soient pas encore réglées, la figure donne tout de même une idée de l'aspect total de l'enregistrement. Surtout, les traces de H faites avec une valeur d'échelle d'à peu près 2γ par millimètres montrent beaucoup de détails.

Il me semble bien désirable de faire usage pendant l'Année Polaire des enregistreurs magnétiques du type inventé par Ad. Schmidt. Naturellement, on doit à priori faire abstraction de la possibilité de mesurer ces courbes dans toute leur étendue, mais une collection de tels enregistrements, faciles à embrasser, et faits simultanément aux stations bien réparties dans les régions arctiques, équatoriales et antarctiques serait d'une valeur extrême pour l'étude de plusieurs phénomènes qui ne puissent pas être dévoilés à l'aide d'enregistreurs à marche ordinaire.

Copenhague, le 14 Juin 1930.

Was sagen uns die Parameter eines Magneten?

Von **G. Fanselau**

Die Darstellung des Potentials eines Magnets mit Hilfe der sogenannten Parameter (Kugelfunktionsreihen) wird mit der Darstellung, die aus der Volumenmagnetisierung des Magnets entspringt, verglichen und die Parameter so mit der Volumenmagnetisierung in Zusammenhang gebracht. Durch Unterteilung des Magnets lassen sich Einblicke in die Verteilung der Magnetisierung im Magnet gewinnen.

So einfach auch auf den ersten Blick die Grundgesetze der Magnetostatik erscheinen mögen, so gestaltet sich ihre Anwendung bei der Beschreibung der Wirkung von Magneten aufeinander doch recht verwickelt. Erst Ad. Schmidt ist es gelungen, das Problem in seiner vollen Allgemeinheit zu lösen. In seinen grundlegenden Arbeiten*) setzt er dabei das Potential eines Magneten in Form einer Reihe von Kugelfunktionen an:

$$V = \sum^{n} Y_n.$$

Jedes Y_n ist eins ogenanntes „Laplacesches Y“, eine Laplacesche Kugelfunktion von der Form:

$$Y_n = \sum^{m} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} (g^{m\,n} \cos m\,\varphi + h^{m\,n} \sin m\,\varphi)\, P^{m\,n}.$$

Wie man sieht, ist also die Wirkung eines Magneten nach außen hin durch eine gewisse Zahl von Konstanten, die $g^{m\,n}$, $h^{m\,n}$, bestimmt. Diese Konstanten sind für jeden einzelnen Magneten charakteristisch. Es erhebt sich deshalb sofort die weitere

---

*) Ad. Schmidt: Sitz.-Ber. d. Pr. Akad. (Math.-Phys. Kl.) 1907, XVI. Derselbe: Terr. Magn., Dez. 1912 und Juni 1913.

Frage, in welcher Beziehung diese sogenannten Parameter zu der Verteilung des Magnetismus im Inneren des Magneten stehen, und ob es möglich ist, aus den Parametern diese Verteilung zu erschließen. Hält man an der dem Magneten äquivalenten magnetischen Kugeloberflächenbelegung — dem physikalischen Bilde der Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen — fest, so kann man diese Frage natürlich nicht beantworten. Vielmehr muß man das Gesamtpotential des Magneten aus den Teilpotentialen seiner Volumenelemente zusammensetzen und diese Darstellung des Potentials mit der mit Hilfe der Parameter gewonnenen vergleichen. Betrachtet man ein Volumenelement $d\tau$ des Magneten, so kann man sich seine magnetischen Eigenschaften durch einen Dipol vom Moment $\mathfrak{M}$ dargestellt denken, sein Potential also ansetzen in der Form:

$$V = \mathfrak{M} \,.\, \operatorname{grad} U$$

mit U als der Potentialfunktion der Einheitsmasse. Die magnetische Wirkung des ganzen Magneten ist dann einfach

$$V = \int (\mathfrak{M} \operatorname{grad} U)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

integriert über den Magneten.

Gleichung (1) bildet den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen, die in ihren Grundzügen im wesentlichen auf Bidlingmaier zurückgehen. Es seien x_0, x_1, x_2 die Kartesischen Koordinaten des Aufpunkts, ξ_0, ξ_1, ξ_2 die eines Punktes im Inneren des Magneten, $\varrho = \sqrt{\sum_0^2 i\,(x_i - \xi_i)^2}$ die Entfernung zwischen beiden Punkten. Entwickelt man nun in (1) grad U, so erhält man z. B. für die ξ_0-Komponente dieses Vektors:

$$\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0} = \left.\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0}\right|_0 + \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0^2}\right|_0 \xi_0 + \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1}\right|_0 \cdot \xi_1 + \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0 \partial \xi_2}\right|_0 \cdot \xi_2$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0^3}\right|_0 \cdot \xi_0^2 + \left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1^2}\right|_0 \cdot \xi_1^2 + \left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0 \cdot \partial \xi_2^2}\right|_0 \cdot \xi_2^2\right.$$

$$\left. + 2 \left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0^2 \partial \xi_1}\right|_0 \xi_0 \cdot \xi_1 + 2 \left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0 \partial \xi_1 \partial \xi_2}\right|_0 \xi_1 \cdot \xi_2 + 2 \left.\frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_0^2 \partial \xi_2}\right|_0 \xi_0 \xi_2 \right] + \frac{1}{3!}\Big[\ldots\Big].$$

Nun ist aber

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi_i}\right|_0 = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i}, \quad r = \sqrt{\sum_0^2 i\, x_i^2},$$

also von den ξ unabhängig. Somit folgt aus (1) mit α_0, α_1, α_2 als den Komponenten des Vektors $\mathfrak{M}$ in Richtung der ξ ($\mathfrak{M}_{\xi_0} = \alpha_0$, $\mathfrak{M}_{\xi_1} = \alpha_1$, $\mathfrak{M}_{\xi_2} = \alpha_2$) schließlich:

$$\left.\begin{aligned}
V = &-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0}\int \alpha_0\, d\tau - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\int \alpha_1\, d\tau - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2}\int \alpha_2\, d\tau \\
&+ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0^2}\int \xi_0\alpha_0\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0\,\partial x_1}\int \xi_1\alpha_0\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0\,\partial x_2}\int \xi_2\alpha_0\, d\tau \\
&+ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_0}\int \xi_0\alpha_1\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2}\int \xi_1\alpha_1\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_2}\int \xi_2\alpha_1\, d\tau \\
&+ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_2\,\partial x_0}\int \xi_0\alpha_2\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_2\,\partial x_1}\int \xi_1\alpha_2\, d\tau + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_2^2}\int \xi_2\alpha_2\, d\tau
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Für die $\dfrac{\partial^i \frac{1}{r}}{\partial x_0^\lambda\,\partial x_1^\mu\,\partial x_2^\nu}$, $\lambda + \mu + \nu = i$, die ja die Grundlage der Sylvesterschen Darstellung der Kugelfunktionen bilden, sollen in leicht verständlicher Weise folgende Symbole eingeführt werden:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} = S_1^0\,\frac{1}{r^2}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} = S_1^1\,\frac{1}{r^2}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} = S_1^2\,\frac{1}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0^2} = S_2^{00}\,\frac{1}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0\,\partial x_1} = S_2^{01}\,\frac{1}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_0\,\partial x_2} = S_2^{02}\,\frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} = S_2^{11}\,\frac{1}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_2^2} = S_2^{22}\,\frac{1}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_2} = S_2^{12}\,\frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x_0^3} \doteq S_3^{000}\,\frac{1}{r^4}, \ldots$$

Der untere Index ist an sich überflüssig; er dient nur zur Kontrolle, daß im oberen Index keine Zahl vergessen ist. In Kugelkoordinaten ($x_0 = r\cos\vartheta$, $x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$) erhält man für die S folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
S_1^0 &= -\cos\vartheta, \quad S_1^1 = -\sin\vartheta\cos\varphi, \quad S_1^2 = -\sin\vartheta\sin\varphi, \\
S_2^{00} &= 3\cos^2\vartheta - 1, \quad S_2^{01} = 3\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi, \\
S_2^{02} &= 3\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi, \quad S_2^{11} = 3\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - 1, \\
S_2^{22} &= 3\sin^2\vartheta\sin^2\varphi - 1, \quad S_2^{12} = 3\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, \\
S_3^{000} &= -3\,(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta), \ldots
\end{aligned}$$

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Kugelfunktionen läßt sich jede Kugelfunktion mit Hilfe der S darstellen. Durch Vergleich findet man ohne weiteres:

$$\begin{aligned} &S_1^0 = -P^{01}; \quad S_1^1 = -P^{11}\cos\varphi; \quad S_1^2 = -P^{11}\sin\varphi; \\ &S_2^{00} = 3\,P^{02}; \quad S_2^{01} = 3\,P^{12}\cos\varphi; \quad S_2^{02} = 3\,P^{12}\sin\varphi; \\ &S_2^{11} - S_2^{22} = 3\,P^{22}\cos 2\,\varphi; \quad S_2^{12} = \tfrac{3}{2}\,P^{22}\sin 2\,\varphi \ldots \end{aligned}$$

Führt man die S in die Potentialdarstellung (2) ein, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} V = &-\frac{1}{r^2}\left[S_1^0\int\alpha_0\,d\tau + S_1^1\int\alpha_1\,d\tau + S_1^2\int\alpha_2\,d\tau\right] + \frac{1}{r^3}\left[S_2^{00}\int\xi_0\,\alpha_0\,d\tau\right. \\ &+ S_2^{11}\int\xi_1\,\alpha_1\,d\tau + S_2^{22}\int\xi_2\,\alpha_2\,d\tau + S_2^{01}\int(\xi_1\,\alpha_0 + \xi_0\,\alpha_1)\,d\tau \\ &\left.+ S_2^{02}\int(\xi_2\,\alpha_0 + \xi_0\,\alpha_2)\,d\tau + S_2^{12}\int(\xi_1\,\alpha_2 + \xi_2\,\alpha_1)\,d\tau\right] - \cdots \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Andererseits liefert die Darstellung des Potentials mit Hilfe einer Reihe von Kugelfunktionen auf der Einheitskugel den bekannten Ausdruck:

$$V = \sum^n \sum^m (g^{mn}\cos m\,\varphi + h^{mn}\sin m\,\varphi)\,P^{mn}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}.$$

Ersetzt man hierin die P^{mn} durch die S, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} V = &-\frac{1}{r^2}\,[g^{01}\cdot S_1^0 + g^{11}\cdot S_1^1 + h^{11}\cdot S_1^2] + \frac{1}{r^3}\,[g^{02}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot S_2^{00} + g^{12}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot S_2^{01} \\ &+ h^{12}\cdot\tfrac{1}{3}\,S_2^{02} + g^{22}\,\tfrac{1}{3}\,(S_2^{11} - S_2^{22}) + h^{22}\cdot\tfrac{2}{3}\,S_2^{12}] - + \cdots \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Ein Vergleich von (3) und (4) gibt also die gesuchte Beziehung zwischen den Parametern des Magnets und gewissen durch die Volumenmagnetisierung des Magneten gegebenen Ausdrücken, und zwar findet man:

$$\left.\begin{aligned} &\int\alpha_0\,d\tau = g^{01}; \quad \int\alpha_1\,d\tau = g^{11}; \quad \int\alpha_2\,d\tau = h^{11}; \quad \int\xi_0\,\alpha_0\,d\tau = \tfrac{1}{3}\,g^{02}; \\ &\int\xi_1\,\alpha_1\,d\tau = \tfrac{1}{3}g^{22}; \quad \int\xi_2\,\alpha_2\,d\tau = -\tfrac{1}{3}g^{22}; \quad \int(\xi_1\,\alpha_0 + \xi_0\,\alpha_1)\,d\tau = \tfrac{1}{3}g^{12}; \\ &\int(\xi_2\,\alpha_0 + \xi_0\,\alpha_2)\,d\tau = \tfrac{1}{3}\,h^{12}; \quad \int(\xi_1\,\alpha_2 + \xi_2\,\alpha_1)\,d\tau = \tfrac{2}{3}\,h^{22} \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

In den Gleichungen (5) treten aber stets nur die Integrale über den ganzen Magneten auf. Man findet also aus (5) stets nur Mittelwerte der einzelnen Komponenten des Moments für den ganzen Magneten. Um nun nähere Einzelheiten über die Verteilung der Volumenmagnetisierung zu erfahren, geht man am besten so zu Werke, daß man den Magneten in Teile zerlegt und für jeden Teil getrennt den Mittelwert der Komponenten des Moments zu bestimmen sucht. Je feiner diese Teilung ist, desto genauere Ergebnisse über die Verteilung des Magnetismus wird man erhalten. Das Gleichungssystem (5) hat im ganzen drei Unbekannte: $\int\alpha_0\,d\tau$, $\int\alpha_1\,d\tau$, $\int\alpha_2\,d\tau$. Teilt man den Magneten in n Teile, so sind im ganzen $3\,n$ Unbekannte vorhanden: $\int\alpha_0\,d\tau_1$, $\int\alpha_1\,d\tau_1$, $\int\alpha_2\,d\tau_1$, $\int\alpha_0\,d\tau_2 \ldots\, \int\alpha_2\,d\tau_n$, d. h. also auch $3\,n$ Gleichungen zu deren Bestimmung erforderlich. Nun lassen sich aber die

Teilmittelwerte der Komponenten aus (5) nicht ohne weiteres bestimmen, da ja die Unbekannten nicht immer allein im Integranden vorkommen, sondern noch mit einer Koordinatenfunktion multipliziert auftreten:

$$\int K(\xi_0, \xi_1, \xi_2)\, \alpha\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Nun lehrt der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung, daß man für (6) auch schreiben kann:

$$\overline{K} \int \alpha\, d\tau,$$

unter $\overline{K}$ einen passenden Mittelwert im betrachteten Integrationsbereich verstanden, unter der Voraussetzung, daß α stets gleiches Vorzeichen im Intervall hat. Man muß also bei der Wahl der Teilung des Magneten auf diesen etwas heiklen Punkt nach Möglichkeit Rücksicht nehmen. Da nun die Funktion α nicht bekannt ist, weiß man auch über den Mittelwert $\overline{K}$ nichts. Man ist hier also gezwungen, irgendeinen beliebigen Mittelwert der Funktion K vor das Integral zu setzen. Die Größe des Fehlers, den man hierdurch begeht, kann durch mehrere verschiedenartige Teilungen desselben Magneten ungefähr beurteilt werden. Je feiner die Teilung, desto kleiner ist natürlich dieser Fehler. Der Grenzfall liefert die exakte Teilung in unendlich viele Volumenelemente $d\tau$. Je nach der Gestalt des zu behandelnden Magneten wird man dabei in (5) entsprechende Koordinaten einführen. Denkt man z. B. an das naheliegendste Beispiel, die Erde, so wird man bei einer Unterteilung hier natürlich der Kugelgestalt der Erde Rechnung tragen und in (5) Kugelkoordinaten einführen:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= R\cos\Theta; \quad \xi_1 = R\sin\Theta\cos\Phi; \quad \xi_2 = R\sin\Theta\sin\Phi;\\
\alpha_0 &= \alpha_R\cos\Theta - \alpha_\Theta\sin\Theta;\\
\alpha_1 &= \alpha_R\sin\Theta\cos\Phi - \alpha_\Phi\sin\Phi + \alpha_\Theta\cos\Theta\cos\Phi;\\
\alpha_2 &= \alpha_R\sin\Theta\cos\Phi + \alpha_\Phi\cos\Phi + \alpha_\Theta\cos\Theta\sin\Phi.
\end{aligned}$$

Man erhält dann folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
g^{01} &= \int (\alpha_R\cos\Theta - \alpha_\Theta\sin\Theta)\, d\tau;\\
g^{11} &= \int (\alpha_R\sin\Theta\cos\Phi - \alpha_\Phi\sin\Phi + \alpha_\Theta\cos\Theta\cos\Phi)\, d\tau;\\
h^{11} &= \int (\alpha_R\sin\Theta\cos\Phi + \alpha_\Phi\cos\Phi + \alpha_\Theta\cos\Theta\sin\Phi)\, d\tau;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Bei den Teilungen können mitunter Koordinatentransformationen von Nutzen sein. Mit der Durchführung einer solchen Teilung für die Erde bin ich augenblicklich beschäftigt. Ich hoffe, hierüber sowie über einige Folgerungen aus (5) bald berichten zu können.

Potsdam, Magnetisches Observatorium.