

Werk

Jahr: 1928

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:4

Werk Id: PPN101433392X_0004

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0004 | LOG_0035

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

sprechend der Beschreibung (S. 169) anzählt*). Das Ergebnis ist in der vorstehenden Tabelle angegeben (a_1 bzw. b_1 für die Entfernung 1 bis 10 m, a_2 bzw. b_2 für 10 bis 100 m). Die Berechnung (entsprechend S. 170) ergibt:

		U_{xz}	U_{yz}	U_d	U_{xy}
8-Strahlennivellement	(ungerade Zahlen) . . .	+ 27.2	+ 15.4	— 54.5	— 28.4
8-	" (gerade ") . . .	+ 26.5	+ 13.1	— 53.0	— 12.8
16-	"	+ 27.3	+ 11.8	— 53.0	— 17.5

Um die Messungen mit der Drehwage von dem Einfluß der Geländeebenenheiten zu befreien, müssen also diese Beträge in Abzug gebracht werden.

Das Beispiel läßt erkennen, daß die Berechnung der Geländewirkung eines hügeligen Terrains nach den verschiedenen Strahlennivellements sehr gut übereinstimmende Resultate liefert; die Unsicherheit ist naturgemäß in den Krümmungsgrößen ganz erheblich größer als in den Gradienten. In Wirklichkeit ist die Unsicherheit wegen der Inhomogenität des Bodens noch größer.

Beiträge zur geoelektrischen Methode.

Von **J. N. Hummel.** — (Mit vierzehn Abbildungen.)

I.

Bedeutung mehrerer Schichten verschiedener elektrischer Leitfähigkeit für die Auffindung darunter befindlicher Störungskörper.

Es wird die Potentialfunktion für den Fall aufgestellt, daß Störungskörper verschiedener Form und Leitfähigkeit sich in einem geschichteten Medium befinden, das von einem homogenen stationären Strome durchflossen wird. Insbesondere wird gezeigt, in welchem Maße die von den Einlagerungen herrührenden Störungen des normalen Potentialflächenbildes durch eine darüber befindliche besser leitende Schicht verwischt werden.

Die oberste Erdkruste ist im Gegensatz zum tiefergelegenen Untergrund mehr oder weniger von Grund- und Sickerwässern durchtränkt. Gewöhnlich sind es alluviale oder diluviale Ablagerungen, die diese Wässer aufnehmen und eine Mächtigkeit von wenigen Metern bis zu etwa 400 m, selten aber mehr besitzen. Die Durchfeuchtung der Sedimentschichten führt zu einer Herabsetzung ihres elektrischen Widerstandes auf etwa $3 \cdot 10^3$ bis $1,5 \cdot 10^4 \Omega \cdot \text{cm}$, in einzelnen Fällen sogar auf nur 5 bis 500 $\Omega \cdot \text{cm}$, während der Widerstand der darunter gelegenen bergfeuchten Sohle, die in der Hauptsache von massiven Gesteins-

*) Praktisch einfacher ist es, wenn man die Diagramme (es genügt für die Geländereduktion der mittlere Teil, etwa zwischen +3 und -3) auf kräftigem Millimeterpapier aufträgt, die Höhenprofile einzeln leicht mit Bleistift einzeichnet und nach dem Abzählen wieder ausradiert.

massen gebildet wird, zwischen 10^6 bis $10^{11} \Omega \cdot \text{cm}$ schwanken mag*). Diese Verschiedenheit der Leitfähigkeit ist von erheblicher Bedeutung für sämtliche Methoden der geoelektrischen Bodenerforschung, insbesondere aber für diejenigen, bei denen Elektroden zur Erzeugung eines künstlichen Potentialflächenbildes verwandt werden. Die Störungen eines solchen Bildes, die durch Einlagerungen abweichender Leitfähigkeit im bergfeuchten Untergrund hervorgerufen werden, werden naturgemäß durch jede darüber befindliche besser leitende Schicht verwischt und sind in vielen Fällen an der Oberfläche überhaupt nicht mehr merkbar. Es fragt sich, wie groß und welcher Art die Wirkung einer solchen Schicht sein kann, und wie weit man ihr Beachtung zu schenken hat. Die genaue Berechnung der Potentialverteilung unter Berücksichtigung einer besser leitenden Schicht an der Oberfläche wird jedenfalls, wie auch die geologischen Verhältnisse liegen mögen, nicht nur für die Potentiallinienverfahren, sondern auch für die Praxis der Rahmenmethoden zu wertvollen Schlußfolgerungen führen.

Für die mathematische Behandlung des Problems stellen wir uns folgende vereinfachte Aufgabe: Zwei homogene, isotrope unbegrenzte Medien verschiedener Leitfähigkeit seien durch eine Ebene voneinander getrennt. Sie werden von einem stationären Strome in einer bestimmten Richtung parallel zur Trennungsebene durchströmt. Die Stromdichte sei zunächst in jedem Medium homogen**). In das eine Medium werde nun ein Körper dritter Leitfähigkeit hineingebracht. Wie gestaltet sich dann die Potentialverteilung? In welcher Weise wird das vorher bekannte Potentialflächenbild hierdurch verändert? Mit Rücksicht auf die geringe Anzahl der Fälle, in denen die Potentialverteilung auf verhältnismäßig elementarem Wege gewonnen werden kann, sind Lösungen in Gestalt einfacher Ausdrücke, wie wir sie im folgenden für einige Beispiele geben werden, über das Gebiet der angewandten Geophysik hinaus von Interesse.

Es sei zunächst der Fall einer Kugel behandelt. Wir legen ein Koordinatensystem so in ihren Mittelpunkt, daß die x -Achse mit der Stromrichtung zusammenfällt, und die y -Achse senkrecht durch die Trennungsebene hindurchgeht (Fig. 1). Der Radius der Kugel sei a , der Abstand ihres Mittelpunktes von der Trennungsebene h . Die Leitfähigkeiten seien σ_1 , σ_2 und σ_4 , wobei sich der Index 1 auf das Medium, in dem der Störungskörper eingebettet ist, der Index 2 auf diesen selbst und der Index 4 auf das ungestörte Medium beziehen***). Die Verhältnisse in den beiden Medien vor Hineinbringen des Störungskörpers werden durch den Index 0 gekennzeichnet. r_1 sei die Entfernung eines Auf-

*) H. Hlauschek: Geologische Grundlagen der geoelektrischen Erdölsuche. Zeitschr. f. prakt. Geologie 35, 22—27 (1927).

***) Über die Zweckmäßigkeit dieser Idealisierung vgl. J. N. Hummel: Untersuchung der Potentialverteilung für einen speziellen Fall im Hinblick auf geoelektrische Potentiallinienverfahren. Zeitschr. f. Geophys. 4, 68 (1928).

****) Die Bezeichnungen sind denjenigen angepaßt, die wir in der erwähnten früheren Arbeit gewählt hatten.

3. im Unendlichen, d. h. für $r_1 = \infty$ und $r_2 = \infty$, mit dem Potential des ungestörten Feldes übereinstimmen;

4. für $y = h$ die Gleichungen $\varphi_1 = \varphi_4$ und $\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \sigma_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}$ erfüllen.

Von Kontaktspannungen an der Trennungsebene können wir absehen. Dann lassen sich für die beiden Potentialfunktionen versuchsweise die Ansätze

$$\varphi_1 = A_1 x + B_1 \frac{x}{r_1^3} + C_1 \frac{x}{r_2^3}, \quad \varphi_4 = A_4 x + B_4 \frac{x}{r_1^3} + C_4 \frac{x}{r_2^3}$$

machen, die der ersten Bedingung genügen, und in denen $A_1, B_1, C_1, A_4, B_4, C_4$ Konstante bedeuten, deren Werte sich aus den übrigen Bedingungen ergeben. Von ihnen ergibt sich C_4 aus der zweiten Bedingung unter Berücksichtigung der Quellenanordnung zu 0. B_1 ergibt sich aus derselben Bedingung zu

$$M = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot a^3 \cdot A_1. \quad \text{Aus der dritten Bedingung folgt}$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{04} = -\frac{i_{01}}{\sigma_1} = -\frac{i_{04}}{\sigma_4}.$$

Die Grenzbedingungen endlich ergeben die Beziehungen

$$B_4 = B_1 + C_1 \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} B_1.$$

Durch Einsetzen dieser Werte nehmen die Ausdrücke für die Potentiale das folgende Aussehen an. Es ist für

$$y \leq h: \quad \varphi_1 = A_1 x + A_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{a^3}{r_1^3} x + A_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot \frac{a^3}{r_2^3} x,$$

$$y \geq h: \quad \varphi_4 = A_1 x + A_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{a^3}{r_1^3} x + A_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot \frac{a^3}{r_1^3} x$$

oder nach einer kleinen Umformung für

$$y \leq h: \quad \varphi_1 = A_1 \left[1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot a^3 \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot \frac{1}{r_2^3} \right) \right] x,$$

$$y \geq h: \quad \varphi_4 = A_1 \left(1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot \frac{a^3}{r_1^3} \right) x.$$

Diese Gleichungen gestatten eine anschauliche physikalische Deutung. Man kann sich das Potential in jedem Medium aus drei bzw. zwei Potentialen additiv zusammengesetzt denken, von denen jedes einzelne einem einfachen Bildungsgesetz gehorcht. Das Potential im Medium 1 setzt sich zusammen aus dem Potential, das man erhalten würde, wenn die Kugel im allseits unbegrenzten homogenen Medium mit der Leitfähigkeit σ_1 eingebettet wäre, und aus einem Zusatzpotential, das von dem Spiegelbild der Kugel herrühren würde, wenn dieses sich im allseits unbegrenzten homogenen Medium befinden und durch

einen Dipol mit dem Moment $M = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot a^3 \cdot A_1$ ersetzt werden würde. Das Potential im ungestörten Medium 4 ist einem solchen gleich, das man erhalten würde, wenn die Kugel im allseits unbegrenzten homogenen Medium eingebettet wäre, und der sie ersetzende Dipol das Moment $M' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_4} \cdot a^3 \cdot A_1$ besitzen würde.

Durch ganz analoge Betrachtungen erhält man für den unendlich langen Kreiszyylinder, der mit seiner Längsachse parallel der Trennungsebene und senkrecht im Stromfeld liegt, die entsprechenden Gleichungen

$$\varphi_1 = A_1 \left[1 + k \cdot a^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{k''}{r_2^2} \right) \right] x, \quad \varphi_4 = A_1 \left[1 + k(1 + k'') \frac{a^2}{r_1^2} \right] x,$$

wenn zur Abkürzung $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = k$ und $\frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} = k''$ gesetzt sind. Eine anschauliche Deutung dieser Potentiale ist in der gleichen Weise möglich. Die Potentialverteilung im Medium 4 ergibt sich, wenn man dem Dipol das Moment $M = k(1 + k'')a^2 \cdot A_1$ erteilt und ihn sich im allseits unbegrenzten homogenen Medium eingebettet denkt. Das Potential im Medium 1 erhält man in der gleichen Weise wie bei der Kugel, nur daß in diesem Falle dem Spiegelbild des Dipols das Moment $M' = k \cdot k'' \cdot a^2 \cdot A_1$ zu geben ist. Man kann dasselbe Zusatzpotential auch noch auf einem anderen Wege erhalten, nämlich dadurch, daß man dem Spiegelbild der Kugel eine passend gewählte fiktive Leitfähigkeit σ' erteilt, und es sich im allseits unbegrenzten homogenen Medium mit der Leitfähigkeit σ_4 eingebettet denkt. Hierbei ist dem Verhältnis dieser fiktiven Leitfähigkeit zu der des umgebenden Mediums der Wert

$$\frac{\sigma'}{\sigma_4} = \frac{\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_4)}{\sigma_1^2 + \sigma_2 \cdot \sigma_4}$$

zu geben. Die Richtigkeit dieser Vorstellung kann an ein einigen Spezialfällen, in denen die Potentialverteilung bekannt ist, leicht geprüft werden. Ist z. B. $\sigma_4 = \sigma_1$, so muß $\frac{\sigma'}{\sigma_4} = 1$ gesetzt werden, um die richtige Potentialverteilung zu erhalten.

Ist σ_4 sehr groß, so muß offenbar $\frac{\sigma'}{\sigma_4} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ sein, und falls $\sigma_4 = 0$ ist, werden die Indikationen an der Grenzebene doppelt so groß, was sich dadurch erreichen läßt, daß man $\frac{\sigma'}{\sigma_4} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ setzt. Der obige Wert für das Verhältnis $\frac{\sigma'}{\sigma_4}$ leistet in jedem der drei Fälle das Geforderte.

Die angegebenen Lösungen für die Potentialverteilung in den beiden Medien gelten exakt, wenn die Störungskörper tatsächlich von Dipolen gebildet werden. Für die Kugel bzw. den Zylinder sind sie nicht mehr streng, geben indessen

für $r_1 > a$ praktisch die Verhältnisse recht gut wieder, und zwar um so besser, je kleiner der Bruch $\frac{a}{h}$ ist. Die Ungenauigkeiten sind in der Nachbarschaft der Dipole am größten und verringern sich mit wachsendem r_1 . In dem Sonderfalle $\sigma_4 = \sigma_1$ gelten die entwickelten Formeln exakt. Dieser in zwei früheren Arbeiten behandelte Fall, in dem die Störungskörper im allseits unbegrenzten homogenen Medium eingebettet sind, ist natürlich in den hier gemachten allgemeineren Ansätzen mitenthalten*).

Die Kurven gleichen Potentials lassen sich in jeder die Zylinderachse senkrecht schneidenden Ebene durch die beiden Gleichungen

$$x^3 - x_0 x^2 + [y^2 + k(1 + k'')a^2]x = x_0 y^2, \quad x \left\{ 1 + a^2 k \left[\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{k''}{x^2 + (y - 2h)^2} \right] \right\} = x_0$$

darstellen. Schreibt man die erste von ihnen, die sich auf das ungestörte Medium 4 bezieht, in der Form $x_0 - x \equiv \Delta x = k(1 + k'') \frac{a^2}{r_1^2} x$, so besitzt man einen Ausdruck für die Größe der Ausbuchtungen der Potentiallinien, die auf den Störungskörper zurückzuführen sind. Für die entsprechenden Ausbuchtungen, die man erhält, wenn der Zylinder im allseits unbegrenzten homogenen Medium eingebettet ist, hatten wir die Gleichung

$$X_0 - X \equiv \Delta X = k \frac{a^2}{R_1^2} X$$

gewonnen**), in der hier zur Unterscheidung die großen Buchstaben X und R_1 statt x und r eingeführt sind. Vergleicht man beide Ausdrücke miteinander, so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} = \frac{X}{x} \cdot \frac{r_1^2}{R_1^2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_4}{\sigma_1} \right) \sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_4}{\sigma_1} \right).$$

Sie verrät, in welchem Maße die Ausbuchtungen der Potentialflächen durch eine besser leitende Schicht verwischt werden, und es ist festzustellen, daß dieser Effekt recht erheblich ist. Ist die Leitfähigkeit des ungestörten Mediums 4 z. B. 100 mal so groß wie diejenige des Mediums 1, so verringern sich die Ausbuchtungen der Potentiallinien im Medium 4 etwa auf den 50. Teil. Die Linien gleichen Potentials in Fig. 2, die mit Hilfe der obigen Gleichungen berechnet sind, zeigen das Verschwinden der Indikationen recht sinnfällig. Dabei ist dieser Zeichnung nur eine etwa 10 mal so große Leitfähigkeit des Mediums 4 wie die des Mediums 1 zugrunde gelegt. Diese Beispiele lassen erkennen, wie gering die Aussicht ist, Störungskörper, die sich unter einer besser leitenden Schicht befinden, mittels Potentiallinienmethoden aufzufinden.

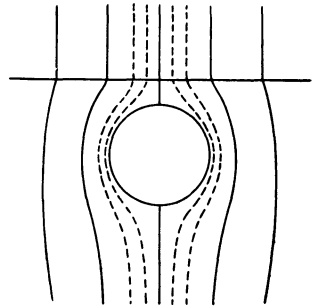


Fig. 2.

*) J. N. Hummel: a. a. O.

**) Jahrg. 4, Heft 2, S. 70 dieser Zeitschrift.

Die letzte Gleichung zeitigt noch ein anderes für die Praxis wichtiges Ergebnis. Aus ihr geht hervor, daß die Abnahme der Indikationen in dem besser leitenden Medium ungefähr proportional der Zunahme seiner Leitfähigkeit ist. Steigt die Leitfähigkeit des ungestörten, schon besser leitenden Mediums noch einmal auf z. B. das 10 fache ihres vorherigen Wertes, so sinkt in ihm die Größe der Indikationen noch einmal auf den 10. Teil. Diese Wirkung des besser leitenden Mediums ist in Richtung steigender Leitfähigkeit in keiner Weise begrenzt.

Es ist weiterhin bemerkenswert, daß in dem Ausdruck für das Potential φ_4 die Größe h nicht enthalten ist. Die Potentialverteilung im ungestörten Medium 4 ist also vollständig unabhängig von der Lage der Trennungsebene. Es dürfte demnach, auch unter Berücksichtigung einer oberen Begrenzung durch die Erdoberfläche, keinen wesentlichen Unterschied ausmachen, ob die Mächtigkeit einer besser leitenden Schicht an der Oberfläche groß ist oder nur wenige Meter beträgt. Ihre Eigenschaft, Verzerrungen eines Potentiallinienbildes, die ihren Herd im darunter befindlichen schlechter leitenden Untergrund haben, auszugleichen, ist in erster Linie durch das Verhältnis der Leitfähigkeiten und nur in geringem Maße durch ihre Mächtigkeit bestimmt, ein Resultat, das in der Praxis ebenfalls berücksichtigt werden muß.

Der Geltungsbereich aller dieser Konsequenzen erweitert sich beträchtlich, wenn man die gesamte durchfeuchtete Deckschicht selbst nicht mehr als homogen betrachtet, sondern ihre geologische Struktur berücksichtigt*). Auch diese Schicht setzt sich ihrerseits, worauf wir eingangs schon hingewiesen haben, meist aus mehreren Schichten zusammen, die das Wasser in sehr verschiedenem Maße aufnehmen und verschieden große elektrische Leitfähigkeiten besitzen. Ausgesprochene Grundwasserträger können mit undurchlässigen wassertragenden Sohlen, die vorzugsweise von Tonen, Lehmerden, Mergel, Letten usw. gebildet werden, wechseln. Salzwasserhaltige Zonen werden in manchen Gebieten von süßwasserhaltigen abgelöst. Selbst wenn der Störungskörper innerhalb der durchfeuchteten Deckschicht liegt, erweist sich ein derartiger, ihn überdeckender Schichtwechsel mit seinen Leitfähigkeitsunterschieden als wenig vorteilhaft für seine Auffindung mittels der Potentiallinienverfahren.

Wir haben bisher diejenigen Situationen in den Vordergrund gestellt, in denen das über dem Störungskörper gelagerte zweite Medium das besser leitende ist. Die obigen Gleichungen geben natürlich auch über die umgekehrten Verhältnisse Aufschluß. Die Indikationen sind im schlechter leitenden ungestörten Medium größer, als sie an der gleichen Stelle im völlig homogenen Medium sein würden, und steigen im Grenzfall eines nicht leitenden Mediums in diesem auf den doppelten Betrag. Die Potentialverteilung in diesem Falle interessiert deshalb, weil man es in der Natur immer mit einem durch die Erdoberfläche begrenzten leitenden Halbraum zu tun hat. Betrachtet man die Erde im großen

*) Vgl. hierüber E. Prinz: Handbuch der Hydrologie. 2. Aufl. Berlin 1923.

ganzen als homogen, so findet das dann vorliegende Problem, das wir früher bereits in Angriff genommen *) und das uns auch weiterhin beschäftigt hatte**), durch die in dieser Arbeit abgeleiteten Gleichungen seine Lösung. Fig. 3 bezieht sich auf einen solchen Fall, wo eine zylinderförmige Einlagerung abweichender Leitfähigkeit im Untergrund eingebettet ist, $\sigma_4 = 0$, $k = -1$ und $k'' = +1$ sind.

Günstiger als bei den Potentiallinienverfahren gestaltet sich die Tiefenwirkung bei den Rahmenmethoden, bei denen das magnetische Wechselfeld an der Erdoberfläche vermessen wird. Dieses Feld läßt sich am besten aus der Stromdichte im Untergrund herleiten, die sich ihrerseits aus dem Potential und der Leitfähigkeit ergibt. Sind mehrere Schichten vorhanden, so ist die Stromdichte in jeder einzelnen im großen ganzen der spezifischen Leitfähigkeit proportional. Ihr Wert ist unter Zugrundelegung der eingangs mitgeteilten Daten für den spezifischen Widerstand in der durchfeuchteten Oberschicht 70 bis $3 \cdot 10^7$ mal so groß wie im nur berg-

feuchten Untergrund. Der Unterschied kann also recht erheblich sein und ist um so bemerkenswerter, wenn man hiermit die meist geringfügige Steigerung der Stromdichte in einer gut leitenden Einlagerung vergleicht. Die Stromdichte in den Störungskörpern wird auch unter den in dieser Arbeit gemachten Voraussetzungen nur in verschwindendem Maße von den Beträgen abweichen, die wir früher für den Fall des allseits

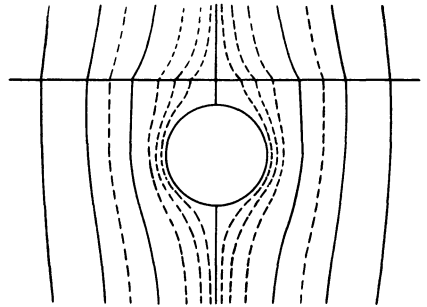


Fig. 3.

unbegrenzten homogenen Muttergesteins abgeleitet haben***). Demnach würde sie für eine unendlich gut leitende Kugel z. B. nur das 3 fache der des Muttergesteins betragen. Berücksichtigt man weiter, daß die tieferliegenden, durch den Störungskörper gehenden Stromfäden wegen ihrer größeren Entfernung von der Oberfläche an dieser weniger zur Geltung kommen, als die höher gelegenen, so erhellt, daß eine gut leitende Deckschicht bei den Rahmenmethoden die Indikationen, die einen Störungskörper verraten, ebenfalls stark verwischen muß. In die Berechnung dieser nivellierenden Wirkung geht bei den Rahmenmethoden die Mächtigkeit der gut leitenden Schicht in weit stärkerem Maße ein als bei den Potentiallinienmethoden.

Wir gehen jetzt zum elliptischen Zylinder über und bedienen uns hierbei der Ausführungen, die wir in einer früheren Arbeit gemacht haben †). Wie dort müssen vorerst die Gleichungen für den kreisförmigen Hohlzylinder auf-

*) Jahrg. 4, Heft 1, S. 22 dieser Zeitschrift.

**) Jahrg. 4, Heft 2, S. 67 dieser Zeitschrift.

***) Jahrg. 4, Heft 2, S. 73 f. dieser Zeitschrift.

†) Ebenda.

gestellt werden. Befindet sich dieser im allseits unbegrenzten homogenen Medium, so erhielten wir für das Potential außerhalb des Zylinders den Ausdruck

$$\varphi_1 = A_1 \left(1 + \frac{a^2 k - b^2 k'}{a^2 - b^2 k k'} \cdot \frac{a^2}{r_1^2} \right) x,$$

wobei $\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3 + \sigma_2} = k'$ gesetzt war, und der Index 3 sich auf die innere Kreisfläche mit dem Radius b bzw. auf den Zylinderkern bezog. Man erhält dasselbe Potential, wenn man sich in jedem Kreismittelpunkt einen Dipol mit dem Moment $M = \frac{a^2 k - b^2 k'}{a^2 - b^2 k k'} \cdot a^2 \cdot A_1$ denkt. Für $\sigma_3 = 0$, also $k' = -1$, wird

$M = \frac{a^2 k + b^2}{a^2 + b^2 k} \cdot a^2 \cdot A_1$ oder $M = m \cdot a^2 \cdot A_1$, wenn zur Abkürzung $\frac{a^2 k + b^2}{a^2 + b^2 k} = m$ gesetzt wird. Diese Vorstellung führt bei zwei Halbebenen verschiedener Leitfähigkeit für das Potential im Außenraum zu den beiden Gleichungen

$$\varphi'_1 = A'_1 x + A'_1 m \frac{a^2}{r_1^2} x + A'_1 m \frac{a^2}{r_2^2} k' x, \quad \varphi'_4 = A'_1 x + A'_1 m \frac{a^2}{r_1^2} x + A'_1 m \frac{a^2}{r_1^2} k' x$$

oder

$$\varphi'_1 = A'_1 x \left[1 + m \cdot a^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{k'}{r_2^2} \right) \right], \quad \varphi'_4 = A'_1 x \left[1 + m \frac{a^2}{r_1^2} (1 + k') \right].$$

Die Gleichung für die Trennungslinie ist $y = h$. Nach Einführung Gaußscher Koordinaten nehmen diese Gleichungen in der z -Ebene das Aussehen an

$$\varphi'_1 = A'_1 \Re \left[z + m \cdot a^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{k'}{z - 2hi} \right) \right], \quad \varphi'_4 = A'_1 \Re \left[z + m \frac{a^2}{z} (1 + k') \right],$$

$J[z] = h$, wobei \Re und J bzw. den reellen und imaginären Teil bedeuten. Die Bilder, die man mittels dieser Gleichungen erhält, lassen sich wieder aus der z -Ebene mittels der Transformation $w = z + \frac{b^2}{z}$ in die w -Ebene übertragen.

Hierbei wird allerdings auch die Gerade, die in der z -Ebene die beiden Medien voneinander trennt, in der w -Ebene gekrümmt. Sie erhält dort, wo sie dem Störungskörper am nächsten kommt, eine Einbiegung, die um so ausgeprägter ist, je geringer ihr Abstand von demselben ist. Die Gleichungen in der w -Ebene lauten

$$\varphi'_1 = A'_1 \Re \left[w + 2 \left(\frac{m a^2 - b^2}{w + \sqrt{w^2 - 4b^2}} + \frac{m a^2 k'}{w - 2hi + \sqrt{w^2 - 4b^2}} \right) \right],$$

$$\varphi'_4 = A'_1 \Re \left[w + 2(1 + k') \frac{m a^2 - b^2}{w + \sqrt{w^2 - 4b^2}} \right], \quad J \left[\frac{1}{2} (w + \sqrt{w^2 - 4b^2}) \right] = ih.$$

Das Brechungsgesetz an der Trennungslinie bleibt nach der Transformation ebenso wie die Laplacesche Gleichung erfüllt, wofür der Beweis wiederholt geführt ist*.)

*) Z. B. von J. Haubner: Über die stationäre Strömung der Elektrizität in flächenförmigen Leitern. Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien 85, II. Abt., 79 (1882).

Fig. 4 ist mittels der Transformation gewonnen und zeigt die Potentialverteilung um eine in der Stromrichtung, unweit der Trennungsfläche liegende, unendlich gut leitende Platte.

Fließt der Strom im ungestörten Felde in Richtung der imaginären Achse, setzt man $\sigma_3 = \infty$, und ist die Gleichung der Trennungslinie jetzt

$\Re \left[\frac{1}{2} (w + \sqrt{w^2 - 4b^2}) \right] = h$, so erhält man für das Potential im gestörten Felde

$$\varphi_1'' = A_1'' J \left[w + 2 \left(\frac{m' a^2 - b^2}{w + \sqrt{w^2 - 4b^2}} + \frac{m' a^2 k''}{w - 2h + \sqrt{w^2 - 4b^2}} \right) \right],$$

$$\varphi_4'' = A_1'' J \left[w + 2(1 + k'') \frac{m' a^2 - b^2}{w + \sqrt{w^2 - 4b^2}} \right],$$

wobei $\frac{a^2 k - b^2}{a^2 - b^2 k} = m'$ gesetzt ist. Der Fall beliebiger Neigung der Ellipsenachsen gegen die Stromrichtung wird wieder durch Kombination beider Bilder erhalten. Es ist

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_1'' \quad \text{und} \quad \varphi_4 = \varphi_4' + \varphi_4'',$$

wobei die Neigung der Stromrichtung gegen die u -Achse durch $\text{tg } \alpha = \frac{A''}{A'}$ gegeben ist. Fig. 5 zeigt eine um 45° gegen die Stromrichtung geneigte unendlich

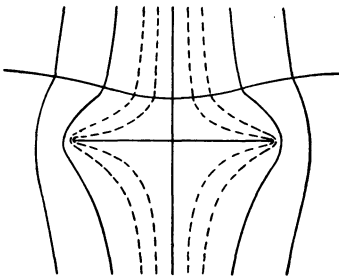


Fig. 4.

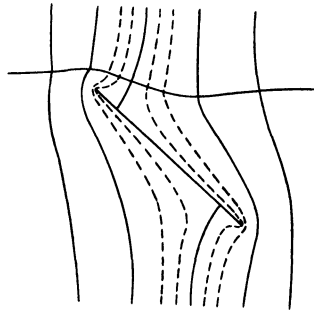


Fig. 5.

lich gut leitende Platte. Auch sie läßt erkennen, daß die vom Störungskörper stammenden Verzerrungen der Potentiallinien kaum noch in die 10 mal besser leitende Schicht eindringen. Die hier noch vorhandenen Krümmungen sind fast ausschließlich auf die Verbiegung der Trennungslinie zurückzuführen.

Durch die Lösung der gestellten Aufgabe ist zugleich die eines anderen Problems gegeben. Unter sinngemäßer Änderung der Bedingungen lassen sich die Potentiallinien bekanntlich als Stromlinien auffassen. Liegt also die Trennungsfläche zweier Medien senkrecht zur Stromrichtung, so kann die Potentialverteilung in ähnlicher Weise ermittelt werden. Indessen dürfte dieser Fall für die Praxis von geringerer Bedeutung sein.

Berlin, den 23. März 1928.

II.

Der Einfluß

von Geländeunebenheiten auf die Potentialverteilung im Untergrund.

Es wird gezeigt, wie sich der Einfluß von Geländeunebenheiten auf die Potentialverteilung im homogenen isotropen Untergrund streng berechnen läßt, falls ein an und für sich homogener stationärer Strom durch den Boden fließt. Einige Beispiele sind durchgerechnet.

Treten an der Erdoberfläche über einem Untergrund, der, von eventuell vorhandenen Einlagerungen anderer Leitfähigkeit abgesehen, homogen und isotrop ist, im Potentiallinienbild eines künstlichen Stromfeldes Abweichungen vom normalen regelmäßigen Verlauf der Linien auf, so sind sie entweder auf vorhandene Störungskörper oder aber auf Unebenheiten des Geländes zurückzuführen. Um sichere Rückschlüsse aus den gemessenen Verzerrungen ziehen zu können, ist es notwendig, vorerst über die Wirkungen jeder einzelnen dieser beiden Störungsursachen Klarheit zu gewinnen. Diejenigen Veränderungen des Potentialflächenbildes eines an und für sich homogenen stationären Stromfeldes, die auf Störungskörper verschiedener Gestalt und Leitfähigkeit zurückzuführen sind, haben wir in früheren Arbeiten, deren Kenntnis im folgenden vorausgesetzt wird, behandelt*), den Einfluß von Geländeunebenheiten auf der anderen Seite hat W. Heine in einer beachtenswerten Arbeit untersucht**). Während Heine aber nur zu qualitativen Ergebnissen gelangt, stellen wir uns hier die Aufgabe, zu zeigen, wie die Potentialverteilung um einige in der Natur häufig anzutreffende Geländeformen quantitativ zu berechnen ist, wobei wir uns die Ergebnisse unserer früheren Arbeiten zunutze machen wollen. Die Kenntnis der Potentialfunktion in ihrer Abhängigkeit von der Quellenanordnung und der Oberflächenbeschaffenheit besitzt unmittelbare Bedeutung für die Potentiallinienverfahren, sie ist darüber hinaus auch die Grundlage für die Anwendung sämtlicher geoelektrischer Methoden.

So schwierig wie es im allgemeinen ist, für einen irgendwie begrenzten Leiter die zugehörige Potentialverteilung zu finden, so einfach ist das umgekehrte Verfahren, zu einer vorgegebenen möglichen Potentialverteilung in einem Leiter passende Begrenzungsformen zu finden. Bedenkt man, daß sämtliche Potentialflächen auf der Begrenzungsfläche senkrecht stehen müssen, während die Stromlinien sie nirgends schneiden können, so wird das folgende Verfahren nahegelegt: Hat man für einen homogenen oder inhomogenen leiten-

*) J. N. Hummel: Über die Tiefenwirkung bei geoelektrischen Potentiallinienverfahren. Zeitschr. f. Geophys. 4, 22—27 (1928). — Derselbe: Untersuchung der Potentialverteilung für einen speziellen Fall im Hinblick auf geophysikalische Potentiallinienverfahren. Ebenda, S. 67—76. — Siehe auch den ersten Teil dieser Arbeit.

***) W. Heine: Beispiele für die Auswertung der räumlichen Verbiegung der Potentialflächen zur Feststellung von Einlagerungen. Metall u. Erz 24, 407—412 (1927). — Vgl. auch W. Heine: Elektrische Bodenforschung, Berlin 1928, S. 105 ff.

den Körper und für eine bestimmte Quellenanordnung die Potentialverteilung irgendwie berechnet, so legt man durch diesen Körper eine Schnittfläche derart, daß an keiner Stelle Stromlinien hindurchtreten. Man schneidet mit anderen Worten aus dem Leiter eine Stromröhre heraus, deren Querschnitt sich zum Teil auch bis ins Unendliche erstrecken kann. Die Potentialverteilung ändert sich dann nicht, wenn der eine Teil des so geteilten Leiters, also entweder das Innere oder das Äußere der Stromröhre, fortgenommen wird. Die Schnittfläche, die hierdurch zur Begrenzungsfläche geworden ist, kann als Erdoberfläche aufgefaßt werden, womit die Aufgabe gelöst ist. Bedingungen sind lediglich, daß erstens die Begrenzungsfläche, um als Darstellung der Erdoberfläche gelten zu können, im großen ganzen die Gestalt einer Ebene besitzt, während der übrigbleibende Leiterteil den unendlichen Halbraum erfüllt, und daß zweitens dieser uns interessierende Leiterteil keine Inhomogenitäten mehr enthält, da wir homogenen Untergrund vorausgesetzt hatten. Beide Forderungen lassen sich leicht erfüllen, wenn man von den in unseren früheren Arbeiten errechneten Potentialflächenbildern ausgeht.

Es sei zunächst die Potentialverteilung um eine Mulde mit senkrechter Symmetrieachse untersucht, wobei wir voraussetzen wollen, daß wir es ohne Vorhandensein der Mulde mit einem homogenen stationären, der ebenen Erdoberfläche gleichgerichteten Stromfeld zu tun hätten. Zur Berechnung der Potentialfunktion gehen wir von dem Falle aus, in dem eine nicht leitende Kugel im allseits unbegrenzten homogenen isotropen Medium eingebettet ist, das von dem Strome durchflossen wird. Legt man eine Schnittebene in der Stromrichtung durch dieses Medium, so verläuft in großer Entfernung von der Kugel ein Teil der Stromlinien in dieser Ebene. Nähert man sich aber der Kugel, so treten diese Stromfäden aus der Ebene heraus, um dort, wo die Schnittebene der Kugel am nächsten kommt, den größten Abstand von ihr zu erreichen. Sämtliche Stromfäden, die sich in dieser Weise einer in der Stromrichtung liegenden Schnittebene zuordnen lassen, bilden eine Fläche, die in genügender Entfernung von der Kugel in die Ausgangsebene asymptotisch einmündet und in der Nähe der Kugel eine muldenförmige Einbuchtung besitzt. Ihre Gleichung ist

$$y - y_0 = \frac{a^3}{r^3} y \equiv \frac{a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} y,$$

wenn die x - und z -Achse parallel der Schnittebene liegen, die y -Achse senkrecht auf ihr steht, und der Mittelpunkt des Koordinatensystems mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt*). Sie läßt erkennen, daß die y -Achse Symmetrieachse der Fläche ist. Denkt man sich nun denjenigen Teil des Mediums, der die Kugel aufnimmt, fort, so hat man die Potentialverteilung für die ge-

*) Die Bedeutung der übrigen Bezeichnungen in dieser und den folgenden Gleichungen ist aus den früheren Arbeiten ersichtlich. Die Ableitung der Formeln folgt ebenfalls leicht aus den früheren Entwicklungen.

wünschte Begrenzung. Die Gleichung der Potentialfunktion in dem übrigbleibenden Teil des Mediums, der den leitenden Erdboden darstellt, ist

$$\varphi = A \cdot x + A \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{r^3} x,$$

wenn die x -Achse in der Stromrichtung liegt.

In dem Grenzfall, in welchem die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt geht, nimmt die Mulde die Gestalt einer Halbkugel an (Fig. 6), und die Ausbuchtungen der Potentialflächen erhalten ihre größten Beträge. Jetzt ist $y_0 = 0$, und die Gleichung der Begrenzungsfläche



Fig. 6.

$$y = \frac{a^3}{r^3} y \equiv \frac{a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} y.$$

Sie wird erfüllt durch $r = a$ und $y = 0$. Die Fläche setzt sich demnach aus einer Halbkugel und einer Ebene zusammen. Die Potentiallinien in dieser Ebene sind durch die Gleichung

$$x_0 - x = \frac{a^3}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} x$$

dargestellt, das entsprechende Bild ist in der Fig. 7 aufgezeichnet. Wie man sieht, können die Ausbuchtungen dieselbe Größenordnung besitzen wie die-

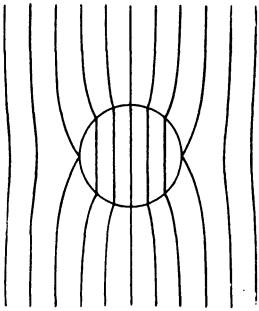


Fig. 7.

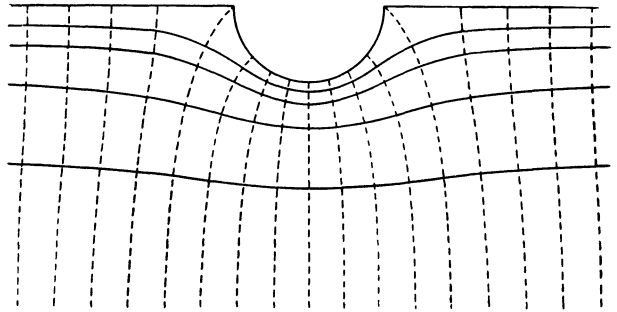


Fig. 8.

jenigen, die man über einer schlecht leitenden kugelförmigen Einlagerung in einer vollkommen ebenen Oberfläche erhält. Auch ihr Charakter ist diesen ähnlich.

Besitzt die Kugel eine gewisse Leitfähigkeit, so ist die größte Bodensenkung nicht mehr so ausgeprägt, die Verhältnisse können im übrigen aber in gleicher Weise zum Ausgangspunkt der Untersuchung gemacht werden. Steigt ihre Leitfähigkeit über die des umgebenden Mediums hinaus, so erhält man die Potentialverteilung für eine zentrische Bodenerhebung aus der Ebene, die im Extremfalle die Form einer Halbkugel besitzt.

Bildlich besser läßt sich die Potentialverteilung in der Nachbarschaft von Bodenunebenheiten darstellen, die sich senkrecht zur Stromrichtung nicht ändern.

Die Aufgabe läßt sich dann als ein zweidimensionales Problem behandeln, wobei man am besten von einer zylinderförmigen Einlagerung mit kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt ausgeht. Fig. 8, der ein kreisförmiger, nicht leitender Zylinder zugrunde gelegt ist, zeigt die Konturen von Bodenunebenheiten im Querschnitt, die in ihrer geschwungenen Form einem flachen Graben oder einer flachen Bodensenke ähnlich sind. Verlauf und Dichte der Potentiallinien sind durch die gestrichelten Linien wiedergegeben. Geht man von einem elliptischen Zylinder aus, so läßt sich die Potentialverteilung um markantere Formen, z. B. um einen tiefen Graben, einen steilen Bergrücken, einen Wall oder eine Dünung gewinnen. Die Anzahl der möglichen Fälle ist recht beträchtlich, da zu einem bestimmten Leitfähigkeitsverhältnis, zu einer bestimmten Ellipsengestalt und -lage jedesmal eine unendliche Mannigfaltigkeit von Be-

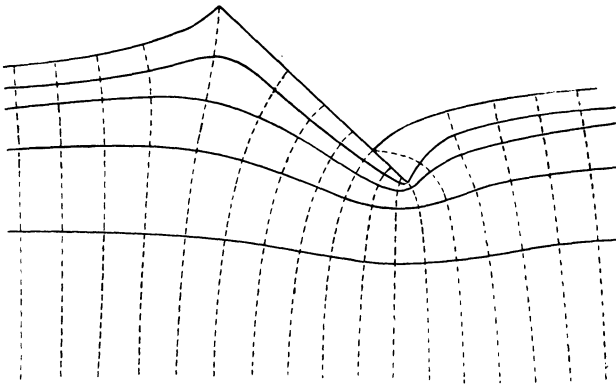


Fig. 9.

grenzungsformen gehört. Fig. 9 zeigt unsymmetrische wellenförmige Konturen, denen eine unendliche dünne, nichtleitende, um 45° geneigte Platte zugrunde gelegt ist. Sie läßt ebenfalls bemerkenswerte Störungen im Potentialflächenbilde erkennen, wobei konkave Krümmungen des Bodens zu einer Verdünnung der Potentialflächen, konvexe zu einer Verdichtung derselben führen. Die Ausführung der Rechnungen findet sich in den früheren Arbeiten.

Geht man von dem Falle aus, daß zwei Medien verschiedener Leitfähigkeit durch eine Ebene voneinander getrennt sind, von denen das eine einen kreisförmigen Zylinder aufnimmt, so eröffnen sich außer dem bisherigen Wege zwei neue Möglichkeiten, die Potentialverteilung im homogenen isotropen Halbraum, dessen an und für sich ebene Begrenzung eine Unebenheit aufweist, zu erhalten. Beide zielen darauf hin, die Trennungsfäche zur Begrenzungsfäche zu machen, und dieser mittels der Methode der konformen Abbildung die gewünschte Krümmung zu geben.

Dies läßt sich einmal dadurch erreichen, daß die Leitfähigkeit des ungestörten Mediums sehr groß im Verhältnis zu der des anderen Mediums, das den

Zylinder aufnimmt, gewählt wird. Dann müssen die Potentialflächen im ungestörten Medium auf der Trennungsebene senkrecht stehen, wohingegen die Stromlinien an ihr entlang fließen. Dies ändert sich auch nicht, wenn man mittels der Beziehung $w = z + \frac{b^2}{z}$ in der früher beschriebenen Weise transformiert, wodurch die Trennungsebene, die nunmehr auch als Begrenzungsebene betrachtet werden kann, eine Einbuchtung erhält. Je nach der Neigung der Ellipsenachsen besitzt sie die Form eines Walles, eines Grabens oder einer Dünung. Sie ist um so ausgeprägter, je näher der Störungskörper der Grenzfläche liegt.

Man kann auch so verfahren, daß man dem Kreise in der z -Ebene die Leitfähigkeit 0 oder ∞ verleiht und in der x - bzw. y -Richtung transformiert. In diesen beiden Fällen verschwindet die Wirkung des Störungskörpers auf das Potentialflächenbild vollkommen. Gibt man dann noch dem schon vorher ungestörten Medium die Leitfähigkeit 0, so gehen die Stromlinien wieder der Trennungsfläche, die jetzt Begrenzungsfläche geworden ist, entlang. Natürlich kommen diese beiden letzten Verfahren in ihren Ergebnissen auf dasselbe hinaus wie das erste. Sie sind lediglich des eigentümlichen Gedankenganges wegen bemerkenswert.

Wir sind zur Lösung unserer Aufgabe von zwei bestimmten Typen von Störungskörpern ausgegangen, weil wir gerade diese in früheren Arbeiten behandelt hatten. Es steht selbstredend nichts im Wege, auch von anders gearteten Einlagerungen im homogenen oder geschichteten Medium auszugehen. Dies sei besonders im Hinblick auf den dritten Teil dieser Arbeit betont, in dem wir die Potentialverteilung um allseits begrenzte längliche Rotationskörper untersuchen wollen. Geht man von derartigen Körperformen aus, so gelangt man zur Potentialverteilung um allseits begrenzte längliche Hügel und Mulden, verschiedenster Form und Größe.

Berlin, den 22. April 1928.

III.

Theoretische Grundlagen

für die Auffindung länglicher Rotationskörper und weiterer Einlagerungen.

Es wird die in der Hydro- und Aerodynamik entwickelte „Quellsenkmethode“ zur Ermittlung der Potentialverteilung um Störungskörper herangezogen. Auf die Bedeutung dieser Methode für die Lösung geoelektrischer Probleme überhaupt wird hingewiesen.

Voraussetzung für die Anwendung geoelektrischer Methoden ist die Kenntnis der Potentialverteilung bei vorgegebener Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund und bei vorgegebenen äußeren Spannungen. Gleichgültig, ob die äußeren Spannungen an Elektroden angelegt oder induktiv erzeugt werden. Erst wenn diese Abhängigkeit vorher genau untersucht worden ist, kann die Deutung der

Meßergebnisse, bei der umgekehrt aus der Potentialverteilung an der Oberfläche auf die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund geschlossen wird, zu richtigen Rückschlüssen führen. Die Aufstellung der Potentialfunktion unter irgendwelchen vorgeschriebenen Bedingungen ist allerdings im allgemeinen selbst für stationäre Felder mit großen Schwierigkeiten verknüpft, und nur in einzelnen Fällen gelingt es, durchsichtige und handliche mathematische Ausdrücke für sie zu gewinnen. Wir haben in früheren Arbeiten die Potentialverteilung für wenige, leicht zu berechnende Fälle untersucht, und zwar haben wir angenommen, daß Störungskörper einfacher Gestalt in einem homogenen und isotropen Muttergestein eingebettet sind, das von einem an und für sich homogenen stationären Strome durchflossen wird*). Die Störungskörper hatten hierbei die Gestalt einer Kugel oder eines unendlich langen elliptischen Hohlzylinders, der sich mit seiner Längsachse senkrecht im Stromfeld befand. Weiter haben wir den Fall behandelt, in dem die gleichen Störungskörper im homogenen isotropen Halbraum eingebettet sind, während der andere Halbraum von einem homogenen isotropen Medium anderer Leitfähigkeit erfüllt ist**). Die Trennungsebene war parallel der Stromrichtung und der Längsachse des Zylinders angenommen. Obwohl wir zu recht interessanten Ergebnissen gelangt sind, besitzen diese Untersuchungen doch noch etwas sehr Unbefriedigendes. Die Klarstellung der in diesen speziellen Fällen vorliegenden Verhältnisse erweist sich für die praktischen Bedürfnisse als durchaus ungenügend, insofern, als die meisten der in der Natur vorkommenden Lagerstätten von den bisher betrachteten erheblich abweichende Gestalt haben dürften, und als dem Stromfeld im Interesse möglichst großer Indikationen eine andere Richtung zu den Achsen des Störungskörpers gegeben wird, wie wir sie aus rechnerischen Gründen voraussetzen mußten. Bei der Kugel stört besonders, daß nur eine einzige Größe, ihr Radius, variabel ist, weshalb sie sich mit den meisten Lagerstätten auch nicht annähernd zur Deckung bringen läßt, wohingegen beim elliptischen Zylinder, der wohl in zwei zueinander senkrechten Richtungen verändert werden kann, die unendliche Ausdehnung und die Festlegung seiner Lage mit der Längsachse zur Stromrichtung eine Übereinstimmung mit den wirklich vorliegenden Verhältnissen meist ausschließen. Wir stellen uns daher in Ergänzung unserer bisherigen Arbeiten als nächstes Ziel die Aufgabe, die Potentialverteilung um einen solchen Störungskörper zu berechnen, der wie der betrachtete Zylinder hinsichtlich der Form auch zwei Freiheitsgrade besitzt, der aber allseitig begrenzt ist, und dessen größter Durchmesser in der Stromrichtung liegt.

Einfache Formen mit zwei Freiheitsgraden sind z. B. das Rotationsellipsoid, der endliche Kreiszyylinder und der quadratische Balken. Für den

*) J. N. Hummel: Über die Tiefenwirkung bei geoelektrischen Potentiallinienverfahren. Zeitschr. f. Geophys. 4, 22—27 (1928). — Derselbe: Untersuchung der Potentialverteilung für einen speziellen Fall im Hinblick auf geoelektrische Potentiallinienverfahren. Ebenda, S. 67—76.

***) Im ersten Teile dieser Arbeit.

Fall, daß derartige Körperformen sich mit ihrer Längsachse in der Stromrichtung eines homogenen stationären Feldes befinden, ist die Potentialverteilung auch bereits für beliebige Leitfähigkeiten untersucht worden. Dem in einem solchen Felde eingelagerten Rotationsellipsoid haben schon S. D. Poisson, G. Kirchhoff, F. Neumann u. a. ihre Aufmerksamkeit geschenkt*), die Potentialverteilung um den kreisförmigen Zylinder, der mit seiner Längsachse in der Stromrichtung liegt, hat G. Green berechnet**), für die Ermittlung der Potentialverteilung um einen Quader bzw. Balken unter dieser Bedingung liegen Anweisungen von C. Maxwell und von A. Ostrowsky vor***). In allen diesen Fällen versagen indessen die analytischen Verfahren. Man ist gezwungen, sich der Kugelfunktionen zu bedienen, wobei die Potentialfunktion durch unendliche Reihen dargestellt wird, deren Handhabung für numerische Rechnungen unbequem ist. Die Resultate dieser Untersuchungen, die wohl hohes mathematisches Interesse beanspruchen dürfen, eignen sich denn auch recht wenig für unsere Zwecke, zu deren Erfüllung andere Wege betreten werden müssen, die sich aus der Eigenart unserer Probleme ergeben.

Da wir es bei den in der Natur vorkommenden Lagerstätten doch niemals mit idealen Körperformen zu tun haben, bedeutet es für unsere Zwecke keine Einschränkung, wenn wir das Potential um Körper berechnen, die durch weniger einfache Ausdrücke beschrieben sind als die angeführten. Wir haben keine Veranlassung, uns auf bestimmte Körperformen festzulegen, die sich mit den natürlichen unregelmäßigen Einlagerungen doch immer nur ungefähr vergleichen lassen, suchen vielmehr für möglichst verschiedenartige Typen die Rechnungen durchführen zu können. Es kommt uns in der Hauptsache nicht so sehr auf die genaue Form des Störungskörpers an, als darauf, daß die Potentialfunktion durch einen möglichst einfachen Ausdruck dargestellt wird. Den Weg zur Behandlung des Problems nach diesen Gesichtspunkten haben uns die Hydro- und Aerodynamik gewiesen, die bei der Lösung ähnlicher Aufgaben die räumlich ausgedehnten Störungskörper durch ein System von lokalisierten Quellen und Senken ersetzt haben †). Ihren Bahnen wollen wir folgen, wobei wir den speziellen Erfordernissen der angewandten Geophysik Rechnung tragen. Und es wird sich zeigen,

*) Eine ausführliche Literaturzusammenstellung findet sich in der Dissertation von R. Griesser: Berechnung der Störungen des magnetischen Erdfeldes durch Eisenerzlager, die als abgeplattete Rotationsellipsoide aufgefaßt werden können. Freiburg i. B. 1921.

**) G. Green: Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorien der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden. Leipzig 1895, S. 106 bzw. S. 66. — Vgl. auch C. Maxwell: Treatise II, Art. 439.

***) C. Maxwell: Treatise II, Art. 310. — R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin 1924, S. 305 f.

†) W. J. M. Rankine: On Plane Water Lines in Two Dimensions. Phil. Trans. 1864, S. 369. — Derselbe: On the Mathematical Theory of Stream Lines, especially Those with Four Foci and upwards. Phil. Trans. 1871, S. 267. — G. Fuhrmann: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Diss., Göttingen 1912. — Wilhelm Müller: Strömungslehre. Berlin 1928.

daß die von diesen Wissenschaften entwickelte sogenannte „Quellsenkmethode“ auch für die geoelektrischen Verfahren von der allergrößten Bedeutung ist. Es läßt sich mit ihrer Hilfe nicht nur die Potentialverteilung um die verschiedensten Körperformen mit Leichtigkeit ermitteln, sondern es kann auch eine Reihe weiterer Probleme, die für diese Verfahren von Wichtigkeit sind, mit Erfolg gelöst werden. Der Gedankengang ist der folgende.

Befinden sich im stationären Stromfeld Quell- oder Senkpunkte, Quell- oder Senkstrecken, Doppelquellen usw. von der Gesamtergiebigkeit Null, so bilden sich unter Umständen geschlossene Potentialflächen oder geschlossene, von Stromlinien gebildete Flächen aus, die je ein Quellsystem von der Gesamtergiebigkeit Null umschließen. Werden diese Flächen als Oberflächen sehr gutleitender bzw. nicht leitender Körper aufgefaßt, so ändert sich die Potentialverteilung im Außenraume nicht. Allerdings kann man bei der Konstruktion solcher Potentiallinienbilder die Form der Körper nicht von vornherein annehmen, diese sind vielmehr durch die Wahl der Quellen bestimmt. Das Potential besitzt aber jetzt ein verhältnismäßig recht einfaches Aussehen.

Das Potential im stationären Felde ist das gleiche wie das beim entsprechenden Problem im statischen Felde, weshalb wir beide zugleich behandeln wollen. Die Übereinstimmung beruht darauf, daß im stationären Felde die Stromlinien mit den elektrischen Kraftlinien zusammenfallen. Der statischen

Ladung e entspricht hierbei im stationären Felde die Quellenergiebigkeit $\frac{J}{4\pi}$,

wo J der gesamte Stromfluß einer Quelle ist. Den Faktor $A = -\frac{i}{\sigma}$ im stationären Felde haben wir im statischen Felde als negative Feldstärke aufzufassen, und der Leitfähigkeit σ im stationären Felde endlich ist im statischen die Bedeutung einer Dielektrizitätskonstante beizulegen.

Das Zusatzpotential zu dem ursprünglichen Potential, das man ohne Vorhandensein der Ladungen erhalten würde, setzt sich nach dem Hereinbringen von punktförmigen Ladungen und Dipolen additiv aus den Potentialen von einzelnen Ladungen und Dipolen zusammen, die ihrerseits die einfachen Formen

$\pm \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e}{r}$ und $\pm \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e \cdot l}{r^2} \cos \alpha$ besitzen, wobei r der Abstand eines Aufpunktes P

von der Ladung, und α der Winkel zwischen der Achse l eines Dipols und der Richtung von r ist. Es ist demnach leicht ersichtlich, warum die Quellsenkmethode, die uns gelegentlich schon einmal gute Dienste geleistet hat*), gerade für die Behandlung der geoelektrischen Probleme geeignet sein wird. Denn nicht nur, daß für geophysikalische Zwecke die genaue Form des Störungskörpers, die man sich auf diese Weise hier nicht mehr aussuchen kann, völlig belanglos ist, besitzt auch die Potentialverteilung in seinem Innern, die sich auf diesem Wege nicht gewinnen läßt, kein Interesse. Die durchschnittliche Strom-

*) Im ersten Teile dieser Arbeit.

dichte im Innern des Störungskörpers, die für die Rahmenmethoden von Bedeutung ist, kann aus dem Potential des Außenraumes ermittelt werden. Störender ist schon die Beschränkung auf Einlagerungen mit den Leitfähigkeiten Null und Unendlich, indessen sind diese Grenzfälle die wichtigsten. Dem steht die Möglichkeit einer analytischen Behandlung des Potentials gegenüber, für das sich einfache Ausdrücke gewinnen lassen.

Bei der Bildung der Potentialfunktion mit Hilfe von positiven und negativen Ladungen bzw. Quellen sind zwei Gesichtspunkte im Auge zu behalten. In erster Linie ist darauf zu achten, daß sich aus dem Stromfeld auch geschlossene Schalen heraus schneiden lassen, was keineswegs immer der Fall zu sein braucht. Und zweitens wird man aus rechnerischen Gründen bestrebt sein, mit möglichst wenig Quellpunkten auszukommen. Was den ersten Punkt

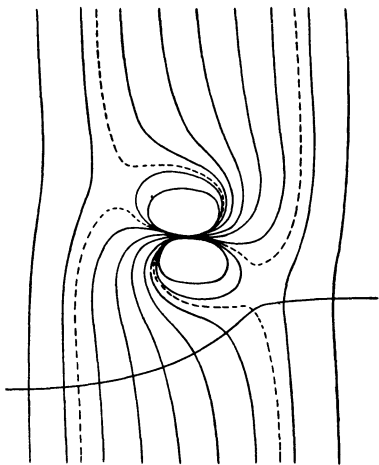


Fig. 10.

anbelangt, so ist eine bestimmte Symmetrie in der Anordnung der Quellen erforderlich. Ehe wir einige solcher Fälle behandeln, sei zunächst ein Beispiel für den allgemeinen Fall gegeben, wo man nicht zum Ziele gelangt. Fig. 10 zeigt die Potentialverteilung, um einen im homogenen Felde eingebetteten Dipol, dessen Achse senkrecht zur Feldstärke liegt. Die ausgezogenen Linien geben in diesem, wie auch in den Potentiallinienbildern 12 b und 13 b zugleich die Dichte der Potentialflächen, während die gestrichelten lediglich ihren Verlauf anzeigen. Es bildet sich keine im Endlichen geschlossene Fläche aus, die das Quellsystem umschlingt. Dennoch ist das Potentialfeld nicht ganz nutzlos für uns, da

solche Bilder zur Lösung eines anderen geoelektrischen Problems herangezogen werden können, das wir im zweiten Teile dieser Arbeit behandelt hatten. Legt man nämlich durch das Medium eine unbegrenzte Schnittfläche derart, daß keine Stromlinien hindurchtreten, und daß die eine Hälfte des Mediums keine Singularitäten enthält, so läßt sich die andere Hälfte fortnehmen, ohne daß die Potentialverteilung geändert wird. Faßt man diese Fläche mit ihren Wölbungen als Erdoberfläche auf, so besitzt man die Potentialverteilung in der Nachbarschaft von Bodenebenenheiten. In der Fig. 10 ist eine Oberflächenkontur eingezeichnet.

Bleiben wir zunächst bei dem einfachsten Falle, daß eine Quelle und eine Senke gleicher Ergiebigkeit im translatorischen Stromfelde eingelagert sind, wobei wir der Allgemeinheit halber einen endlichen Abstand zwischen ihnen annehmen wollen, so zeigt sich, daß sich nur dann geschlossene Flächen ausbilden, wenn die Verbindung zwischen den Quellen in der Stromrichtung liegt.

Die Symmetrie der Anordnung ist in diesem Falle eine vollkommene. Zur Berechnung legen wir den Mittelpunkt eines Koordinatensystems in die Mitte zwischen den Quellpunkten und die x -Achse in die Stromrichtung (Fig. 12 a). Die Potentialfunktion ist dann

$$\varphi = Ax \pm \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} \right) \equiv Ax \pm \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{e}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{e}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

wobei A die negative Feldstärke im ungestörten Felde bedeutet. Die Gleichung der Potentialflächen ist

$$x_0 - x = \pm \frac{e}{\sigma A} \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} \right) \equiv \pm \frac{e}{i_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

wobei sich der Index 0 auf das ungestörte homogene Feld bezieht. Betrachten wir zunächst den Fall, in dem das Vorzeichen positiv ist, da dieser für geoelektrische Zwecke von größerer Bedeutung ist. Ist dann $x_0 = 0$, so erhält man für die Äquipotentialfläche mit dem Potential Null die Gleichung

$$\sigma \frac{A}{e} x + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Dies ist die Gleichung sowohl für die yz -Ebene, da sie durch $x = 0$ erfüllt wird, als auch für eine geschlossene Schale, die beide Quellen umschließt. Fig. 11 zeigt eine Reihe von Körperformen, die sich auf Grund dieser Gleichung ergeben. Ihr Charakter hängt von der Feldstärke des ungestörten Feldes, dem Betrag der Punktladungen und von deren Abstand ab. Ihre kleine Achse beträgt

$$a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{e \cdot l}{i_0}\right)^2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

während sich ihre große aus der kubischen Gleichung

$$b^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 b - \frac{el}{i_0} = 0$$

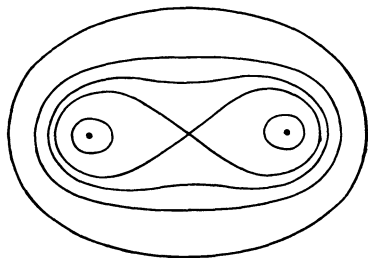


Fig. 11.

ergibt. Ist $l < 2 \sqrt{\frac{2e}{i_0}}$, so besitzt a einen reellen Wert. Man erhält eine Schale, die unseren Voraussetzungen entspricht. Faßt man sie als Begrenzung eines gut leitenden Körpers auf, so ändert sich das Potentialflächenbild des Außenraumes nicht. Wird l sehr klein, indem e zugleich einen sehr hohen Wert annimmt, so erhält man die Kugel, wovon wir im ersten Teile dieser Arbeit bereits Gebrauch gemacht haben. Wächst l gerade auf den Betrag $2 \sqrt{\frac{2e}{i_0}}$

an, so wird $a = 0$. Man erhält schon zwei Körper, die sich aber noch in einem Punkte berühren. Wird indessen $l > 2 \sqrt{\frac{2e}{i_0}}$, so zerfällt die Schale in zwei voneinander getrennte Teile, die unseren Voraussetzungen nicht mehr entsprechen, da die Gesamtergiebigkeit des von jeder Schale umschlossenen Quellsystems von Null verschieden ist. Wollen wir die Schalen trotzdem als Begrenzung leitender Körper auffassen, so kommt dem Potentialflächenbild nur dann Realität zu, wenn wir uns beide durch einen isolierten Draht miteinander verbunden und dadurch auf das gleiche Potential gebracht denken. Dieser Fall hat natürlich keine praktische Bedeutung.

Die Stromlinien stehen auf den Potentialflächen senkrecht. In einer beliebigen Schnittebene lassen sie sich als orthogonale Trajektorien der berechneten Potentiallinien am besten graphisch ermitteln.

Gilt in der Gleichung für die Potentialfunktion das negative Vorzeichen, so finden sich unter allen auftretenden Stromlinien auch solche von vollkommen geschlossener und stetiger Form, die eine geschlossene, zur x -Achse symmetrische Rotationsschale bilden, die beide Quellpunkte umschlingt. Wir können uns den von der Schale eingeschlossenen Teil des Mediums durch einen Körper mit der Leitfähigkeit Null ersetzt denken, ohne daß das Stromlinienbild im Außenraume geändert wird, da durch die Schale kein Strom hindurchtritt. Je nach dem Abstand der Quellen, der diesmal jeden beliebigen Betrag haben kann, besitzt sie die ungefähre Gestalt eines mehr oder minder schlanken Rotationsellipsoids. Dieser Fall, der für die Hydro- und Aerodynamik von großer Wichtigkeit ist und zur Entwicklung der Quellsenkmethode geführt hat, ist wiederholt ausführlich behandelt worden. Eine Abbildung der Strömung, die man auf diese Weise erhält, findet sich bei M. Lagally im Handbuch der Physik*). Für geophysikalische Zwecke ist er aber von geringerer Bedeutung, da man dem Stromfeld eine günstigere Richtung geben wird, um die größtmöglichen Indikationen zu erhalten.

Für die besprochenen Körperformen haben wir die Potentialverteilung durch besonders einfache Ausdrücke beschrieben, die es gestatten, über die für geoelektrische Untersuchungen wichtigen Verhältnisse Klarheit zu gewinnen. Insbesondere lassen sich die Potentiallinienbilder konstruieren, die man über einer derartigen Einlagerung an der ebenen Erdoberfläche unter den gemachten Voraussetzungen erhalten wird. Da in diesem Falle das Medium durch eine Ebene begrenzt ist, sind die Verzerrungen, die man im Potentiallinienbild der entsprechenden Schnittebene im allseits unbegrenzten Medium erhalten würde, nach der Thomsonschen Spiegelungsmethode noch zu verdoppeln. Fig. 12 b gibt ein Potentiallinienbild, wie man es über einen solchen, im homogenen isotropen Untergrund eingebetteten, gut leitenden Störungskörper an der Erdoberfläche erwarten kann, und zwar sind in der Potentialfunktion die Größen

*) Bd. 7, S. 40, Abb. 12.

$-\frac{e}{\sigma A} \equiv \frac{e}{i_0} = 1$, $l = 2$ und $h = 1$ gesetzt. Der Abstand der Körperbegrenzung von der Erdoberfläche, die Dicke der Deckschicht, beträgt etwa 0.23357 (Fig. 12 a).

Hat man es ganz allgemein mit zwei Medien beliebiger Leitfähigkeit zu tun, die durch eine in der Feldrichtung liegende Ebene voneinander getrennt sind, wobei das eine von ihnen die beiden Quellen aufnimmt, so läßt sich die

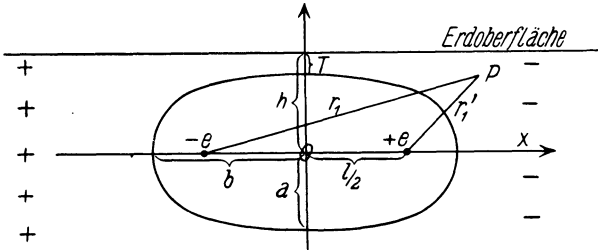


Fig. 12 a.

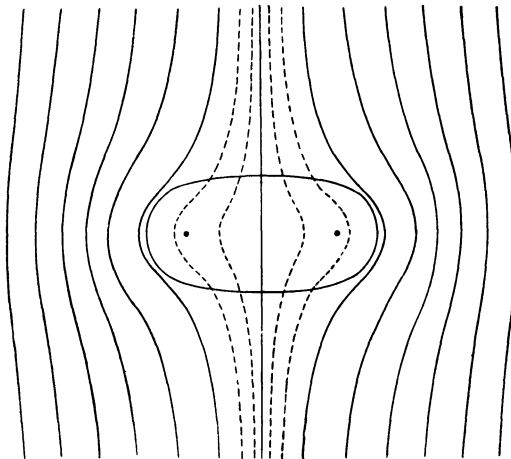


Fig. 12 b.

Potentialverteilung für den ganzen Raum in der früher mitgeteilten Weise dadurch gewinnen, daß man nicht wie oben den für das allseits unbegrenzte Medium berechneten Störungskörper selbst, sondern nur die Quellpunkte an der Trennungsebene spiegelt*). Die Potentialfunktionen in den beiden Medien sind dann für $y \leq h$:

$$\varphi_1 = Ax \pm \frac{e}{\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \left(\frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_2} \right) \right],$$

*) Siehe den ersten Teil dieser Arbeit.

und für $y \geq h$:

$$\varphi_4 = Ax \pm \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_4} \frac{e}{\sigma_1} \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} \right),$$

wobei sich in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen unserer früheren Arbeiten der Index 1 auf das Medium, das den Störungskörper aufnimmt, der Index 4 auf das völlig homogene Medium beziehen, und r_1 bzw. r_1' die Abstände von den reellen Quellpunkten, r_2 bzw. r_2' diejenigen von den virtuellen sind. Nahn

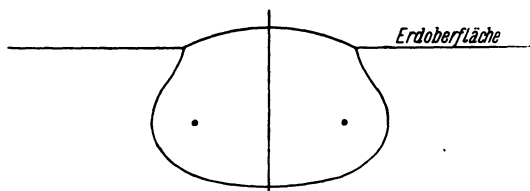


Fig. 13 a.

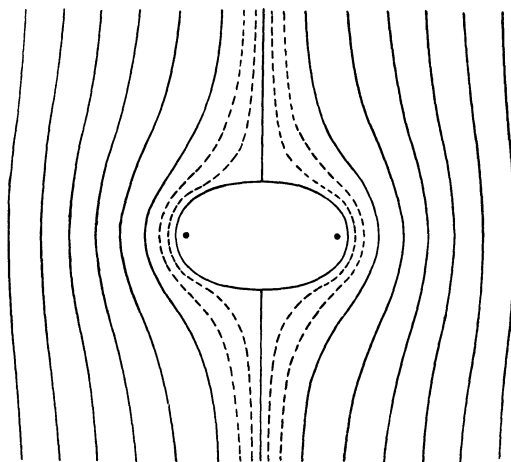


Fig. 13 b.

bei diesem Rechnungsverfahren die vorher kugelförmige Einlagerung schon eine von der idealen Kugel etwas abweichende Gestalt an, ein Umstand, den wir wegen seiner Geringfügigkeit außer acht gelassen hatten, so kann bei größerer Entfernung der Quellen voneinander diese Abweichung nicht mehr vernachlässigt werden. Sie fällt um so mehr ins Gewicht, je größer das Ver-

hältnis $\frac{\sigma_1}{\sigma_4}$ ist und je näher bei festgehaltenen e und A die Quellpunkte an die

Trennungsebene heranrücken. Auch die Symmetrie zur Verbindung der Quellpunkte geht verloren. Berechnen wir mit Hilfe dieser Gleichungen die Potentialverteilung um dieselben beiden Quellen, die wir den Fig. 12 a und b zugrunde

gelegt hatten, bei gleichem Abstand von der Trennungsebene und unter sonst gleichen Bedingungen, so erstreckt sich der Störungskörper, wie die Fig. 13 a zeigt, über die Trennungsebene hinaus in das nicht leitende Medium hinein. Das Potentiallinienbild in der Begrenzungsebene ist in der Fig. 13 b aufgezeichnet.

Die Möglichkeit, nicht nur die Anordnung der Quellen und ihre Ergiebigkeit zu variieren, sondern vor allem die Zahl der Quellen beliebig zu vermehren, verleiht der Quellsenkemethode eine große Vielseitigkeit. Der nächst einfache Fall, der mit dem behandelten in der gleichen Weise verwandt ist, wie der mit seiner Längsachse senkrecht im Stromfeld liegende, unendlich lange Kreiszyylinder mit der Kugel, ist ein Störungskörper, der entsteht, wenn durch die bisherigen beiden Quellpunkte zwei Quellstrecken senkrecht zur Stromrichtung und parallel miteinander gelegt werden. Die Aufgabe kann dann als ein ebenes Problem behandelt werden. Fällt die z -Achse in die Richtung der Quellstrecken, so lautet die Potentialfunktion in der xy -Ebene

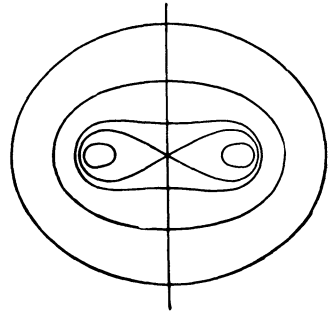


Fig. 14.

$$\varphi = Ax \pm 2 \frac{e}{\sigma} \ln \frac{r_1}{r_1'} \equiv Ax \pm \frac{e}{\sigma} \cdot \ln \frac{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Die Kurven gleichen Potentials sind durch die Gleichung

$$x_0 - x = \pm \frac{e}{i_0} \ln \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}$$

gegeben. Setzt man $x_0 = 0$, $l = 2$ und berücksichtigt das positive Vorzeichen, so erhält man eine Schar von Kurven, von denen einige in der Fig. 14 wiedergegeben sind. Sie besitzen einen ähnlichen Charakter wie diejenigen der Fig. 11.

Die kleine Achse ist jetzt $a = \sqrt{l \left(\frac{2e}{i_0} - \frac{l}{4} \right)}$, während die große sich aus der

Gleichung $b = \frac{2e}{i_0} \ln \frac{b + \frac{l}{2}}{b - \frac{l}{2}}$ ergibt. Man erhält eine einzige Kurve, die beide

Quellen umschließt, wenn $l \leq \frac{8e}{i_0}$ ist. Berücksichtigt man das negative Vorzeichen, so bildet sich ein nicht leitender Störungskörper im Stromfeld aus. Die

genaue Gestalt der Stromlinien in einem solchen Falle zeigt eine Abbildung bei Lancheater*). Hat man es wieder mit zwei durch eine Ebene getrennten Medien verschiedener Leitfähigkeit zu tun, so gelten die entsprechenden Gleichungen

$$\varphi_1 = Ax \pm \frac{2e}{\sigma_1} \left(\ln \frac{r_1}{r_1'} + \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \ln \frac{r_2}{r_2'} \right), \quad \varphi_4 = Ax \pm \frac{e}{\sigma_1} \cdot \frac{4\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_4} \ln \frac{r_1}{r_1'}$$

$$x_0 - x = \pm \frac{2e}{\sigma_1 A} \left(\ln \frac{r_1}{r_1'} + \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_1 + \sigma_4} \ln \frac{r_2}{r_2'} \right), \quad x_0 - x = \pm \frac{e}{\sigma_1 A} \cdot \frac{4\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_4} \ln \frac{r_1}{r_1'}$$

Die durchschnittliche Stromdichte im Innern des gut leitenden, zur Längsachse symmetrischen Rotationskörpers ergibt sich auf folgende Weise. Unter den Stromlinien finden sich solche, die den Störungskörper gerade noch berühren, ohne in ihn einzudringen. Alle diese Linien bilden eine Stromröhre, die in ihrem engsten Teile durch den Störungskörper abgedrosselt wird, so daß alle Stromlinien im Innern dieser Röhre durch den Störungskörper hindurch müssen. Der gesamte Strom in der Röhre ergibt sich zu $Q_{\max} \cdot i_0$, wenn Q_{\max} ihr Querschnitt im Unendlichen ist. Dieselbe Strommenge passiert auch die engste Stelle der Röhre mit dem Querschnitt Q_{\min} , und ist hier $Q_{\min} \cdot \bar{i}$, wenn \bar{i} die durchschnittliche Stromdichte in der Mitte des Störungskörpers ist. Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\bar{i} = \frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} i_0$$

Q_{\min} , das mit dem Querschnitt des Störungskörpers übereinstimmt, kann mittels der Beziehung $Q_{\min} = \pi \left[\sqrt{\left(\frac{cl}{i_0} \right)^2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]$ berechnet werden. Q_{\max} wird am besten graphisch ermittelt. Zur Berechnung der Stromdichte im Innern des Störungskörpers mag es übrigens empfehlenswert sein, das ideale Rotationsellipsoid heranzuziehen, da in dessen Innern das Potential verhältnismäßig einfach und die Stromdichte homogen ist**).

Das Anwendungsgebiet der Quellsenkmethodre reicht noch in einer anderen Richtung über den Rahmen derjenigen Probleme hinaus, die wir bisher zu lösen vermochten. War man bei den früheren Rechnungen immer gezwungen, der Berechnung der verzerrten Potentialflächenbilder ein an und für sich homogenes Stromfeld zugrunde zu legen, eine Annahme, die in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, und zwar um so weniger, je kleiner der Elektrodenabstand ist und je näher die eine Elektrode an den Störungskörper heranrückt, so ist man bei dem Ersatz der Störungskörper durch Quellpunkte an diese Idealisierung nicht mehr gebunden. Es bietet keine Schwierigkeiten, das Potentialflächenbild, das durch Punkt- oder Linienelektroden mit endlichem Abstand erzeugt wird, für einzelne Fälle wenigstens mittels einfacher Gleichungen zu berechnen***). Wir

*) Aerodynamik I, 87.

**) Vgl. die vorher zitierte Literatur hierüber.

***) Dies ist in einem Aufsatz näher ausgeführt, der in Kürze in Gerlands Beiträgen erscheinen wird.

können hierdurch den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen in einem sehr wesentlichen Punkte gerecht werden. Dies ist besonders für diejenigen geoelektrischen Verfahren von großer Wichtigkeit, bei denen von vornherein bei der Erzeugung des Stromfeldes kein Wert darauf gelegt wird, ein möglichst homogenes Feld zu erhalten. Ein ausgesprochenes Beispiel hierfür ist ein von N. Gella ausgearbeitetes Verfahren, bei dem die äußere Spannung an zwei punktförmige Elektroden angelegt wird, die einen Abstand von nur etwa 100 m voneinander besitzen*). Hierher gehören weiterhin diejenigen Verfahren, bei denen zwei kreuzweise angeordnete punktförmige Elektrodenpaare zur Anwendung gelangen. Allen diesen bislang noch recht undurchsichtigen Verfahren kann mit Hilfe der Quellsenkmethode die für die Auswertung der Meßergebnisse erforderliche rechnerische Grundlage geschaffen werden.

Endlich ist es möglich, die bedeutsame Frage zu beantworten, bei welcher Elektrodenform und -anordnung die Indikationen eines Störungskörpers am ausgeprägtesten sind, ein Punkt, über den noch weitgehende Unklarheit herrscht. Es soll auch nicht unerwähnt bleiben, daß die Quellsenkmethode für die theoretische Behandlung der gravimetrischen und magnetischen Verfahren der angewandten Geophysik in ähnlicher Weise von Bedeutung sein kann, da es sich in diesen Gebieten ebenfalls um Potentialprobleme handelt**). Auf alle diese Punkte werden wir in späteren Arbeiten noch zum Teil ausführlich zurückkommen.

Berlin, den 26. Mai 1928.

Zum Uhrvergleich auf drahtlosem Wege nach der Koinzidenzhörmethode.

Von **H. Mahnkopf.**

Gegen die von Martin in Jahrg. 4, Heft 2 dieser Zeitschrift gegebene Methode werden Bedenken vorgebracht, und es wird die Genauigkeit der Registrierung von Funkzeit-signalen mit Hilfe des Chronographen untersucht.

Unter dieser Überschrift entwickelt Herr H. Martin in dieser Zeitschrift 4, 53 neue Methoden der Uhrvergleichung mit Hilfe von funktelegraphischen Koinzidenzsignalen. Der leitende Gedanke ist, die Schwierigkeiten, die der von Bäschlin***) und Rune †) benutzten Methode anhaften, zu umgehen.

*) R. Krahnmann: Die Anwendbarkeit der geophysikalischen Lagerstättenuntersuchungsverfahren, insbesondere der elektrischen und magnetischen Methoden. Halle a. S. 1926, S. 9.

***) J. Koenigsberger: Über die Berechnung der Wirkungen von Einlagerungen auf natürliche und künstliche homogene Felder in der Erde. Gerl. Beiträge 18, 115—126 (1927).

***) Astron. Nachr. 219, 269 (1923).

†) Ebenda 227, 29 (1926).