Was die Erklärung der Schwächung der Nordlichtlinie 5577 Å im Spektrum der sonnenbelichteten Nordlichtstrahlen betrifft, so scheint mir eine Idee von Fil. Lic. Y. Öhman*) sehr beachtenswert, nämlich, daß der metastabile Zustand der Sauerstoffatome, der nach McLennan, Sommer und anderen die grüne Nordlichtlinie verursacht, von Sonnenlicht teilweise zerstört wird, so daß diese Linie schwächer wird in den sonnenbelichteten Nordlichtstrahlen als im Nordlicht im Erdschatten.

Die Invariabilität und Abstimmung von Minimumpendeln

Von **E. Kohlschütter**

Die Fragestellung, die O. Meisser zur Entwicklung einer Formel für die Variabilität invariabler Minimumschwerependel infolge kleiner Schneidenverlagerungen und gleichartig wirkender Ursachen geführt hat, wird genauer formuliert und praktisch herstellbaren Pendeln angepaßt. Eine Tabelle für diese Variabilität wird berechnet. Formeln für die Berechnung und Abstimmung von zylindrischen Minimumstabpendeln werden abgeleitet.

Kürzlich hat sich O. Meisser[1]) in dieser Zeitschrift mit den Eigenschaften und Abstimmungsmöglichkeiten von stabförmigen Minimumpendeln beschäftigt, einer Pendelform, die schon 1927 von mir vorgeschlagen worden war[2]) und für die ich den Ausdruck „Minimumpendel" der von Meisser gewählten Form „Minimalpendel" vorziehe.

Bei seinen Betrachtungen über die Invariabilität und Abstimmung dieser Pendelart hat Meisser jedoch gerade die für das praktische Arbeiten mit den Pendeln wichtigsten Beziehungen übersehen, so daß mir eine Vervollständigung seiner Ausführungen notwendig erscheint. Zuerst schreibt er: „Es muß untersucht werden, wie genau man die Zusatzforderung: Schwerpunktsabstand von der Schneide = $^1/_2$ reduzierte Pendellänge einhalten muß", und führt eine Größe ein, die die Abweichung von der Wilsing-Schulerschen Minimumbedingung angibt. Dann schreibt er: „Bei diesen neuen ‚Minimalpendeln' ändert sich die Schwingungsdauer infolge Verlagerung der Schneide um ε gemäß

$$\varDelta T_\varepsilon = +\left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^2 \cdot T_{min}\text{“},$$

und benutzt in seiner Tabelle die Größe ε als Maß für die Invariabilität der Pendel. Es ist Meisser nicht zum Bewußtsein gekommen, daß er auf diese Weise der Größe ε zwei verschiedene Bedeutungen beilegt, die man streng auseinanderhalten

---

*) Siehe: Beretning om det 18 skandinaviske Naturforskermöde i Köbenhavn 26. til 31. August 1929, S. 515. Infolge einer brieflichen Mitteilung von Professor Rosseland, September 1929, ist Dr. Albrecht Unsöld unabhängig von Öhman auf dieselbe Idee gekommen, hat aber nichts darüber veröffentlicht; er hat nur die fragliche Behauptung bei seiner Habilitation an der Universität München am 6. November 1929 als These 7 aufgestellt.

muß. Sie decken sich nur bei Pendeln, die ursprünglich der Wilsing-Schulerschen Bedingung absolut genau entsprechen, und daher haben die Meisserschen Ableitungen auch nur für solche Pendel Geltung. Pendel, die wirklich hergestellt und für Schweremessungen praktisch verwendet werden können, werden aber stets mit kleinen konstanten Abweichungen von der Wilsing-Schulerschen Bedingung behaftet sein. Für solche Pendel sind Formel (10) und Tabelle 2 von Meisser ohne Bedeutung.

Daß die Fragestellung anders lauten muß als bei Meisser, geht auch daraus hervor, daß die Kleinheit der Abweichung von der Minimumbedingung gar keine Voraussetzung für die Invariabilität eines Pendels ist. Wenn nur keine Schneidenverschiebungen vorkommen und das Pendel immer auf denselben Schneidenpunkten aufliegt, ist, abgesehen von sonstigen Veränderungsursachen, jedes Pendel bei beliebig großer Abweichung von der Minimumbedingung absolut invariabel. Auch ein Sterneckpendel, bei dem diese Abweichung viele Zentimeter groß ist, würde völlig unveränderlich sein, wenn es stets auf denselben Schneidenpunkten aufliegen und keine Verlagerung der Schneide vorkommen würde.

Die Fragestellung muß daher lauten, wie ich sie in meinem Aufsatze[2]) angegeben habe, nämlich: Wie groß darf die Abweichung von der Wilsing-Schulerschen Minimumbedingung sein, damit das Pendel bei den in der Praxis vorkommenden Schneidenverlagerungen und Auflageverschiedenheiten genügend unveränderlich ist.

Es bezeichne

q den Trägheitshalbmesser (bei Meisser $= s_0$),
h den Abstand Schneide—Schwerpunkt (bei Meisser $= s$),
l die reduzierte Pendellänge,
T die Halbschwingungszeit,
h_m, l_m und $T_{\min}$ dieselben Größen, wenn die Wilsing-Schulersche Minimumbedingung

$$h_m = q = {}^1/_2\, l_m \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

erfüllt ist. Die konstante Abweichung von dieser Bedingung, die das Pendel von Anfang an hat, sei σ, so daß

$$h = h_m + \sigma \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

ist. Die nachträglichen kleinen Schneidenverschiebungen und Verschiedenheiten der Auflagepunkte sollen mit $\varDelta h$ bezeichnet werden. Aus (2) folgt dann, daß $\varDelta h = \varDelta \sigma$ ist.

Die Schwingungsdauer eines Pendels ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{q^2 + h^2}{h g}}, \qquad \text{wo } \frac{q^2 + h^2}{h} = l \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

ist. Durch Differentiation findet man

$$\varDelta T = T\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2h}\right)\varDelta h = \left(\frac{\pi^2}{Tg} - \frac{T}{2h}\right)\varDelta h \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Wenn σ klein gegen h_m ist und man Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, findet man aus (3) unter Beachtung von (1) und (2)

$$T = T_{\min}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{l_m}\right)^2\right],$$

$$l = l_m\left[1 + 2\left(\frac{\sigma}{l_m}\right)^2\right],$$

$$h = h_m + \sigma.$$

Die Einsetzung liefert

$$\Delta T = 2\,\frac{T_{\min}}{l_m^2}\,\sigma\left(1 - 3\,\frac{\sigma}{l_m}\right)\Delta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Das zweite Glied in der Klammer kann bei Pendeln, die so abgestimmt sind, daß die Wilsing-Schulersche Bedingung nahezu erfüllt ist, fortbleiben, so daß

$$\Delta T = 2\,\frac{T_{\min}}{l_m^2}\,\sigma\,\Delta h = \frac{2\pi^4}{g^2 T_{\min}^3}\,\sigma\,\Delta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wird. Dies ist die Gleichung, die für wirklich herstellbare Pendel an Stelle der Gleichung (10) bei Meisser zu treten hat. Da

$$\Delta g = -\frac{2g}{T}\,\Delta T$$

ist, geht (6) über in

$$\Delta g = -\frac{4\pi^4}{g\,T_{\min}^4}\,\sigma\,\Delta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Mit g für 45° Breite und Meeresniveau wird

$$\frac{4\pi^4}{g} = 0.3983\,[9.6002 - 10],$$

so daß hinreichend genau

$$\Delta g = -0.4\,\frac{\sigma\,\Delta h}{T_{\min}^4}$$

gesetzt werden kann. Wenn σ und Δh in Millimetern ausgedrückt werden und Δg in mgal sich ergeben soll, tritt noch der Faktor 10 hinzu, so daß schließlich

$$\Delta g = -4\,\frac{\sigma\,\Delta h}{T_{\min}^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wird.

Um die geringere Variabilität der Minimumpendel deutlich zu machen, erscheint es mir zweckmäßiger, zum Vergleich die praktisch angewendeten Sterneckpendel heranzuziehen, statt der von Meisser angeführten mathematischen Pendel. Für Sterneckpendel muß Formel (4) benutzt werden. Die Konstanten für Sterneckpendel von Stückrath und Fechner sind rund $T = 0.508^s$, $h = 23$ cm und $T = 0.252^s$, $h = 5.5$ cm, so daß

für $^1/_2$-sec-Pendel $\Delta T \,.\, 10^7 = 8760\,\Delta h$ und für $^1/_4$-sec-Pendel $= 17000\,\Delta h$,
für $^1/_2$- „ $\Delta g \,.\, 10^3 = -3380\,\Delta h$ und für $^1/_4$- „ $= -13240\,\Delta h$

wird, wenn $\varDelta h$ in Millimetern ausgedrückt ist. An Stelle der Meisserschen Tabelle 2, in der nur gedachte Pendel miteinander verglichen werden, tritt dementsprechend die folgende:

T in sec . . .	0.75		0.5			0.4		0.3		0.25	
$\varDelta$h in mm . .	0.002	0.0007	0.01	0.002	0.0007	0.002	0.0007	0.002	0.0007	0.002	0.0007
				Sterneckpendel							
$\varDelta T \cdot 10^7$ sec			88	18	6					34	12
$\varDelta g$ in mgal			34	7	2					26	9
				Minimumpendel $\varDelta g$ in mgal							
$\sigma = 2.0$ mm	0.05	0.02	1.3	0.25	0.09	0.6	0.2	2.0	0.7	4.1	1.4
$\sigma = 0.5$ „	0.01	0.004	0.3	0.06	0.02	0.15	0.05	0.5	0.2	1.0	0.4
$\sigma = 0.3$ „	0.01	0.003	0.2	0.04	0.01	0.1	0.03	0.3	0.1	0.6	0.2
a_0 in cm . .		20.4		9.1			5.8		3.2		2.1
a_u „ „ . .		76.4		33.9			21.7		12.1		8.3

In den letzten zwei Zeilen stehen die ungefähren Maße zylindrischer Minimumstabpendel von der betreffenden Halbschwingungsdauer, und zwar gibt a_0 den Abstand der oberen, a_u den der unteren Endfläche von der Schneide an.

Die Tabelle zeigt zunächst, daß beim Minimumpendel die Verringerung der Schwingungszeit noch viel ungünstiger wirkt als beim Sterneckpendel. Bei diesem ist die Variabilität, soweit sie von Schneidenverschiebung und gleichartig wirkenden Ursachen herrührt, beim Viertelsekundenpendel nur viermal so groß als beim Halbsekundenpendel. Beim Minimumpendel steigt sie dagegen auf das 16fache. Trotzdem wird man wegen der rasch unhandlich werdenden Pendelgröße nur ausnahmsweise über die Schwingungszeit von rund einer halben Sekunde hinausgehen können.

Obwohl der Abstand Schneide—Schwerpunkt nur ungenau zu messen ist, wird man praktisch die Wilsing-Schulersche Minimumbedingung, die ja $\sigma = 0$ verlangt, doch wohl mindestens mit einer Genauigkeit von $\sigma = 0.3$ mm erfüllen können. Das reicht aber auch völlig aus, da die Variabilität eines solchen Halbsekundenpendels etwa 170mal kleiner ist, als die des Sterneckpendels. Der Betrag, bis zu dem man σ herunterzudrücken versuchen muß, hängt von $\varDelta h$ ab. Es ist leider nicht bekannt, welche Beträge diese Größe annehmen kann. Nur die obere Grenze läßt sich angeben. Man erhält sie, wenn man alle Änderungen, die die Pendel im Laufe der Zeit zeigen, als Schneidenverlagerungen oder Folgen des Aufliegens verschiedener Schneidenpunkte auf der Unterlage betrachtet. Einen Anhaltspunkt, wo diese obere Grenze ungefähr liegt, geben die Unterschiede zwischen den Schwingungszeiten desselben Pendels bei den Anschlußmessungen vor und nach den Feldbeobachtungen. Sie haben bei den Halbsekundenpendeln Sterneckscher Form des Geodätischen Instituts in den Jahren 1906 bis 1908 bis zu 24 Einheiten der 7. Stelle, in den Jahren 1910 bis 1913 nur noch 18 Einheiten betragen, in den Jahren 1924 bis 1929 sind sie unter 6 Einheiten geblieben. Die Tabelle zeigt, daß dieser letzteren Größe ein $\varDelta h$ von etwa 0.0007 mm entspricht. Die wirklichen Werte von Δh müssen also unter 0.0007 mm liegen. Man ist deshalb berechtigt, anzunehmen, daß die Variabilität eines Minimumhalbsekundenpendels, soweit sie von Schneidenverlagerung und gleichartig wirkenden Ursachen herrührt, selbst bei einem σ von 2 mm unter 0.1 mgal, bei einem σ von 0.5 mm unter 0.02 mgal bleibt. Ob diese große Invariabilität wirklich erreicht werden wird, läßt sich ohne praktische Erfahrungen nicht sagen, da noch andere Ursachen Änderungen der Pendel hervorrufen dürften. Jedenfalls zeigen diese Zahlen aber, daß eine verhältnismäßig so große Abweichung von der Minimumbedingung wie 0.3 oder 0.5 mm die Invariabilität des Halbsekundenminimumpendels nicht merklich verschlechtert.

Ferner gibt Meisser ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Minimumpendeln an. Bei kompliziert gebauten Pendeln mag es vielleicht Vorteile bieten. Bei einfach gestalteten Pendeln dürfte die direkte Rechnung zweckmäßiger sein. Für den von Meisser als Beispiel durchgerechneten Fall eines Stabpendels in Form eines einfachen Kreiszylinders unter Vernachlässigung des Einflusses von Schneidenkörper und Spiegel habe ich die Grundformeln schon in meiner Abhandlung[2]) angegeben. Ich will sie hier noch etwas ergänzen.

Der Halbmesser des Zylinderquerschnitts p wird in den praktisch in Betracht kommenden Fällen gegen die Länge des Zylinders f eine kleine Größe sein, so daß man nach p/f entwickeln kann. Ist dann a_o der Abstand Schneide bis obere Endfläche (h_1 bei Meisser), a_u bis untere Endfläche (h_2 bei Meisser), wobei a_o negativ ist, so findet man für ein Minimumpendel

$$\left.\begin{aligned} a_o &= -\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,l + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{p^2}{l} + \sigma + (\sqrt{3}-1)\frac{\sigma^2}{l} + Gl_3, \\ &= -\frac{(\sqrt{3}-1)\,g\,T^2}{2\pi^2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi^2 p^2}{4\,g\,T^2} + \sigma + \frac{(\sqrt{3}-1)\,\pi^2\sigma^2}{g\,T^2} + Gl_3; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} a_u &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,l - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{p^2}{l} + \sigma - (\sqrt{3}+1)\frac{\sigma^2}{l} + Gl_3, \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)\,g\,T^2}{2\pi^2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi^2 p^2}{4\,g\,T^2} + \sigma - \frac{(\sqrt{3}+1)\,\pi^2\sigma^2}{g\,T^2} + Gl_3. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Glieder 3. Ordnung sind so klein, daß man sie bei den praktisch vorkommenden Fällen vernachlässigen kann.

Da entsprechend der Tabelle die Minimumpendel in bezug auf die strenge Erfüllung der Minimumbedingung verhältnismäßig unempfindlich sind, ist die genaue Abstimmung eines einzelnen Pendels von geringer Bedeutung. Viel wichtiger ist dagegen die Abstimmung zweier Pendel aufeinander, denn wenn man die Vorteile der Minimumpendel voll ausnutzen will, müssen auch die übrigen Fehler, besonders der der Mitschwingensverbesserung stark herabgedrückt werden. Meisser verlangt sogar, daß das Mitschwingen des Stativs durch zwei gegen-einander schwingende Pendel eliminiert werden soll. Wenn diese Meissersche Forderung wohl auch niemals zu erreichen sein dürfte, so ist die möglichste Gleichheit der Schwingungszeiten doch tatsächlich die wichtigste zu erfüllende Bedingung. Da Meisser jedoch nichts darüber sagt, wie sie erfüllt werden kann, so sei auch darüber noch einiges gesagt.

Wenn die beiden in derselben Ebene schwingenden Pendel einander gleich sind, und m die Masse des Pendels, ε die elastische Konstante des Stativs, a die Amplitude, φ die Phase, t die Zeit und F_1, F_2 Faktoren bedeuten, so sind nach Schmehl[3]) die Reduktionen der beobachteten Schwingungszeiten auf starres Stativ

$$\varDelta T_1 = -T\frac{mgh}{2\varepsilon l^2}\left(1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)_a+\left(\frac{a_2}{a_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)_e\right]-(T_2-T_1)F_1(t_e-t_a)^2\right),$$

$$\varDelta T_2 = -T\frac{mgh}{2\varepsilon l^2}\left(1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)_a+\left(\frac{a_1}{a_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)_e\right]-(T_1-T_2)F_2(t_e-t_a)^2\right).$$

Da der Faktor $Tmgh/2\,\varepsilon l^2$ nur ungenau zu bestimmen und außerdem veränderlich ist, müssen die Klammerausdrücke möglichst klein gemacht werden. Daraus folgt, daß die Phasenunterschiede am Anfang der Beobachtung $(\varphi_2 - \varphi_1)_a$ und an ihrem Ende $(\varphi_2 - \varphi_1)_e$ möglichst nahe an 180^0 liegen müssen. Denn man wird die Amplituden a_1 und a_2 einander möglichst gleich machen, weil sowohl $a_2 : a_1$ wie $a_1 : a_2$ in den Formeln vorkommt. Die Phasenbedingung wird aber um so besser erfüllt sein, je geringer die Änderung des Phasenunterschieds während der Beobachtungsdauer, je näher also die Forderung $T_2 = T_1$, oder was auf dasselbe hinauskommt, $l_2 = l_1$ erfüllt ist. Dann wird auch das letzte Klammerglied sich um so mehr der Null nähern. Dazu treten die beiden Minimumbedingungen $l_1 = 2\,h_1$ und $l_2 = 2\,h_2$, wodurch auch $h_2 = h_1$ wird, und um die Voraussetzung zweier gleicher Pendel zu erfüllen, die Bedingung $m_2 = m_1$.

Die Abstimmung der Pendel erfolgt zunächst durch Abschleifen, nach der Vergoldung durch Verstärkung der Goldschicht an bestimmten Stellen.

Es werde wieder ein Stabpendel in Kreiszylinderform angenommen. Die Massenänderungen sollen in schmalen Ringen an beiden Stabenden und in einem Ring, der von der Schneide den Abstand a hat, erfolgen. Wenn dieser Ring über der Schneide liegt, ist a negativ zu nehmen. Die Massenänderungen seien $\varDelta o$, $\varDelta u$ und $\varDelta a$. Wenn die Ringe an den Enden schmal sind, können ihre Abstände von der Schneide gleich a_o und a_u angenommen werden. Bezeichnet der Index 0 den Zustand vor den Massenänderungen und J das Trägheitsmoment in bezug auf die Schneide, so ist

$$l_0 = \frac{J_0}{m_0 h_0},$$

$$l = \frac{J_0 + (a_o^2 + {}^1/_2 p^2)\varDelta o + (a_u^2 + {}^1/_2 p^2)\varDelta u + (a^2 + {}^1/_2 p^2)\varDelta a}{m_0 h_0 + a_o \varDelta o + a_u \varDelta u + a \varDelta a} \tag{11}$$

Es werde angenommen, daß die Pendel so konstruiert sind, daß sie die angegebenen vier Bedingungen roh erfüllen. Dann kann man (11) und den Nenner von (11) unter Vernachlässigung höherer Glieder entwickeln, indem man die Werte von (9) und (10) einsetzt. Dies gibt

$$m_0 l = m_0 l_0 + \left(l_0 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{l_0}\right)\varDelta o + \left(l_0 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{l_0}\right)\varDelta u - 2\left(a - \frac{a^2 + {}^1/_2 p^2}{l_0}\right)\varDelta a \quad (12)$$

$$m_0 h = m_0 h_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(l_0 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{l_0}\right)\varDelta o + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(l_0 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{l_0}\right)\varDelta u - \left(\frac{1}{2}l_0 - a\right)\varDelta a \quad (13)$$

Um die genaue Abstimmung durchzuführen, wird man l_0, h_0 und m_0 der rohen Pendel messen, l_0 durch Schwingungsbeobachtungen, m_0 durch Wägung, h_0 durch Messung auf dem Komparator, entweder mit dem Kühnen-Furtwänglerschen Apparat, oder indem man das Pendel quer auf zwei Schneiden legt, die einen sehr kleinen Abstand (0.2 bis 0.3 mm) voneinander haben. Dann wird man zuerst bei dem leichteren der beiden Pendel (Index l) die Minimumbedingung $l_1 = 2\,h_1$ erfüllen. Durch Einsetzen der Werte aus (12) und (13) ergibt dies folgende Bedingung:

$$\left.\begin{aligned} m_{0l}(l_{0l} - 2\,h_{0l}) + (\sqrt{3}+1)\left[l_{0l} - \frac{1}{2}\frac{p_l^2}{l_{0l}}\right]\varDelta o_l \\ -(\sqrt{3}-1)\left[l_{0l} - \frac{1}{2}\frac{p_l^2}{l_{0l}}\right]\varDelta u_l + \left[l_{0l} - 4\,a_l + \frac{2\,a_l^2 + p_l^2}{l_{0l}}\right]\varDelta a_l = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Bringt man ein $\varDelta o_l$ am Pendel an, d. h. schleift man am oberen Ende einen Ring weg, so wird $m_{0l}\,(l_{0l} - 2\,h_{0l})$ kleiner. Bringt man ein $\varDelta u_l$ an, d. h. schleift man am unteren Ende weg, so wird $m_{0l}\,(l_{0l} - 2\,h_{0l})$ größer. Durch ein $\varDelta a_l$ kann $m_{0l}\,(l_{0l} - 2\,h_{0l})$ sowohl vergrößert als verkleinert werden, je nach dem Abstand von der Schneide a_l, in dem der mittlere Ring abgeschliffen wird. Im Einzelfalle hat man es also durch passende Wahl der Schleifstellen in der Hand, $m_{0l}(l_{0l} - 2\,h_{0l})$ zum Verschwinden zu bringen.

Die übrigen drei Bedingungen müssen sodann durch Abschleifen des schwereren Pendels (Index s) erfüllt werden. Die Bedingungen $l_s = l_l$, $l_s = 2\,h_s$ und $m_s = m_l$ liefern folgende Gleichungen, wenn man die Ausdrücke (12) und (13) einsetzt

$$\left[l_{0s} - \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta o_s + \left[l_{0s} - \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta u_s - \left[2\,a_s - \frac{2\,a_s^2 + p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta a_s + m_{0s}(l_{0s} - l_l) = 0 \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} (\sqrt{3}+1)\left[l_{0s} - \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta o_s - (\sqrt{3}-1)\left[l_{0s} - \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta u_s \\ + \left[l_{0s} - 4\,a_s + \frac{2\,a_s^2 + p_s^2}{l_{0s}}\right]\varDelta a_s + m_{0s}(l_{0s} - 2\,h_{0s}) = 0 \end{aligned}\right\} \;\ldots \quad (16)$$

$$\varDelta o_s + \varDelta u_s + \varDelta a_s + (m_{0s} - m_l) = 0 \;\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert die Massenänderungen $\varDelta o_s$, $\varDelta u_s$, $\varDelta a_s$, die an dem schwereren Pendel anzubringen sind, damit die gestellten Bedingungen erfüllt werden. Der Abstand a_s für den mittleren Ring kann so gewählt werden, daß sich die Auflösung der Gleichungen möglichst günstig gestaltet, und daß die Lösungen der Bedingung entsprechen, daß $\varDelta o_s$, $\varDelta u_s$ und $\varDelta a_s$ sämtlich negativ sein müssen.

Die beiden Pendel werden vom Mechaniker schon so übereinstimmend und der Vorausberechnung entsprechend hergestellt sein, daß in den Faktoren der Unbekannten $l_s = l_l = l$, $h_s = h_l = h$ und $m_s = m_l = m$ gesetzt und p vernachlässigt werden können. Bei der praktischen Anwendung wird außerdem bei der Abstimmung des leichteren Pendels zunächst zweckmäßig $\varDelta a_l = 0$ gesetzt, so daß sich dafür aus (14) die Bedingungsgleichungen ergeben, entweder

$$\left.\begin{aligned}\varDelta o_l &= -\frac{m}{(\sqrt{3}+1)l}(l_{0l}-2h_{0l}) = -\frac{2m}{(\sqrt{3}+1)T}\left(T_{0l}-\pi\sqrt{\frac{2h_{0l}}{g}}\right)\\ &= -\frac{2m}{(\sqrt{3}+1)c}\left(c_{0l}-\pi(ic_{0l}\pm 1)\sqrt{\frac{2h_{0l}}{g}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\varDelta u_l &= \frac{m}{(\sqrt{3}-1)l}(l_{0l}-2h_{0l}) = \frac{2m}{(\sqrt{3}-1)T}\left(T_{0l}-\pi\sqrt{\frac{2h_{0l}}{g}}\right)\\ &= \frac{2m}{(\sqrt{3}-1)c}\left(c_{0l}-\pi(ic_{0l}\pm 1)\sqrt{\frac{2h_{0l}}{g}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

In der dritten Form dieser Gleichungen bedeutet c das Koinzidenzintervall eines $1/i$-Sekundenpendels, so daß $T = c/(ic \pm 1)$ ist. Die Gleichungen sind nach dem Vorgang von Schmehl[4]) auch in dieser Form geschrieben.

Ist $\left(T_{0l}-\pi\sqrt{\frac{2h_{0l}}{g}}\right)$ positiv, so ist Gleichung (18) zu benutzen und am oberen Ende Masse wegzunehmen. Ist diese Größe negativ, so wird entsprechend Gleichung (19) am unteren Ende Masse entfernt.

Zur Abstimmung des schwereren Pendels auf das leichtere liefern sodann die Gleichungen (15) bis (17) folgende Werte der Unbekannten.

$$\left.\begin{aligned}\varDelta o_s = \;&\frac{\left(\sqrt{3}-4\frac{a_s}{l}+2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)m}{2\sqrt{3}\left(1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)l}(l_l-l_{0s}) - \frac{m}{2\sqrt{3}\,l}(l_{0s}-2h_{0s})\\ &-\frac{1-2(\sqrt{3}+1)\frac{a_s}{l}+2\sqrt{3}\left(\frac{a_s}{l}\right)^2}{2\sqrt{3}\left(1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)}(m_l-m_{0s}),\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_s = {} & \frac{\left(\sqrt{3}+4\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)m}{2\sqrt{3}\left(1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)l}(l_l-l_{0s})+\frac{m}{2\sqrt{3}\,l}(l_{0s}-2h_{0s}) \\ & +\frac{1+2(\sqrt{3}-1)\frac{a_s}{l}-2\sqrt{3}\left(\frac{a_s}{l}\right)^2}{2\sqrt{3}\left(1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)}(m_l-m_{0s}),\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

$$\Delta a_s = -\frac{m}{\left(1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2\right)l}(l_l-l_{0s})+\frac{1}{1+2\frac{a_s}{l}-2\left(\frac{a_s}{l}\right)^2}(m_l-m_{0s}) \quad (22)$$

Für den praktischen Gebrauch wird man für a_s zweckmäßigerweise setzen

$$a_s = \frac{1}{2}l = \frac{gT^2}{2\pi^2} = \frac{gc^2}{2\pi^2(ic\pm1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

denn für diesen Wert ist nach (12) die Wirkung eines Δa ein Maximum. D. h. der mittlere Ring ist in dem Abstand des Schwerpunkts von der Schneide abzuschleifen. Um diesen Sonderfall zu kennzeichnen, werde $\Delta a_s = \Delta s_s$ gesetzt. Die Unbekannten werden in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned}\Delta o_s &= \frac{(2-\sqrt{3})m}{6l}(l_l-l_{0s})-\frac{\sqrt{3}m}{6l}(l_{0s}-2h_{0s})+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}) \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})m}{3T}(T_l-T_{0s})-\frac{\sqrt{3}m}{3T}\left(T_{0s}-\pi\sqrt{\frac{2h_{0s}}{g}}\right)+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}) \\ &= \frac{\pm(2-\sqrt{3})m}{3c}(c_l-c_{0s})-\frac{\sqrt{3}m}{6c}\left(c_{0s}-\pi(ic_{0s}\pm1)\sqrt{\frac{2h_{0s}}{g}}\right)+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}),\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_s &= \frac{(2+\sqrt{3})m}{6l}(l_l-l_{0s})+\frac{\sqrt{3}m}{6l}(l_{0s}-2h_{0s})+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}) \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})m}{3T}(T_l-T_{0s})+\frac{\sqrt{3}m}{3T}\left(T_{0s}-\pi\sqrt{\frac{2h_{0s}}{g}}\right)+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}) \\ &= \frac{\pm(2+\sqrt{3})m}{3c}(c_l-c_{0s})+\frac{\sqrt{3}m}{3c}\left(c_{0s}-\pi(ic_{0s}\pm1)\sqrt{\frac{2h_{0s}}{g}}\right)+\frac{1}{6}(m_l-m_{0s}),\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta s_s &= -\frac{2m}{3l}(l_l-l_{0s})+\frac{2}{3}(m_l-m_{0s}) \\ &= -\frac{4m}{3T}(T_l-T_{0s})+\frac{2}{3}(m_l-m_{0s}) \\ &= -\frac{4m}{3c}(c_l-c_{0s})+\frac{2}{3}(m_l-m_{0s})\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(26)$$

Alle drei Unbekannten müssen negativ sein. Sollten sie es im Einzelfalle nicht sein, muß zuvor das leichtere Pendel noch leichter gemacht werden. Dabei muß die Wilsing-Schulersche Bedingung aufrechterhalten bleiben. Nach (14) ist dies der Fall, wenn man am oberen und unteren Ende so abschleift, daß

$$\varDelta o_l = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right] \varDelta u_l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

ist, oder daß man einen mittleren Ring in der Entfernung a_l abschleift, die aus

$$l_l - 4 a_l + \frac{2 a_l^2 + p_l^2}{l_l} = 0$$

oder aus

$$a_l = l_l \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_l}{l_l}\right)^2\right)}\right) = \frac{g T_l^2}{\pi^2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\pi^2 p}{g T^2}\right)^2\right)}\right) \quad . \quad (28)$$

sich ergibt.

Im ersteren Falle wird l_l verkleinert, denn es ist nach (12)

$$\varDelta l_l = \frac{l}{m}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{l}\right)^2\right)(\varDelta o_l + \varDelta u_l) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Im zweiten Falle wird l_l vergrößert, denn es ist nach (12)

$$\varDelta l_l = -\frac{l}{m}\left(\sqrt{2\left(1 - \left(\frac{p}{l}\right)^2\right)} - 1\right) \varDelta a_l \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Man hat es also in der Hand, durch die Wahl der Schleifstellen l_l und m_l so zu verändern, ohne die Abstimmung des Pendels zu beeinträchtigen, daß $\varDelta o_s$, $\varDelta u_s$ und $\varDelta s_s$ sämtlich negativ werden.

Wenn durch das Vergolden der Pendel die Abstimmung gestört sein sollte, kann man sie dadurch wiederherstellen, daß man an geeigneten Stellen des leichteren Pendels die Vergoldung stärker macht. Da es sich dabei nur um geringe Beträge handeln kann, wird man von der strengen Erfüllung der Wilsing-Schulerschen Bedingung entsprechend der Tabelle sowie auch von der völligen Gleichheit der Massen absehen können und nur die Schwingungszeiten gleichmachen. Man wird daher am oberen oder unteren Ende oder in der Mitte am Schwerpunkt stärker vergolden, je nachdem $(T_{0s} - T_{0l})$ positiv oder negativ ist, entsprechend einer der Formeln:

$$\varDelta o_l \text{ oder } \varDelta u_l = \frac{m}{l}(l_{0s} - l_{0l}) = \frac{2m}{T}(T_{0s} - T_{0l}) = \frac{2m}{c}(c_{0s} - c_{0l}) \quad . \quad (31)$$

$$\varDelta s_l = -\frac{2m}{l}(l_{0s} - l_{0l}) = -\frac{4m}{T}(T_{0s} - T_{0l}) = -\frac{4m}{c}(c_{0s} - c_{0l}) \quad (32)$$

Literatur

[1]) O. Meisser: Ein neuer Vierpendelapparat für relative Schweremessungen. Zeitschr. f. Geophys., 6. Jahrg., 1930, S. 1.

[2]) E. Kohlschütter: Über Pendelformen. Verhandl. d. 1927 in Riga abgeh. 3. Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission, S. 83. Helsinki 1928.

[3]) H. Schmehl: Über den Einfluß der Elastizität des Pendelstativs auf die Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel. Zeitschr. f. Geophys., 3. Jahrg., 1927, S. 157.

[4]) Derselbe: Die Reduktion der Koinzidenzzeiten von Pendeln zur Berechnung von Schweredifferenzen. Zeitschr. f. Geophys., 5. Jahrg., 1929, S. 1.

Bemerkung zu der Arbeit „Die Invariabilität und Abstimmung von Minimumpendeln“ von E. Kohlschütter

Von **O. Meisser**

Es ist richtig, daß in meiner angeführten Arbeit ε zwei verschiedene Bedeutungen zugesprochen werden können. Es muß aber betont werden, daß die Formel (9) bzw. (10) die präzise Antwort auf meine gestellte Frage gibt, wie genau man die Zusatzforderung (B) einhalten muß. Zerlegt man nach Kohlschütter die „Verlagerung ε der Schneide“ gegenüber dem Schwerpunkt in einen konstruktiv gegebenen konstanten (σ) und einen veränderlichen ($\varDelta h$) Betrag, so geht mit $\varepsilon = \sigma + \varDelta h$ meine Gleichung (10) über in

$$T_{\sigma, h} - T_{\mathrm{Min}}\left(1 + \left(\frac{\sigma^2}{l_m}\right)\right) = \varDelta T_{\sigma, h} = T_{\mathrm{Min}}\left\{\frac{2\sigma . \varDelta h}{l_m^2} + \left(\frac{\varDelta h}{l_m}\right)^2\right\} \quad \cdot \cdot \quad (\mathrm{I})$$

Man sieht somit, daß (10) gemäß (I) nicht nur das in $\varDelta h$ lineare Glied [bei Kohlschütter, Formel (6)], sondern auch noch das in $\varDelta h$ quadratische Glied direkt hinzuschreiben gestattet ($\varepsilon \leqslant l_m/2!$). Mit Absicht habe ich in der Tabelle 2 die ε (entspricht $\varDelta h$)-Werte nur für die beiden idealen Grenzfälle angegeben, um den großen Unterschied für ein strenges Minimalpendel ($\sigma = 0$) und das entsprechende mathematische Pendel ($h = l$) zu zeigen. Bekanntlich läßt sich das Sterneck sche Pendel für größenordnungsmäßige Betrachtungen durch das mathematische bequem ersetzen, da die entsprechenden Zahlen ($\varDelta h$) sich nur um 12 bzw. 15% unterscheiden und man so gleich die theoretisch ungünstigste Grenzform hat.

Der Wert eines Näherungsverfahrens liegt darin, daß es möglichst das Pendel, wie es wirklich ist, erfaßt. Für genauere Anforderungen dürfte es kaum genügen, den Einfluß von Schneide und Spiegeln zu vernachlässigen, wie ich es „der Einfachheit halber“ tat, um das „prinzipielle“ Arbeiten zu zeigen und ausdrücklich in der Fußnote betont habe. Meiner Ansicht nach muß auch die Abstimmung der Pendel auf die Minimumbedingung (σ) schärfer sein, als Kohlschütter fordert. Es ist erwünscht, einen noch größeren Fehler durch eventuelle Schneidenverlagerungen