

## Werk

**Jahr:** 1928

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:4

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0004

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0004](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0004)

**LOG Id:** LOG\_0024

**LOG Titel:** Die topographische Reduktion bei Drehwagenbeobachtungen

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

über den Aufbau der oberen Atmosphäre, über die Massenlagerungen im Untergrund folgen daraus. Zwischen 30 und 40 km Höhe beginnt eine warme Schicht, die den Schall zum Boden zurückführt. Vielleicht beginnt dort ein neuer selbständiger Kreislauf. Ein neues Hilfsmittel für Meteorologie und Geologie ist geschaffen von großer praktischer Bedeutung, wie die Erfolge von Mintrop zeigen. Wieweit kann man Luft- und Bodenschall als Sonden hinauf- und hinabtreiben, bis zur Höhe der Polarlichter, bis zum Boden der Kontinente, bis zur Tiefe der isostatischen Ausgleichfläche?

Es war Wiechert nicht vergönnt, diese großen Aufgaben zu Ende zu führen. Die Krankheit kam. Er rang ihr die Zeit zur Arbeit ab. Er setzte sich zur Wehr mit der großen Energie und Zähigkeit einer wahren Forscher-natur, die keinen anderen Inhalt hat als ihr Werk. Mitten im Werk ist er gestorben.

Wiechert war stets und ganz von seinen Arbeiten und Problemen beherrscht. Nur weniges konnte daneben Raum finden. Die Erfahrungen einer harten Jugend und das nur langsame Aufsteigen in eine seiner Energie und Begabung entsprechende Stellung gaben ihm eine große Zurückhaltung, die auch im Verkehr mit seinen Kollegen zutage trat. Nur sehr wenige können sich seines Vertrauens, kaum einer seiner Freundschaft rühmen. Um so enger schloß er sich an die wenigen Menschen, die zu ihm gehörten, an seine Mutter und seine Gattin. Mit diesen verband ihn durch lange Jahre ein gleichmäßiges und heiteres Gefühl von seltener Stärke und Schönheit. G. Angenheister.

---

## Die topographische Reduktion bei Drehwagenbeobachtungen.

Von B. Numerov. — (Mit zwei Diagrammen.)

Die Grundsätze zum vorliegenden Verfahren der topographischen Reduktion bei gravimetrischen Messungen habe ich im Sommer 1925 ausgearbeitet, als ich die Arbeiten mit der Drehwage an der nordöstlichen Küste des Kaspischen Meeres in Angriff nahm.

Wie es in meiner vorläufigen Mitteilung: „Graphische Methode zur Berücksichtigung des topographischen Einflusses und des Einflusses der unterirdischen Massen auf die gravimetrischen Beobachtungen“ \*) dargelegt wurde, ist die Berechnung der Geländewirkung, bis zu 50 m von der Drehwage, analytisch auszuführen; darüber hinaus wird diese graphisch, mittels speziell angefertigter Diagramme auf einer mit Höhenlinien versehenen Karte verrichtet.

Legen wir ein Koordinatensystem  $XYZ$  mit dem Anfangspunkt in  $O$  zugrunde. Die Achse  $Z$  sei nach unten, parallel zu der im Punkte  $C$  — im

---

\*) Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. I, 1924/25, Heft 8, S. 367—371.

Schwerpunkte der Drehwaage — wirkenden Schwerkraft gerichtet. Bezeichnen  $x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $C$  und  $a, b, c$  die Koordinaten des Punktes  $M$  der elementaren Masse, die auf die Angaben der Drehwaage einwirkt, so ist das Gravitationspotential gleich dem Integral, das sich über sämtliche Volumenelemente der störenden äußeren Massen verbreitet, und zwar:

$$V = k^2 \int \frac{dm}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Sind die rechtwinkligen und zylindrischen Koordinaten durch Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} a - x &= l \cos \alpha \\ a - y &= l \sin \alpha \\ c - z &= h \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

verbunden, so nehmen die Differentialquotienten vom Potential, die wir mit der Drehwaage im Punkte  $C$  beobachten, in beiden Koordinatensystemen folgende Form an [Formel (3)].

Hierbei ist  $k^2 = 667 \cdot 10^{-10}$  (C.G.S.) die Gravitationskonstante und  $\delta$  die Dichte der störenden homogenen Massen.

Die erste Integration der Formeln (3) führen wir nach der Variablen  $h$  in den Grenzen von  $h_1$  und  $h_2$  aus, die zweite nach der Variablen  $l$  in den Grenzen von 0 bis  $l$ , und die dritte nach  $\alpha$  in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= 3 k^2 \delta \int \frac{(c-z)(a-x) dm}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{5/2}} \\ &= 3 k^2 \delta \int \int \int \frac{h l^3 \cos \alpha}{(l^2 + h^2)^{5/2}} dl d\alpha dh \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= 3 k^2 \delta \int \frac{(c-z)(b-y) dm}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{5/2}} \\ &= 3 k^2 \delta \int \int \int \frac{h l^3 \sin \alpha}{(l^2 + h^2)^{5/2}} dl d\alpha dh \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 3 k^2 \delta \int \frac{[(a-x)^2 - (b-y)^2] dm}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{5/2}} \\ &= 3 k^2 \delta \int \int \int \frac{l^3 \cos 2\alpha}{(l^2 + h^2)^{5/2}} dl d\alpha dh \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 6 k^2 \delta \int \frac{(a-x)(b-y) dm}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{5/2}} \\ &= 6 k^2 \delta \int \int \int \frac{l^3 \sin 2\alpha}{(l^2 + h^2)^{5/2}} dl d\alpha dh \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Bezeichnen  $A$  und  $B$  die entsprechenden Resultate der Integration nach den Variablen  $h$ , so ist:

$$\left. \begin{aligned} A &= 3 k^2 \delta \pi \int_0^l \frac{dl}{l} \left[ \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} - \frac{1}{3} \frac{h^3}{(h^2 + l^2)^{3/2}} \right]_{h_1}^{h_2} \\ B &= -k^2 \delta \pi \int_0^l \frac{dl}{l} \left[ \frac{l^3}{(l^2 + h^2)^{3/2}} \right]_{h_1}^{h_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Somit können die vier Gradienten der Formel (3) in nachstehender Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \cos \alpha d\alpha = C_1, & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A \cos 2\alpha d\alpha = C_2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \sin \alpha d\alpha = S_1, & 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A \sin 2\alpha d\alpha = S_2 \end{aligned} \right\} (5)$$

Hierbei sind  $C_1$  und  $S_1$  die Koeffizienten des  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  in der Entwicklung der Funktion  $B$  in Fouriersche Reihen und  $C_2$  und  $S_2$  die entsprechenden Koeffizienten von  $\cos 2\alpha$  und  $\sin 2\alpha$  bei der Entwicklung der Funktion  $A$ .

Berechnung der Funktionen  $A$  und  $B$ . Zur Bestimmung des Einflusses des topographischen Reliefs sind die Integrationsgrenzen der Variablen  $h$  in den Formeln (4) festzulegen. Wir denken uns eine horizontale Fläche  $OXY$  durch den Fußpunkt des Instrumentes gelegt. Dann wird, wenn sich die störenden Massen über die Fläche  $OXY$  bis zur Höhe  $H$  erheben, die Integrationsgrenze  $h_1$  gleich  $c_1 - z$  oder gleich  $J - H$  und die Integrationsgrenze  $h_2$  gleich  $c_2 - z$  oder gleich  $J$  sein, wobei  $J$  die Schwerpunktshöhe des Instrumentes bezeichnet. Senkt sich das Relief unter diese Fläche, so wird der Einfluß der fehlenden Massen einen negativen Wert haben; deswegen behalten die Integrationsgrenzen ihre Form, wenn wir  $H$  negative Werte ansetzen werden\*).

Nun wählen wir eine beliebige Richtung des Strahles  $l$  mit dem Azimut  $\alpha$ . Längs des gewählten Strahles kann  $H$  für einen beliebigen Halbmesser von  $l$ , von  $l = 0$  angefangen, mittels Nivellierung abgemessen sein und also der Wert der unter den Integralzeichen befindlichen Funktionen berechnet werden. Die Berechnung der Funktionen  $A$  und  $B$  führt somit zur Berechnung des Integrals  $\int f(l) dl$  längs des Halbmessers  $l$ . In einigen Spezialfällen wird es wohl möglich sein, unmittelbar das Integral nach dem Werte von  $l$  zu berechnen, aber

\*) Bei der Berechnung von unterirdischen Massen wird die Integration nach  $h$  in den Grenzen von  $J$  bis  $J + H$  ausgeführt, wobei  $H$  die Tiefe des Massivs vorstellt.

in sämtlichen reellen Fällen, wo die Geländewirkung zu bestimmen ist, werden wir auf einen sehr komplizierten Zusammenhang zwischen  $H$  und  $l$  stoßen, so daß wir bei der Berechnung zu mechanischen Quadraturen greifen müssen. Um die zweckmäßigste Formel der Quadratur wählen zu können, soll der allgemeine Charakter der Veränderung von  $f(l)$  sowohl im Falle  $A$  wie im Falle  $B$  berücksichtigt werden. Zu diesem Zwecke setzen wir  $H = l \cdot \sigma$ , wobei  $\sigma$  eine gewisse Funktion von  $l$  ist und im allgemeinen eine kleine Größe (von der Größenordnung der Neigungen des Geländes) vorstellt, nach der wir die Funktionen unter den Integralzeichen entwickeln können. In der Tat, wird in (4) die Integrationsgrenze  $h_1$  durch  $J - l\sigma$  und  $h_2$  durch  $J$  ersetzt, so ergibt die Entwicklung im Falle

$$\left. \begin{aligned} A: f(l) &= 3 k^2 \delta \pi [\sigma l^4 (l^2 + J^2)^{-5/2} + \frac{5}{2} \sigma^2 l^5 J (l^2 + J^2)^{-7/2} \\ &\quad + 5 \sigma^3 l^6 (l^2 + J^2)^{-9/2} (J^2 - \frac{1}{6} l^2)] \\ B: f(l) &= k^2 \delta \pi [3 \sigma J l^3 (l^2 + J^2)^{-5/2} + \frac{3}{2} \sigma^2 l^4 (l^2 + J^2)^{-7/2} (4J^2 - l^2) \\ &\quad - \frac{5}{2} l^5 J \sigma^3 (l^2 + J^2)^{-9/2} (3 l^2 - 4 J^2)] \end{aligned} \right\} (6)$$

Für  $l = 0$  ist in beiden Fällen  $f(l) = 0$ ; für  $A$  erreicht das erste Glied der Entwicklung von  $f(l)$  sein Maximum bei  $l = 2J$ , für  $B$  bei  $l = J\sqrt{3/2}$ . Hernach fangen die Funktionen  $f(l)$  an abzunehmen und werden gleich 0 bei  $l = \infty$ , und können also in eine Reihe nach Potenzen von  $l^{-1}$  entwickelt werden.

Da mit der Zunahme von  $l$  die Funktionen  $f(l)$  rasch abnehmen, so ist es zweckmäßig, bei der Berechnung der Quadraturen für  $A$  und  $B$ , die Werte der unabhängigen Variable  $l$  nicht in gleichen, sondern in rasch zunehmenden Intervallen zu wählen, indem gleiche Intervalle bloß im Bereiche des Maximums beizubehalten sind.

Dementsprechend wählen wir für  $l$  im Bereiche des Maximums Werte in kurzen Abständen von je 1 m, d. h. 0, 1, 2, 3, 4 m; weiter bis zu 50 m nehmen wir für  $l$  Werte in rasch zunehmenden Abständen an, und zwar; 5, 8, 20 und 50 m. Über 50 m hinaus halten wir es zweckmäßiger, die Geländewirkung mittels eines graphischen Verfahrens zu bestimmen, wovon unten die Rede sein wird.

Die Integration in den Grenzen von  $l = 0$  bis  $l = 4$  werden wir nach der Formel von Cotes:

$$\int_0^4 f(l) dl = \frac{4}{3} f(1) + \frac{3}{8} f(2) + \frac{4}{3} f(3) + \frac{1}{3} f(4) \dots \dots \dots (7)$$

ausführen.

Was die Integration in den Grenzen von 4 bis 8 und von 8 bis 50 betrifft, so werden wir diese nach einer Formel ausführen, die auf der Entwicklung der  $f(l)$  nach Potenzen von  $l^{-1}$  (von  $l^{-2}$  ab) basiert ist.

In der Tat, ist uns die Funktion

$$f(l) = \frac{a}{l^2} + \frac{b}{l^3} + \frac{c}{l^4} + \dots \dots \dots (8)$$

für drei Werte des Argumentes  $l = \alpha, \beta, \gamma$  gegeben, so ergibt die Integration in den Grenzen von  $\alpha$  bis  $\gamma$ :

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(l) dl = a \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{c}{3} \left( \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\gamma^3} \right) \dots \dots (9)$$

Setzt man in die Formel (9) das Resultat der Auflösung eines Systems von Gleichungen mit drei Unbekannten  $a, b, c$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha^4 f(\alpha) &= a\alpha^2 + b\alpha + c \\ \beta^4 f(\beta) &= a\beta^2 + b\beta + c \\ \gamma^4 f(\gamma) &= a\gamma^2 + b\gamma + c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ein, so erhält man die gesuchte Formel der Quadraturen, und zwar:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(l) dl = C_1 f(\alpha) + C_2 f(\beta) + C_3 f(\gamma) \dots \dots \dots (11)$$

Für  $\alpha = 4, \beta = 5$  und  $\gamma = 8$  ergibt sich

$$C_1 = \frac{1}{6}, \quad C_2 = \frac{625}{288}, \quad C_3 = \frac{16}{9},$$

für  $\alpha = 8, \beta = 20$  und  $\gamma = 50$  ergibt sich

$$C_1 = \frac{224}{125}, \quad C_2 = \frac{343}{10}, \quad C_3 = -\frac{175}{8}.$$

Die Berechnung der Funktionen  $A$  und  $B$  stellt sich also definitiv in folgender Form dar:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_8 + A_{20} + A_{50} \\ B &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_8 + B_{20} + B_{50} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{3 k^2 \delta \pi C_i}{l_i} \left[ h (l^2 + h^2)^{-1/2} - \frac{1}{3} h^3 (l^2 + h^2)^{-3/2} \right]_{h_1=J-H}^{h_2=J} \\ B_i &= -k^2 \delta \pi C_i l_i^2 \left[ (l^2 + h^2)^{-3/2} \right]_{h_1=J-H}^{h_2=J} \\ \text{und} \\ C_1 &= \frac{4}{3}; \quad C_2 = \frac{2}{3}; \quad C_3 = \frac{4}{3}; \quad C_4 = \frac{1}{2}; \\ C_5 &= \frac{625}{288}; \quad C_8 = \frac{4016}{1125}; \quad C_{20} = \frac{343}{10}; \quad C_{50} = -\frac{175}{8} \end{aligned} \right\} (13)$$

Auf der umstehenden Seite sind Tabellen der Werte der Funktionen  $A$  und  $B$  (Einheit:  $10^{-9}$ ) nach dem Argument  $H$  bei einer Dichte  $\delta = 2$  und für eine Schwerpunkthöhe des Instrumentes  $J = 1$  m und die Wertdifferenzen  $\Delta A$  und  $\Delta B$  bei einer Zunahme der Höhe  $J$  um je 0.1 m angegeben.

Tabelle A. Werte der Funktion  $A_p$ , Einheit  $10^{-9}$  cgs.

$H$ m	$A_1$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_1$ $\cdot 10^{-9}$	$H$ m	$A_2$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_2$ $\cdot 10^{-9}$	$H$ m	$A_3$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_3$ $\cdot 10^{-9}$	$H$ m	$A_4$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_4$ $\cdot 10^{-9}$
-0.2	-47	+10	-0.4	-39	+4	-0.7	-82	+5	-1.0	-28	+1
-0.1	-26	+6	-0.3	-31	+3	-0.6	-73	+4	-0.9	-26	+1
0.0	0	0	-0.2	-22	+2	-0.5	-62	+4	-0.8	-24	+1
+0.1	+34	-8	-0.1	-11	+1	-0.4	-51	+3	-0.7	-21	+1
+0.2	+77	-17	0.0	0	0	-0.3	-40	+2	-0.6	-18	+1
			+0.1	+13	-1	-0.2	-27	+2	-0.5	-16	+1
			+0.2	+26	-2	-0.1	-14	+1	-0.4	-13	0
			+0.3	+42	-4	0.0	0	0	-0.3	-10	0
			+0.4	+58	-5	+0.1	+15	-1	-0.2	-7	0
						+0.2	+30	-1	-0.1	-3	0
						+0.3	+46	-2	0.0	0	0
						+0.4	+63	-3	+0.1	+3	0
						+0.5	+80	-3	+0.2	+7	0
						+0.6	+97	-4	+0.3	+11	0
						+0.7	+115	-4	+0.4	+14	0
									+0.5	+18	0
									+0.6	+22	0
									+0.7	+26	0
									+0.8	+30	-1
									+0.9	+33	-1
									+1.0	+37	-1
						$H$ m	$A_{20}$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_{20}$ $\cdot 10^{-9}$			
-1.0	-88	+2	-10.0	+105	0	-5.0	-495	+2			
-0.9	-80	+2	-9.0	+96	0	-4.0	-405	+2			
-0.8	-72	+2	-8.0	+85	0	-3.0	-310	+1			
-0.7	-64	+2	-7.0	+75	0	-2.0	-210	0			
-0.6	-56	+1	-6.0	+65	0	-1.0	-106	0			
-0.5	-47	+1	-5.0	+54	0	0.0	0	0	$H$ m	$A_8$ $\cdot 10^{-9}$	$\Delta A_8$ $\cdot 10^{-9}$
-0.4	-38	+1	-4.0	+44	0	+1.0	+108	0	-2.0	-120	+2
-0.3	-29	+1	-3.0	+33	0	+2.0	+215	0	-1.0	-64	+1
-0.2	-19	0	-2.0	+22	0	+3.0	+321	0	0.0	0	0
-0.1	-10	0	-1.0	+11	0	+4.0	+425	0	+1.0	+69	0
0.0	0	0	0.0	0	0	+5.0	+526	+1	+2.0	+138	0
+0.1	+10	0	+1.0	-11	0						
+0.2	+20	0	+2.0	-22	0						
+0.3	+30	0	+3.0	-33	0						
+0.4	+41	-1	+4.0	-44	0						
+0.5	+52	-1	+5.0	-55	0						
+0.6	+62	-1	+6.0	-66	0						
+0.7	+73	-1	+7.0	-76	0						
+0.8	+84	-1	+8.0	-87	0						
+0.9	+95	-1	+9.0	-97	0						
+1.0	+106	-1	+10.0	-107	0						

Berechnung der in den Formeln (5) auftretenden Koeffizienten der in Fouriersche Reihen entwickelten Funktionen  $A$  und  $B$ . Die Funktionen  $A$  und  $B$ , die für verschiedene Halbmesser  $l$  berechnet wurden, stellen Funktionen des Azimuts  $\alpha$  vor. Werden dieselben natürlicherweise in Form von Fourierschen Reihen ( $C_0 + C_1 \cos \alpha + C_2 \cos 2\alpha + \dots + S_1 \sin \alpha + S_2 \sin 2\alpha + \dots$ ) dargestellt, so führt die Integration der Gleichungen (5) nach  $\alpha$ , in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$ , zum genauen Ausdruck der vier Gradienten, und zwar für  $B$  durch die ersten Koeffizienten der Entwicklung  $C_1$  und  $S_1$  und für  $A$  durch  $C_2$  und  $S_2$ . Aufgabe ist also, die erwähnten vier Koeffizienten auf Grund der bekannten Werte der Funktionen  $A$  und  $B$  zu berechnen. Wir teilen den Kreis mit dem Halbmesser  $l$  in  $n$  gleiche Teile und setzen  $n$  gleich 8, 16 oder 32. Für die gewählten Azimute nehmen wir die Werte der Funktionen  $A$  und  $B$  als bekannt an. Bilden wir für jeden der  $n$  Teilpunkte die Produkte





Unter der Voraussetzung, daß  $n$  groß genug ist und daß die entsprechenden Fourierschen Reihen die Funktionen  $A$  und  $B$  darstellen, so daß die höheren Glieder der Entwicklung von  $n + 1$ ,  $2n + 1$  an vernachlässigt werden dürfen, können die Formeln (14) für eine annähernde Berechnung der gesuchten Werte der Koeffizienten  $C_1$ ,  $S_1$ ,  $C_2$  und  $S_2$  benutzt werden. Es ist leicht zu erkennen, daß die Methode der Integration nach  $\alpha$  mittels Entwicklung in eine Fouriersche Reihe bedeutend genauere Resultate ergibt, als die Anwendung der gewöhnlichen Quadraturformeln (z. B. der Formeln von Simpson), wie es einige Autoren zu tun pflegen.

Für praktische Anwendung geben wir bereits zusammengestellte Formeln, in denen die numerischen Werte der Koeffizienten für drei Werte von  $n$  angegeben sind, wobei bei der Berechnung Glieder höherer Größenordnungen vernachlässigt wurden. Die Indizes bei den Funktionen  $A$  und  $B$  bezeichnen das Azimut, auf welches sich die Funktion bezieht:

$$\begin{aligned}
 & n = 8 \\
 & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= 0.1768(B_{45} - B_{135} - B_{225} + B_{315}) + 0.2500(B_0 - B_{180}) \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= 0.1768(B_{45} + B_{135} - B_{225} - B_{315}) + 0.2500(B_{90} - B_{270}) \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0.2500(A_0 - A_{90} + A_{180} - A_{270}) \\
 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 0.2500(A_{45} - A_{135} + A_{225} - A_{315})
 \end{aligned} \right\} (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & n = 16 \\
 & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0.1250(B_0 - B_{180}) + 0.1155(B_{22.5} - B_{157.5} - B_{202.5} + B_{337.5}) \\
 & \quad + 0.0884(B_{45} - B_{135} - B_{225} + B_{315}) \\
 & \quad + 0.0478(B_{67.5} - B_{112.5} - B_{247.5} + B_{292.5}) \\
 & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0.0478(B_{22.5} + B_{157.5} - B_{202.5} - B_{337.5}) \\
 & \quad + 0.0884(B_{45} + B_{135} - B_{225} - B_{315}) \\
 & \quad + 0.1155(B_{67.5} + B_{112.5} - B_{247.5} - B_{292.5}) \\
 & \quad + 0.1250(B_{90} - B_{270}) \\
 & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.0884(A_{22.5} - A_{67.5} - A_{112.5} + A_{157.5} + A_{202.5} - A_{247.5} \\
 & \quad - A_{292.5} + A_{337.5}) + 0.1250(A_0 - A_{90} + A_{180} - A_{270}) \\
 & 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0.0884(A_{22.5} + A_{67.5} - A_{112.5} - A_{157.5} + A_{202.5} + A_{247.5} \\
 & \quad - A_{292.5} - A_{337.5}) + 0.1250(A_{45} - A_{135} + A_{225} - A_{315}).
 \end{aligned}$$

$$n = 32$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = & 0.0625 (B_0 - B_{180}) + 0.0612 (B_{11.25} - B_{168.75} - B_{191.25} + B_{348.75}) \\ & + 0.0577 (B_{22.50} - B_{157.50} - B_{202.50} + B_{337.50}) \\ & + 0.0520 (B_{33.75} - B_{146.25} - B_{213.75} + B_{326.25}) \\ & + 0.0442 (B_{45} - B_{135} - B_{225} + B_{315}) \\ & + 0.0348 (B_{56.25} - B_{123.75} - B_{236.25} + B_{303.75}) \\ & + 0.0239 (B_{67.50} - B_{112.50} - B_{247.50} + B_{292.50}) \\ & + 0.0122 (B_{78.75} - B_{101.25} - B_{258.75} + B_{281.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = & 0.0122 (B_{11.25} + B_{168.75} - B_{191.25} - B_{348.75}) \\ & + 0.0239 (B_{22.50} + B_{157.50} - B_{202.50} - B_{337.50}) \\ & + 0.0348 (B_{33.75} + B_{146.25} - B_{213.75} - B_{326.25}) \\ & + 0.0442 (B_{45} + B_{135} - B_{225} - B_{315}) \\ & + 0.0520 (B_{56.25} + B_{123.75} - B_{236.25} - B_{303.75}) \\ & + 0.0577 (B_{67.50} + B_{112.50} - B_{247.50} - B_{292.50}) \\ & + 0.0612 (B_{78.75} + B_{101.25} - B_{258.75} - B_{281.25}) \\ & + 0.0625 (B_{90} - B_{270}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = & 0.0577 (A_{11.25} - A_{78.75} - A_{101.25} + A_{168.75} + A_{191.25} - A_{258.75} \\ & - A_{281.25} + A_{348.75}) \\ & + 0.0442 (A_{22.50} - A_{67.50} - A_{112.50} + A_{157.50} + A_{202.50} \\ & - A_{247.50} - A_{292.50} + A_{373.50}) \\ & + 0.0239 (A_{33.75} - A_{56.25} - A_{123.75} + A_{146.25} + A_{213.75} \\ & - A_{236.25} - A_{303.75} + A_{326.25}) \\ & + 0.0625 (A_0 - A_{90} + A_{180} - A_{270}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = & 0.0239 (A_{11.25} + A_{78.75} - A_{101.25} - A_{168.75} + A_{191.25} + A_{258.75} \\ & - A_{281.25} - A_{48.75}) \\ & + 0.0442 (A_{22.50} + A_{67.50} - A_{112.50} - A_{157.50} + A_{202.50} \\ & + A_{247.50} - A_{292.50} - A_{337.50}) \\ & + 0.0577 (A_{33.75} + A_{56.25} - A_{123.75} - A_{146.25} + A_{213.75} \\ & + A_{236.25} - A_{303.75} - A_{326.25}) \\ & + 0.0625 (A_{45} - A_{135} + A_{225} - A_{315}). \end{aligned}$$

Nehmen wir als Beispiel den Fall einer Geländewirkung in Form einer schiefen Ebene, wobei für die Azimute zwischen  $\alpha = -90^\circ$  und  $\alpha = +90^\circ$  die Höhe durch die Formel

$$H = l \varepsilon \cos \alpha \dots \dots \dots (16)$$

dargestellt und zwischen  $\alpha = 90^\circ$  und  $\alpha = 270^\circ$  gleich Null ist. Zunächst stellen wir eine Tabelle 1 der Höhen  $H$  für verschiedene Halbmesser  $l$  (Nivelierungen) zusammen, indem wir die Tangente des Neigungswinkels  $\varepsilon$  gleich 0.1 setzen.

Tabelle 1.

$\alpha$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_8$	$H_{20}$	$H_{50}$	$\alpha$
0.0 <sup>0</sup>	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.80	2.00	5.00	0.0 <sup>0</sup>
22.5	0.09	0.18	0.28	0.37	0.46	0.74	1.85	4.62	337.5
45.0	0.17	0.14	0.21	0.28	0.35	0.57	1.41	3.54	315.0
67.5	0.04	0.08	0.11	0.15	0.19	0.31	0.77	1.91	292.5

Ferner berechnen wir die Tabelle 2 der Werte der Funktionen  $A$  und  $B$ , in Einheiten der neunten Dezimale, wobei die Schwerpunkthöhe des Instrumentes  $J$  gleich 1 m gesetzt ist:

Tabelle 2.

$\alpha$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_8$	$A_{20}$	$A_{50}$	$A$
0.0 <sup>0</sup>	+ 34	+ 26	+ 46	+ 14	+ 52	+ 55	+ 215	+ 55	+ 327
22.5	30	24	43	13	42	51	199	51	356
45.0	23	18	42	10	36	39	152	39	271
67.5	12	10	16	5	19	21	83	21	145

$\alpha$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_8$	$B_{20}$	$B_{50}$	$B$
0.0 <sup>0</sup>	+ 32	+ 12	+ 13	+ 3	+ 8	+ 4	+ 0	+ 2	+ 74
22.5	28	11	12	3	7	4	1	1	68
45.0	22	8	9	2	6	4	2	1	54
67.5	12	5	5	1	4	2	3	0	32

Alsdann finden wir nach den Formeln (15) für  $n = 16$ , daß

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 37 \cdot 10^{-9}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 86 \cdot 10^{-9}; \quad 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0.$$

Das oben angeführte Beispiel einer schiefen Ebene läßt sich auch analytisch durchführen. In der Tat, beschränkt man sich in den Formeln (6) mit der Entwicklung bis zur dritten Potenz der kleinen Größe  $\sigma$ , die in diesem Spezialfalle, wie aus der Gleichung (16) zu ersehen ist, nicht von  $l$  abhängt, so können die Funktionen  $A$  und  $B$  auf Grund der Formeln (6) integriert werden. So erhält man folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} B &= k^2 \delta \pi \left[ 3\sigma \left( \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \right) + \sigma^2 \left( \frac{3}{2} \sin^5 \varphi + \frac{1}{2} \sin^3 \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \sigma^3 \left( \frac{5}{7} \cos^7 \varphi - \frac{17}{2} \cos^5 \varphi + \frac{65}{6} \cos^3 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{15}{2} \cos \varphi \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ A &= 3k^2 \delta \pi \left[ \sigma \left( -\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) - \sigma^2 \left( \frac{1}{2} \cos^5 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{3} \cos^3 \varphi + \frac{5}{2} \cos \varphi \right) - \sigma^3 \left( -\frac{5}{6} \sin^7 \varphi - \frac{1}{6} \sin^5 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{18} \sin^3 \varphi - \frac{5}{6} \sin \varphi + \frac{5}{12} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \end{aligned} \right\} (17)$$

wobei der Kürze halber  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{J}$  gesetzt ist.

Setzt man diese Werte von  $A$  und  $B$  in die Formeln (5) ein, wobei  $\sigma = \varepsilon \sin(\alpha + \alpha_0)$  angenommen wird, und führt man die Integration nach  $\alpha$  von 0 bis  $2\pi$  und nach  $\varphi$  von 0 bis  $\varphi$  aus, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= k^2 \delta \pi \varepsilon \sin \alpha_0 \left[ \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \right] - \frac{3}{4} k^2 \delta \pi \varepsilon^3 \sin \alpha_0 \left[ \frac{5}{2} \cos^7 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{2} \cos^5 \varphi + \frac{65}{6} \cos^3 \varphi - \frac{15}{2} \cos \varphi + \frac{8}{3} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= k^2 \delta \pi \varepsilon \cos \alpha_0 \left[ \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \right] - \frac{3}{4} k^2 \delta \pi \varepsilon^3 \cos \alpha_0 \left[ \frac{5}{2} \cos^7 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{2} \cos^5 \varphi + \frac{65}{6} \cos^3 \varphi - \frac{15}{2} \cos \varphi + \frac{8}{3} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= + \frac{3}{2} k^2 \delta \pi \varepsilon^2 \cos 2\alpha_0 \left[ \frac{1}{2} \cos^5 \varphi - \frac{5}{3} \cos^3 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi - \frac{4}{3} \right] \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= - \frac{3}{2} k^2 \delta \pi \varepsilon^2 \sin 2\alpha_0 \left[ \frac{1}{2} \cos^5 \varphi - \frac{5}{3} \cos^3 \varphi + \frac{5}{2} \cos^2 \varphi - \frac{4}{3} \right] \end{aligned} \right\} (18)$$

Nun berechnen wir die Werte der Gradienten für  $\sigma = \varepsilon \cos \alpha$ ,  $\alpha$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$ . Die Integration der Werte von  $A$  und  $B$  [aus den Formeln (17)] nach  $\alpha$  ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= k^2 \delta \left[ \frac{1}{2} \varepsilon \pi (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2) + \frac{4}{3} \varepsilon^2 \left( \frac{3}{2} \sin^5 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sin^3 \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi - \frac{3}{4} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) - \frac{3}{8} \varepsilon^3 \pi \left( \frac{5}{2} \cos^7 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{17}{2} \cos^5 \varphi + \frac{65}{6} \cos^3 \varphi - \frac{15}{2} \cos \varphi + \frac{8}{3} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= k^2 \delta \left\{ 2 \varepsilon \left( \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi - \sin \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \pi \left( \frac{1}{2} \cos^5 \varphi - \frac{5}{3} \cos^3 \varphi + \frac{5}{2} \cos \varphi - \frac{4}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{5} \varepsilon^3 \left( \frac{5}{4} \lg \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{5}{2} \sin \varphi - \frac{5}{6} \sin^3 \varphi - \frac{1}{2} \sin^5 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{2} \sin^7 \varphi \right) \right\} \end{aligned} \right\} (18^*)$$

Setzt man  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = 2$  und  $\operatorname{tg} \varphi = 50$ , so werden wir die numerischen Werte der Gradienten erhalten, und zwar

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 34 \cdot 10^{-9} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 91 \cdot 10^{-9},$$

was dem oben angeführten Beispiel gut entspricht und als eine gewisse Kontrolle für die Richtigkeit der Tabellenzusammensetzung angesehen werden kann.

Eine genaue Integration nach  $l$  für  $A$  und  $B$  ist nicht bloß im Falle eines ebenen Reliefs ausführbar, sondern kann auch in anderen Spezialfällen einer gesetzmäßigen Veränderung der Höhe  $H$  ausgeführt werden.

Betrachten wir nun speziell die erste der Formeln (18) für den Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ . Indem wir uns auf die erste Potenz der Neigung  $\epsilon_x$  nach der Richtung der  $X$ -Achse und auf die Grenzen von 0 bis  $J$  beschränken, stellen wir dieselbe in folgender Form dar:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 2\pi h^2 \delta \epsilon_x M = 419 \delta \epsilon_x M \cdot 10^{-9} \dots \dots \dots (19)$$

Der Multiplikator  $M$  hängt von  $J$ , der Schwerpunkthöhe des Instrumentes über der Neigungsschicht, und von  $l$ , dem Halbmesser der Ausdehnung dieser Schicht, ab, und zwar ist:

$$M = \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{J}{\sqrt{J^2 + l^2}} + \frac{1}{2} \frac{J^3}{(\sqrt{J^2 + l^2})^3} \right] \dots \dots \dots (20)$$

Tabelle 3 gibt den Wert des Multiplikators  $M$  als Funktion des Verhältnisses ( $l:J$ ).

Tabelle 3.

$l/J$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$l/J$	
0	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.016	0.029	0.046	0.067	0.090	100	0.985
1	0.116	0.143	0.171	0.199	0.221	0.253	0.280	0.305	0.328	0.352	200	0.993
2	0.374	0.495	0.415	0.433	0.451	0.468	0.485	0.500	0.514	0.528	300	0.995
3	0.541	0.554	0.566	0.577	0.588	0.598	0.608	0.617	0.626	0.635	400	0.996
4	0.643	0.651	0.659	0.666	0.673	0.680	0.686	0.692	0.698	0.704	500	0.997
5	0.710	0.715	0.720	0.725	0.730	0.735	0.740	0.745	0.749	0.752	600	0.997
6	0.756	0.760	0.763	0.767	0.770	0.774	0.778	0.782	0.785	0.787	700	0.998
7	0.789	0.792	0.795	0.798	0.800	0.802	0.804	0.807	0.809	0.812	800	0.998
8	0.814	0.817	0.819	0.821	0.823	0.825	0.827	0.829	0.830	0.832	900	0.998
9	0.834	0.836	0.838	0.840	0.842	0.844	0.845	0.847	0.848	0.849	1.000	0.999
10	0.850	0.865	0.874	0.888	0.893	0.900	0.907	0.912	0.917	0.921		
20	0.925	0.929	0.932	0.935	0.938	0.940	0.942	0.944	0.946	0.948		
30	0.950	0.952	0.954	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961		
40	0.962	0.963	0.964	0.965	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970		
50	0.970	0.970	0.971	0.972	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975		
60	0.975	0.975	0.976	0.976	0.977	0.977	0.977	0.978	0.978	0.978		
70	0.979	0.979	0.979	0.980	0.980	0.980	0.980	0.981	0.981	0.981		
80	0.982	0.982	0.982	0.982	0.982	0.982	0.983	0.983	0.983	0.983		
90	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984	0.985	0.985		

Wir können die Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ , oder besser den aus der geometrischen Summe erhaltenen Gradienten, als ein Resultat der Wirkung einer Reihe von Neigungsschichten verschiedener Dichten (angefangen von der Fläche der Plattform, auf welcher die Drehwage fußt) betrachten. Der Wert des

Multiplikators  $M$  wächst mit dem Verhältnis  $l:J$ . Der zu beobachtende maximale Gradient  $G$  wird also gleich einer Summe von Formeln

$$G = 2 k^2 \pi \Sigma \delta_i \varepsilon_i M_i \dots \dots \dots (21)$$

sein. Hierin ist  $\delta_i$  der Dichteunterschied zwischen den benachbarten Schichten,  $\varepsilon_i$  der Neigungswinkel der Schicht längs der Richtung des Gradienten  $G$  und  $M$  eine gewisse Funktion von  $J$ , der Schwerpunkthöhe des Instrumentes über einer Schicht von einem Halbmesser  $l_i$ . Diese Erwägungen können zur Interpretation der Beobachtungsergebnisse dienen, und zwar, wenn z. B. nach der Integration das gesuchte unterirdische Relief zu finden ist, nachdem die Neigungen des unterirdischen Reliefs aufgestellt waren.

Darstellung der graphischen Methode bei der Auswertung der Wirkung des von der Drehwage mehr als 50 m entfernten Geländeabschnittes. Zu diesem Zweck können die Formeln (4) und (5) benutzt werden. Nimmt man an, daß die Verhältnisse  $H:l$  und  $J:l$  klein sind und beschränkt man sich in den Formeln (4) und (5) auf die erste und zweite Potenz dieser kleinen Größen, so können die Formeln für die vier Gradienten in einer einfacheren Form geschrieben werden, und zwar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= 3 k^2 \delta \left( JH - \frac{1}{2} H^2 \right) \int \cos \alpha d\alpha \int \frac{dl}{l^3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= 3 k^2 \delta \left( JH - \frac{1}{2} H^2 \right) \int \sin \alpha d\alpha \int \frac{dl}{l^3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 3 k^2 \delta H \int \cos 2\alpha d\alpha \int \frac{dl}{l^2} \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 3 k^2 \delta H \int \sin 2\alpha d\alpha \int \frac{dl}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

Wenn wir diese Ausdrücke nach  $l$  von  $l_1$  bis  $l_2$  und nach  $\alpha$  von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$  integrieren, wobei  $H$  als konstant für die ganze Fläche des Sektors angenommen ist, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= \frac{3}{2} k^2 \delta \left( JH - \frac{1}{2} H^2 \right) (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \left( \frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= -\frac{3}{2} k^2 \delta \left( JH - \frac{1}{2} H^2 \right) (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \left( \frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{3}{2} k^2 \delta H (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= -\frac{3}{2} k^2 \delta H (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1) \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) \end{aligned} \right\} (23)$$

Wir teilen die von zwei konzentrischen Kreisen eingefasste Fläche in radiale Sektoren auf solche Weise ein, daß die Wirkungen sämtlicher Sektoren untereinander gleich sind. Um diese Aufgabe zu lösen, teilen wir den Quadrant

in Winkel ein, deren Sinuswerte in einer arithmetischen Progression folgen. Der Anfangswert des Sinus ist gleich 0 und der Endwert gleich 1. Bei der Teilung des Quadranten in  $n$  Teile werden also die Winkel  $\alpha_i$  nach der Formel

$$\sin \alpha_i = \frac{i}{n} \dots \dots \dots (24)$$

bestimmt sein, woraus folgt, daß

$$\sin \alpha_{i+1} - \sin \alpha_i = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (25)$$

Unter diesen Voraussetzungen kann die erste Gleichung des Systems in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} = \frac{2n}{3k^2\delta \left( JH - \frac{1}{2}H^2 \right)} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \dots \dots \dots (26)$$

Nimmt man nun an, daß

$$JH - \frac{1}{2}H^2 = 1, \quad \delta = 1, \quad k^2 = 667 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 10^{-12} \quad (27)$$

so kann die Gleichung für sukzessive Auswertung der Halbmesser von  $l = 50$  m an folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} = 0.00001 n \dots \dots \dots (28)$$

Bei der Wahl von zwischenliegenden Radien geben wir willkürlich eine Zahl  $n$  so an, daß bei der Flächeneinteilung in einzelne Sektoren die letzteren nach Möglichkeit einem Quadrate ähnlich werden.

Die Wirkung eines beliebigen Prismas werden wir nach folgender Formel

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = S \cdot \delta \left( JH - \frac{1}{2}H^2 \right) \dots \dots \dots (29)$$

bestimmen, wo  $S$  die Anzahl der von der Grundfläche des Prismas bedeckten Flächen gleicher Wirkung ist.

Die Auswertung der Einwirkung eines zwischen zwei benachbarten Höhenlinien liegenden Massivs führt also einfach zur Berechnung der Anzahl von Flächen gleicher Wirkung oder zum Abzählen der Punkte, mit denen man den Schwerpunkt des zwischen zwei Höhenlinien liegenden Sektors gekennzeichnet hat, und zugleich zu einer Multiplikation mit der Dichte  $\delta$  sowie mit einem Multiplikator  $HJ - \frac{1}{2}H^2 = J^2 f\left(\frac{H}{J}\right)$ , der von der Mittelhöhe des Massivs ( $H$ ) und der Schwerpunkthöhe des Instrumentes ( $J$ ) abhängt\*).

---

\*) Im Falle der Auswertung der Wirkung der unterirdischen Massen ist der Multiplikator  $f(H) = -J^2 \left[ \frac{H}{J} + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{J} \right)^2 \right]$ , wo  $H$  die Tiefe des Massivs ist.

Die Berechnung des ersten Diagramms ist aus der Tabelle 4 zu ersehen. Ähnlicherweise wird auch das Diagramm für den Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  nach der Formel

$$\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} = \frac{2n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)}{3k^2 \delta H} \dots \dots \dots (30)$$

berechnet, wo  $n$  die Anzahl der Teilungen des Halbquadrantes ist. Setzt man  $H = 1$ ,  $\delta = 1$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 10^{-10}$ , so kann die Gleichung für sukzessive Auswertung der Radien folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} = 0.001 n \dots \dots \dots (31)$$

Die Berechnung des Diagramms ist in Tabelle 5 angeführt.

Tabelle 4.				Tabelle 5.			
$l$	$l^{-2} n \cdot 10^{-5}$	$n$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$	$l$	$l^{-1}/n \cdot 10^{-4}$	$n$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$
50.0	0.000 40			50.0	0.0200		
	8	8	$10^{-12}$		40	4	$10^{-10}$
55.9	0.000 32			62.5	0.0160		
	8	8	"		30	3	"
64.6	0.000 24			76.9	0.0130		
	6	6	"		30	3	"
74.6	0.000 18			100.0	0.0100		
	6	6	"		8	8	$10^{-11}$
91.3	0.000 12			108.7	0.0092		
	5	5	"		8	8	"
119.0	0.000 070			119.0	0.0084		
	10	10	$10^{-13}$		8	8	"
129.0	0.000 060			131.6	0.0076		
	10	10	"		7	7	"
141.0	0.000 050			144.9	0.0069		
	10	10	"		7	7	"
160.0	0.000 040			161.3	0.0062		
	9	9	"		7	7	"
179.0	0.000 031			181.8	0.0055		
	8	8	"		6	6	"
209.0	0.000 023			204.1	0.0049		
	7	7	"		6	6	"
250.0	0.000 016			232.6	0.0043		
	5	5	"		5	5	"
301.0	0.000 011			263.2	0.0038		
	4	4	"		5	5	"
378.0	0.000 007			303.0	0.0033		
	3	3	"		5	5	"
500.0	0.000 004			357.1	0.0028		
					4	4	"
				416.7	0.0024		
					4	4	"
				500.0	0.0020		



Die Einwirkung des zwischen zwei Höhenlinien liegenden Massivs auf den Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  führt also zum Abzählen der Flächen oder Punkte zwischen zwei Höhenlinien und zu der Multiplikation mit der Dichte  $\delta$  und mit der mittleren Höhe  $H$  des Massivs\*).

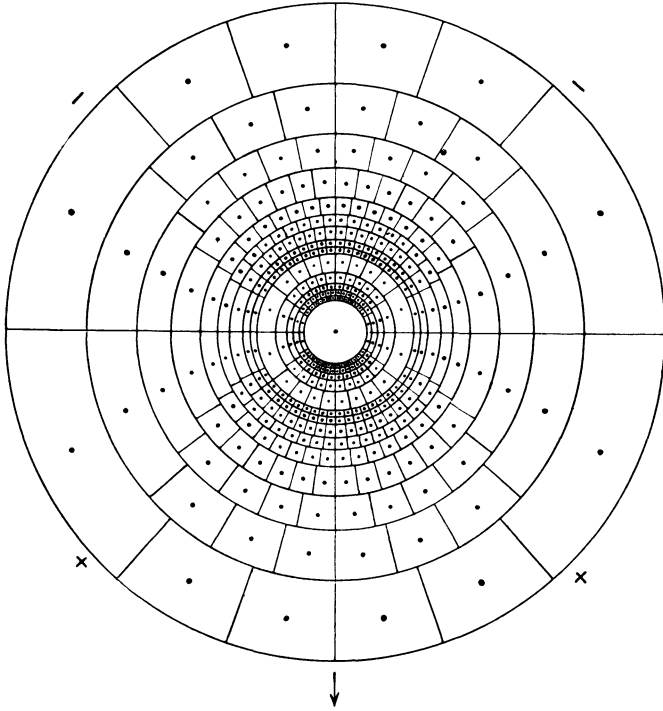


Diagramm I.

Diagramm I dient zur Ermittlung des Einflusses des topographischen Reliefs auf die Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$  in den Grenzen von 50 bis 500 beliebiger Lineareinheiten, nach der Formel:  $S \delta (JH^{-1/2} H^2)$ .  
 — Für den Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  wird der Pfeil nach der Richtung der X-Achse (S), für  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$  nach der Y-Achse (W) orientiert. — Der Wert eines Elementarfeldes (oder Punktes) für die fünf inneren Ringe ist  $1 \cdot 10^{-12}$  CGS, für die äußeren gleich  $1 \cdot 10^{-13}$  CGS.

Für die Berechnung des Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$  kann das Diagramm I dienen, wenn man dasselbe auf dem Plan in der Richtung der Y-Achse orientiert. Der Gradient  $2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  wird mittels des zweiten Diagramms gefunden, wenn man

\*) Wenn es sich um die Auswertung der Wirkung der unterirdischen Massen handelt, so ist es mit ( $-H$ ) zu multiplizieren.

dasselbe entsprechend nach der Winkelhalbierenden zwischen den Achsen  $X$  und  $Y$  orientiert. Bedingungsweise werden wir stets die  $X$ -Achse in der Richtung nach Süden und die  $Y$ -Achse in der Richtung nach Westen nehmen; alsdann muß bei der Auswertung der topographischen Reduktion das Diagramm I

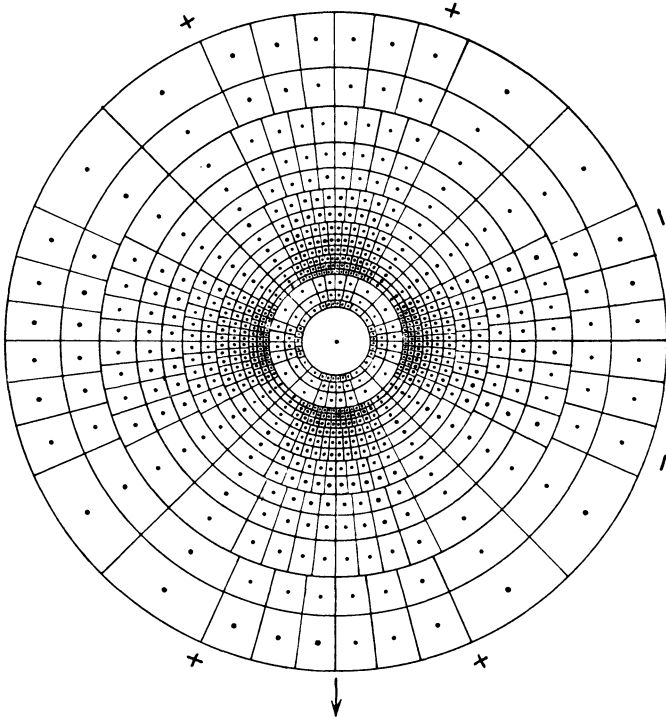


Diagramm II.

Diagramm II dient zur Ermittlung des Einflusses des topographischen Reliefs auf die Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  —  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  und  $2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  in den Grenzen von 50 bis 500 beliebiger Längeneinheiten, nach der Formel:  $S \delta H$ . — Für den Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  in der Richtung der  $X$ -Achse ( $S$ ), für den Gradienten  $2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  nach der Halbierenden des Winkels zwischen den  $X$ - und  $Y$ -Achsen ( $SW$ ). — Der Wert eines Elementarfeldes (oder Punktes) für die fünf inneren Ringe ist  $1 \cdot 10^{-10}$  CGS, für die äußeren Ringe gleich  $1 \cdot 10^{-11}$  CGS.

nach  $S$  und  $W$  für die Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$  orientiert werden, und das Diagramm II nach  $S$  und  $S-W$ , wenn man die Gradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  und  $2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  zu berechnen hat.

Mittels der graphischen Methode haben wir die Möglichkeit, die Geländewirkung des Gebietes zwischen zwei konzentrischen Kreisen, deren Radien 50

bis 500 beliebige Lineareinheiten betragen, auszuwerten. Dazu ist nur notwendig, die Höhen  $H$  und  $J$  ebenfalls in denselben Einheiten auszudrücken. Sei z. B. gegeben, die Auswertung der Geländewirkung zwischen zwei konzentrischen Kreisen, deren Radien 10 und 100 m sind, zu verrichten. In diesem Falle ist die Lineareinheit gleich 0.2 m. Folglich müssen ebenfalls die Höhe  $J$  des Instrumentes und die Höhe  $H$  des Reliefs in Einheiten von 0.2 m ausgedrückt sein.

Werden Gradienten für ein neues Koordinatensystem  $x', y', z'$  berechnet, welches um den Winkel  $\gamma$  (in der Richtung des Abzählens des Winkels  $\alpha$  oder in der Richtung von S zu W) gedreht ist, so können folgende Umwandlungsformeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial z'} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \cos \gamma + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \sin \gamma \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial z'} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \sin \gamma + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \cos \gamma \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \cos 2\gamma + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \sin 2\gamma \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y'} &= -\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \sin 2\gamma + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

benutzt werden.

## Angewandte Seismik.

(Zusammenfassender Bericht über Arbeiten von 1921 bis 1928.)

Von **Oswald v. Schmidt**. — (Mit fünf Abbildungen.)

I. Teil: Untersuchungen bei einer verdeckten Schicht. A. Analytische Betrachtung der Laufzeitkurven in Abhängigkeit von den Untergrundverhältnissen. Bedeutung der „Scheingeschwindigkeit“, die nicht nur unendlich groß werden, sondern auch negative Werte annehmen kann. Mathematischer Anhang. B. Konstruktion der Untergrundverhältnisse aus den Laufzeitkurven. C. Experimentelle Ergebnisse: Oberflächengeschwindigkeit = 1600 bis 1700 m/sec als Durchschnitt von 13 Linien. Beispiel einer Tiefenberechnung und Werte für  $v_2$  in der Heide. II. Teil: Untersuchung bei zwei verdeckten Schichten. III. Teil: Beschreibung verschiedener Neukonstruktionen. Erfahrungen aus der Feldpraxis.

### Einleitung.

Die Anregung zu vorliegenden seismischen Arbeiten verdankt Verfasser Herrn Dr. Mintrop. Derselbe hat im Dezember 1920 seine ersten Untersuchungen für die Deutsche Erdöl A.-G. ausgeführt. Verfasser, dem ab 1921 die vergleichende Bewertung der verschiedenen geophysikalischen Methoden für die Deutsche Erdöl A.-G. oblag, erkannte den hervorragenden Wert der seismischen Methode und entwickelte in demselben Jahre — unabhängig von