Normal zu den so gewählten Profilen wären die für eine Stationsreihe ungünstigsten Linien, denn in diesen kommt die Unsicherheit der Messungen und die unkontrollierbare Abweichung der Linie von der richtigen „Isogamme“ allein und daher voll zur Geltung. Man vermeidet am besten, solche Stationsfolgen in Diskussion zu ziehen. Am zweckmäßigsten legt man zuerst die Stationsreihen weit auseinander, wie es sich ohnedem meist ganz ungezwungen ergibt, wenn man nur die einwandfreien Querprofile heraussucht. Vergleicht man dann die Änderungen der Schwerewerte und des tieferen Baues im Streichen, so findet man leicht die Zwischenstationen, die nötig sind, die Übergänge aufzuklären und den Schwereverlauf auf der ganzen Fläche zu erfassen. Legt man dagegen, wie es bisher geschah, auf gut Glück ein Quadratnetz, so kann man leicht ein paar rätselhafte Ziffern bekommen, die allen Deutungsversuchen trotzen. Eine Schwerestation aber, die man nicht geologisch deuten kann, ist wenig mehr als verschwendete Arbeit.

Die Belowsche Methode zur Bestimmung der Wirkung gegebener Massen auf Krümmungsgröße und Gradient, ihre Verallgemeinerung für beliebige Massenformen und ihre Anwendung auf „zweidimensionale“ Massenanordnungen

Von **Karl Jung**, Potsdam — (Mit 3 Abbildungen)

Auf ein von Below ausgearbeitetes, von Nikiforov an schwer zugänglicher Stelle veröffentliches Verfahren der Geländereduktion von Krümmungsgröße und Gradient für entfernte Geländeteile wird hingewiesen, und es wird gezeigt, wie man das Verfahren auf beliebige Massenformen und auf die Bestimmung der Wirkung „zweidimensionaler“ Einbettungen übertragen kann.

An etwas schwer zugänglicher Stelle[1]) hat Nikiforov auf eine von Below ausgearbeitete Methode der Geländereduktion von Krümmungsgröße und Gradient für entfernte Geländeteile (sogenannte „kartographische“ Reduktion) hingewiesen. Diese Methode, die an Stelle des Auszählens von Diagrammen die Höhenlinien so umzeichnet, daß sie ausplanimetriert werden können, kann nach geeigneter Abänderung auch auf die Bestimmung der Wirkung gegebener Massen in Stationsnähe angewandt und auf langgestreckte, horizontal gelagerte Massen mit überall gleichem Querschnitt — sogenannte „zweidimensionale“ Massenformen — übertragen werden. Die Belowsche Methode dürfte mehr Beachtung verdienen, als ihr infolge ihrer schwer zugänglichen Veröffentlichung zuteil geworden ist.

A. Die Belowsche Methode. Es sei X, Y, Z ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Z-Achse zeige nach unten, der Koordinatenanfang liege im Bezugspunkt der Drehwaage. Ist k^2 die Gravitationskonstante, σ die Dichte der Masse, deren Wirkung bestimmt werden soll, oder der Dichteunterschied einer Einbettung gegen ihre Umgebung, seien ξ, η, ζ die x-, y-, z-Koordinaten der

Massenelemente, so ist ihre Wirkung auf die mit der Drehwaage gemessenen Größen im Koordinatenanfang:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(W_{yy}-W_{xx}) &= \frac{3}{2}\,k^2 \iiint \sigma\,\frac{\eta^2-\xi^2}{r^5}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ r &= \sqrt{\varrho^2+\zeta^2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\ W_{xy} &= 3\,k^2 \iiint \sigma\,\frac{\xi\eta}{r^5}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ W_{zx} &= 3\,k^2 \iiint \sigma\,\frac{\zeta\xi}{r^5}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ W_{zy} &= 3\,k^2 \iiint \sigma\,\frac{\zeta\eta}{r^5}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Belowsche Methode ist nur für entfernte niedrige Massen gedacht. Bei diesen ist ζ klein gegen die Entfernung ϱ. Durch Integration über ζ von 0 bis ζ erhält man die Wirkung der Massen zwischen dem Bezugspunktsniveau und der Höhe ζ (unter Vernachlässigung von ζ gegen ϱ):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(W_{yy}-W_{xx}) &= \frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta\,\frac{\eta^2-\xi^2}{\varrho^5}\,d\xi\,d\eta, \\ W_{xy} &= 3\,k^2 \iint \sigma\,\zeta\,\frac{\xi\eta}{\varrho^5}\,d\xi\,d\eta, \\ W_{zx} &= \frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta^2\,\frac{\xi}{\varrho^5}\,d\xi\,d\eta, \\ W_{zy} &= \frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta^2\,\frac{\eta}{\varrho^5}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder nach Einführung des Azimuts φ, positiv von $+X$ nach $+Y$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(W_{yy}-W_{xx}) &= -\frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta\,\frac{\cos 2\varphi}{\varrho^2}\,d\varrho\,d\varphi, \\ W_{xy} &= \frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta\,\frac{\sin 2\varphi}{\varrho^2}\,d\varrho\,d\varphi, \\ W_{zx} &= \frac{2}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta^2\,\frac{\cos\varphi}{\varrho^3}\,d\varrho\,d\varphi, \\ W_{zy} &= \frac{3}{2}\,k^2 \iint \sigma\,\zeta^2\,\frac{\sin\varphi}{\varrho^3}\,d\varrho\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2\,a)$$

Ähnliche Formeln (ohne Vernachlässigung von ζ gegen ϱ) sind als Grundlage der rechnerischen Methoden der Geländereduktion von Schweydar[2]) bekannt.

Ist die Masse, deren Wirkung bestimmt werden soll, von konstanter Dichte und reicht sie vom Bezugspunktsniveau bis zur konstanten Höhe ζ, so können in (2a) σ und ζ vor das Integrationszeichen geschrieben werden, und man erhält Integrale von der Form

$$w = \frac{3}{2} k^2 \sigma \cdot f(\zeta) \cdot \iint g(\varrho) \cdot h(\varphi)\, d\varrho\, d\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wobei

w	$f(\zeta)$	$g(\varrho)$	$h(\varphi)$
$\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})$	$-\zeta$	$\frac{1}{\varrho^2}$	$\cos 2\varphi$
W_{xy}	ζ	$\frac{1}{\varrho^2}$	$\sin 2\varphi$
W_{zx}	ζ^2	$\frac{1}{\varrho^3}$	$\cos\varphi$
W_{zy}	ζ^2	$\frac{1}{\varrho^3}$	$\sin\varphi$

Durch Addition von solchen Massen mit konstantem σ und ζ kann die Wirkung jeder beliebigen Masse annäherungsweise gefunden werden. Formel (3) ist die Grundlage der Diagramme von Numerov [3]).

Die Anwendung dieser Diagramme geschieht bekanntlich so, daß man sie auf durchsichtigem Papier herstellt und in geeigneter Weise auf die Höhenschichtkarte des Geländes legt. Durch Auszählen der die Fläche zwischen benachbarten Höhenlinien ausfüllenden Diagrammfelder erhält man nach Multiplikation mit dem Zählwert des Diagrammfeldes den Betrag der Flächenintegrale in Formel (3), während das Gewicht, das jedem der Felder beizulegen ist, durch $\frac{3}{2} k^2 \sigma f(\zeta)$ gegeben ist.

Die Diagramme sind so konstruiert, daß jedes Feld denselben Zählwert hat. Größe und Gestalt der Diagrammfelder hängt von Azimut und Entfernung ab. Da die Größe der Diagrammfelder von gleichem Zählwert nicht konstant ist, kann das Auszählen nicht durch Bestimmung von Flächeninhalten erfolgen.

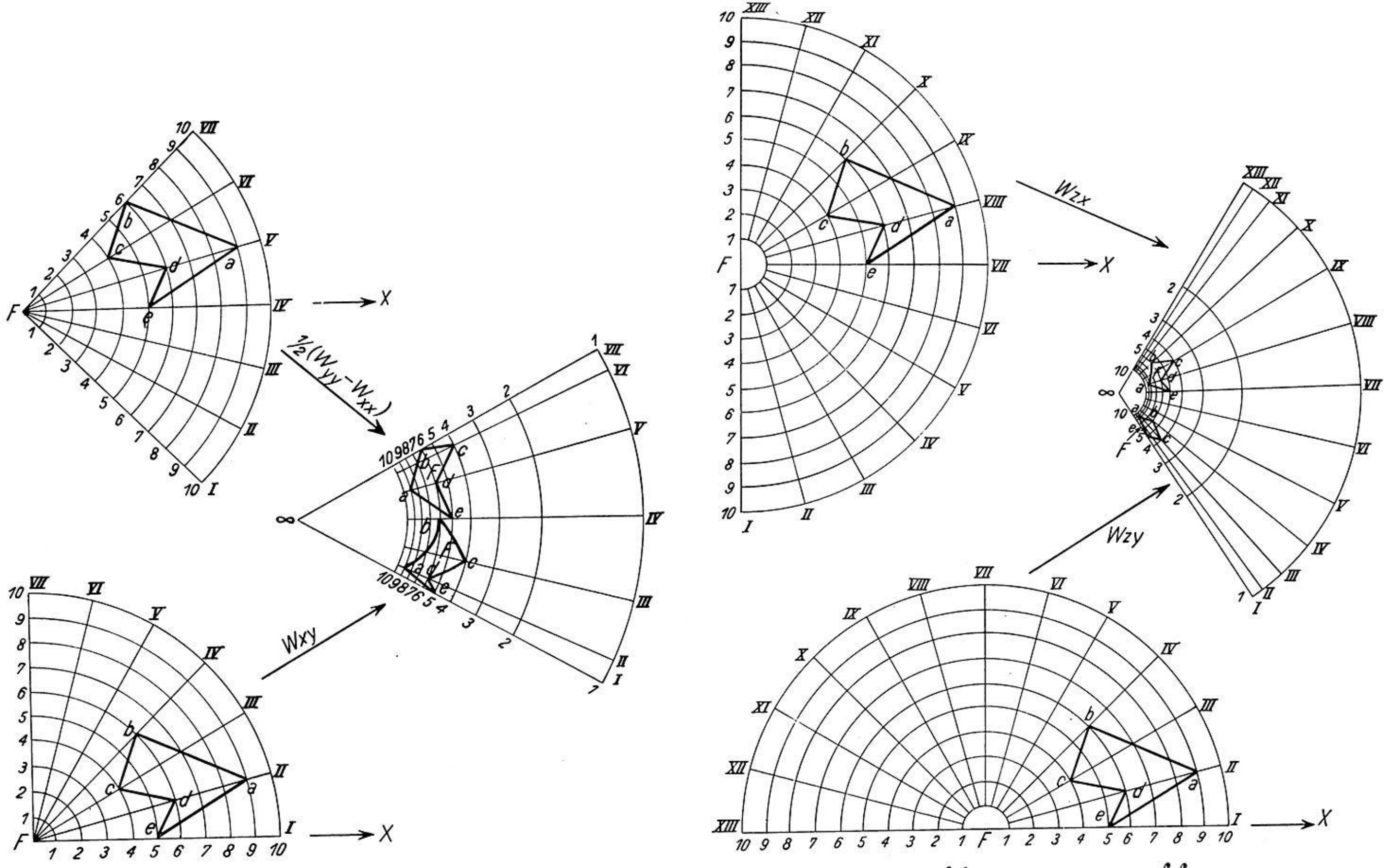
Below zeichnet nun die Höhenschichtenkarte so um, daß die Diagrammfelder, wenn man sie in gleicher Weise umgezeichnet denkt, gleiche Flächeninhalte haben. Man kann dann, statt Diagrammfelder abzuzählen, mit dem Planimeter den Flächeninhalt zwischen je zwei umgezeichneten Höhenlinien bestimmen, um den Betrag der Doppelintegrale in Formel (3) zu erhalten.

Es ist also die Formel (3) durch geeignete Substitutionen in die Form

$$w = \frac{3}{2} k^2 \sigma f(\zeta) \cdot \iint R\, dR\, d\Phi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

zu bringen. Die Substitutionen sind:

w	R	Φ
$\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})$	$\sqrt{\frac{2}{\varrho}}$	$\frac{\sin 2\varphi}{2}$
W_{xy}	$\sqrt{\frac{2}{\varrho}}$	$\frac{\cos 2\varphi}{2}$
W_{zx}	$\frac{1}{\varrho}$	$\sin\varphi$
W_{zy}	$\frac{1}{\varrho}$	$\cos\varphi$



$$\iint \frac{\cos 2\varphi}{\varrho^2}\, d\varrho\, d\varphi, \quad \iint \frac{\sin 2\varphi}{\varrho^2}\, d\varrho\, d\varphi \longrightarrow \iint R\, dR\, d\Phi = F$$

a) Krümmungsgröße

$$\iint \frac{\cos \varphi}{\varrho^3}\, d\varrho\, d\varphi, \quad \iint \frac{\sin \varphi}{\varrho^3}\, d\varrho\, d\varphi \longrightarrow \iint R\, d\, R\, d\, \Phi = F$$

b) Gradient

Fig. 1. Belowsche Methode für ferne, niedrige Massen

Hierbei ist das Vorzeichen unbeachtet geblieben. Man berücksichtigt es am einfachsten mit Hilfe von Formel (1) oder (2) nach erfolgter Bestimmung von w. Für die Geländereduktion sei auch auf die Fig. 2a bis d auf S. 209 im 3. Jahrgang dieser Zeitschrift (1927) verwiesen.

Fig. 1 zeigt die Transformation eines Netzes von gleichabständigen Polarkoordinaten und einer in dieses Netz eingezeichneten geschlossenen Höhenlinie a) für die Krümmungsgröße, b) für den Gradienten.

So einleuchtend der Grundgedanke der Belowschen Geländereduktion auch ist, kann sie in vorliegender Form nicht als unbedingt zweckmäßig bezeichnet werden. Denn meist werden für die entfernteren Geländeteile schon Höhenlinienkarten vorliegen (z. B. Meßtischblätter), und dann wird wegen des zeitraubenden Umzeichnens der Höhenlinien im Vergleich zur Anwendung der Diagramme von Numerov keine Zeit gespart. Und auf die Stationsnähe, wo keine ausreichenden Höhenlinienkarten vorliegen und es ein leichtes ist, die Nivellementsergebnisse gleich in der umgezeichneten Form niederzulegen, ist das Verfahren wegen der bei Ableitung der Formeln (2) gebrauchten Vernachlässigungen nicht anwendbar. Störend, wenn auch nicht ernsthaft hinderlich, ist die Vertauschung von Innen und Außen beim Umzeichnen der Höhenlinien.

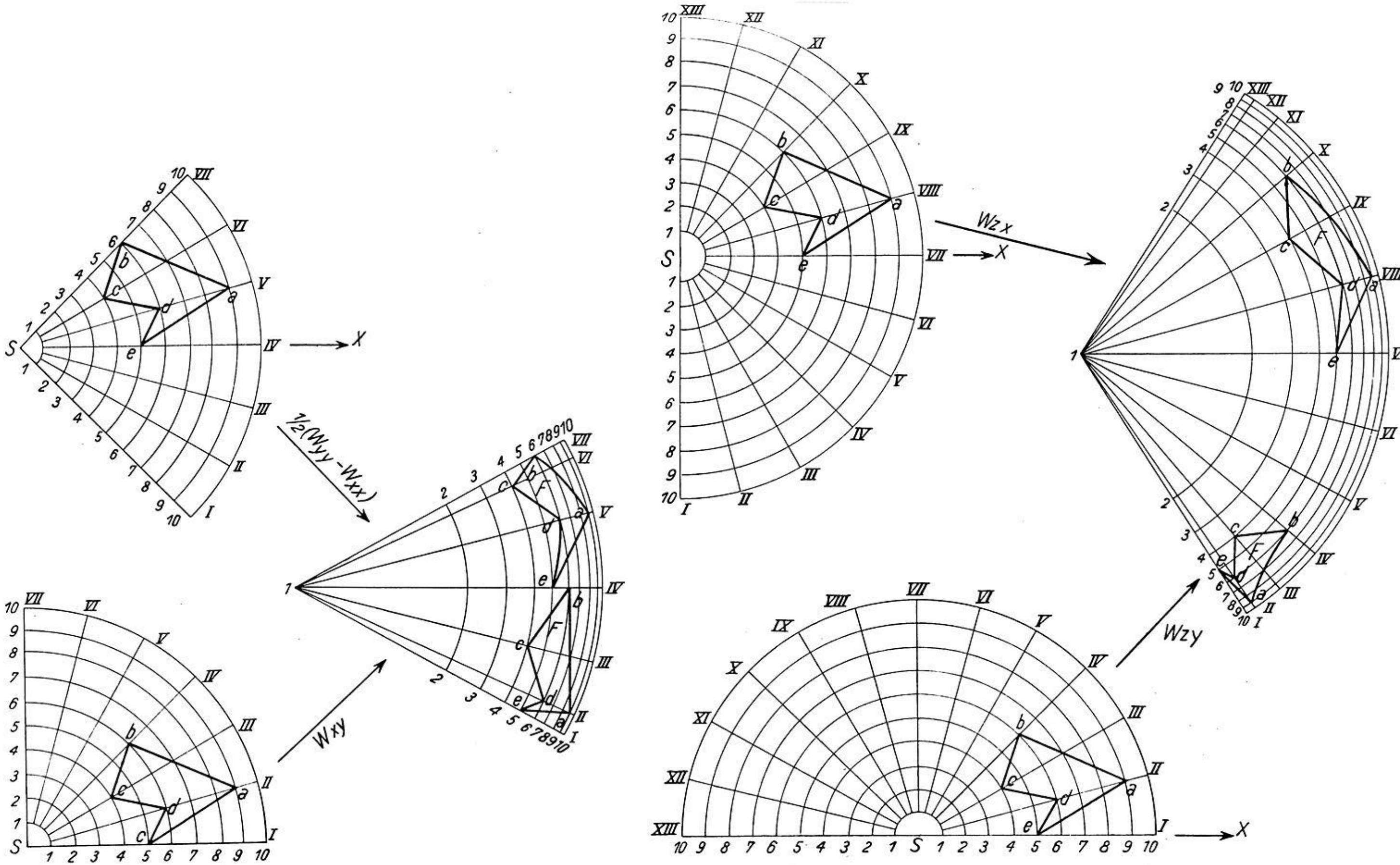
B. Übertragung der Belowschen Methode auf die Stationsnähe und beliebige Massenformen. Zu einer brauchbaren Methode, die von der Bedingung kleiner Höhe bei großer Entfernung frei ist, kommt man auf Grund der vom Verfasser in Bd. 3 dieser Zeitschrift (1927) gegebenen Diagramme[4]). Durch strenge Integration der Gleichungen (1) über ζ von 0 bis ζ und Einführung des Erhebungswinkels ε, $\operatorname{tg} \varepsilon = -\zeta/\varrho$, kommt man schließlich statt auf die Formel (3) auf Gleichungen von der Gestalt

$$w = k^2 \sigma \cdot i(\varepsilon) \cdot \iint k(\varrho) \cdot l(\varphi)\, d\varrho\, d\varphi \quad \text{. . . . .} \quad (5)$$

wobei (ohne Beachtung des Vorzeichens)

w	$i(\varepsilon)$	$k(\varrho)$	$l(\varphi)$
$\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})$	$\frac{1}{2}(3 \sin\varepsilon - \sin^3\varepsilon)$	$\frac{1}{\varrho}$	$\cos 2\varphi$
W_{xy}	$\frac{1}{2}(3 \sin\varepsilon - \sin^3\varepsilon)$	$\frac{1}{\varrho}$	$\sin 2\varphi$
W_{zx}	$(1 - \cos^3\varepsilon)$	$\frac{1}{\varrho}$	$\cos\varphi$
W_{zy}	$(1 - \cos^3\varepsilon)$	$\frac{1}{\varrho}$	$\sin\varphi$
Schwereintensität W_z	$(1 - \cos\varepsilon)$	1	1

Man kann nun auf ähnliche Weise wie oben die Doppelintegrale in die Form eines Flächeninhalts, $\iint R\, dR\, d\Phi$, bringen.



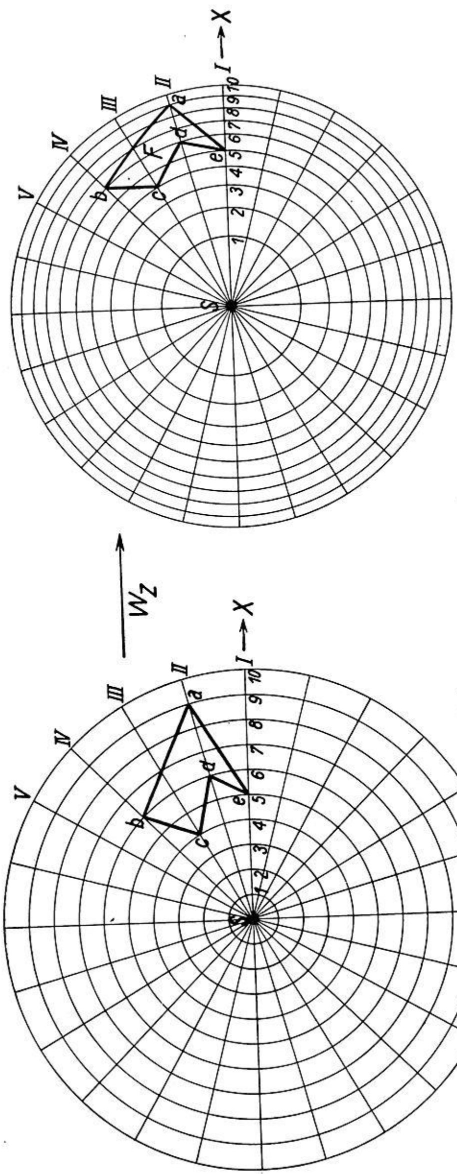
$$\iint \frac{\cos 2\varphi}{\varrho}\, d\varrho\, d\varphi, \quad \iint \frac{\sin 2\varphi}{\varrho}\, d\varrho\, d\varphi \longrightarrow \frac{1}{36} \iint R\, d\, R\, d\, \Phi = \frac{1}{36}\, F$$

a) Krümmungsgröße

$$\iint \frac{\cos \varphi}{\varrho}\, d\varrho\, d\varphi, \quad \iint \frac{\sin \varphi}{\varrho}\, d\varrho\, d\varphi \longrightarrow \frac{1}{36} \iint R\, d\, R\, d\, \Phi = \frac{1}{36}\, F$$

b) Gradient

Fig. 2. Belowsche Methode für beliebige Massen



$$\iint d\varrho\, d\varphi \rightarrow \frac{1}{4} \iint R\, d R\, d\Phi = \frac{1}{4} F$$

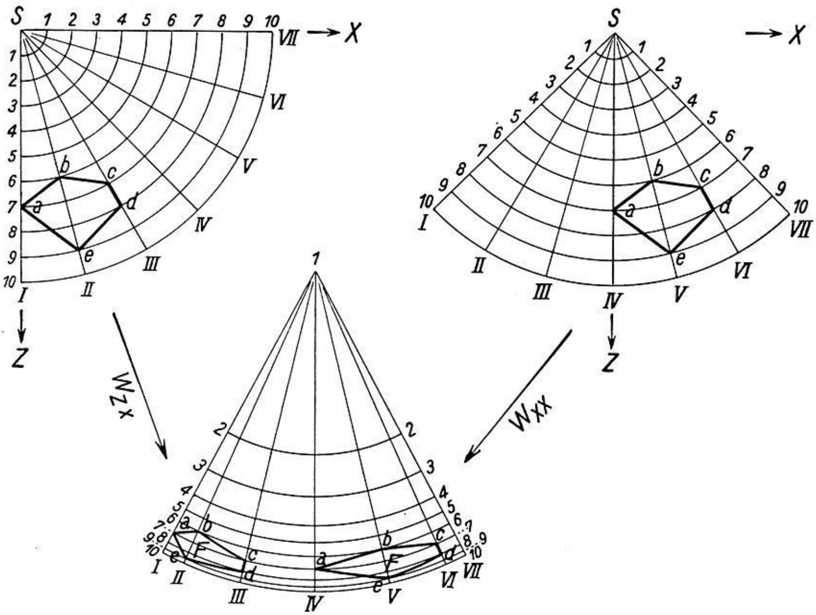
Fig. 2. Belowsche Methode für beliebige Massen. c) Schwereintensität

Die Substitutionen sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

w	R	Φ
$\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})$	$\sqrt{2 \ln \varrho}$	$\frac{\sin 2\varphi}{2}$
W_{xy}	$\sqrt{2 \ln \varrho}$	$\frac{\cos 2\varphi}{2}$
W_{zx}	$\sqrt{2 \ln \varrho}$	$\sin \varphi$
W_{zy}	$\sqrt{2 \ln \varrho}$	$\cos \varphi$
W_z	$\sqrt{2 \varrho}$	φ

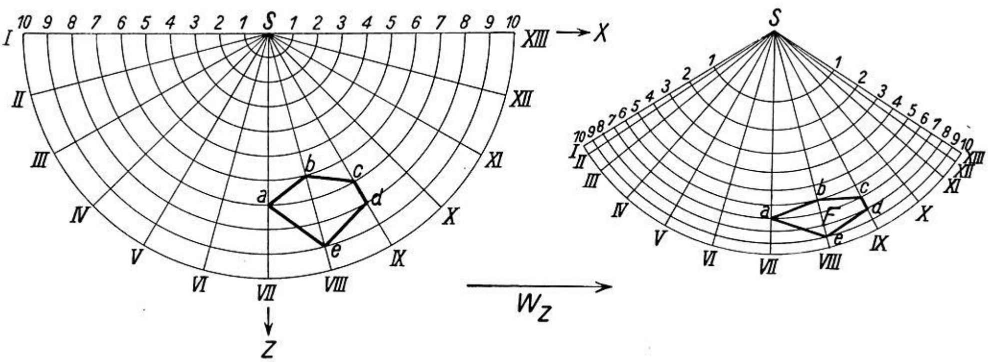
Fig. 2 zeigt wie Fig. 1 die Umzeichnung eines gleichabständigen Polarkoordinatennetzes a) für die Krümmungsgröße, b) für den Gradienten, c) für die Schwereintensität.

Die Bestimmung des Erhebungswinkels aus dem Nivellement ist nicht umständlicher als die Bestimmung der Geländehöhe. In dieser Beziehung ist für die Stationsnähe, soweit keine ausreichenden Höhenschichtenkarten existieren, eine Methode, die die Linien gleichen Erhebungswinkels benutzt, gegen eine die Geländehöhe verwendende Methode nicht im Nachteil. Der Nachteil der vom Verfasser gegebenen Diagramme, daß sie wie alle Grundrißdiagramme bei engen auszuzählenden Flächen mühsam anzuwenden sind, besteht bei dem der Belowschen Methode nachgebildeten Verfahren nicht. Als weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist anzusehen, daß die mechanische Anwendung des Planimeters dem Rechner einen großen Teil seiner Arbeit abnimmt, wodurch die Wahrscheinlichkeit von Irrtümern vermindert wird. Bei Anwendung geeigneter Vordrucke können die Nivellementsergebnisse unmittelbar in der transformierten, zur



$$\iint \frac{\sin 2\psi}{\varrho}\, d\varrho\, d\psi \longrightarrow \frac{1}{36} \iint R\, d\, R\, d\, \Phi = \frac{1}{36}\, F \longleftarrow \iint \frac{\cos 2\psi}{\varrho}\, d\varrho\, d\psi$$

a) Krümmungsgröße und Gradient,



$$\iint \sin\psi\, d\varrho\, d\psi \longrightarrow \frac{1}{4} \iint R\, d\, R\, d\, \Phi = \frac{1}{4}\, F$$

b) Schwereintensität

Fig. 3. Belowsche Methode für „zweidimensionale" Massenanordnungen

Verwendung kommenden Form aufgezeichnet werden, so daß ein Umzeichnen nicht nötig ist.

Ob das Verfahren im Vergleich zu den Diagrammen von Haalck[5]) und den rechnerischen Methoden von Schweydar[2]) im Vorteil oder Nachteil ist, hängt wohl im wesentlichen von der Übung des Bearbeiters ab.

In der vorliegenden Form des Belowschen Verfahrens entsteht keine Vertauschung von Innen und Außen.

C. Übertragung auf „zweidimensionale" Einbettungen. Die Übertragung des Belowschen Verfahrens auf die Bestimmung der Wirkung horizontal gelagerter, langgestreckter Massen mit überall gleichem Querschnitt — sogenannter „zweidimensionaler" Massenformen — bietet vor den bekannten Diagrammmethoden kaum einen Vorteil, da die Massen fast stets durch ihren Querschnitt gegeben sind und der Querschnitt umgezeichnet werden muß. Sie sei der Vollständigkeit wegen erwähnt.

Die Masse erstrecke sich in der Y-Richtung ins Unendliche, die zur $X\,Z$-Ebene parallelen Querschnitte seien überall gleich. Dann ist ihre Wirkung:

$$w = 2\,k^2\,\sigma \iint m(\varrho)\cdot n(\psi)\,d\,\varrho\,d\,\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei

w	$m(\varrho)$	$n(\psi)$
W_{xx}	$\frac{1}{\varrho}$	$\cos 2\,\psi$
W_{zx}	$\frac{1}{\varrho}$	$\sin 2\,\psi$
W_z	1	$\sin\psi$

und $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$; ψ bedeutet den Winkel, den ϱ mit der positiven X-Achse bildet

Die Substitutionen sind für W_{xx} und W_{zx} dieselben wie in Abschnitt B für $\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})$ und W_{xy}. Für die Schwereintensität W_z ist $R = \sqrt{2\,\varrho}$, $\Phi = \cos\psi$, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Die Umzeichnung zeigt Fig. 3.

Literatur

[1]) P. Nikiforov: Physical Principles of Gravitational Method of Prospecting. (Russisch mit englischem Auszug.) Bull. of the Inst. of Pract. Geophys. Leningrad, Nr. 1, S. 153—255, 1925.

[2]) W. Schweydar: Die topographische Korrektion bei Schweremessungen mittels einer Torsionswaage. Zeitschr. f. Geophys. **1**, 81—89 (1924/25); **3**, 17—23 (1927).

[3]) B. Numerov: Die topographische Reduktion bei Drehwaagebeobachtungen. Ebenda **4**, 117—134 (1928).

[4]) K. Jung: Diagramme zur Bestimmung der Terrainwirkung für Pendel und Drehwaage und zur Bestimmung der Wirkung „zweidimensionaler" Massenanordnungen. Ebenda **3**, 201—212 (1927).

[5]) H. Haalck: Ein graphisches Verfahren für Drehwaagenmessungen zur Berechnung der Geländewirkung und der Wirkung beliebig gestalteter Massenkörper. Ebenda **4**, 161—178 (1928).

Potsdam, Geodätisches Institut, Februar 1930.