[5]) K. Knoch: Große Anomalien des Niederschlags in der Äquatorregion des Pazifischen Ozeans. Annalen der Hydrographie 1927, S. 361—367.

[6]) Derselbe: Über die unperiodischen Schwankungen der Temperatur im atlantischen Stillengürtel. Bericht über die Tätigkeit des Preuß. Met. Inst. i. J. 1926, S. 69—84. Berlin 1927.

[7]) Derselbe: Klimakunde von Südamerika. VIII und 349 S. Berlin 1930.

[8]) G. T. Renner: A famine zone in Africa. Geographical Review XVI, 1926 S. 583—596.

[9]) S. S. Visher, Variability of tropical climates. Met. Magazine 1923, S. 121—125, 154—159, 178—179.

[10]) Derselbe: Weather changes in Fiji. Bull. American Met. Soc., Vol. V, 1924. S. 22—23.

[11]) Derselbe: Frequencies of tropical cyclones, especially those of minor importance. Monthly Weather Review 1930, S. 62—64. Auszug: Bull. American Met. Soc. 1930, S. 82—84.

[12]) F. Zorell: Der „El-Niño"-Strom im Jahre 1925. Annalen der Hydrographie 1928, S. 166—175.

Zur Theorie der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen

Von **Hans Ertel**, Berlin

Es wird zunächst nicht die Maxwellsche Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten angenommen, sondern ein allgemeines Verteilungsgesetz (Markoff, v. Laue), das die Möglichkeit einer stochastischen Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten zuläßt; das Maß der stochastischen Verbundenheit der Geschwindigkeitskomponenten sei der Korrelationskoeffizient r. Dann führt die Forderung, daß die Richtungsverteilungsfunktion ein Maximum habe für die Richtung der ausgeglichenen (mittleren) Geschwindigkeit zu der Bedingung $r = 0$, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten sind in statistischem Sinne voneinander unabhängig und es gilt somit die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. Übrigens führt die Forderung, daß die Richtungsverteilung symmetrisch sei in bezug auf die mittlere Strömungsrichtung, zu dem gleichen Ergebnis.

Bei der Behandlung des Problems der atmosphärischen Turbulenz mit den Methoden der statistischen Mechanik entsteht sofort die Frage nach dem Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten in der Turbulenzströmung. Th. Hesselberg und E. Björkdal[1]) glaubten zeigen zu können, daß die Geschwindigkeitsverteilung durch das bekannte Maxwellsche Verteilungsgesetz gegeben ist, und gleichzeitig und unabhängig davon hat A. Wagner[2]) eine ausführliche Theorie der Böigkeit und der Häufigkeitsverteilung von Windstärke und Windrichtung entwickelt, ebenfalls auf Grundlage der Maxwellschen Verteilung. Nun lassen jedoch die bisherigen Beweise für die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung insofern zu wünschen übrig, als sie stets a priori voraussetzen, daß die Geschwindigkeitskomponenten in statistischem Sinne unabhängig voneinander sind*). Es ist deshalb vielleicht der hier gegebene Beweis von Interesse, der auf die oben genannte apriorische Annahme der Unabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten verzichtet, dagegen die a posteriori verifizierbare Forderung einführt, daß diejenigen Geschwindigkeitsvektoren (ohne Rücksicht auf ihre Größe) die relativ (auf gleiche Winkelintervalle bezogen) größte Häufigkeit haben, deren Richtung nur wenig von der mittleren Strömungsrichtung abweicht, woraus dann ebenfalls die Maxwellsche Verteilung folgt.

Wir stützen uns dabei auf einen von Markoff[3]) eingeführten, von v. Laue[4]) verallgemeinerten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den wir für unsere Zwecke folgendermaßen formulieren**): Es seien ξ_x, ξ_y die horizontalen Komponenten der turbulenten Zusatzgeschwindigkeit, die alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ mit gewissen Wahrscheinlichkeiten annehmen können. Von den ξ_x, ξ_y wird angenommen, daß sie durch eine große Zahl von Elementarimpulsen $\xi_x^{(i)}$, $\xi_y^{(i)}$ entstehen, und daß die Wahrscheinlichkeit eines Wertes $\xi_x^{(i)}$ oder $\xi_y^{(i)}$ von der Wahrscheinlichkeit der übrigen Elementarimpulse unabhängig sei. Die Turbulenzkomponenten ξ_x, ξ_y können dagegen in stochastischer Abhängigkeit stehen, und die Frage der Unabhängigkeit oder Abhängigkeit ist gewissermaßen von den (indirekt) meßbaren Turbulenzkomponenten ξ_x, ξ_y auf die nicht meßbaren Elementarimpulse verschoben. Ist nun $F(\xi_x, \xi_y)\,d\xi_x\,d\xi_y$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Vektor der turbulenten Zusatzgeschwindigkeit Komponenten habe, die zwischen ξ_x und $\xi_x + d\xi_x$ sowie zwischen ξ_y und $\xi_y + d\xi_y$ liegen, so ist

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x \cdot d\xi_x\,d\xi_y = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_x, \xi_y) \cdot \xi_y \cdot d\xi_x\,d\xi_y = 0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

und führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} J_{xx} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x^2 \cdot d\xi_x\,d\xi_y, \\ J_{yy} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_x, \xi_y) \cdot \xi_y^2 \cdot d\xi_x\,d\xi_y, \\ J_{xy} = J_{yx} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x \xi_y \cdot d\xi_x\,d\xi_y \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

*) Ein Beweis der Maxwellschen Verteilung, wie ihn Boltzmann (Vorlesungen über Gastheorie, Bd. I, S. 15) für Gasmoleküle gegeben hat, ist in der Turbulenztheorie noch nicht versucht worden. Übrigens ist auch Boltzmanns Beweisführung angreifbar (J. H. Jeans Dynam. Theorie der Gase. Deutsche Übersetzung von R. Fürth. Braunschweig 1926, S. 73).

**) Den Hinweis auf diesen Satz verdanke ich Herrn Prof. J. Bartels-Eberswalde, dem ich an dieser Stelle dafür meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte.

ferner

$$D = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{vmatrix},$$

so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$F(\xi_x, \xi_y)\, d\xi_x\, d\xi_y = \frac{1}{2\pi\sqrt{D}} \cdot \mathrm{Exp} - \frac{1}{2D}\left(J_{yy}\xi_x^2 - 2J_{xy}\xi_x\xi_y + J_{xx}\xi_y^2\right) . \, d\xi_x\, d\xi_y \qquad (3)$$

Durch Multiplikation mit ξ_x, ξ_y, ξ_x^2, ξ_y^2 oder $\xi_x\xi_y$ (ausgedrückt durch Hermitesche Polynome H_n), Entwicklung des Exponentialausdrucks nach Hermiteschen Polynomen gemäß

$$\mathrm{Exp}\,(-y^2 + 2xy) = \sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!}$$

und Integration verifiziert man unter Beachtung der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen der Hermiteschen Polynome

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x)\, \mathrm{Exp}\,(-x^2)\, dx = 0 \qquad (m \neq 0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\, \mathrm{Exp}\,(-x^2)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

leicht die Gleichungen (1) und (2).

Wir führen jetzt noch folgende Abkürzungen ein:

$$h_x = \frac{1}{\sqrt{J_{xx}}}, \quad h_y = \frac{1}{\sqrt{J_{yy}}}, \quad r = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx} J_{yy}}},$$

d. h. r ist der Korrelationskoeffizient. Dann nimmt Gl. (3) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} & F(\xi_x, \xi_y)\, d\xi_x\, d\xi_y \\ = & \frac{h_x h_y}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot \mathrm{Exp} - \frac{1}{2(1-r^2)} \left(h_x^2\xi_x^2 - 2r h_x h_y \xi_x\xi_y + h_y^2\xi_y^2\right) . \, d\xi_x\, d\xi_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Bedingung $r = 0$ führt auf die Maxwellsche Verteilung. Ferner ersieht man aus Gl. (4), daß $|r| < 1$ sein muß. In der Tat hat nur unter dieser Bedingung die wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungsweise einen Sinn.

Denken wir uns das Koordinatensystem so orientiert, daß die x-Achse in die Richtung der ausgeglichenen Geschwindigkeit $\overline{w}$ fällt, und bezeichnet φ den Winkel, den der Vektor der turbulenten Horizontalgeschwindigkeit w mit der mittleren Strömungsrichtung einschließt, so gelten die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= w_x - \overline{w} = w\cos\varphi - \overline{w}, \\ \xi_y &= w_y \phantom{- \overline{w}} = w\sin\varphi \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Der Korrelationskoeffizient behält wegen der Linearität der Gl. (5) seinen Wert bei, kann aber jetzt als ein Maß für den stochastischen Zusammenhang zwischen den Horizontalkomponenten w_x und w_y angesehen werden. Das Flächenelement $d\xi_x d\xi_y$ wird in Polarkoordinaten $w\,dw\,d\varphi$, und deshalb kann Gl. (4) jetzt

$$F(w,\varphi)\,w\,dw\,d\varphi = \frac{h_x h_y}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot \operatorname{Exp} - \frac{h_x^2\,\overline{w}^2}{2(1-r^2)}\cdot \operatorname{Exp}(-q w^2 + 2pw)\,.\,w\,dw\,d\varphi \quad (6)$$

geschrieben werden, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} q &= h_x^2\cos^2\varphi - r h_x h_y \sin(2\varphi) + h_y^2 \sin^2\varphi)\cdot\frac{(1-r^2)^{-1}}{2}, \\ p &= \overline{w}\,(h_x^2\cos\varphi - r\,h_x h_y \sin\varphi)\cdot\frac{(1-r^2)^{-1}}{2} \end{aligned}\right\} \;\ldots \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines horizontalen Geschwindigkeitsvektors zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ ohne Rücksicht auf die Größe des Vektors wird somit

$$W_{\varphi,\,\varphi+d\varphi} = \psi(\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{d\varphi\,h_x h_y}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot \operatorname{Exp} - \frac{h_x^2\,\overline{w}^2}{2(1-r^2)}\cdot\int_0^\infty \operatorname{Exp}(-q w^2 + 2pw)\,.\,w\,dw,$$

d. h. die Richtungsverteilungsfunktion ist durch

$$\psi(\varphi) = \frac{h_x h_y}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot \operatorname{Exp} - \frac{h_x^2\,\overline{w}^2}{2(1-r^2)}\cdot\int_0^\infty \operatorname{Exp.}(-q w^2 + 2pw)\,.\,w\,dw \quad (8)$$

gegeben. Das Integral läßt sich leicht auswerten. Es ist[5])

$$\int_0^\infty \operatorname{Exp}(-v^2 + 2av)\,.\,v\,dv = \tfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{\pi}\,e^{a^2}.\,a\,[1 + \Phi(a)]\} \quad \ldots \quad (9)$$

wo

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a \operatorname{Exp}(-x^2)\,.\,dx$$

das Fehlerintegral bedeutet. Die Substitutionen $v = \sqrt{q}\,.\,w$, $a\sqrt{q} = p$ ergeben aus Gl. (9) sofort

$$\int_0^\infty \operatorname{Exp}(-q w^2 + 2pw)\,.\,w\,dw = \frac{1}{2q}\left\{1 + \sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{p^2}{q}}\cdot\frac{p}{\sqrt{q}}\left[1 + \Phi\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)\right]\right\},$$

so daß die Richtungsverteilungsfunktion die Form

$$\psi(\varphi) = \frac{h_x h_y}{4\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot \operatorname{Exp} - \frac{h_x^2\,\overline{w}^2}{2(1-r^2)}\cdot\frac{1}{q}\left\{1 + \sqrt{\pi}\,e^{\frac{p^2}{q}}\cdot\frac{p}{\sqrt{q}}\left[1 + \Phi\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)\right]\right\} \quad (10)$$

annimmt. Nach unserer eingangs erwähnten Forderung, die für Turbulenzströmungen sicher erfüllt ist, soll $\psi(\varphi)$ ein Maximum haben für die Richtung der ausgeglichenen (mittleren) Geschwindigkeit, d. h. es muß gelten:

$$\left(\frac{d\,\psi(\varphi)}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Da nun

$$\left(\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)\right)_{\varphi=0} = 0,$$

und

$$\left(\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{1}{q}\right)\right)_{\varphi=0} = 4\,r \cdot \frac{h_x h_y}{h_x^4}\,(1-r^2),$$

ferner

$$\frac{p(0)}{\sqrt{q(0)}} = \frac{h_x \overline{w}}{\sqrt{2(1-r^2)}}$$

ist, ergibt die Bedingung (11):

$$0 = r \cdot \left\{1 + \sqrt{\pi}\,e^{\frac{p^2(0)}{q(0)}} \cdot \frac{p(0)}{\sqrt{q(0)}}\left[1 + \Phi\left(\frac{p(0)}{\sqrt{q(0)}}\right)\right]\right\}.$$

Da stets $\dfrac{p(0)}{\sqrt{q(0)}} > 0$ sein muß, ist die einzige Lösung

$$r = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

d. h. es besteht zwischen den Geschwindigkeitskomponenten keine Korrelation und die Geschwindigkeitsverteilung wird daher durch Maxwells Verteilungsgesetz dargestellt.

Zu dem gleichen Ergebnis führt übrigens auch die Forderung, daß die Richtungsverteilung in bezug auf die mittlere Strömungsrichtung symmetrisch sei:

$$\psi(\varphi) = \psi(-\varphi),$$

was wegen des Vorkommens der Glieder $r h_x h_y \sin(2\varphi)$ bzw. $r h_x h_y \sin\varphi$ in Gl. (10) nur für $r = 0$ möglich ist.

Literatur

[1]) Th. Hesselberg und E. Björkdal: Über das Verteilungsgesetz der Windunruhe. Beitr. z. Phys. d. freien Atmosphäre, Bd. XV, S. 121 (1929).

[2]) A. Wagner: Theorie der Böigkeit und der Häufigkeitsverteilung von Windstärke und Windrichtung. Gerlands Beitr. z. Geophys. **24**, 386 (1929).

[3]) A. Markoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der 2. Aufl. des russ. Werkes übersetzt von H. Liebmann. Berlin und Leipzig 1912. S. 173.

[4]) M. von Laue: Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie. Ann. d. Phys., 4. Folge, **47**, 853. Leipzig 1915.

[5]) H. Ertel: Die Richtungsschwankung der horizontalen Windkomponente im turbulenten Luftstrom. Gerlands Beitr. z. Geophys. **23**, 18 (1929).