

Werk

Jahr: 1929

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:5

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0005

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0005

LOG Id: LOG_0043

LOG Titel: Der scheinbare spezifische Widerstand bei vier planparallelen Schichten

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Der scheinbare spezifische Widerstand bei vier planparallelen Schichten.

Von J. N. Hummel. — (Mit fünf Abbildungen.)

Der scheinbare spezifische Widerstand wird für den Fall, daß der homogene Untergrund von zwei planparallelen Schichten beliebiger Leitfähigkeit und beliebiger Dicke überdeckt ist, exakt berechnet. Die gewonnenen Formeln werden für einige Sonderfälle ausgewertet und die entsprechenden Kurven aufgezeichnet. Ein graphisches Verfahren wird angegeben, das die Auffindung solcher Kurven für beliebig viele planparallele Schichten mit genügender Annäherung gestattet.

In einer früheren Arbeit *) haben wir den Begriff des scheinbaren spezifischen Widerstandes geklärt, auf seine Bedeutung für die Erforschung des Untergrundes hingewiesen und die theoretischen Grundlagen derjenigen geoelektrischen Methoden gegeben, die sich auf seine Ermittlung gründen. Wir haben zur Veranschaulichung seine Werte für einige Sonderfälle exakt berechnet, sowie die entsprechenden Kurven aufgezeichnet und diskutiert. In derselben Arbeit haben wir ferner darauf hingewiesen und die Gründe hierfür auseinander gesetzt, warum die Ermittlung des scheinbaren spezifischen Widerstandes vor allem über horizontal geschichtetem Untergrund wertvolle Aufschlüsse zu liefern vermag. Es gelang uns, die Kurven für den unter dieser Annahme tektonisch einfachsten Fall zeichnen zu können, daß der sonst homogene Untergrund von einer planparallelen Schicht abweichender Leitfähigkeit überdeckt ist. Allerdings werden in der Natur die Verhältnisse selten so einfach liegen. Es ist deshalb für die Praxis von Wert, die Rechnungen wenigstens noch für den nächst einfachen Fall durchzuführen, daß zwei solche Überdeckungsschichten vorhanden sind. Das soll die Aufgabe dieses Aufsatzes sein.

Bei einer so beschaffenen Tektonik hat man es im ganzen mit vier verschiedenen Schichten zu tun, indem der oberhalb der Erdoberfläche befindliche Luftraum auch eine Schicht mit unendlich großem Widerstand darstellt. Die beiden dann innen gelegenen Schichten besitzen eine endliche Dicke, während die äußeren je einen Halbraum erfüllen. Der Allgemeinheit halber sei zunächst angenommen, daß alle vier Schichten beliebigen Widerstand haben. Zur Unterscheidung seien die auf die verschiedenen Schichten bezüglichen Symbole mit verschiedenen Indizes versehen, und zwar der Reihe nach wie folgt **): Die äußere Schicht, die die Atmosphäre darstellt, mit dem Index 0, die anschließende begrenzte Schicht, die die oberste Bedeckung repräsentiert, bleibe ohne Index, während die nächste begrenzte Schicht den Index 1 und die unterste unbegrenzte Schicht den Index 2 erhalten soll (Fig. 1). Der wirkliche spezifische Widerstand sei durchweg mit ρ , die Schichtdicke mit h und das Potential mit φ bezeichnet.

*) J. N. Hummel: Der scheinbare spezifische Widerstand. Zeitschr. f. Geophys. 5, 89, Nr. 3/4.

**) Die gewählte Symbolik stimmt nicht mit der des früheren Aufsatzes überein.

Um den scheinbaren spezifischen Widerstand angeben zu können, ist zunächst wieder die Aufstellung der Potentialfunktion erforderlich. Hierzu kann man wie in dem früher behandelten Falle so vorgehen, daß man durch sinn-gemäße Spiegelung der Quellpunkte die drei Trennungsebenen zu Spiegel-ebenen macht. Man erhält dann eine vielfache Unendlichkeit von fiktiven Quellpunkten. Die Rechnungen werden erheblich umfangreicher als bei drei Schichten, bleiben aber doch elementar. Zudem liegen ihnen die gleichen anschaulichen Vorstellungen wie dort zugrunde. Zur Abkürzung seien in ihnen die immer wiederkehrenden Quotienten

$$\frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0 + \varrho} = k_0, \quad \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1 + \varrho} = k_1, \quad \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 + \varrho_1} = k_2 \text{ gesetzt.}$$

Wir gehen von einem einzigen Quellpunkt aus, der in einer der beiden innen gelegenen Schichten befindlich ist, beispielsweise, um die Ideen zu fixieren, in der oberen, also in derjenigen, die von der allerobersten Erdbedeckung gebildet wird und ohne Index bleiben soll. Sein Abstand von der Erdoberfläche sei d . Er falle mit dem Mittelpunkt eines Koordinatensystems zusammen, dessen x -Achse die Richtung der Trennungsebenen besitzt und dessen y -Achse senkrecht auf diesen steht. Man erhält dann auf dem gleichem Wege, wie früher, für die Potentiale Summen, deren Glieder sich in folgender Weise gruppieren lassen:

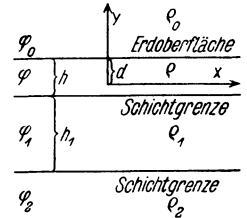


Fig. 1. Schema der angenommenen Tektonek: Zwei Bedeckungsschichten beliebiger Leitfähigkeit und Dicke über homogenen Untergrund.

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y+2nh)^2 + z^2}} + \frac{k^{n+1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right\} \\ & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k_0)(1-k^2) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+2h_1-2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+2h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\ & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k_0)(1-k^2) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} (1-k^2) - (n+1) k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+4h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left[\frac{(n+1)n}{2} (1-k^2) - (n+1) k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+4h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\ & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k_0)(1-k^2) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1-k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+6h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1-k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+6h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \frac{J}{4\pi} \varrho \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^{n+1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y + 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} + \frac{k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y + 2nh)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^{n+1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y - 2(n+1)h]^2 + z^2}} + \frac{k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y - 2nh - 2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y + 2h_1 + 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y + 2h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y - 2h_1 - 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(n+1) k^n \cdot k_0^{n+2}}{\sqrt{x^2 + [y - 2h_1 - 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1 - k^2) \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y + 4h_1 + 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1 - k^2) \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y + 4h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1 - k^2) \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y - 4h_1 - 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1 - k^2) \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)k^2 \right] k^{n-1} \cdot k_0^{n+2}}{\sqrt{x^2 + [y - 4h_1 - 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1 - k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1 - k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y + 6h_1 + 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1 - k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1 - k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y + 6h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1 - k^2) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1 - k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1 - k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y - 6h_1 - 2(n+1)h]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1 - k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1 - k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+2}}{\sqrt{x^2 + [y - 6h_1 - 2(n+1)h - 2d]^2 + z^2}} \right\} \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = & \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-2nh)^2 + z^2}} + \frac{k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+2h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+2h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{[(1-k^2)n-k^2]k^{n-1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y-2h_1-2nh]^2 + z^2}} + \frac{[(1-k^2)n-k^2]k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y-2h_1-2nh-2d]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{[(1-k^2)n-k^2]k^{n-1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+4h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{[(1-k^2)n-k^2]k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+4h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2)2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-4h_1-2nh)^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2)2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-4h_1-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2)2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+6h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2)2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+6h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-6h_1-2nh)^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-6h_1-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho(1+k) k_1^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + [y+8h_1+2(n+1)h-2d]^2 + z^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + [y+8h_1+2(n+1)h]^2 + z^2}} \right\} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 = & \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k)(1+k_1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^n \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-2nh)^2 + z^2}} + \frac{k^n \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k)(1+k_1) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{[(1-k^2)n-k^2] k^{n-1} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-2h_1-2nh)^2 + z^2}} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{[(1-k^2)n-k^2] k^{n-1} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-2h_1-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k)(1+k_1) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2) 2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-4h_1-2nh)^2 + z^2}} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^2 \frac{(n-1)n}{2} - (1-k^2) 2nk^2 + k^4 \right] k^{n-2} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-4h_1-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & + \frac{J}{4\pi} \varrho (1+k)(1+k_1) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2) \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^n}{\sqrt{x^2 + (y-6h_1-2nh)^2 + z^2}} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\left[(1-k^2)^3 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 3(1-k^2) \frac{(n-1)n}{2} k^2 + 3n(1-k^2)k^4 + k^6 \right] k^{n-3} \cdot k_0^{n+1}}{\sqrt{x^2 + (y-6h_1-2nh-2d)^2 + z^2}} \right\} \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Diese vier Ausdrücke genügen der Laplaceschen Gleichung. Daß sie auch die Grenzbedingungen an den Trennungsebenen $\varphi_r = \varphi_s, \frac{1}{\varrho_r} \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} = \frac{1}{\varrho_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial y}$ erfüllen, läßt sich am besten rückwärts durch Differentiation erweisen.

Für die Ermittlung des scheinbaren spezifischen Widerstandes von der Erdoberfläche aus interessiert lediglich der Ausdruck von φ für $y = 0$. Dieser läßt sich noch vereinfachen, wenn man in Anlehnung an die in Wirklichkeit vorliegenden Verhältnisse $k_0 = +1$ und $d = 0$ setzt. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
 \varphi_{y=0} = & \frac{J}{\pi} \varrho \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + z^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^{n-1}}{\sqrt{x^2 + [2(n+1)h]^2 + z^2}} \right. \right. \\
 & + (1-k^2) k_1 \frac{(n+1)k^n}{\sqrt{x^2 + [2h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} + (1-k^2) k_1^2 \frac{\left[\frac{(1-k^2)^{n(n+1)}}{2} - (n+1)k^2 \right] k^{n-1}}{\sqrt{x^2 + [4h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} \\
 & \left. \left. + (1-k^2) k_1^3 \frac{\left[(1-k^2)^2 \sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} - (1-k^2)n(n+1)k^2 + (n+1)k^4 \right] k^{n-2}}{\sqrt{x^2 + [6h_1 + 2(n+1)h]^2 + z^2}} + \dots \right\} \right).
 \end{aligned}$$

Legt man der experimentellen Erzeugung und Messung des Potentialabfalls die Wengersche Elektroden- und Sondenanordnung zugrunde, bei der die beiden Meßpunkte so zwischen den beiden Elektroden auf deren Verbindungslinie angeordnet sind, daß alle vier Punkte auf einer Geraden liegen und jeder einzelne von den ihm benachbarten den gleichen Abstand a besitzt, so ergibt sich der scheinbare spezifische Widerstand, bezogen auf den wirklichen spezifischen Widerstand der obersten Erdschicht, zu

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_s}{\varrho} = & 1 + 4 \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\} \\ & + 4(1-k^2) k_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) k^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[2 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\} \\ & + 4(1-k^2) k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)}{2} (1-k^2) - (n+1) k^2 \right] k^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[4 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[4 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\} + 4(1-k^2) k_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{(m-1)m}{2} (1-k^2)^2 - n(n+1)(1-k^2) k^2 \right. \\ & \left. + (n+1) k^4 \right] k^{n-2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[6 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[6 \frac{h_1}{a} + 2(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\} + \\ & \dots \end{aligned}$$

Diese Formel bildet den Ausgangspunkt für alle spezielleren Untersuchungen. Zur zahlenmäßigen Auswertung kann man sich derselben Daten bedienen, die wir in der ersten Arbeit in einer Tabelle zusammengestellt hatten*) und die auch hier immer wiederkehren.

Wir untersuchen zunächst den Sonderfall, daß die unterste unbegrenzte Schicht verschwindend geringe Leitfähigkeit besitzt und die beiden Bedeckungsschichten die gleiche Dicke haben sollen, daß also $k_1 = +1$ und $h_1 = h$ sind. Unter diesen Voraussetzungen erhält man für den scheinbaren spezifischen Widerstand die besonders einfache Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_s}{\varrho} = & 1 + 4k \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2(2n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[2(2n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\} \\ & + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[4(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[4(n+1) \frac{h}{a} \right]^2}} \right\}, \end{aligned}$$

*) Heft 3/4 dieses Jahrganges, S. 100.

die nur noch zwei Summen enthält. Ihre Richtigkeit läßt sich an zwei Grenzfällen prüfen. Wird nämlich einmal $\varrho_1 = \varrho$, also $k = 0$, so erhält man den scheinbaren spezifischen Widerstand über einer einzigen Schichtbedeckung von der Dicke $2h$, dessen Wert uns bereits aus der ersten Arbeit bekannt ist. Und wird andererseits $\varrho_1 = \infty$, also $k = +1$, so ergibt sich der gleiche Wert, wie man ihn auch unmittelbar über einer einzigen Schichtbedeckung von der Dicke h erhalten würde.

Wird an dieser Gleichung eine kleine Umformung vorgenommen und zur Abkürzung noch $\frac{\varrho_s}{\varrho} \equiv v$, sowie $\frac{a}{h} \equiv u$ gesetzt, so läßt sie sich schreiben:

$$v = 1 + 4k \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2(2n+1)}{u} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left[\frac{2(2n+1)}{u} \right]^2}} \right\} \\ + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{4(n+1)}{u} \right]^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2(2n+1)}{u} \right]^2}} \right\} + 2u \cdot \ln 2.$$

Wird hierin u sehr groß, so konvergiert die erste Summe gegen $\frac{1}{2} u \cdot \ln 2$ und die zweite gegen $-\frac{1}{2}$. Die Gleichung geht in diesem Grenzfall über in

$$\lim_{u \rightarrow \infty} v = 1 + 4k \frac{1}{2} u \cdot \ln 2 - 1 + 2u \cdot \ln 2$$

oder in

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varrho_s = \frac{2}{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}} 2u \cdot \ln 2.$$

Man erkennt, daß die Asymptoten sämtlicher Kurven durch den Nullpunkt gehen.

In dieser letzten Grenzform enthält die Gleichung noch ein interessantes Gesetz. Bezeichnet man den scheinbaren spezifischen Widerstand über einer einzigen Schichtbedeckung, die die Dicke h und den wirklichen spezifischen Widerstand ϱ besitzt, für einen Augenblick mit ϱ'_s und den scheinbaren spezifischen Widerstand über einer ebensolchen Schichtbedeckung, die aber den wirklichen spezifischen Widerstand ϱ_1 besitzt, mit ϱ''_s , so läßt sich der obigen Gleichung für den scheinbaren spezifischen Widerstand über beide Schichtbedeckungen die Form geben

$$\frac{2}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho'_s} + \frac{1}{\varrho''_s}.$$

Es gilt also für den scheinbaren spezifischen Widerstand über zwei Schichtbedeckungen bei großer Basis der Erreger- und Meßapparatur das Kirchhoffsche Gesetz für parallel geschaltete Widerstände. Dieses Gesetz läßt sich auch noch

auf den Fall mehrerer Schichtbedeckungen mit beliebigen Dicken sinngemäß verallgemeinern. Immer kann man sich nämlich die verschiedenen Bedeckungsschichten durch eine einzige ersetzt denken, deren Widerstand sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz für parallel geschaltete Widerstände aus den Einzelwiderständen zusammensetzt. Berechnet man den scheinbaren spezifischen Widerstand unter Zugrundelegung des so ermittelten mittleren spezifischen Widerstandes einer einzigen Schichtbedeckung, so erhält man zu der wahren Kurve eine Schmiegunskurve, die bei großer Basis asymptotisch in jene einmündet. Da die wahre Kurve für den scheinbaren spezifischen Widerstand gerade in dem Teile, in dem beide nahezu gleich verlaufen, weit schwieriger zu berechnen ist als ihre Schmiegunskurve, kann man durch Zeichnung dieser die Ermittlung jener erleichtern. Darüber hinaus eröffnet sich die Möglichkeit, beim Vorhandensein einer größeren Anzahl von Schichten die dann sehr schwer zu berechnende Kurve überhaupt aus den Schmiegunskurven, durch graphische Interpolation zu gewinnen, indem man lediglich die letzteren aus den mitgeteilten Formeln berechnet. Dieses Verfahren ist auch noch angängig bei einem Untergrund, dessen Leitfähigkeit sich stetig, z. B. proportional mit der Tiefe ändert, wie in einem besonderen Aufsatz ausgeführt werden soll.

Da bei der Ermittlung der Kurvenfortsetzung mehrere Schichtbedeckungen an der Oberfläche durch eine einzige mit dem entsprechenden durchschnittlichen Widerstand ersetzt werden können, ist der Verlauf der Kurven in genügender Entfernung vom Anfangspunkt fast ganz unabhängig von der speziellen Beschaffenheit dieser oberen Schichten. Die ganze oberste Schichtenfolge geht dort nur noch mit ihren durchschnittlichen Eigenschaften ein. Diese Tatsache verleiht dem Verfahren eine durch nichts begrenzte Tiefenwirkung. Die Erscheinung der Abschirmung durch gute oder schlechte Leiter, die bei allen anderen geoelektrischen Methoden von so großer Bedeutung für deren Wirkungsradius ist, kommt bei diesem Aufschlußverfahren in Fortfall.

Die Kurven, die sich für den scheinbaren spezifischen Widerstand unter den vereinfachenden Annahmen ergeben, sind für verschiedene Widerstandsverhältnisse der beiden Bedeckungsschichten, d. h. für verschiedene Werte von k , in der Fig. 2 wiedergegeben. In das Diagramm sind zugleich die Asymptoten der Kurven eingezeichnet, und die Abstände, in denen die Basis gleich der Tiefe einer der Schichtgrenzen ist, durch Parallelen zur Ordinate markiert. Für eine Analyse der Kurven ist die Lage des Kurvenminimums im Verhältnis zu diesen Linien von Wichtigkeit. Man erkennt aus dem Diagramm, daß der tiefste Kurvenpunkt wandert, und daß zwischen beiden charakteristischen Stellen keine einfachen Beziehungen bestehen. Eine genaue Analyse der Kurven kann sich nur auf deren gesamten Verlauf gründen.

Wir kehren jetzt wieder zu dem allgemeinen Fall zurück, dessen Auswertung mit etwas mühseligere Rechnungen verbunden ist. Doch wollen wir auch hierfür einige Sonderfälle durchrechnen und durch Illustrationen veranschaulichen.

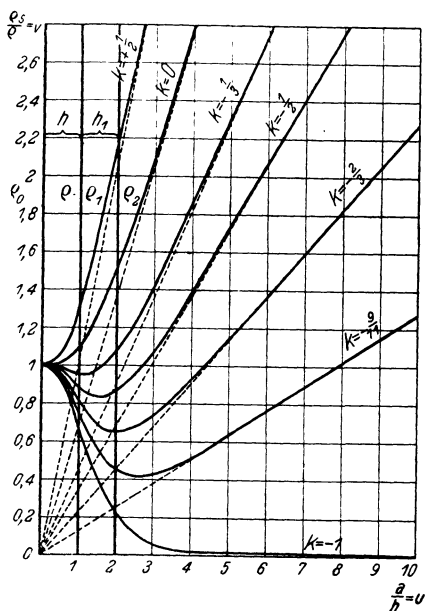


Fig. 2. Der Verlauf des scheinbaren spezifischen Widerstandes bei nicht leitendem Untergrund ($\rho_2 = \infty$) und wechselndem Widerstandsverhältnis der beiden Bedeckungsschichten.

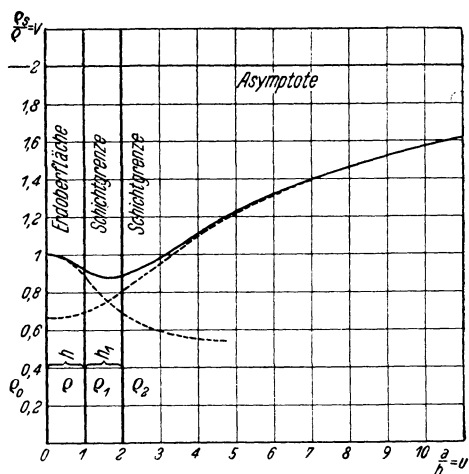


Fig. 3. Der Verlauf des scheinbaren spezifischen Widerstandes für den Fall $h_1 = h$ und $\rho_0:\rho_1:\rho_2 = \infty:1:0.5:2$.

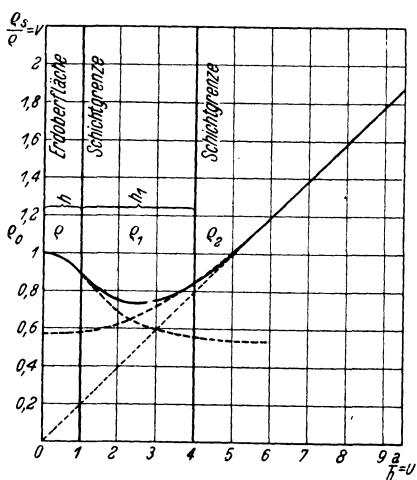


Fig. 4. Der Verlauf des scheinbaren spezifischen Widerstandes für den Fall $h_1 = 3h$ und $\rho_0:\rho_1:\rho_2 = \infty:1:0.5:\infty$.

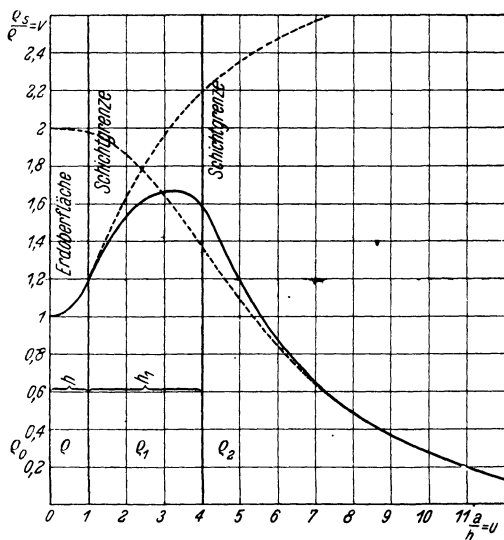


Fig. 5. Der Verlauf des scheinbaren spezifischen Widerstandes für den Fall $h_1 = 3h$ und $\rho_0:\rho_1:\rho_2 = \infty:1:3:0$.

Zunächst sei eine Kurve gegeben für den Fall, daß die beiden Bedeckungsschichten wieder die gleiche Dicke besitzen, der Widerstand der untersten Schicht aber diesmal endlich bleibt. Ist z. B. $k_1 = \frac{3}{5}$ und $k = -\frac{1}{3}$, so erhält man unter den sonst gleichen Bedingungen $k_0 = +1$, $h_1 = h$ die in der Fig. 3 wiedergegebene Kurve. Die Asymptote verläuft diesmal parallel der Abszisse. Die Schmiegunskurven sind gestrichelt eingezeichnet. Sie lassen erkennen, wie mit ihrer Hilfe die wahre Kurve näherungsweise konstruiert werden könnte. Natürlich lassen sich auch umgekehrt aus der wahren Kurve die zugehörigen Schmiegunskurven näherungsweise herleiten, deren Kenntnis die Analyse wesentlich erleichtert.

Wir zeigen jetzt noch zwei Kurven für den Fall, daß die untere der beiden Bedeckungsschichten dreimal so dick ist wie die obere, unmittelbar unter der Erdoberfläche befindliche. Es ist also diesmal $h_1 = 3h$ und k_0 natürlich wieder $+1$, während k und k_1 das eine Mal bzw. $-\frac{1}{3}$ und $+1$, das andere Mal bzw. $+\frac{1}{2}$ und -1 sein sollen. Man erhält dann die in den Fig. 4 und 5 wiedergegebenen Kurven. Die Schmiegunskurven, die ebenso wie die durch den Nullpunkt gehende Asymptote auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes ermittelt sind, sind wieder gestrichelt eingezeichnet.

Die verschiedenen Proben verraten, daß der scheinbare spezifische Widerstand ein ausgezeichnete Indikator bei der Beschreibung des horizontal geschichteten Untergrundes ist. Seine Deutung erfordert allerdings große Erfahrung und weitgehende theoretische Kenntnisse. Es ist deshalb von Wert, daß eine exakte Lösung der hierher gehörenden Probleme möglich ist. Eine Verallgemeinerung der in diesem Aufsatz vorgenommenen Rechnungen auf mehr als zwei Bedeckungsschichten bietet grundsätzlich keine Schwierigkeiten mehr, kompliziert aber die Rechnungen ganz erheblich, weshalb sich hierfür das oben angegebene graphische Näherungsverfahren empfehlen dürfte.

Das Anwendungsgebiet aller Aufschlußmethoden, die sich auf die Bestimmung des scheinbaren spezifischen Widerstandes bzw. auf die Messung des absoluten Potentialabfalls gründen, ist wie bereits früher betont, ein wesentlich anderes wie das derjenigen, die sich auf qualitative Richtungsbestimmungen des Potentials- oder Stromverlaufes stützen. Das Potentialflächenbild kann nämlich durch langgestreckte besser leitende, in der Stromrichtung liegende nadel-förmige Einlagerungen oder durch schlechter leitende, senkrecht zur Stromrichtung befindliche Scheiben ganz erheblich gestört werden, auch wenn deren Masse verschwindend gering ist, wohingegen auf dasselbe Bild bei Außerachtlassung der Flächendichte ausgedehnte horizontal liegende mächtige Schichten ganz ohne Einfluß bleiben können. Auf der anderen Seite unterliegt die Größe der Änderung des absoluten Potentialabfalls, das ist die Dichte der

Potentialflächen, gerade den umgekehrten Bedingungen. Wir können prägnant sagen: Für die Anwendung der Potentiallinien- und Rahmenmethoden ist die Form und Lagerung der Nichthomogenitäten ausschlaggebend, für die Bestimmung des scheinbaren spezifischen Widerstandes deren Masse. In beiden Fällen bestimmt bei extrem günstigen Bedingungen das Leitfähigkeitsverhältnis die Stärke der Abweichungen von den normalen Meßgrößen über homogenen Boden.

Literatur.

Die Veröffentlichungen über den Gegenstand sind bereits in dem ersten Aufsatz im Heft 3/4 dieses Jahrganges auf S. 90 zusammengefaßt. Es ist noch nachzutragen:

Burton McCollum and K. H. Logan: Practical Applications of the Earth-current Meter. Technol. Pap. Bur. of Stand. **21**, 683—727, Nr. 351 (1927).

O. H. Gish: Depths of Ground-Water and other Subsurface Features Indicated by Earth-Resistivity Surveys. Terrestr. Magn. **33**, Nr. 3, 129—148 (1928).

Berlin, den 27. Juli 1929.

Zur Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfacher Massenformen unter Verwendung von Gradient und Krümmungsgröße.

Von **Karl Jung**, Potsdam. — (Mit elf Abbildungen.)

Diese Arbeit ist eine Ergänzung der unter ähnlichem Titel im dritten Bande dieser Zeitschrift (1927) erschienenen Veröffentlichung des Verfassers. Es werden Methoden zur Bestimmung von Lage und Ausdehnung einfach geformter Einbettungen aus den mit der Eötvösschen Drehwaage gemessenen Größen, dem Gradienten und der Krümmungsgröße, abgeleitet. Vorausgesetzt wird die Kenntnis des Dichteunterschieds der Einbettung gegen ihre Umgebung. Die Methoden betreffen nur sogenannte „zweidimensionale“ Einbettungen, d. h. Einbettungen, die die Gestalt eines horizontal gelagerten, sehr langgestreckten Zylinders oder Prismas haben. Behandelt werden die Einbettung mit senkrecht gestelltem rechteckigen Querschnitt, die senkrechte Verwerfung, symmetrische Antiklinalen und Synklinalen. Näherungsformeln für kleine Böschungswinkel bei schiefen Stufen, Antiklinalen und Synklinalen bringt der letzte Abschnitt. Ein Beispiel führt aus, bis zu welchen Winkeln man den Böschungswinkel als klein annehmen kann (bei vorsichtiger Anwendung der Krümmungsgröße bis zu etwa 15°).

In einer unter ähnlichem Titel im dritten Bande (1927) dieser Zeitschrift erschienenen Veröffentlichung hat der Verfasser Methoden abgeleitet, um auf teils graphischem, teils rechnerischem Wege die Lage und Ausdehnung von Einbettungen mit bestimmter, einfacher Gestalt aus dem mit der Eötvösschen Drehwaage gemessenen Verlauf von Gradient und Krümmungsgröße zu bestimmen. Voraussetzung war die Kenntnis des Dichteunterschieds der Einbettung gegen ihre Umgebung. Die Methoden betrafen mit einer einzigen Ausnahme nur sogenannte „zweidimensionale“ Einbettungsformen, d. h. horizontal gelagerte, in einer der horizontalen Richtungen (der *Y*-Richtung) unendlich ausgedehnte Massen, deren Wirkung sich in zwei Dimensionen (der *X*- und *Z*-Dimension) beschreiben läßt. Diese Vereinfachung ist in der Praxis üblich und führt meist