Werk

Jahr: 1930
Kollektion: fid.geo
Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:6
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN101433392X_0006
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0006

LOG Id: LOG_0040
LOG Titel: Wesensgleiche und wesensverschiedene Darstellungen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X

Wesensgleiche und wesensverschiedene Darstellungen

Von **A. Nippoldt,** Potsdam — (Mit 1 Abbildung)

Man kann Naturwissenschaft entweder mit dem Ziele betreiben, die Vorgänge zu erklären oder die Erscheinungen zu beherrschen. Je nachdem, welches Ziel man gerade verfolgt, spielt die Darstellung durch die Formel eine verschiedene Rolle. In folgendem ist vorausgesetzt, daß es sich um die Erklärung handele.

Auf unserem Wissensgebiet bieten sich die Erscheinungen in Form von Beobachtungen; ihr Zustandekommen soll physikalisch erklärt werden. Dies ist erreicht, wenn es gelingt, sie restlos auf uns bekannte oder bekannt erscheinende physikalische Gesetze zurückzuführen.

Physikalische Gesetze sind unter gleichen Umständen stets gleiche Beziehungen zwischen physikalischen Begriffen. Physikalische Begriffe sind innerhalb der Vorstellungswelt des Physikers durch häufiges Erleben entstandene logische Begriffe physikalischen Inhalts. Haben sie auch der Form nach die absolute Idealität des mathematischen Begriffs, so tragen sie doch als subordinierte Korrelate eine Fülle von anschaulichen Nebenvorstellungen. Dies ist der Grund, warum die Zurückführung auf abstrakte mathematische Begriffe oft für den Physiker als unbefriedigend empfunden wird.

Die hier vorgetragene Meinung behauptet nun, daß nur eine Zurückführung von Beobachtungen auf physikalische Begriffe eine Erklärung zu liefern imstande ist. Insbesondere erscheint dies wichtig, wenn heuristisch vorgegangen werden soll, d. h. wenn es sich um planmäßige Aufsuchung zweckmäßiger Wege zur Erkenntnis handelt. Für die bloße äußere Beherrschung ist das nebensächlich.

Bekanntlich ist eine nach Jakobi so genannte „vernünftige Funktion", die also überall unbegrenzt differentiierbar und nicht unendlich oft unstetig ist, stets durch eine Potenzreihe oder eine trigonometrische Reihe restlos, d. h. mit allen Differentialquotienten und Sprüngen darstellbar. Ein so großer Vorteil dies in mathematischer und in Beziehung zur Beherrschung ist, so nachteilig ist es in heuristischer Beziehung, da die Koeffizienten der einzelnen Glieder nicht immer physikalischen Begriffen zugeordnet werden können.

Das beste Beispiel dafür bieten die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

die das Gesetz der Wärmeleitung in einem Körper bzw. die Schwingungen einer Saite darstellen. Die Lösung bietet sich als eine unendliche trigonometrische Reihe; das Quadrat jeder Konstanten definiert die Energie der einzelnen Teilwellen. Der große Unterschied in heuristischer Richtung ist der, daß die Teilwellen der Saitenschwingung durch unser Ohr gehört werden, während jene der Wärmeleitung mangels eines menschlichen Organs nicht einzeln empfunden werden. Es gibt daher für die Einzeltonwellen physikalische Begriffe: es sind die Obertöne, während die Wärmeleitung keine Begriffe erzeugt. Die trigonometrische Reihe ist daher bei der Saitenschwingung eine wesensgleiche, bei der Wärmeleitung eine wesensverschiedene, neutrale Darstellung.

„Wesen" ist in der freien Sprache das Lebendige. Es findet sich natürlich nicht in der betrachteten toten Sache, sondern in unserer Vorstellung von ihr, d. h. in dem Denkprozeß. Das Wesen einer analytischen, also mathematischen Funktion ist die Art der Verbindung der Variablen. $f(x)$ heißt im einzelnen in der Umgebung der Stelle $x — a$ eine analytische Funktion, wenn es innerhalb eines Intervalls h um a durch die Taylorsche Reihe konvergent darstellbar ist. Diese scharfe Definition erscheint zunächst als eine rein formale, ist aber mehr, denn die Taylor-Reihe

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1!} + f''(x)\frac{h^2}{2!} \cdots + \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n \text{ f. d. Intervall } x \text{ bis } x+h$$

entspricht dem Denkprozeß. Wir erkennen dies unter anderem daraus, daß für die ersten Glieder Vorstellungen vorhanden sind, Denkinhalte. Das erste Glied gibt den Wert der Funktion, das zweite die Richtung, in der sich der Wert an der Stelle ändert, das dritte die Änderung der Richtung oder die Krümmung. Für das vierte, die Änderung der Krümmung, fehlt die Vorstellung und damit der Name. Daß hier wirklich der Denkprozeß erfaßt ist, ersieht man daraus, daß alle vernünftigen Funktionen die gemeinsame Eigenschaft haben, durch die Taylorreihe darstellbar zu sein, also die gleiche innere Natur besitzen, obwohl sie einst ganz willkürlich und nach Bedarf erdacht wurden. Ein großer Teil der physikalischen Begriffe ist nichts anderes als der Koeffizient des ersten Gliedes (Elastizitätsmodul, Temperaturkoeffizient usw.). Die Koeffizienten, die eine analytische Funktion an einer Stelle darstellen, besorgen dies auch an jeder anderen, und zwar durch die Methode der analytischen Fortsetzung, wenn sie singuläre Stellen umgeht.

Beobachtungsreihen definieren nach unserer Auffassung ebenfalls eine Funktion, eine experimentelle. In der Zuordnung einer bestimmten analytischen Funktion zu dieser experimentellen besteht das Wesen einer Darstellung.

Bei einer experimentellen Funktion ist an jeder Stelle nur ein einzelner, isolierter Wert gegeben. Jeder dieser Werte ist zunächst nur bis zu einem gewissen Genauigkeitsgrad bekannt. Der Fehler erstreckt sich zudem nicht nur, wie meist allein angenommen wird, auf die Beobachtungsgröße, sondern auch auf den Ort, wo sich der Wert befindet (Fehlerellipse). Mithin definieren die Beobachtungen nicht eine ideelle Kurve, sondern, wie Felix Klein[1]) sagt, einen „Funktionsstreifen". Dadurch ist es unmöglich, den analytischen Begriff der Tangente, und noch schwieriger den des Krümmungsradius auf die experimentelle Funktion zu übertragen. Die Lösung der Schwierigkeit geschieht nun bekanntlich so, daß man — bestenfalls durch ein Ausgleichsverfahren — eine solche analytische Funktion aufsucht, die die Schwerpunkte der Fehlerellipsen aller Beobachtungspunkte so durchzieht, daß alle Beobachtungspunkte innerhalb einer bestimmten Genauigkeit wiedergegeben werden. Es kann das entweder durch ein Aggregat von geschlossenen analytischen Funktionen geschehen, in denen nur physikalische Begriffe auftreten, die nach unserem Kausalitätsbedürfnis als Ursachen des Vorgangs angesehen werden, oder durch eine Reihe (sei es eine Exponentialreihe oder eine nach fluktuierenden Funktionen). Im ersteren Falle nennen wir die Darstellung eine wesensgleiche, im letzteren eine empirische.

Die Koeffizienten einer solchen empirischen Darstellung dürfen im allgeneinen nicht über das Intervall ausgedehnt werden, aus dem sie berechnet sind, im Unterschied zu der analytischen mathematischen Funktion. Siehe hier Ad. Schmidts Kritik[2]) über eine versuchte Ausdehnung einer nur aus sibirischen Beobachtungen erhaltenen Kugelfunktionsdarstellung über die ganze Erde.

Bewährt sie sich beim Hinzukommen neuer Beobachtungen auch außerhalb des ursprünglichen Intervalls, so spricht dies dafür, daß die Darstellung eine wesensgleiche war, d. h. es gelang die Zurückführung auf den Kausalnexus, und dann sind die Koeffizienten physikalische Begriffe. Wenn man die experimentelle Funktion des freien Falles durch eine endliche Reihe der Gestalt

$$y = a + bt + ct^2$$

darstellt, so hat jeder der drei Koeffizienten eine klare physikalische Bedeutung. Stellt man, etwa der Ungenauigkeit der Beobachtungen wegen, den Vorgang durch eine Potenzreihe von vier Gliedern dar, so wird die physikalische Bedeutung der Koeffizienten verwischt, wir haben eine „wesensähnliche" Darstellung gewonnen, während noch mehr Glieder die Darstellung zu einer wesensverschiedenen machen. Eine solche wird ersichtlich in heuristischer Beziehung untauglich, während sie die äußerliche Beherrschung des Vorgangs offenbar nicht berührt.

Hieraus erwächst für die forschende Physik und insbesondere auch die Geophysik die Aufgabe, planmäßig nach wesensgleichen Darstellungen zu suchen. In bezug auf die in der Meteorologie so häufige Darstellung durch trigonometrische Reihen habe ich schon in mehreren früheren Arbeiten auf diese Umstände hingewiesen[3]) und auch Wege angegeben, wesensgleiche Darstellungen zu finden. Es kamen damals auch die in der Folge so wichtigen Studien A. Schusters über das Periodogramm[5]), und in den folgenden Zeiten ist noch manches Neue dazugekommen.

Der Anlaß, diese Sachen hier vorzubringen, war die Sonderaufgabe, die Darstellung des erdmagnetischen Feldes in dieser Richtung zu vervollkommnen. Gegenwärtig stehen wir da noch ganz auf dem Boden einer rein empirischen Darstellung. Die einzige vorher zugrunde gelegte heuristisch wertvolle Annahme war die Orientierung des Koordinatensystems nach der Rotationsachse der Erde. Es ist dadurch das erste Glied der Kugelfunktion erster Ordnung von einer gewissen heuristischen Bedeutung geworden. Sie wurde zuerst von Bezold[5]) hervorgehoben. Ad. Schmidt[6]) hat im Anschluß daran untersucht, ob etwa eine andere Achse physikalisch wirksamer zu finden sei. Später hat er dann einen weiteren Schritt in heuristischer Richtung getan, indem er den magnetischen Indifferenzpunkt als Nullpunkt wählte, also das kanonische System zugrunde legte[7]).

Stets aber traten sämtliche Glieder, auch die sektoriellen und tesseralen auf. Nur das erste Glied ist einer physikalischen Deutung zugänglich, indem es das quasi-homogene Feld und aber auch die Richtung und das magnetische Moment des Erdfeldes gab, ja geradezu definierte. Eine Andeutung, daß auch einzelne höhere Glieder physikalische Deutung finden könnten, gab die Darlegung der Möglichkeit anisotroper Kristallmagnetisierung[8]) in der Erde. Übrigens hat der Begriff magnetisches Moment noch erkenntnistheoretische Schwierigkeiten; er gehört offenbar zu jenen physikalischen Begriffen, die wir nur des häufigen Erlebens wegen als bekannt annehmen.

Setzen wir aber einmal das magnetische Moment als etwas zur Erklärung Geeignetes voraus, so kommen wir zu einer wesensgleichen Darstellung, oder wenigstens zu einer wesensähnlichen, wenn wir die Darstellung durch zwei Systeme von Kugelfunktionsreihen besorgten, wovon das eine um die Rotationsachse der Erde und das andere um die Achse der äquatoriellen Magnetisierung orientiert ist. Daß hier Bedenken bestehen, weil die Quermagnetisierung zeitlich variabel erscheint, ist gegeben.

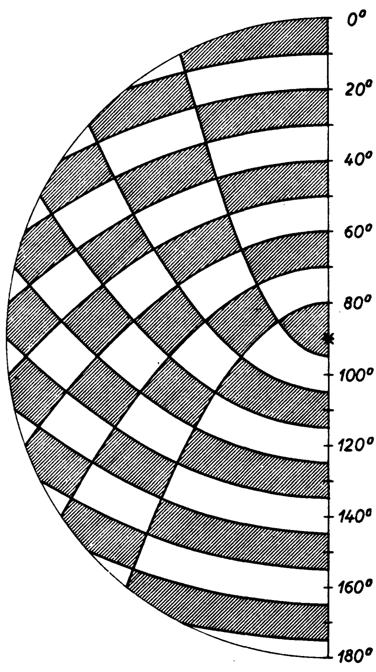

Fig. 1

Eine solche Entwicklung hat nur zonale Glieder und ist daher rechnerisch sehr rasch durchzuführen. Nebenstehende Figur zeigt, wie die Erdoberfläche durch eine solche Darstellung in Rechtecke zerlegt wird, die bei der hier gewählten Projektion als aus Parabelbögen begrenzt erscheinen. Die rechnerische Konvergenz kann danach sehr gut sein. Da die ersten Hauptglieder nichts wesentlich anderes ergeben können wie die seitherige Entwicklung, liegt der Vorteil außer in der schnellen Berechnung in den höheren Gliedern. Deren Verhalten — namentlich in der Zeit — ist entscheidend dafür, ob die neue Darstellung wesensähnlich ist oder wesensgleich.

Die Darstellung hat dann die Gestalt

$$\frac{V}{R} = \frac{V_p}{R} + \frac{V_e}{R} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^0 P^{(n)}(\cos u) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g}_n^0 P^{(n)}(\cos u).$$

Brechen wir mit $n = m$ ab, so haben wir $2\,m$ Koeffizienten $g_n^0 + \mathfrak{g}_n^0$ statt $m(m+2)$ zu ermitteln, so, wenn wir bis zur Kugelfunktion sechster Ordnung gehen, neu 12 gegen alt 48 Zahlwerte. Legen wir dem die Werte von ν äquidistanten Punkten auf den $2\,m$ Systemen von je μ Parallelkreisen zugrunde, so haben wir $2\,\nu\mu$ Ausgangswerte, abgesehen von einzelnen mehrfachen Punkten, doppelt so viele als bei dem seitherigen Verfahren. Gegenüber der alten Methode entfällt vollkommen die Entwicklung der Beobachtungswerte längs der Parallelkreise nach trigonometrischen Funktionen, weil die g_n^0, $\mathfrak{g}_n^0$ lediglich von den Mittelwerten längs der zwei Systeme von Parallelkreisen abhängen, die höchst einfach abzuleiten sind.

Literatur

[1]) F. Klein: Präzisions- und Approximationsmathematik, 3. Aufl. Berlin, Julius Springer, 1928.

[2]) Ad. Schmidt: Meteorol. Zeitschr. **43**, 179, 385 (1926).

[3]) A. Nippoldt: Arch. d. Seewarte **26**, Hamburg 1903; Terr. Magn. **7**, 101 bis 113 (1902); Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **19**, 401 bis 409.

[4]) A. Schuster: Phil. Trans. Roy. Soc. A. **18**, 107 bis 175 (1899).

[5]) W. v. Bezold: Sitzungsber. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., **18**. Berlin 1895.

[6]) Ad. Schmidt: Terr. Magn. **1**, 18 bis 27 (1896).

[7]) Derselbe: Diese Zeitschr. **2**, 38 (1926).

[8]) A. Nippoldt: Tätigkeitsber. d. Meteorol. Inst. i. J. 1927, S. 97 bis 105. Berlin 1923; Einführ. i. d. Geophysik **2**, 63 u. ff. Berlin, Jul. Springer, 1929.

Die Säkularvariation in der Rheinpfalz in den Jahren 1850 bis 1928

Von **Fr. Burmeister**, München

Es werden die Ergebnisse der neuen magnetischen Vermessung der Pfalz mit den früheren Aufnahmen verglichen und die Säkularvariation der erdmagnetischen Elemente für rund 70 Jahre ermittelt. Hierbei wurde ein durchgehender Fehler in der Vermessung von Neumayer 1855/56 aufgedeckt.

Systematische erdmagnetische Beobachtungen in der Pfalz wurden zuerst von J. von Lamont ausgeführt. Im Herbst 1852 beobachtete er an zehn Stationen und erkannte schon aus diesen wenigen Messungen, daß die Pfalz magnetisch ziemlich gestört ist. Seine Ergebnisse, reduziert auf die Epoche 1850.0, sind veröffentlicht in den „Magnetischen Ortsbestimmungen“, I. Teil, München 1854.