Gewässern keine nennenswerten Resultate erzielt, da das Wetter mit nur seltenen Ausnahmen ein Arbeiten unmöglich machte. Den Juli über stand die Expedition in Diensten der hydrographischen Abteilung von Lettland. Während der folgenden Monate wurden für Estland die Arbeiten in der Ostsee und im Rigaischen Meerbusen beendet, und damit überhaupt die Messungen in See. Die lettischen Messungen schlossen sich in der Ostsee an die estnischen an und wurden längs der kurischen Küste bis zur Breite von Steinort ausgeführt. Außerdem wurde mit den Messungen im südlichen Teil des Rigaischen Meerbusens begonnen. Auf der vorstehenden Kartenskizze sind die vermessenen Teile der Ostsee bezeichnet.

Die Wirkung der Kontinente und Ozeane auf die Differenz $B-A$ der Hauptträgheitsmomente der Erde im Äquator.

Von **Karl Jung**, Potsdam. — [Mit fünf Abbildungen.] *)

Mittels handlicher Formeln werden Überschlagsrechnungen über die Wirkung der Verteilung der Kontinente und Ozeane auf die Differenz $B-A$ der Hauptträgheitsmomente der Erde im Äquator und über die Richtung der Hauptachsen unter verschiedenen Annahmen über den Aufbau der Erdkruste ausgeführt. Eine der Hauptachsenrichtungen fällt nahe mit den von Helmert, Berroth und Heiskanen aus Schweremessungen berechneten Richtungen zusammen, und es ist somit wahrscheinlich, daß die Verteilung von Kontinenten und Ozeanen wesentlich an dem Zustandekommen der Differenz $B-A$ beteiligt ist. Unter Annahme eines anisostatischen, isostatischen und „quasiisostatischen" (der Kondensationsreduktion entsprechenden) Aufbaues kann die aus den Schwereformeln berechnete Differenz nicht erklärt werden: die der Massenverteilung entsprechende Differenz ist nur im ersten dieser Fälle der Größenordnung nach mit der aus den Schwereformeln abzuleitenden Differenz vergleichbar, in den anderen Fällen ist sie viel zu gering, und in allen Fällen fällt die der Massenverteilung entsprechende große Achse mit der den Schwereformeln entsprechenden kleinen Achse zusammen. Nur eine „halbisostatische" Annahme, nach der das Relief der Kontinente und Ozeanböden sich isostatisch gebildet hat, das Meerwasser nun aber als Überschußmasse die Ozeanbecken ausfüllt, vermag die Achsenrichtungen richtig zu geben und etwa $1/3$ der Differenz $B-A$ zu erklären. Man muß also unter den Ozeanen überschüssige Massen annehmen. Die Annahme, daß der physischen Erde die Differenz $B-A=0$ zukommt und die Schwerereduktionen einen anderen Betrag dieser Differenz vortäuschen, würde die Achsenrichtungen richtig geben, jedoch sind die Massenverschiebungen, die den von Helmert, Berroth und Heiskanen angewandten Reduktionen entsprechen, zu gering, um Differenzen von den berechneten Beträgen vortäuschen zu können. Es wird darauf hingewiesen, daß möglicherweise ein systematischer Fehler, der sämtliche amerikanische Messungen gegenüber den europäischen ein wenig zu klein erscheinen läßt, das Längenglied in den Schwereformeln erklären kann.

Die bekannten Schwereformeln von Helmert[1]), Berroth[2]) und Heiskanen[3]) weisen ein von der geographischen Länge abhängiges Glied auf. Aus

*) Die vorliegende Arbeit gehört zu den geophysikalischen Arbeiten, die mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft unter Leitung von Prof. Angenheister im Geodätischen Institut ausgeführt werden.

dessen Koeffizient läßt sich die Differenz $B - A$ der Hauptträgheitsmomente der Erde im Äquator ableiten. Es ergibt sich: $B - A = \begin{cases} 5.9 & \text{(Helmert)} \\ 3.9 \,.\, 10^{40} & \text{(Berroth)} \\ 8.8 & \text{(Heiskanen)} \end{cases}$, und der Meridian, in dem sich die Achse des kleineren Trägheitsmoments A befindet, hat die geographische Länge $\Lambda = \begin{cases} -17^0 \\ -10^0 \\ +18^0 \end{cases}$, positiv von Greenwich nach Osten.

Zur Erklärung gibt es drei Möglichkeiten. Die bekannteste ist, daß man dem Äquator eine elliptische Gestalt zuschreibt. Den oben angeführten Werten für $B - A$ entsprechen die Hauptachsendifferenzen $a - b = \begin{cases} 230\text{ m} \\ 150\text{ m}. \\ 345\text{ m} \end{cases}$ Die größere Äquatorachse fällt mit der Achse des kleineren Trägheitsmoments zusammen (und mit dem größten Schwerewert, nicht mit dem kleinsten, wie man nach dem Verlauf der Schwerkraft längs eines Meridians vermuten könnte), liegt also in den oben angegebenen Meridianen, die sich ungefähr um den Meridian von Greenwich gruppieren. Zweitens hat man die Möglichkeit, den Äquator kreisförmig anzunehmen und die Differenz der Hauptträgheitsmomente den Unregelmäßigkeiten der Massenverteilung in der Erde zuzuschreiben. Hierüber finden sich bereits Ausführungen bei Berroth [2]), auch hat Schweydar [4]) Berechnungen angestellt, über die jedoch Genaueres nicht veröffentlicht wurde. Schließlich kann man einen Teil der Differenz als von den Schwerereduktionen vorgetäuscht ansehen. Hiermit beschäftigt sich eine in neuester Zeit erschienene umfangreiche Arbeit von Mader [5]), auf die noch weiter unten zurückzukommen sein wird. Die Berechnungen Maders sind sehr genau und ausführlich, und es ist nur mit großem Zeitaufwand möglich, ihnen in allen Einzelheiten zu folgen. Im folgenden zeigt sich, daß man mit weniger genauen und zeitraubenden Berechnungen das Problem der Äquatorträgheitsmomente erörtern kann.

I. Handliche Formeln zur angenäherten Berechnung der Wirkung der Massenverteilung in der Erdkruste auf die Differenz $B - A$. 1. Es werden die folgenden Vereinfachungen eingeführt:

a) Das topographische Relief wird einer Kugel vom Radius $R = 6.4 \,.\, 10^8$ cm und der Masse $E \doteq 6.0 \,.\, 10^{27}$ g aufgesetzt.

b) Kontinente und Ozeane werden in Gebiete zerlegt, die von zwei Breitekreisen $\varphi = \varphi_1$ und φ_2, von zwei Meridianen $\lambda = \lambda_1$ und λ_2 und zwei konzentrischen Kugelflächen mit den Radien $R = R_1$ und R_2 begrenzt sind (Fig. 1 a, b).

c) Jedes dieser Gebiete wird ersetzt durch einen Massenpunkt P in seinem Innern, dessen Lage durch $\varphi_P = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ und $\lambda_P = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ gegeben ist und

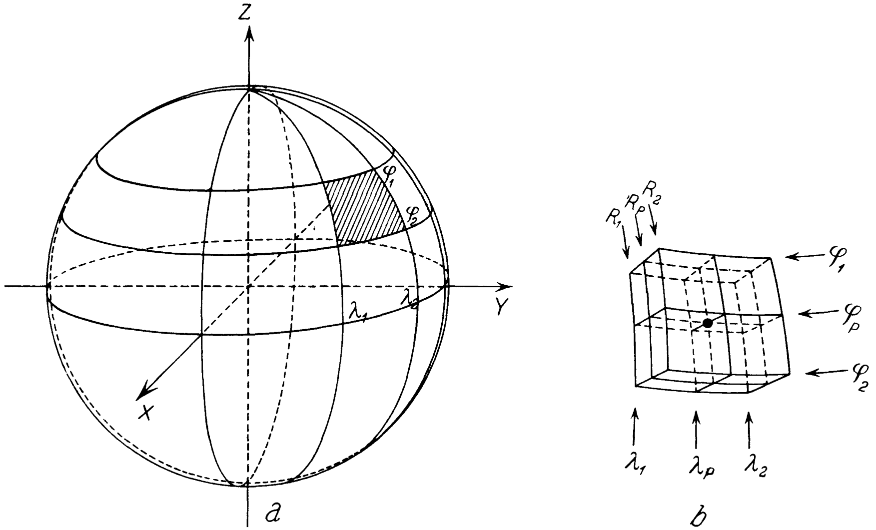

Fig. 1.

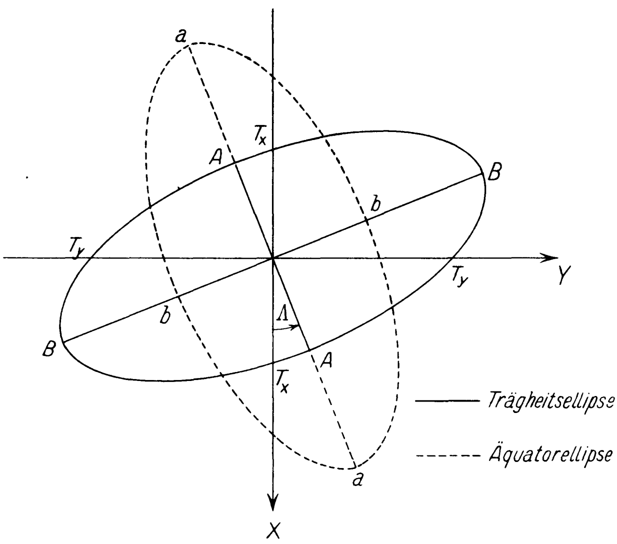

Fig. 2 *).

*) Das Vektordiagramm der Trägheitsmomente T kann nur bei sehr kleinen Hauptachsendifferenzen als Ellipse angesehen werden. Strenggenommen geht es erst durch die Transformation $\varrho = \frac{1}{\sqrt{T}}$ in eine Ellipse über, die Äquatorellipse des aus der Mechanik bekannten Trägheitsellipsoids.

in dem sich die Masse m_P befindet, die mit hinreichender Genauigkeit der Masse des ganzen Gebietes entspricht.

$$m_P = \delta (R_2 - R_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) R_P \cos \varphi_P \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) R_P \quad [\delta = \text{Dichte}].$$

d) Alle Kontinente mögen gleiche Höhe und gleichen Aufbau, und die Ozeanbecken gleiche Tiefe und gleichen Untergrund haben.

2. Wie üblich liegt die XY-Ebene im Äquator, die X-Achse im Meridian von Greenwich, die Y-Achse im Meridian $+ 90^0$ (positiv von Greenwich nach Osten). Die Differenz der Trägheitsmomente in bezug auf die beiden Achsen und das auf die XY-Koordinaten bezügliche Deviationsmoment sind durch folgende Formeln gegeben:

$$T_y - T_x = \Sigma m_P (x_P^2 - y_P^2) = \Sigma \delta R_P^4 (R_2 - R_1)(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^3 \varphi_P \cos 2 \lambda_P, \quad (1)$$

$$2 D_{xy} = 2 \Sigma m_P x_P y_P = \Sigma \delta R_P^4 (R_2 - R_1)(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^3 \varphi_P \sin 2 \lambda_P. \quad (2)$$

Nach bekannten Beziehungen erhält man die Differenz $B - A$ der Hauptträgheitsmomente und den Winkel $\mathit{\Lambda}$, den die Achse des kleineren Hauptträgheitsmoments mit der X-Achse (= Richtung des Meridians von Greenwich) bildet (Fig. 2).

$$B - A = \frac{T_y - T_x}{\cos 2 \mathit{\Lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2 \mathit{\Lambda} = \frac{2 D_{xy}}{T_y - T_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Folgende Abkürzungen werden eingeführt:

$$t_P = (\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^3 \varphi_P \cos 2 \lambda_P, \qquad t = \Sigma t_P,$$
$$d_P = (\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \cos^3 \varphi_P \sin 2 \lambda_P, \qquad d = \Sigma d_P,$$
$$f = \delta R_P^4 (R_2 - R_1).$$

Dann lauten (3) und (4) für die Gesamtheit der Gebiete mit gleichem Massenaufbau:

$$B - A = \frac{1}{\cos 2 \mathit{\Lambda}} \cdot f t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2 \mathit{\Lambda} = \frac{d}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

3. Die Länge-Breite-Glieder t und d hängen von der geographischen Lage der Gebiete ab. Wenn gleichartige Gebiete die ganze Erde lückenlos bedecken, d. h. die Erdoberfläche nur aus Kontinenten oder nur aus Ozeanen besteht, dann ist die Wirkung auf $B - A$ gleich Null, dann muß $t = 0$ und $d = 0$ sein. Folglich nehmen t und d für die Gesamtheit der Meere den gleichen Betrag, aber das umgekehrte Vorzeichen an wie für die Gesamtheit der Kontinente. Es ist also: $t_m = - t_k$, $d_m = - d_k$, wobei der Index k sich auf die Kontinente, der Index m sich auf die Meere bezieht.

Zur Bestimmung von t_k und d_k wird der von den Kontinenten bedeckte Teil der Erde in die in Tabelle 1 angegebenen Gebiete zerlegt. Das Ergebnis der Berechnung ist gleichfalls in Tabelle 1 wiedergegeben.

Tabelle 1.

Gebiet	φ_1	φ_2	λ_1	λ_2	φ_P	λ_P	t_P	d_P
Europa	35	70	0	60	52	30	0.07	0.13
Nordafrika	5	35	— 15	50	20	18	0.40	0.29
Südafrika	— 35	5	15	40	— 15	28	0.16	0.23
Asien	15	70	60	140	42	100	— 0.49	— 0.18
Australien	— 35	— 15	120	150	— 25	135	0	— 0.14
Nordamerika	25	70	— 120	— 75	48	— 98	— 0.18	0.05
Südamerika	— 40	5	— 80	— 45	— 18	— 62	— 0.23	— 0.34
Antarktis	— 90	— 75	0	360	— 90	·	0	0
						Σ	— 0.27	0.04

(Zum Vergleich: Mader berechnet $^1/_5 \Sigma t_P = 0.0709341$, $^1/_5 \Sigma d_P = 0.0104925$.)
Zusammengefaßt ergibt sich also:

$$\left.\begin{aligned} t_k &= -0.27, & d_k &= 0.04, \\ t_m &= 0.27, & d_m &= -0.04. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Das Dichte-Höhe-Glied für eine Platte, z. B. einen einfach aufgesetzten Kontinent oder das Wasser eines Meeresbeckens, ist $f = \delta R_P^4 (R_2 - R_1)$. Bei komplizierteren Massenanordnungen, z. B. einem Ozean mit der unter ihm befindlichen Erdkrustenmasse, wird sich das Dichte-Höhe-Glied aus mehreren dem Ausdruck f ähnlichen Ausdrücken additiv zusammensetzen. Es sei dann mit F bezeichnet. Nach Annahme d) ist F für alle Kontinente konstant $= F_k$ und für alle Meere konstant $= F_m$. Während jedoch t und d ein für allemal berechnet sind, ist F für verschiedene Annahmen über die Massenverteilung verschieden.

Aus den Gleichungen (3) bis (5) ergibt sich nun:
für die Kontinente:

$$\operatorname{tg} 2 A_k = -0.15, \quad A_k = \begin{cases} -\ 4^0 \\ \ 86^0 \end{cases}, \quad \cos 2 A_k = \pm 1.0,$$

$$(B - A)_k = \mp 0.27 \,.\, F_k \text{ cgs-Einheiten};$$

für die Ozeane:

$$\operatorname{tg} 2 A_m = -0.15, \quad A_m = \begin{cases} -\ 4^0 \\ \ 86^0 \end{cases}, \quad \cos 2 A_m = \pm 1.0,$$

$$(B - A)_m = \pm 0.27 \,.\, F_m \text{ cgs-Einheiten};$$

für das Relief der ganzen Erde:

$$\operatorname{tg} 2 A = -0.15, \quad A = \begin{cases} -\ 4^0 \\ \ 86^0 \end{cases}, \quad \cos 2 A = \pm 1.0,$$

$$B - A = \pm 0.27 \,.\, (F_m - F_k) \text{ cgs-Einheiten.}$$

Da B definitionsgemäß größer als A ist, muß in den Formeln für $B - A$ das Vorzeichen so gewählt werden, daß die linke Seite positiv wird. Von dem Vorzeichen hängt der Winkel Λ ab. Muß man das obere Zeichen nehmen, so ist $\Lambda = -4^0$, im anderen Fall ist $\Lambda = 86^0$.

Die Differenz $B - A$ bezieht sich streng genommen nur auf die extremen Trägheitsmomente im Äquator und nicht auf die Hauptträgheitsmomente der ganzen Erde. Diese sind ein wenig aus der Äquatorebene herausgedreht. Der Winkel, den ihre Achsen mit der Äquatorebene bilden, ist aber so klein (nach Mader meist weniger als 1^0), daß er für die Überschlagsrechnung unbedenklich vernachlässigt werden kann.

4. Man kann noch die Hauptachsendifferenz $a - b$, die der Differenz $B - A$ entspricht, bestimmen. Da bei den Berechnungen über die Wirkung der Massenverteilung in der Erdkruste auf $B - A$ die Ursache in den Massenunregelmäßigkeiten und nicht in einer elliptischen Gestalt des Äquators gesucht wird, ist die Differenz $a - b$ nur eine Rechengröße, die immerhin zur Veranschaulichung beiträgt. Es gilt $a - b = 2 R \beta_2'$, wobei β_2' den Koeffizienten des Längengliedes in den Schwereformeln bedeutet. Ferner ist [siehe z. B. Berroth[2]), Mader[5])], $\beta_2' = \frac{3}{4} \frac{B - A}{R^2 E}$, und man erhält durch Einsetzen der in der vereinfachenden Annahme a) angegebenen Werte von R und E:

$$a - b = 3.9 \,.\, 10^{-37} \,(B - A) \text{ cm.}$$

II. Die Wirkung des Aufbaues der Kontinente und Ozeane auf die Differenz $B - A$. Zur Abschätzung des Einflusses der Kontinente und Ozeane auf $B - A$ wird die der physischen Erde entsprechende Massenverteilung mit einem Normalzustand verglichen. In dem Normalzustand seien die Massen so angeordnet, daß $B - A = 0$ ist. Dann ist die Wirkung zu bestimmen, die die Entwicklung des Endzustandes aus dem Normalzustand*) auf die Differenz $B - A$ ausübt.

Es werden vier Fälle betrachtet:

1. Der anisostatische Fall. Normalzustand ist die Erde mit homogener Schale. Die Kontinente werden aufgesetzt, die Meeresbecken ausgegraben und mit Wasser angefüllt. Es findet keinerlei Kompensation statt.
2. Der isostatische Fall. Normalzustand ist die Erde mit homogener Schale. Im Endzustand sind die Massen der Kontinente und Ozeane der Prattschen Hypothese entsprechend so angeordnet, daß sich über jedem Flächenelement der in der Tiefe befindlichen Ausgleichsfläche gleich viel Masse befindet. Kontinente und Ozeane haben gleiche Ausgleichstiefe und sind isostatisch ausgeglichen.
3. Der halbisostatische Fall. Normalzustand ist die Erde mit homogener Schale. Im Endzustand ist die Lithosphäre isostatisch aufgebaut, das Meerwasser wird von außen zugefügt. Die Ozeangebiete haben einen dem Meerwasser entsprechenden Massenüberschuß.

*) In der Figur mit „Anfangszustand" bezeichnet.

4. Der quasiisostatische Fall. Im Normalzustand seien die Ozeane bereits vorhanden. Die im Endzustand über das Meeresniveau herausragenden Kontinentmassen mögen im Normalzustand eine Flächenbelegung in Meereshöhe bilden. Damit im Normalzustand $B - A = 0$ ist, muß unterhalb der Flächenbelegung und unterhalb der Ozeanböden eine Kompensation stattfinden. Über die Art dieser Kompensation, insbesondere über das Vorhandensein und die Tiefe einer eventuellen Ausgleichsfläche soll keine Annahme gemacht werden.

Die Bezeichnungen für die Dichte und die Entfernungen der oberen und unteren Schollenbegrenzung vom Erdmittelpunkt sind im einzelnen aus den Figuren ersichtlich. Dichten werden mit D, d, δ, Radien mit R, r, ϱ bezeichnet. Allgemein beziehen sich große lateinische Buchstaben auf Kontinente, kleine lateinische Buchstaben auf Ozeane im Endzustand, während sich griechische Buchstaben auf den Normalzustand beziehen.

Die Kontinente mögen stets eine Höhe von 800 m, die Meere eine Tiefe von 4000 m haben.

1. Der anisostatische Fall (Fig. 3). F bestimmt sich aus folgenden Gleichungen:

a) für die Kontinente: $F_k = D \,.\, R_P^4 (R_2 - R_1)$,

b) für die Meere: $F_m = d \,.\, r_P^4 (r_2 - r_1)$.

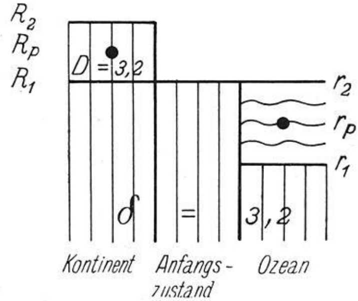

Fig. 3.

Die Dichte der äußeren Schale der Erde sei 3.2, die Dichte der aufgesetzten Kontinente ebenfalls 3.2. Diese Annahme erscheint reichlich hoch, sie wird jedoch gemacht, um die Ergebnisse mit Maders Berechnungen vergleichen zu können. Mader nimmt gleichfalls 3.2 an.

Alle Annahmen und Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

Gebiet	D, d	R_P, r_P cm	$R_2 - R_1$ $r_2 - r_1$ cm	F	$B - A$ cgs	A	$a - b$ m
a) Kontinente . . .	3.2	$6.4 \,.\, 10^8$	$8 \,.\, 10^4$	$4.3 \,.\, 10^{40}$	$1.2 \,.\, 10^{40}$	86^0	45
b) Ozeane	— 2.2	$6.4 \,.\, 10^8$	$4 \,.\, 10^5$	$-15 \,.\, 10^{40}$	$4.0 \,.\, 10^{40}$	86^0	160
c) Kontinente + Ozeane					$5.2 \,.\, 10^{40}$	86^0	200

(Mader berechnet: $a - b = 268$ m, $A = 98{,}2^0$.)

2. Der isostatische Fall (Fig. 4). Da im isostatischen Fall kein Hinzufügen oder Wegnehmen von Massen vorliegt, sind wesentlich geringere Wirkungen wie im anisostatischen Fall zu erwarten. Die Gleichungen für F lauten:

a) für die Kontinente: $F_k = D \,.\, R_P^4 (R_2 - R_1) - \delta\, \varrho_P^4 (\varrho_2 - \varrho_1)$,

b) für die Meere: $F_m = d \,.\, r_P^4 (r_2 - r_1) + 1 \,.\, r_W^4 (r_3 - r_2) - \delta \,.\, \varrho_P^4 (\varrho_2 - \varrho_1)$

Hierbei sind die folgenden Isostasiebedingungen zu beachten:

$$\text{a)}\ D(R_2 - R_1) = \delta(\varrho_2 - \varrho_1),$$
$$\text{b)}\ d(r_2 - r_1) + 1 \cdot (r_3 - r_2) = \delta(\varrho_2 - \varrho_1).$$

Die Dichte der Erdkruste im Normalzustand sei 3.2. Annahmen und Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Ausgleichstiefe ist zu 80, 120 und 200 km angenommen.

Tabelle 3.

Gebiet	δ	ϱ_p cm	$\varrho_2 - \varrho_1$ cm	$R_2 - \varrho_2$ / $r_3 - r_2$ cm	F	$B - A$ cgs	A	$a - b$ m
a) Kontinente .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$0.8 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^{39}$	$2.9 \cdot 10^{38}$	86^0	1.1
b) Ozeane . . .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$0.8 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$	$-3.7 \cdot 10^{39}$	$10 \cdot 10^{38}$	86^0	3.9
c) Kontinente + Ozeane						$13 \cdot 10^{38}$	86^0	5.0
a) Kontinente .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$1.2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^{39}$	$4.3 \cdot 10^{38}$	86^0	1.7
b) Ozeane . . .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$1.2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$	$-6.4 \cdot 10^{39}$	$15 \cdot 10^{38}$	86^0	5.8
c) Kontinente + Ozeane						$19 \cdot 10^{38}$	86^0	7.5
a) Kontinente .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^4$	$2.7 \cdot 10^{39}$	$7.2 \cdot 10^{38}$	86^0	2.8
b) Ozeane . . .	3.2	$6.4 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$	$-9 \cdot 10^{39}$	$24 \cdot 10^{38}$	86^0	9.5
c) Kontinente + Ozeane						$31 \cdot 10^{38}$	86^0	12

(Mader berechnet: für die Ausgleichstiefe von 80 km: $a - b = 8.1$ m, $A = 98.2^0$; für die Ausgleichstiefe von 120 km: $a - b = 11{,}5$ m, $A = 98{,}1^0$.)

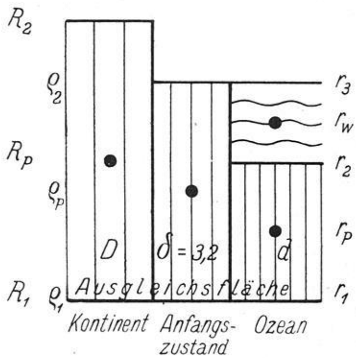

Fig. 4.

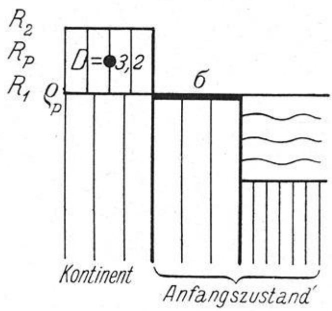

Fig. 5.

Die Wirkung wächst ungefähr proportional der Ausgleichstiefe. Um zu Größenordnungen zu gelangen, die sich mit den aus den Schwereformeln folgenden Beträgen vergleichen lassen, muß man unwahrscheinlich große Ausgleichstiefen annehmen (etwa 3000 km).

3. Der halbisostatische Fall (Fig. 4). Bei den Kontinenten handelt es sich nur um eine Massenverschiebung von geringem Betrag, während das

Meerwasser als hinzugefügte Masse wirkt. Die Wirkungen werden also größer als im isostatischen Fall sein und wesentlich von dem Meerwasser abhängen. Die Wahl der Ausgleichstiefe kann nur von geringem Einfluß sein.

Angenommen wird die Dichte 3.2 im Normalzustand und eine Ausgleichstiefe von 120 km. F berechnet sich aus den Formeln:

a) für die Kontinente: $F_k = D \,.\, R_P^4 (R_2 - R_1) - \delta\, \varrho_P^4 (\varrho_2 - \varrho_1)$,

b) für die Meere: $F_m = d \,.\, r_P^4 (r_2 - r_1) + 1 \,.\, r_W (r_3 - r_2) - \delta \,.\, r_P^4 (\varrho_2 - \varrho_1)$.

Hierbei sind folgende Bedingungen zu beachten:

$$\text{a)}\quad D (R_2 - R_1) = \delta (\varrho_2 - \varrho_1),$$
$$\text{b)}\quad d (r_2 - r_1) = \delta (\varrho_2 - \varrho_1).$$

Annahmen und Ergebnisse gibt Tabelle 4.

Tabelle 4.

Gebiet	δ	r_P cm	$\varrho_2 - \varrho_1$ cm	$R_2 - \varrho_2$ / $r_3 - r_2$ cm	F	$B - A$ cgs	A	$a - b$ m
a) Kontinente .	3.2	$6.4 \,.\, 10^8$	$1.2 \,.\, 10^7$	$8 \,.\, 10^4$	$1.6 \,.\, 10^{39}$	$4.3 \,.\, 10^{38}$	86^0	1.7
b) Ozeane . . .	3.2	$6.4 \,.\, 10^8$	$1.2 \,.\, 10^7$	$4 \,.\, 10^5$	$6.1 \,.\, 10^{40}$	$1.6 \,.\, 10^{40}$	$-\ 4^0$	64
c) Kontinente + Ozeane						$1.6 \,.\, 10^{40}$	$-\ 4^0$	62

(Dieser Fall wird von Mader nicht betrachtet.)

4. Der quasiisostatische Fall (Fig. 5). Es handelt sich nur um Massenverschiebungen von sehr geringem Betrag. Dementsprechend ist nur eine sehr kleine Wirkung zu erwarten.

Die Dichte der im Endzustand über das Meeresniveau hinausragenden Kontinentmassen sei $D = 3.2$. Dann ist die Flächendichte derselben Massen im Normalzustand $\sigma = D (R_2 - R_1)$. Es gilt:

(nur für Kontinente) $F = F_k = D \,.\, R_P^4 (R_2 - R_1) - \sigma \,.\, \varrho_P^4 = D (R_2 - R_1) (R_P^4 - \varrho_P^4)$.

Annahmen und Ergebnisse zeigt Tabelle 5.

Tabelle 5.

Gebiet	D	$\varrho_P = R_1$ cm	$R_2 - R_1$ cm	F	$B - A$ cgs	A	$a - b$ cm
nur Kontinente . .	3.2	$6.4 \,.\, 10^8$	$8 \,.\, 10^4$	$1.1 \,.\, 10^{35}$	$2.9 \,.\, 10^{36}$	86^0	1.1

(Dieser Fall wird von Mader nicht betrachtet.)

III. Die Wirkung der gebräuchlichen Schwerereduktionen auf $B - A$.

1. Die Schwerereduktionen sollen aus den auf der im Endzustand befindlichen Erde gemessenen Schwerewerten die dem Normalzustand entsprechenden Schwerewerte herstellen, d. h. die Wirkung der Massenverteilung in der Erdkruste rückgängig machen. Ist im Normalzustand $B - A = 0$, so muß die richtig ausgewählte Reduktion zu Schwerewerten führen, aus denen $B - A = 0$

folgt, während bei einer der Massenverteilung nicht entsprechenden Reduktion eine Differenz übrigbleibt.

Man kann sich auch denken, wie Mader in seiner Arbeit ausführt, daß sich im Lauf der Erdgeschichte die Differenz zwischen B und A ausgeglichen hat und dem Endzustand, d. h. der physischen Erde, die Differenz $B - A = 0$ entspricht. Dann werden die Reduktionen einen Unterschied zwischen B und A vortäuschen.

Die Wirkung der Reduktion ist gerade die umgekehrte wie die durch Entwicklung des Endzustandes aus dem Normalzustand hervorgerufene. Die absoluten Beträge sind dieselben, der Winkel Λ jedoch wird um 90^0 verändert, an Stelle von $\Lambda = -4^0$ tritt $\Lambda = 86^0$ und umgekehrt. Da bei fast allen Berechnungen über die Wirkung der Massenverteilung $\Lambda = 86^0$ resultierte, die Schweremessungen aber $\Lambda =$ etwa 0^0 ergaben, liegt es nahe, zu untersuchen, ob man die aus den Schwereformeln berechneten Beträge von den Reduktionen vorgetäuscht ansehen kann.

2. Die gebräuchlichen Schwerereduktionen und ihre Wirkung auf $B - A$ seien im folgenden angeführt.

a) Freiluftreduktion und Kondensationsreduktion. Während bei Betrachtung der Schwerewerte selbst die Freiluftreduktion und die Kondensationsreduktion als identisch angesehen werden können, muß man bei der Untersuchung des Hauptachsenproblems zunächst streng unterscheiden.

Die an der Erdoberfläche gemessenen Schwerewerte sind zur Erörterung des Hauptachsenproblems unmittelbar nicht zu verwerten. Die Formeln für $B - A$, $a - b$ und Λ beziehen sich auf ein und dieselbe Niveaufläche, während die Schwerestationen in verschiedenen Niveauflächen liegen. Zu diesem Zwecke muß stets eine Reduktion angewandt werden. Am übersichtlichsten ist die alleinige Verwendung der Freiluftreduktion. Und zwar empfiehlt es sich (wenigstens in Gedanken), auf die Niveaufläche des höchsten Stationspunktes oder eine noch höhere Niveaufläche zu reduzieren. Hierbei fallen alle Schwierigkeiten, die das Durchdringen von Massen mit sich bringt, fort, es wird tatsächlich in freier Luft reduziert, und man sieht unmittelbar, daß dieser Reduktion keine Änderung der Massenanordnung entspricht. Die Freiluftreduktion ist Voraussetzung für alle weiteren Untersuchungen, und es hat gar keinen Sinn, ihr einen Einfluß auf $B - A$ zuzuschreiben. Reduziert man auf Meeresniveau, so kann man vor der Anwendung der Freiluftreduktion das Oberflächenrelief durch Wegnahme oder Verschiebung der das Meeresniveau überragenden Massen beseitigen. Hierdurch wird $B - A$ verändert, jedoch hat die nachfolgende Freiluftreduktion selbst keine Wirkung auf $B - A$ mehr.

Der Formel für die Freiluftreduktion, $g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$, liegt die Annahme zugrunde, daß man trotz der Unregelmäßigkeiten des Oberflächenreliefs und der von der Kugel abweichenden Gestalt der Erde die gesamte Erdmasse im Erdmittelpunkt vereinigt denken kann. Wo dies nicht zutrifft, z. B. in der Nähe von Böschungen und Kontinentalrändern, gelten die obigen Ausführungen nicht streng, oder die Reduktionsformel ist entsprechend zu ändern.

Die Kondensationsreduktion beseitigt das Oberflächenrelief, indem sie die das Meeresniveau überragenden Massen im Meeresniveau kondensiert, sodaß sie eine Flächenbelegung bilden, deren Flächendichte der ursprünglichen Höhe proportional ist. Wird sie über die ganze Erde ausgedehnt, so entspricht sie dem quasiisostatischen Fall, ihre Wirkung ist daher (für $D = 3.2$):

$$B - A = 1.1 \,.\, 10^{35}, \quad \varLambda = -4^0, \quad a - b = 1.1 \text{ cm},$$

ein Betrag, der im Vergleich zu den aus den Schwereformeln berechneten Werten vernachlässigt werden kann.

Freiluftreduktion und Kondensationsreduktion sind für die Betrachtung des Hauptachsenproblems ohne Bedeutung.

Die Formel für die Kondensation einer in allen Richtungen unendlich ausgedehnten Platte plus Verlegung des Stationspunktes in Meereshöhe stimmt bis zu dem Gliede mit $\frac{h}{R}$ mit der oben angeführten Freiluftformel überein. Erst in den höheren, nicht angegebenen Gliedern treten Abweichungen auf. Diese werden in der Praxis vernachlässigt, ebenso wie die Einwirkung der Erdkrümmung und die der entfernteren Gebiete, da deren Wirkungen fast stets unter der Genauigkeitsgrenze des Pendels bleiben. Die übliche Reduktionsformel entspricht in aller Strenge weder der Freiluftreduktion noch einer über die ganze Erde ausgedehnten Kondensationsreduktion, wohl aber eher der ersteren als der letzteren. So ist man auch theoretisch berechtigt, für die übliche Reduktion den Einfluß Null auf $B - A$ anzunehmen.

b) Die rein topographische Reduktion plus Freiluftreduktion. Diese Reduktion entspricht dem anisostatischen Fall, und ihre Wirkung beträgt daher:

$$B - A = 5.2 \,.\, 10^{40}, \quad \varLambda = -4^0, \quad a - b = 200 \text{ m}.$$

Die Bouguersche Reduktion (einschließlich Freiluftreduktion) ist für die Betrachtung einzelner Schwerewerte eine nur die Stationsnähe betreffende Abart der topographischen Reduktion. Da die Bouguersche Reduktion bei der Bildung von Schwereformeln nie angewandt wurde, soll eine nähere Untersuchung unterbleiben.

c) Die topographisch-isostatische Reduktion plus Freiluftreduktion (Hayfordsche Reduktion). Diese Reduktion entspricht dem isostatischen Fall. Ihre Wirkung beträgt:

bei einer Ausgleichstiefe von 80 km:

$$B - A = 1.3 \,.\, 10^{39}, \quad \varLambda = -4^0, \quad a - b = 5.0 \text{ m},$$

bei einer Ausgleichstiefe von 120 km:

$$B - A = 1.9 \,.\, 10^{39}, \quad \varLambda = -4^0, \quad a - b = 7.5 \text{ m},$$

bei einer Ausgleichstiefe von 200 km:

$$B - A = 3.1 \,.\, 10^{39}, \quad \varLambda = -4^0, \quad a - b = 12 \text{ m}.$$

3. Helmert und Berroth haben ihre Schwerewerte nach der Freiluftformel reduziert, Heiskanen benutzte die Hayfordsche Reduktion. Die Wirkungen der Hayfordschen Reduktion sind wesentlich kleiner als die aus den Schwereformeln berechneten Beträge. Die Wirkung der Freiluftformel ist fast Null. Es ist also unmöglich, die aus den Schwereformeln abgeleiteten Beträge von $B - A$ so zu erklären, daß die berechneten Beträge von den Reduktionen vorgetäuscht sind, wobei der Erde im Endzustand, d. h. der physischen Erde, die Differenz $B - A = 0$ zukommt.

Während die Berechnungen über die Wirkung der Massenverteilung im Relief der Erdkruste mit den Ergebnissen Maders übereinstimmen, steht dieses Resultat mit seinen Folgerungen nicht im Einklang. Ich kann seinen Schlüssen nicht beistimmen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Auf S. 157 bis 161 wird die Wirkung des anisostatischen Aufbaues der Kontinente und Ozeane berechnet und das Ergebnis auf S. 162 zur Bestimmung der Wirkung der Kondensationsreduktion angewandt. Die Kondensationsreduktion entspricht jedoch nicht dem anisostatischen, sondern dem von mir mit „quasiisostatisch" bezeichneten Fall. Ihr Einfluß auf $B - A$ ist verschwindend klein.
2. Bei der Berechnung der Wirkung der von Heiskanen angewandten Hayfordschen Reduktion enthält die auf S. 165 angegebene Formel bereits die Wirkung aller der Reduktion entsprechenden Massenverschiebungen. Es ist also den in der Tabelle auf S. 166 wiedergegebenen Ergebnissen nichts mehr hinzuzufügen. Das gleiche gilt von den die Airysche Hypothese betreffenden Berechnungen.

IV. Abschließende Bemerkungen über die Erklärung der aus den Schwereformeln berechneten Differenz $B - A$. Angesichts der recht guten Übereinstimmung der aus den verschiedenen Schwereformeln folgenden Werte von $B - A$, A und $a - b$ wird man die Annahme, daß diese Beträge reell sind, zunächst nicht von der Hand weisen können. Nimmt man sie als reell an, so gibt es — da nach den Ergebnissen des Abschnitts III eine alleinige Wirkung der Reduktionen ausscheidet — im wesentlichen nur noch zwei Möglichkeiten zu ihrer Erklärung: man schreibt dem Äquator elliptische Gestalt zu oder sucht bei kreisförmigem Äquator den Grund im Aufbau der Kontinente und Ozeane.

Die erste dieser Möglichkeiten ist nicht befriedigend. Man weiß, daß die Erde sich andauernd wirkenden Kräften gegenüber wie ein plastischer Körper verhält, und muß demnach annehmen, daß ihre Gestalt eine Gleichgewichtsfigur ist. Ein dreiachsiges Ellipsoid von den Dimensionen $a - c = \frac{1}{300}\,a$, $a - b = \frac{1}{30000} \cdot a$ jedoch ist bei der Rotationsgeschwindigkeit der Erde nicht im Gleichgewicht.

Die Übereinstimmung des aus den Schwereformeln folgenden Winkels A ($=$ etwa 0^0) mit dem berechneten Betrag $A = -4^0$, läßt es als wahrscheinlich erscheinen, daß der Aufbau der Kontinente und Ozeane wesentlich am Zustandekommen der Differenz $B - A$ beteiligt ist. Die Berechnungen aber zeigen, daß bei kreisförmig angenommenem Äquator im anisostatischen Fall wohl die Größenordnung von $B - A$ vorliegen kann, jedoch der Winkel Λ 90° zu groß ist, d. h. große und kleine Achse der Trägheitsellipse gegenüber den Beobachtungsergebnissen vertauscht sind. Der halbisostatische Fall jedoch gibt den Winkel Λ richtig und erklärt etwa $^1/_3$ der Differenz $B - A$. Von den anderen betrachteten Fällen kommt keiner in Betracht. Man muß also annehmen, wie Berroth[2]) bereits ausführt, daß die Ozeanbecken Massenüberschußgebiete sind. Und zwar genügt es nicht, bloß die Wassermassen als überschüssig anzusehen, der Untergrund des Ozeans selbst muß Zusatzmassen enthalten. Es ist dann kein isostatisches Gleichgewicht vorhanden. Dem andauernd wirkenden Drucke der unausgeglichenen Massen gegenüber verhält sich die Erde nicht plastisch, oder zum mindestens hat sie es noch nicht vermocht, den Drucken vollkommen nachzugeben. Man muß also annehmen, daß die Erdkruste ihre Überschußgebiete selbst trägt, eine Annahme, die nicht befriedigen kann.

Eine wirklich befriedigende Lösung des Hauptachsenproblems ist noch nicht gefunden*).

Literatur.

1) Helmert: Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. **41**, 676 (1915).

2) Berroth: Gerlands Beitr. z. Geophys. **14**, 245.

3) Heiskanen: Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. Veröff. d. Finn. Geodät. Inst. Nr. 4, 90 (1924).

4) Schweydar: Über Isostasie. Zeitschr. f. Geophys. **2**, 150 (1926).

5) Mader: Der Einfluß der Verteilung von Land und Wasser auf die Trägheitsmomente A und B der Erde im Äquator. Gerlands Beitr. z. Geophys. **18**, Nr. 1/2, 145—184 (1927).

---

*) Auf eine Erklärungsmöglichkeit ganz anderer Art hat mich Herr Prof. Angenheister aufmerksam gemacht. Die den Schwereformeln zugrunde liegenden Schweremessungen wurden zum weitaus größten Teile in Mittel- und Westeuropa und in Nordamerika ausgeführt. Diese Gebiete haben einen Längenunterschied von ungefähr 90°, und ihre mittleren Meridiane fallen ungefähr mit den Meridianen der Hauptachsen zusammen. Ein systematischer Fehler, der alle amerikanischen Schwerewerte im Vergleich zu den europäischen zu klein werden läßt, kann das Längenglied in den Schwereformeln verursachen und eine Differenz zwischen B und A vortäuschen. Setzt man in die Längenglieder die mittleren Koordinaten von Mittel- und Westeuropa und von Nordamerika ein ($\varphi_P = 50^0$, $\lambda_P = 10^0$ bzw. $\varphi_P = 48^0$, $\lambda_P = -98^0$), so berechnet man leicht, daß zwischen den absoluten Schwerebestimmungen in Europa und Amerika eine Differenz von $\left\{\begin{array}{l}11 \,.\, 10^{-3} \text{ cgs-Einheiten}\\ 9 \,.\, 10^{-3} \text{ „ „}\\ 17 \,.\, 10^{-3} \text{ „ „}\end{array}\right.$ genügt, um die Längenglieder der Formeln von $\left\{\begin{array}{l}\text{Helmert}\\ \text{Berroth}\\ \text{Heiskanen}\end{array}\right.$ zu erklären. Dieser entspricht bei der Bestimmung der Schwingungsdauer und der Länge des Sekundenpendels ein Fehler von etwa $\left\{\begin{array}{l}55 \,.\, 10^{-7} \text{ sec}\\ 45 \,.\, 10^{-7} \text{ „}\\ 85 \,.\, 10^{-7} \text{ „}\end{array}\right.$ bzw. $\left\{\begin{array}{l}11\,\mu\\ 9\,\mu\\ 17\,\mu\end{array}\right.$. Es wäre zu untersuchen, ob eine derartige Differenz in den absoluten Schweremessungen vorliegen kann. Der Anschluß Washington—Potsdam ist auf $\pm 1.4 \,.\, 10^{-3}$ cgs-Einheiten genau.

Potsdam, Geodätisches Institut, Dezember 1927.