der λ enthaltenden Glieder den Betrag von 1 E (1 Eötvös = 10^{-9} cgs), den man als äußerste Genauigkeit der Drehwage annehmen kann. Somit kann man unbedenklich setzen: $\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$, und die Berechnungen sind unmittelbar mit den Drehwagemessungen vergleichbar.

*) Man könnte geneigt sein, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2$ zu setzen [ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation]. Dies ist jedoch nicht statthaft, da der Einfluß der Zentrifugalkraft als bereits wegkorrigiert angenommen ist.

2. Folgende Bezeichnungen werden ständig vorkommen:

$K = \frac{1}{2\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $G = \frac{1}{2\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$: Krümmungsgröße und Gradient dividiert durch $2\gamma\sigma$ (siehe unten);

K_{ma} , K_{mi} , G_{ma} , G_{mi} : Maxima und Minima von K und G ;

K_e , G_e : die Extremwerte, wenn zwischen Maximum und Minimum nicht unterschieden werden muß;

K_0 , G_0 : K und G im Koordinatenanfang, wenn dort keine Extremwerte vorliegen;

X_{ma} , X_{mi} , X_e , x_{ma} , x_{mi} , x_e : Abszissen von K_{ma} , K_{mi} , K_e , G_{ma} , G_{mi} , G_e ;

X : die Abszisse, wo K durch Null geht, wenn dies nicht im Koordinatenanfang der Fall ist;

G_X : Betrag von G für $x = X$.

Absolutwerte werden wie üblich durch senkrechte Striche gekennzeichnet.
 γ , σ : Gravitationskonstante und Dichteunterschied der Einbettung gegen ihre Umgebung;

t , T : die Tiefe, in der die Einbettung beginnt, und die, bis zu der sie reicht;

r_m : bei geradlinig begrenzten Querschnitten die Entfernungen vom Aufpunkt zu den Ecken;

φ_n : Gesichtswinkel, unter denen die Begrenzungslinien geradlinig begrenzter Querschnitte vom Aufpunkt aus erscheinen;

R , Φ : spezielle Werte von r und φ ;

α : Böschung- und Einfallswinkel der unterirdischen Massenarrangements.

IV. Geometrisch ähnliche, spiegelbildliche gleiche und äquivalente Massenarrangements, Symmetrieeigenschaften.

1. Die Dimension des Schwerepotentials*) ist $[U] = \left[\gamma \frac{m}{l} \right]$, die Dimension der Krümmungsgröße also $\left[\gamma \frac{m}{l^3} \right]$. Hieraus folgt, daß für geometrisch ähnliche Massenarrangements A und B die Krümmungsgröße in einander entsprechenden Punkten gleich ist. Das gleiche gilt für den Gradienten. $K_A(x) = K_B(nx)$, $G_A(x) = G_B(nx)$. Diese Tatsache erlaubt, die Bestimmung der geometrischen Gestalt von der der wahren Größe zu trennen, ein Vorteil, von dem mehrfach Gebrauch gemacht werden soll.

2. Bei Massenarrangements A und B , die in bezug auf die Z -Achse spiegelbildlich gleich sind, gelten die folgenden Beziehungen:

$$K_A(x) = K_B(-x), \quad G_A(x) = -G_B(-x).$$

*) = Potential der Schwerebeschleunigung.

3. Horizontal gelagerte, von parallelen Ebenen begrenzte Schichten, die sich nach allen Seiten ins Unendliche ausdehnen, üben bekanntlich keine Wirkung auf die Krümmungsgröße und den Gradient aus. Eine solche Schicht kann also zu jeder Massenordnung hinzu addiert oder von ihr subtrahiert werden; Einbettungen, die sich nur durch das Hinzukommen oder Fehlen einer solchen Schicht unterscheiden, sind äquivalent. Beispiele äquivalenter Massenordnungen zeigt Fig. 2.

Die angeführten Beziehungen und Eigenschaften gestatten, verschiedenartige Einbettungsformen gemeinsam zu behandeln, und erleichtern die Bestimmung von deren Lage und Ausdehnung.

4. Ihrer Symmetrie nach kann man die Einbettungen in drei Gruppen einteilen: symmetrische, antisymmetrische und asymmetrische.

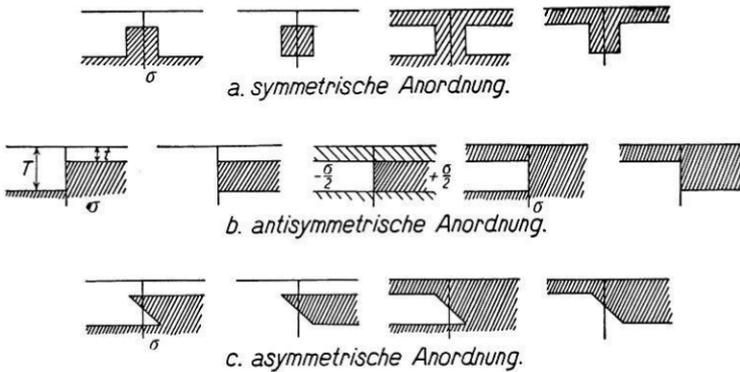


Fig. 2. Äquivalente Massenordnungen.

Bei den symmetrischen Massenordnungen [Fig. 2 a, Fig. 3 a*), c, d] kann man den Koordinatenanfangspunkt so wählen, daß der Querschnitt zur Z-Achse symmetrisch ist. Die Krümmungsgröße dieser Massenordnungen hat dann im Koordinatenanfang ein Extremum, der Gradient geht an dieser Stelle durch Null. Ferner gilt

$$K(x) = K(-x), \quad G(x) = -G(-x).$$

Bei den antisymmetrischen Massenordnungen liegen zwischen den Tiefen t und T auf der einen Seite der Z-Achse Teile des Querschnitts, wo sich auf der anderen Seite der Z-Achse Punkte befinden, die nicht zum Querschnitt

*) Die Fig. 3 a bis h sind nach den später angeführten Formeln für K und G berechnet unter Annahme der den Figuren beigelegten Größenverhältnisse. Der Maßstab der eingezeichneten Einbettung ist nach Tiefe und Breite derselbe, die Einheit ist beliebig. Bei den Kurven ist die Einheit der Abszisse dieselbe wie bei den Massen, auf der Ordinatenachse entspricht der Einheit ein Betrag von $\frac{1}{2\gamma\sigma} E$ ($1 E = 1 \text{ Eötvös} = 10^{-9} \text{ cgs}$).

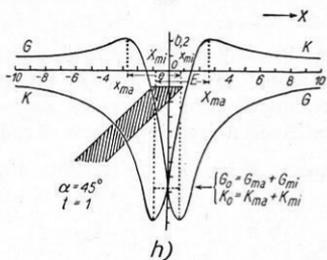
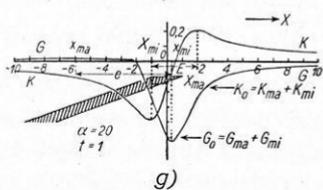
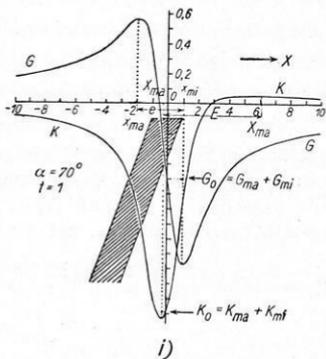
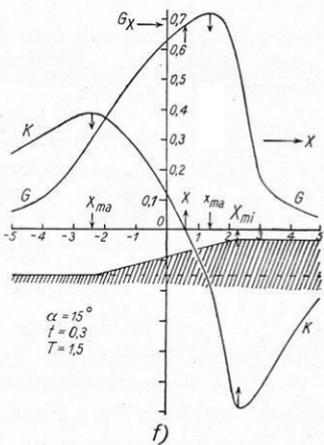
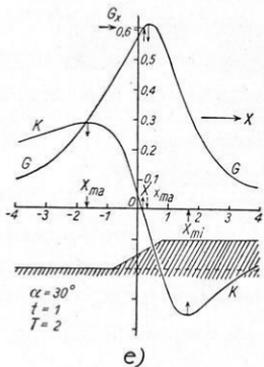
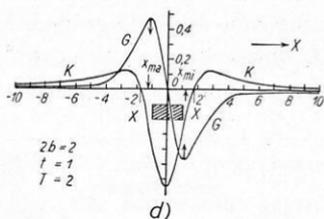
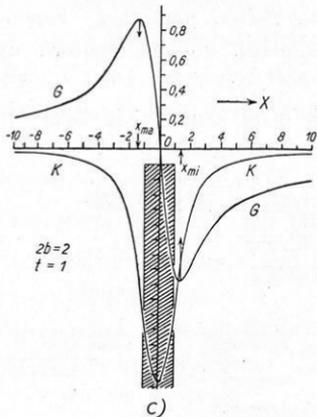
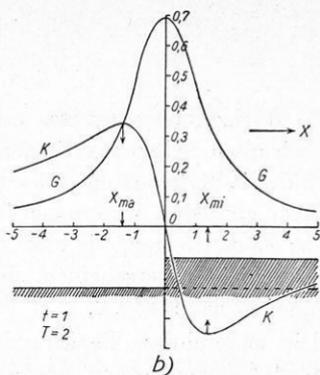
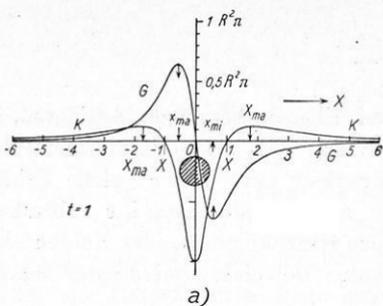


Fig. 3.

gehören, und umgekehrt. Bei diesen Anordnungen geht die Krümmungsgröße im Koordinatenanfang durch Null, und der Gradient hat ein Extremum. Es gilt

$$K(x) = -K(-x), \quad G(x) = G(-x).$$

Für einfache Massenanordnungen, wie die in Fig. 3 angegebenen, sind diese Sätze leicht zu beweisen und anschaulich zu erfassen. Sie gelten auch für komplizierte Querschnitte, wie man zeigen kann, indem man diese Querschnitte in geeigneter Weise durch Treppenvpolygone annähert.

Krümmungsgröße und Gradient asymmetrischer Einbettungen (Fig. 2 c, Fig. 3 e, f, g, h, i) zeigen keine Symmetrie. Kommt die Massenanordnung einer symmetrischen oder antisymmetrischen nahe, so haben Krümmungsgröße und Gradient angenähert die diesen Einbettungen entsprechenden Eigenschaften.

V. Die Bestimmung von K und G aus den Messungsergebnissen.

1. Nur wenn von vornherein das Instrument so orientiert war, daß das Azimut seiner Anfangsstellung mit der X -Richtung zusammenfällt, geben die Messungen die Beträge von $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\gamma\sigma \cdot K$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\gamma\sigma \cdot G$.

2. Meist jedoch wird die Erstreckung der Einbettung am Anfang nicht schon so weit bekannt sein, daß man das Instrument danach orientieren kann. In diesem Falle ist folgendermaßen zu verfahren:

Man trägt, wie es bereits seit Eötvös^{1) 2)} üblich ist, den Gradienten als gerichteten Pfeil in die Karte des vermessenen Gebiets ein und die Krümmungsgröße als gerichtete Strecke. Der Pfeil zeigt die Richtung an, in der sich beim Fortschreiten auf der (ebenen und horizontalen) Erdoberfläche die vertikale Komponente (g_z) der Schwerkraft am schnellsten ändert, und seine Länge ist gleich der Änderung pro Zentimeter $\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)$. Die Strecke zeigt die Richtung der größten Hauptkrümmung (k_1) der Niveauläche, ihre Länge gibt die Differenz der beiden Hauptkrümmungen ($k_1 - k_2$). Auf das Vorzeichen der Krümmungen muß hierbei geachtet werden: eine negative Krümmung ist stets kleiner als eine positive, auch wenn letztere den kleineren Absolutbetrag hat.

„Zweidimensionale“ Einbettungen zeigen sich dadurch an, daß die Gradientenpfeile überall gleich oder einander entgegengesetzt gerichtet sind, während die die Krümmungsgröße darstellenden Strecken entweder den Gradienten gleichgerichtet sind oder mit ihnen einen rechten Winkel bilden. Wählt man eine der Gradientenrichtungen zur Richtung der positiven X -Achse, so geben die Pfeillängen die Beträge von $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\gamma\sigma \cdot G$ oder $-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2\gamma\sigma \cdot G$, je nachdem, ob die Pfeilspitzen in die Richtung der positiven X -Achse weisen

oder entgegengesetzt. Sind Krümmungsgröße und Gradient gleichgerichtet, so gibt die Länge der Strecken den Betrag von $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 \gamma \sigma \cdot K$, im anderen Falle den von $-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2 \gamma \sigma \cdot K$.

VI. Graphische und rechnerische Methoden zur Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfacher zweidimensionaler Massenformen.

1. Um die Übersichtlichkeit in der Darstellung der nun zu entwickelnden Methoden nicht zu beeinträchtigen, wird von einer ausführlichen Wiedergabe der mathematischen Berechnungen abgesehen. Die Formeln für K und G werden stets auf die gleiche Weise durch Integration der auf S. 260 angeführten Ausdrücke über den Querschnitt F der jeweils betrachteten Massenform erhalten. Die Bestimmung der Extremwerte, der zugehörigen Abszissen usw. wird nur dann genauer angegeben, wenn ein von dem üblichen Weg abweichendes Verfahren besonderen Vorteil bietet.

2. Die Aufgabe ist nun folgende. Aus dem Verlauf von K und G soll der Ort, die Tiefe und die Form der Einbettung bestimmt werden. Zuerst kann man den Ort festlegen, indem man ein Koordinatensystem mit der Masse verknüpft und die Lage dieses Systems zu den Abszissen bevorzugter Punkte der Kurven feststellt, Tiefe und Form werden sodann aus weiteren Nullstellen und Extremwerten gefunden.

Bei Querschnitten mit geradliniger Begrenzung hängt die Krümmungsgröße eng mit dem Gesichtswinkel zusammen, unter dem die Begrenzungslinien vom Aufpunkt aus erscheinen, der Gradient steht im Zusammenhang mit den Verhältnissen der Entfernungen von den Ecken zum Aufpunkt. Diese Beziehungen weisen auf den Weg zum einfachsten Verfahren.

Außer dem Orte der Einbettung enthalten die Fälle A , B , C (Kreisquerschnitt, senkrechte Stufe, senkrecht aufsteigender Spalt) zwei, die Fälle D , E , F (rechteckiger Querschnitt, schiefe Stufe, schief aufsteigender Spalt) drei zu bestimmende Größen. Es wird sich zeigen, daß man in den erstgenannten Fällen mit der Krümmungsgröße oder dem Gradienten allein auskommen kann, während in den komplizierteren Fällen wegen des Auftretens der dritten Unbekannten nur eine gemeinsame Verwendung von Krümmungsgröße und Gradient auf einfachem Wege zum Ziele führt.

3. Die scheinbar regellose Abwechslung von graphischen und rechnerischen Methoden hat ihren Grund darin, daß sich jedes Verfahren auf einen Spezialfall bezieht und jeder Spezialfall seine besondere Eigenheiten aufweist, deren geschickte Benutzung wesentliche Vereinfachungen mit sich bringt. Es soll weder ein Anspruch auf restlose Vollständigkeit erhoben sein, noch soll behauptet werden, daß in allen Fällen die vorteilhafteste Methode tatsächlich gefunden ist.

A. Kreisförmiger Querschnitt (Fig. 3 a). 1. Die Z -Achse möge durch den in der Tiefe t liegenden Mittelpunkt des Querschnitts gehen. Der Radius des Kreisquerschnitts wird mit H bezeichnet.

$$K = H^2 \pi \cdot \frac{x^2 - t^2}{r^4}, \quad r^2 = x^2 + t^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$G = -H^2 \pi \cdot \frac{2xt}{r^4} \dots \dots \dots (2)$$

Im Koordinatenanfang ist $G = 0$, K hat ein Minimum. Man berechnet:

$$|X| = t, \dots \dots \dots (3)$$

$$|X_{ma}| = \sqrt{3} \cdot t = 1.732 \cdot t, \dots \dots \dots (4)$$

$$|x_e| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot t = 0.578 \cdot t, \dots \dots \dots (5)$$

$$H = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{|K_{mi}|} \cdot t = 0.564 \cdot \sqrt{|K_{mi}|} \cdot t, \dots \dots \dots (6)$$

$$H = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sqrt{K_{ma}} \cdot t = 1.596 \cdot \sqrt{K_{ma}} \cdot t, \dots \dots \dots (7)$$

$$H = \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3} \cdot \pi}} \cdot \sqrt{|G_e|} \cdot t = 0.700 \cdot \sqrt{|G_e|} \cdot t \dots \dots \dots (8)$$

Die Bedeutung von X , X_{ma} , x_e usw. ist auf S. 262 angegeben.

Man bestimmt zuerst aus einer der Formeln (3) bis (5) die Tiefe t und dann aus einer der Formeln (6) bis (8) den Radius H . Hiermit ist der Querschnitt bekannt.

Im Prinzip sind Krümmungsgröße und Gradient gleichwertig. Jedoch werden in der Praxis die Formeln (5), (6) und (8) den anderen vorzuziehen sein, da die in diesen Formeln auftretenden Größen sich genauer messen lassen.

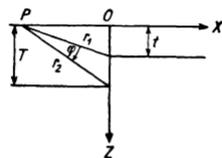


Fig. 4.

2. Der kreisförmige Querschnitt verlangt folgende Beziehungen:

$$|X| : |X_{ma}| : |x_e| = 1 : 1.732 : 0.578, \dots (9)$$

$$|K_{mi}| : K_{ma} : |G_e| = 1 : 0.125 : 0.650 \dots (10)$$

Sind diese Proportionen nicht erfüllt, so kann kein kreisförmiger Querschnitt vorliegen.

B. Senkrechte Stufe (Fig. 3 b, Fig. 4). 1. Die Lage der Koordinaten und die Bezeichnungen zeigt Fig. 4.

$$K = \varphi^*, \dots \dots \dots (1)$$

$$G = \ln \frac{r_2}{r_1} \dots \dots \dots (2)$$

Über dem senkrechten Abfall der Stufe ist $K = 0$, G hat ein Maximum.

*) Im Bogenmaß.

D. Rechteckiger Querschnitt (Fig. 3 d, Fig. 6 bis 11). 1. Die Z-Achse ist Symmetrieachse, die übrigen Bezeichnungen sind aus Fig. 6 ersichtlich.

$$K = \varphi_1 - \varphi_2, \dots \dots \dots (1)$$

$$G = \ln \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4} \dots \dots \dots (2)$$

Im Koordinatenanfang ist $G = 0$, K hat ein Minimum.

2. Es sind die Tiefen t und T , zwischen denen sich die Einbettung erstreckt, und die Breite $2b$ der Einbettung zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten, indem man zunächst die geometrische Form des Querschnitts bestimmt und dann die Bestimmung der wahren Größe vornimmt. Bezeichnet man $\frac{t}{b}$, $\frac{T}{b}$, $\frac{r_m}{b}$ mit t^* , T^* , r_m^* , so gilt:

$$K = \varphi_1 - \varphi_2, \dots \dots \dots (1^*)$$

$$G = \ln \frac{r_1^* \cdot r_3^*}{r_2^* \cdot r_4^*} \dots \dots \dots (2^*)$$

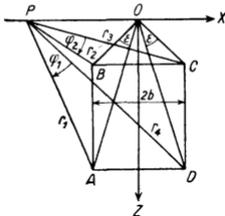


Fig. 6.

Zunächst sind nur die beiden Größen t^* und T^* zu bestimmen.

3. Während bei den bisher betrachteten Querschnitten die Benutzung der Krümmungsgröße keinen besonderen Vorteil vor der Verwendung des Gradienten hatte, ist sie zur einfachen Bestimmung des rechteckigen Querschnitts unerlässlich. Es ist:

$$|K_{mi}| = 2\varepsilon \dots \dots \dots (3)$$

wobei ε den Gesichtswinkel bedeutet, unter dem die senkrechten Seiten des rechteckigen Querschnitts vom Koordinatenanfang, d. i. der Abszisse des Nullwertes von G und des Minimums von K , aus erscheinen. Der Winkel ε ordnet jedem Wert von T^* einen Wert von t^* eindeutig zu und reduziert somit die zweifach unendliche Anzahl von Möglichkeiten auf eine einfach unendliche Zahl mit dem einen Parameter T^* .

Jedem Wertepaar (T^* , t^*) oder, was dasselbe bedeutet, jedem Wertepaar ($|K_{mi}|$, T^*) entsprechen eindeutig bestimmte Werte von $|G_e|$, $|x_e^*| = \frac{|x_e|}{b}$

und $|X^*| = \frac{X}{b}$. Die Beziehungen zwischen $|K_{mi}|$, T^* und $|G_e|$, $|x_e^*|$, $|X^*|$

sind in den Diagrammen b, d, e der Fig. 7 derart wiedergegeben, daß auf der Ordinatenachse $|K_{mi}|$ abgetragen ist, auf der Abszissenachse jeweils $|G_e|$, $|x_e^*|$, $|X^*|$; Kurven sind gezeichnet für verschiedene Werte von T^* ($T^* = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 1; 1.5; 2; 3; 4; 5; 7; 10; \infty$). Aus den in den Diagrammen d und e abzulesenden Werten von $|x_e^*|$ und $|X^*|$ wurde Diagramm c berechnet,

das in gleicher Weise die Beziehung zwischen $|K_{mi}|$, T^* und $\frac{|x_e|}{|X|} \left[= \frac{|x_e^*|}{|X^*|} \right]$ wiedergibt. Diagramm a bringt die Beziehung zwischen $|K_{mi}|$, T^* und t^* .

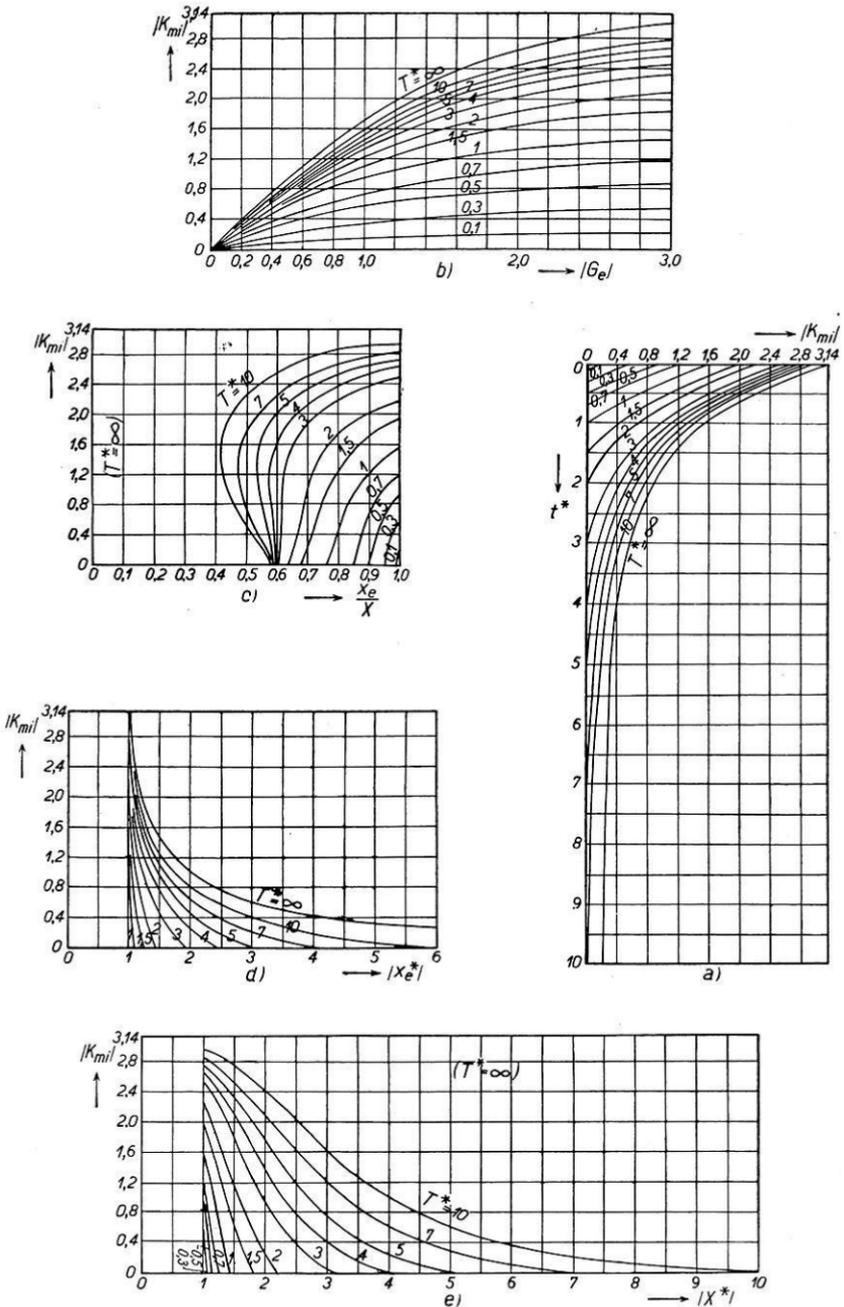


Fig. 7. Zur Bestimmung rechteckiger Querschnitte.

ebensoweit von der Verlängerung von AD entfernt sind. Die Winkel φ_1 und φ_2 haben ihre Scheitel in P_1 und P_2 , sie sind Peripheriewinkel der durch D, A, P_1 und D, A, P_2 hindurchgelegten Kreise, die geometrischen Örter der Winkel $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$. Für die gesuchte Abszisse $|X^*|$ ist $K = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \Phi$; P_1 und P_2 müssen auf demselben Kreise liegen, wie in Fig. 9 angedeutet. Dann ist $P_1 O_1 = P_2 O_2 = |X^*|$. Hieraus ergibt sich die in Fig. 10 angegebene einfache Konstruktion der Werte $|X^*|$. Man nimmt zwei beliebige Werte von T^* und t^* (oder zwei beliebige Werte von $|K_{mi}|$ und T^* und bestimmt den entsprechenden Wert von t^* aus Diagramm a bzw. konstruiert ihn, indem man an DO_1 (Fig. 8) den Winkel $\varepsilon = \frac{1}{2} |K_{mi}| \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ anträgt), markiert die Punkte O_1 und O_2 auf der Z -Achse, sucht die Mitte O_3 von $O_1 O_2$, zieht die Parallelen zu AD durch O_1 und O_2 , nimmt $O_3 A = e$ in den Zirkel und sucht den Punkt (P_1), der auf der Parallelen durch O_1 von O_3 den Abstand e hat bzw. ebenso auf der Parallelen durch O_2 den Punkt P_2 . $P_1 O_1 = P_2 O_2 = |X^*|$.

Die Herstellung von Diagramm c ist bereits angedeutet.

6. Ein großer Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß man es leicht auf solche Fälle übertragen kann, wie sie in Fig. 11 angeführt sind und die in der Natur z. B. durch einen Salzhorst mit Anhydritlut verwirklicht werden. Es treten zwei Dichteunterschiede σ_0 und σ_u auf. Als-

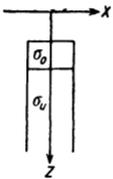


Fig. 11.

$$\bar{K} = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (\sigma_0 - \sigma_u) \varphi_1 - \sigma_u \varphi_2, \dots \dots \dots (1a)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \sigma_u \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} - (\sigma_0 - \sigma_u) \cdot \ln \frac{r_4}{r_1} \dots \dots (2a)$$

Die Berechnung der Diagramme a, b, d wird etwas komplizierter. Die graphische Herstellung von Diagramm e ist so abzuändern, daß die Punkte P_1 und P_2 nicht mehr auf ein und demselben Kreise liegen, sondern auf zwei Kreisen, zwischen deren Peripheriewinkeln φ_1 und φ_2 die Proportion besteht: $\varphi_1 : \varphi_2 = \sigma_u : (\sigma_0 - \sigma_u)$.

Die Verwendung der Diagramme zur Bestimmung der Einbettung bleibt dieselbe.

E. Schiefe Stufe (Fig. 2 c, Fig. 3 e, f, Fig. 12, 13). 1. Bei dieser asymmetrischen Massenordnung geht die Krümmungsgröße im Endlichen einmal durch Null und hat zwei Extreme, der Gradient dagegen geht im Endlichen nicht durch Null und hat nur ein Extremum. Sie verhalten sich also ähnlich wie bei antisymmetrischen Einbettungen.

Es genügt, schiefe Stufen mit spitzem Böschungswinkel α zu betrachten. Die Z -Achse wird so gelegt, daß sie durch die Mitte M der Böschung hindurchgeht (Fig. 12). Dann kann man aus Fig. 2 c in Verbindung mit der Bemerkung über spiegelbildlich gleiche Massenordnungen (S. 262) folgende Beziehungen

ableiten, die den Fall eines stumpfen Böschungswinkels auf den eines spitzen zurückführen.

$$\begin{aligned}
 K_\alpha(x) &= -K_{\pi-\alpha}(-x), \dots \dots \dots (1) \\
 K_{\pi-\alpha}(x) &= -K_\alpha(-x), \dots \dots \dots (1a) \\
 G_\alpha(x) &= +G_{\pi-\alpha}(-x), \dots \dots \dots (2) \\
 G_{\pi-\alpha}(x) &= +G_\alpha(-x) \dots \dots \dots (2a)
 \end{aligned}$$

Diese Umformung ist vorzunehmen, wenn für negative X -Werte K und G positiv sind und für positive X -Werte K negativ und G positiv ist, während für spitze Böschungswinkel K und G sich verhalten müssen, wie Fig. 3 e, f angibt.

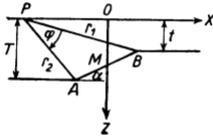


Fig. 12.

2. Es ist (Bezeichnungen siehe Fig. 12):

$$K = \sin \alpha \left\{ \sin \alpha \cdot \varphi - \cos \alpha \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \right\}, \dots \dots (3)$$

$$G = \sin \alpha \left\{ \sin \alpha \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \cos \alpha \cdot \varphi \right\} \dots \dots (4)$$

Auf dem üblichen Wege erhält man die Abszissen der Extremwerte von K und G :

$$x_{ma} = \frac{(T-t)^2}{2(T+t)} \cdot \cotg \alpha, \dots \dots \dots (5)$$

$$|X_e| = \frac{1}{2} \sqrt{4Tt + (T-t)^2 \cdot \cotg^2 \alpha} \dots \dots \dots (6)$$

Aus Formel (6) erkennt man: Die Mitte [O] zwischen den Abszissen X_{ma} und X_{mi} der Extreme der Krümmungsgröße liegt über der Mitte M der unterirdischen Böschung. Ist hiernach die Lage des Koordinatenanfangs gefunden, so müssen noch die Tiefen T und t und der Böschungswinkel α bestimmt werden.

3. Hierzu ist es vorteilhaft, zunächst nur die geometrische Gestalt, d. h. das Verhältnis der Tiefen, $t^* = \frac{t}{T}$, und den Böschungswinkel zu suchen und später erst die Tiefen selbst zu bestimmen. Eine hervorragende Rolle spielt dabei der Punkt $x = X$, in dem die Krümmungsgröße durch Null geht.

Es seien G_X, R_m, Φ die Werte, die G, r_m, φ in diesem Punkte annehmen, e sei der Abstand der Abszissen der Extreme von $K, e = |X_{ma} - X_{mi}|$. Es wird ein Diagramm (Fig. 13 a) hergestellt, das die Beziehungen zwischen

$G_X \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \frac{x_{ma}}{e}, \alpha, \Phi, t^*$ angibt. Die aus den Messungen abzulesenden Werte

G_X und $\frac{x_{ma}}{e}$ sind auf den Koordinatenachsen abgetragen, Kurven sind gezeichnet für verschiedene Werte von α, Φ, t^* ($\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots 90^\circ$; $\Phi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots 180^\circ$; $t^* = 0.025, 0.050, 0.075, 0.1, \dots 0.3, 0.35, 0.4 \dots 0.7, 0.8, 0.9$). $\frac{R_2}{R_1}$ ist auf der Ordinatenachse an der rechten Seite des

Diagramms abzulesen. Zu jedem Wertepaar $\left(G_X, \frac{x_{ma}}{e} \right)$ findet man also un-

mittelbar alle die geometrische Gestalt der Einbettung charakterisierenden Größen, z. B. das Wertepaar (t^*, α) oder das Wertetripel $(\frac{R_2}{R_1}, \Phi, \alpha)$.

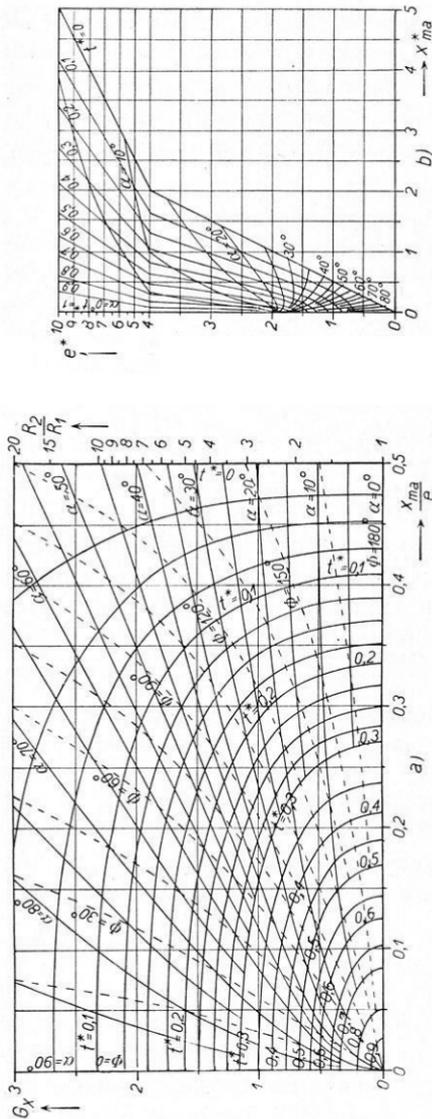


Fig. 13. Zur Bestimmung schiefer Stufen.

Diagramm b dient zur Bestimmung der wahren Größe. Auf den Koordinatenachsen sind $e^* = \frac{e}{T}$ und $x_{ma}^* = \frac{x_{ma}}{T}$ abgetragen, Kurven sind gezeichnet für die oben angegebenen Werte von t^* und α . Da t^* und α bereits bestimmt sind, kann man die jedem Wertepaar (t^*, α) entsprechenden Beträge von e^* oder x_{ma}^* ablesen. e und x_{ma} sind aus den Messungen bekannt. Man erhält schließlich $T = \frac{e}{e^*} = \frac{x_{ma}}{x_{ma}^*}$, $t = T \cdot t^*$. Hiermit ist die Einbettung vollständig bestimmt.

4. Die Herstellung der Diagramme geschieht teils auf graphischem, teils auf rechnerischem Wege. Für $x = X$ erhält man aus den Gleichungen (3) und (4):

$$\ln \frac{R_2}{R_1} : \Phi = \sin \alpha : \cos \alpha, \dots (7)$$

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = k \cdot \sin \alpha, \quad \Phi = k \cdot \cos \alpha, (7a)$$

$$G_X = k \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (8)$$

Folglich ist

$$G_X = \ln \frac{R_2}{R_1}, \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = e^{G_X}, \dots \dots \dots (9a)$$

$$\Phi = G_X \cdot \cotg \alpha, \dots \dots \dots (10)$$

$$\cotg \alpha = \frac{\Phi}{G_X} \dots \dots \dots (10a)$$

Gibt man einen beliebigen Wert von G_X vor, so ist nach (9a) $\frac{R_2}{R_1}$ festgelegt. Gibt man ferner einen willkürlichen Wert von Φ vor, so ist nach

(10a) der Winkel α bestimmt. Durch Auflösung des Dreiecks ABP (Fig. 12), die am schnellsten und hinreichend genau graphisch vorgenommen wird, erhält man die dem Wertepaar (G_X, Φ) entsprechenden Werte von t^* . Weiterhin berechnet man:

$$x_{ma}^* = \frac{(1 - t^*)^2}{2(1 + t^*)} \cdot \cotg \alpha, \dots \dots \dots (11)$$

$$e^* = 2 |X_e^*| = \sqrt{4t^* + (1 - t^*)^2 \cdot \cotg^2 \alpha}, \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{x_{ma}}{e} = \frac{x_{ma}^*}{e^*} \dots \dots \dots (13)$$

Das Einzeichnen der Φ -Kurven in das Diagramm a bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. Benutzt man Gleichung (10 a), so kann man die Schnittpunkte der α -Kurven mit den Φ -Kurven berechnen und die α -Kurven einzeichnen. Bei den t -Kurven dagegen muß man vorgehen wie bei Höhenlinien: die hinreichend vielen Wertepaaren (G_X, Φ) entsprechenden, durch die graphische Auflösung der Dreiecke ABP gewonnenen Werte von t^* werden neben die betreffenden Punkte der Φ -Kurven geschrieben und dann die t^* -Kurven nach Augenmaß dazwischengelegt.

Die Berechnung der t^* - und α -Kurven für Diagramm b geschieht mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12). Diese gestatten, zu vorgegebenen Werten von t^* und α die entsprechenden Werte von e^* und x_{ma}^* zu bestimmen.

F. Aus unendlicher Tiefe schief aufsteigender Spalt (Fig. 3 g, h, i, Fig. 14, 15). 1. Die Z -Achse soll die obere, horizontale Begrenzungslinie des Querschnitts halbieren (Fig. 14). Es genügt, den Winkel α spitz anzunehmen, da bei stumpfem α die der Einbettung mit dem spitzem Winkel $\pi - \alpha$ spiegelbildlich gleiche Massenordnung vorliegt, die sich nach der Bemerkung auf S. 262 auf eine Anordnung mit spitzem α zurückführen läßt.

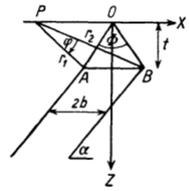


Fig. 14.

2. Es ist (Bezeichnungen siehe Fig. 14):

$$K = -\sin \alpha \left\{ \sin \alpha \cdot \varphi - \cos \alpha \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \right\}, \dots \dots \dots (1)$$

$$G = \sin \alpha \left\{ \sin \alpha \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \cos \alpha \cdot \varphi \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Hieraus läßt sich noch folgende Beziehung ableiten, die zwischen der unter dem Winkel α und dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ aufsteigenden Masse besteht:

$$K_{\frac{\pi}{2} - \alpha}(x) = -\cotg \alpha \cdot G_{\alpha}(-x), \dots \dots \dots (3)$$

$$G_{\frac{\pi}{2} - \alpha}(x) = -\cotg \alpha \cdot K_{\alpha}(-x) \dots \dots \dots (4)$$

Hiernach können Massenordnungen mit dem Winkel α auf solche mit dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zurückgeführt werden, so daß nur noch Böschungswinkel von weniger als 45° zu betrachten sind. Da hiermit kein großer Vorteil erzielt wird, soll davon abgesehen werden.

Eine andere Folgerung aus den Gleichungen (3) und (4) ist wichtiger. Da der Verlauf der Krümmungsgröße der einen Massenordnung bis auf einen konstanten Faktor ($-\cotg\alpha$) mit dem an der Ordinatenachse gespiegelten Verlauf des Gradienten der anderen Massenordnung übereinstimmt, lassen sich alle Sätze, die für den Gradienten abgeleitet werden und sich nicht auf dessen Größe und Vorzeichen und die Richtung der X-Achse beziehen, unmittelbar auf die Krümmungsgröße übertragen, und umgekehrt gelten solche für die Krümmungsgröße abgeleiteten Sätze ohne weiteres für den Gradienten.

3. Bei allen bisher betrachteten Massenordnungen konnte die Lage des Koordinatenanfangs aus den Symmetrieeigenschaften erkannt werden, selbst bei der schiefen Stufe lag in bezug auf die Abszissen der Extreme von K eine Art Symmetrie vor. Im vorliegenden Falle ist dagegen im allgemeinen keinerlei Symmetrie zu erkennen.

Nikiforov⁵⁾ hat ein Verfahren entwickelt, nach dem man aus dem Verlauf des Gradienten — die Krümmungsgröße wird nicht berücksichtigt — den Koordinatenanfang finden kann. Es sei G_0 der Wert von G im Koordinatenanfang. Dann läßt sich durch Rechnung beweisen, daß folgende Gleichung gilt:

$$G_0 = G_{ma} + G_{mi} \dots \dots \dots (5)$$

Dieser Satz kann unmittelbar auf die Krümmungsgröße übertragen werden, und es ist also:

$$K_0 = K_{ma} + K_{mi} \dots \dots \dots (6)$$

Man braucht nur die Extremwerte des Gradienten oder der Krümmungsgröße algebraisch zu addieren und die Abszisse zu suchen, für die der Gradient oder die Krümmungsgröße einen der Summe gleichen Betrag hat. Die Konstruktion ist in Fig. 2 g, h, i durch punktierte Linien angedeutet.

Das Verfahren ist nicht eindeutig, denn sowohl für den Gradienten als auch für die Krümmungsgröße gibt es zwei Abszissen von der verlangten Eigenschaft. Es ist nicht schwer, die richtige herauszufinden, und ganz sicher geht man, wenn man bedenkt, daß die Gleichungen (5) und (6) gleichzeitig erfüllt sein müssen und daher nur die Abszisse die richtige ist, die man auf beiden Wegen erhält.

Wenn aus den Messungsergebnissen keine Abszisse gefunden werden kann, für die $G = G_{ma} + G_{mi}$ und $K = K_{ma} + K_{mi}$ ist, so kann ein schief aufsteigender Spalt nicht vorliegen.

4. Zur Bestimmung der geometrischen Gestalt der Einbettung lassen sich folgende Gleichungen aus (1) und (2) ableiten (Bezeichnungen siehe Fig. 14):

$$\cotg \alpha = \frac{G_0}{K_0}, \dots \dots \dots (7)$$

$$\Phi = - \left[1 + \left(\frac{G_0}{K_0} \right)^2 \right] K_0 \dots \dots \dots (8)$$

Aus Φ läßt sich $t^* = \frac{t}{b}$ berechnen nach der Formel $t^* = \cotg \frac{\Phi}{2}$.

Besondere Beachtung verdient der Fall $\alpha = 45^\circ$. Dann ist der Verlauf von Krümmungsgröße und Gradient spiegelsymmetrisch, $G(x) = K(-x)$, $K(x) = G(-x)$, und es ist $K_0 = G_0$.

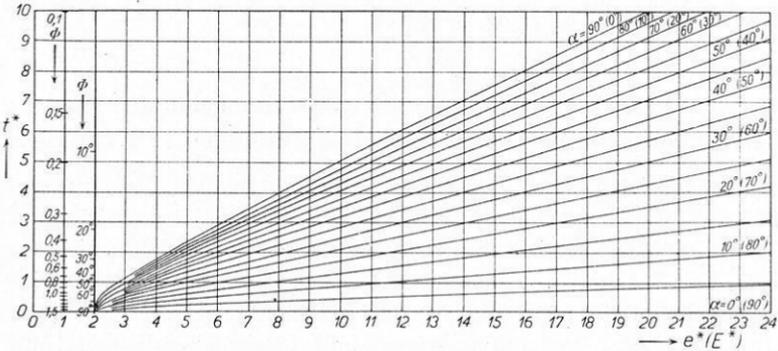


Fig. 15. Zur Bestimmung des schief aufsteigenden Spaltes.

5. Die wahre Größe findet man mit Hilfe des Diagramms Fig. 15. Dieses stellt die Beziehungen dar zwischen $t^*(\Phi)$, $e^* = \frac{e}{b} = |x_{ma}^* - x_{mi}^*| = \left| \frac{x_{ma}}{b} - \frac{x_{mi}}{b} \right|$ bzw. $E^* = X_{ma}^* - X_{mi}^*$, und α . $t^*(\Phi)$ und e^* bzw. E^* sind auf den Achsen abgetragen, Kurven sind gezeichnet für verschiedene Werte von α .

Hat man α und t^* bestimmt, so kann man e^* oder E^* ablesen. e oder E kennt man aus den Messungen. Dann ist $b = \frac{e}{e^*} = \frac{E}{E^*}$, $t = b \cdot t^*$.

6. Die Herstellung des Diagramms kann auf Grund einer Berechnung von Nikiforov⁵⁾ graphisch erfolgen. Nach Nikiforov ist:

$$e = 2 \sqrt{b^2 + t^2 (1 + \cotg^2 \alpha)} \dots \dots \dots (9)$$

Hieraus erhält man

$$\frac{e^*}{2} = \sqrt{1 + \left(\frac{t^*}{\sin \alpha} \right)^2} \dots \dots \dots (9^*)$$

und wegen der aus (3) und (4) gezogenen Folgerung ist $E_\alpha^* = e_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^*$.

Einen Weg zur Konstruktion zeigt Fig. 16, die hieraus abgeleitete praktische Ausführung ist in Fig. 17 angedeutet. Zu jedem Werte von α_m

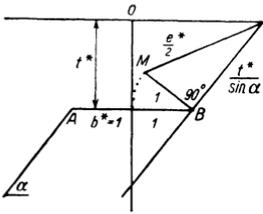


Fig. 16.

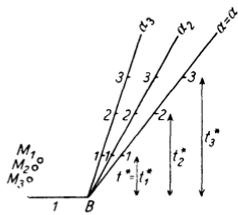


Fig. 17.

gehört ein Punkt M_m . Die Beträge von $\frac{e^*}{2}$, die den verschiedenen Winkeln α_m und den verschiedenen Tiefen t_n entsprechen, können direkt abgegriffen werden: $\frac{e^*}{2}(\alpha_m, t_n) = \overline{M_m n}$, wobei n den mit der Zahl n bezeichneten Punkt auf dem Strahl $\alpha = \alpha_m$ bedeutet.

VII. Vergleich zwischen „zweidimensionalen“ und rotationssymmetrischen Massenarrangements (Fig. 3a, Fig. 18).

1. Die meisten der in der Natur vorkommenden Einbettungen liegen zwischen zwei Extremen: den „zweidimensionalen“ Massenarrangements, die in einer der horizontalen Richtungen unendlich weit ausgedehnt sind, und den (in bezug zur Z-Achse) rotationssymmetrischen Massen, bei denen sich keine der horizontalen Richtungen von den anderen unterscheidet. An einem leicht zu behandelnden Beispiel soll der Unterschied im Verhalten von Krümmungsgröße und Gradient bei den angeführten Arten von Einbettungen gezeigt werden.

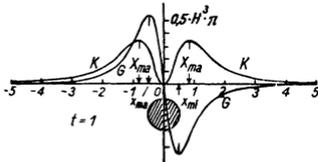


Fig. 18.

Wenn man die geodätische Bedeutung von Krümmungsgröße und Gradient heranzieht, kann man von vornherein sagen, daß der Gradient qualitativ den gleichen Verlauf hat bei rotationssymmetrischen Massenarrangements, die durch Rotation des Querschnitts einer zweidimensionalen Einbettung entstehen, wie bei dieser selbst. Der Verlauf der Krümmungsgröße wird in seinen Hauptmerkmalen (Anzahl der Maxima und Minima) ebenfalls bei beiden Arten von Massenformen übereinstimmen, jedoch wird die Anzahl der Nullstellen nicht die gleiche sein, und der Betrag des Extremums im Koordinatenanfang ist stets Null.

Als Beispiel werden die zweidimensionale Anordnung mit Kreisquerschnitt (S. 267, Fig. 3a) und die kugelförmige Einbettung betrachtet. Für die Kugel ist, wenn der Aufpunkt auf der X-Achse liegt,

$$U = \frac{4}{3} H^3 \pi \gamma \sigma \frac{1}{r}, \quad r^2 = x^2 + t^2,$$

Krümmungsgröße und Gradient sind für Punkte der X-Achse gegeben durch:

$$K = \frac{1}{2\gamma\sigma} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 2H^3 \pi \frac{x^2}{r^5}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0 \right), \dots (1)$$

$$G = \frac{1}{2\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2H^3 \pi \frac{xt}{r^5}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0 \right) \dots \dots (2)$$

Der Verlauf von K und G ist in Fig. 18 wiedergegeben. Auf dem üblichen Wege erhält man:

$$|X| = |X_{mi}| = 0, \dots \dots \dots (3)$$

$$|X_{ma}| = 0.817 \cdot t, \dots \dots \dots (4)$$

$$|x_e| = 0.5 \cdot t, \dots \dots \dots (5)$$

$$\dots \dots \dots (6)$$

$$H = 0.949 \cdot \sqrt[3]{K_{ma}} \cdot t, \dots \dots \dots (7)$$

$$H = 0.823 \cdot \sqrt[3]{|G_e|} \cdot t \dots \dots \dots (8)$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie auf S. 267, entsprechende Gleichungen sind gleich numeriert. Eine der Gleichung (6) entsprechende Gleichung existiert nicht, da bei rotationssymmetrischen Massen die Krümmungsgröße im Koordinatenanfang gleich Null ist.

2. Im allgemeinen sind die rotationssymmetrischen Fälle und in erhöhtem Maße alle anderen dreidimensionalen Massenordnungen schwerer zu behandeln als die zweidimensionalen. Daher wird man oft die Formeln und Methoden, die eigentlich nur für zweidimensionale Massenformen gültig sind, auch auf dreidimensionale Einbettungen anzuwenden versuchen. Wieweit dies möglich ist, soll an dem folgenden Beispiel erläutert werden.

Über dem Meridianschnitt einer kugelförmigen Einbettung sei mit der Drehwaage der Verlauf von K und G bestimmt, und man möge — entsprechend der Fig. 18 — folgende Werte erhalten haben: $X_{ma} = 0.871$, $x_e = 0.5$, $K_{ma} = 0.371$, $|G_e| = 0.572$. Dann ist in Wahrheit, wie man aus den für die Kugel abgeleiteten Gleichungen berechnet: $t = 1$, $H = 0.682$. Berechnet man aber nach den entsprechenden auf S. 267 angegebenen Formeln, so ergibt sich:

Bei Verwendung der Krümmungsgröße [Formel (4) und (7)]:

$$t = 0.472 \quad (\text{Fehler } 53.8 \text{ Proz.}),$$

$$H = 0.458 \quad (\text{Fehler } 32.3 \text{ Proz.}),$$

bei Verwendung des Gradienten [Formel (5) und (8)]:

$$t = 0.866 \quad (\text{Fehler } 13.4 \text{ Proz.}),$$

$$H = 0.458 \quad (\text{Fehler } 32.3 \text{ Proz.}).$$

Wie man sieht, sind die für den zweidimensionalen Fall abgeleiteten Formeln bei der rotationssymmetrischen Anordnung nur mit Vorbehalt anzuwenden; allein der Gradient bringt einen brauchbaren Wert für die Tiefe des Mittelpunktes, für die Bestimmung der Größe der kugelförmigen Einbettung bietet er vor der Krümmungsgröße keinen Vorteil. Der Ort der Einbettung wird immer richtig gefunden.

Dies gilt natürlich nur, wenn man die Formeln des einen Extrems auf das andere anwendet. In der Natur werden sich viele dreidimensionale Einbettungen finden, die sich so behandeln lassen, als ob sie dem zweidimensionalen Falle entsprächen. Dies ist der Fall bei nahezu horizontal gelagerten, sehr langgestreckten Massen, deren Querschnitt überall fast der gleiche ist.

Literatur.

- 1) R. v. Eötvös: Ann. d. Phys. u. Chem. **59**, 345—400 (1896).
- 2) Derselbe: Verh. d. 15. allg. Konf. d. int. Erdmessung. Budapest 1906, Teil I, S. 337—395 (1908). Verh. d. 16. allg. Konf. d. int. Erdmessung. London 1909, Teil I, S. 319—350 (1910).
- 3) P. Nikiforov: Sur le variomètre de gravité d'Eötvös (russisch). Compt. rend. des Séances de la Comm. Sismique Permanente, Leningrad, Tome 7, p. 343—381 (1924).
- 4) Derselbe: L'anomalie de la gravité dans la région de Kursk. Bull. de l'Inst. Physico-Mathématique de l'Acad. des Sciences de Russie, Tome I, 1; Petrograd 1922, 57 S.
- 5) Derselbe: Physical Principles of the gravitational Method of Prospecting (russisch mit englischem Auszug). Bull. of the Inst. of Pract. Geophys. **1**, Nr. 1, S. 153—257, Leningrad 1925.
- 6) R. Ambronn: Methoden der angewandten Geophysik. Wiss. Forschungsber., naturwiss. Reihe, Bd. XV (1926).
- 7) O. Meisser: Ermittlung der Tiefe von schwerestörenden Massen mittels der Drehwage. Zeitschr. f. Geophys. **1**, 32—35 (1925).
- 8) A. Berroth: Schweremessungen. Handb. d. Physik, Bd. II (1926).
- 9) Motonori Matuyama: On the Subterranean Structure around Sakurazima Volcano considered from the State of Gravitational Field. Jap. Journal of Astron. and Geophys. **4**, Nr. 3, 121—128 (1927).
- 10) J. Koenigsberger: Zur geophysikalischen gravimetrischen Landesuntersuchung und über die Tiefenlage der störenden Massen. Zeitschr. f. prakt. Geologie **35**, Nr. 5, 65—80 (1927).

Potsdam, Geophysikalische Abteilung des Geodätischen Inst., Mai 1927.