

Werk

Jahr: 1931

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:7

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0007

LOG Id: LOG_0076

LOG Titel: Zur Frage des neuen Hagenschen Beweises für die Drehung der Erde

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Frage des neuen Hagenschen Beweises für die Drehung der Erde

Von **V. S. Vrkljan** in Zagreb — (Mit 1 Abbildung)

Die Meinung von R. Grammel und J. Stein über den neuen Hagenschen Beweis für die tägliche Drehung der Erde wird durch theoretische Ableitungen bekräftigt.

In den Naturwissenschaften wurde unlängst eine Abhandlung von J. G. Hagen*) nach seinem Tode veröffentlicht, in der die Meinung ausgesprochen wurde, daß es sich beim Foucaultschen Pendelversuch um zwei unabhängige Beweise der Erddrehung handelt. Der zweite Beweis besteht in der ovalförmigen Spirale Vivianis gegen Ende des Versuchs, wobei die Bewegung der Pendelkugel in dieser Spirale auf der nördlichen Halbkugel der Erde immer linksläufig, auf der südlichen Halbkugel dagegen immer rechtsläufig stattfinden soll.

Um die Entstehung dieser Spirale zu erklären, geht J. G. Hagen von der schon früher bekannten Tatsache aus, daß das Foucaultsche Pendel im Inertialsystem beim Loslassen eine Tangentialgeschwindigkeit besitzt, welche eine elliptische Bewegung der Horizontalprojektion hervorruft**). Nach der Meinung von J. G. Hagen entsteht die ovalförmige Spirale durch die Verkürzung der Amplitude des Pendels (der großen Achse der erwähnten Ellipse), weil bei dieser Verkürzung für die fortwährend sich ändernde elliptische Bewegung der Flächensatz beiläufig gelten soll.

Gegen diese Auffassung, daß nämlich der Vorgang der Vivianischen ovalförmigen Spirale durch die Anwendung des Flächensatzes zu erklären sei, haben sich R. Grammel und J. Stein***) geäußert. Der Zweck dieser Abhandlung ist, die letztgenannte Meinung durch theoretische Ableitungen zu bekräftigen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sich die Pendelkugel in der Horizontalebene bewegt, was für sehr kleine Schwingungen zulässig ist†). In dieser Ebene denken wir uns ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem xy (x -Achse gegen Norden, y -Achse gegen Westen gerichtet) und ein Inertialsystem $\xi\eta$ (von dem die ξ - bzw. η -Achse zur Zeit $t = 0$ mit der x - bzw. y -Achse des irdischen Systems zusammenfällt) gelegt; es besteht dann bekanntlich eine Azimutaldrehung des irdischen Bezugssystems gegen das Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = u \sin \psi$, wo u die Winkelgeschwindigkeit der täglichen Erdrotation und ψ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet.

*) J. G. Hagen: Die Naturwissensch. **18**, 805—807, 1930.

***) Vgl. z. B. R. Grammel: Die mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde, S. 20, 1922.

***) J. Stein: Die Naturwissensch. **19**, 39, 1931.

†) Vgl. z. B. A. Berliner u. K. Scheel: Physik. Handwörterbuch, S. 267, 1924.

Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung im irdischen Bezugssystem xy (g bedeutet die Schwerebeschleunigung, l die Länge des Pendels und δ die Dämpfungskonstante)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\delta\dot{x} + 2\omega\dot{y} + \omega^2x \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y - 2\delta\dot{y} - 2\omega\dot{x} + \omega^2y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

während im Inertialsystem $\xi\eta$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{g}{l}\xi - 2\delta(\dot{\xi} + \eta\omega) \\ \ddot{\eta} &= -\frac{g}{l}\eta - 2\delta(\dot{\eta} - \xi\omega) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

gilt, wo die Kraftkomponenten $-2\delta\eta\omega$ und $2\delta\xi\omega$ von demjenigen Teil der Dämpfung hinzukommen, der im Inertialsystem von der Rotation der Luftmassen (die dem irdischen Bezugssystem gehören) herrührt (s. Fig. 1).

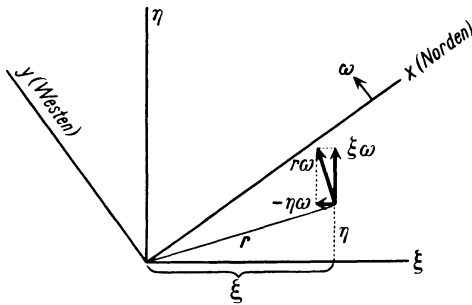


Fig. 1

Ganz analog wie im Falle ohne Dämpfung*) lassen sich beide Systeme der Gleichungen (1) bzw. (2) am einfachsten integrieren, wenn man die Koordinaten x und y bzw. ξ und η in eine komplexe Koordinate $x + iy$ bzw. $\xi + i\eta$ zusammenfaßt. Man erhält dann im irdischen Bezugssystem

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)(x + iy) - 2(\delta + i\omega)(\dot{x} + i\dot{y}) \dots \dots (3)$$

und im Inertialsystem

$$\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} = -\left(\frac{g}{l} - 2i\delta\omega\right)(\xi + i\eta) - 2\delta(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) \dots \dots (4)$$

*) Vgl. z. B. A. Berliner u. K. Scheel: Physikal. Handwörterbuch, S. 268, 1924.

Es sind also die Integrale dieser Gleichungen zu finden unter den folgenden Anfangsbedingungen (d. h. für die Zeit $t = 0$):

$$\left. \begin{aligned} (x + iy)_0 &= x_0 \\ (\dot{x} + i\dot{y})_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(im irdischen Bezugssystem)} \quad (5)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} (\xi + i\eta)_0 &= x_0 \\ (\dot{\xi} + i\dot{\eta})_0 &= ix_0\omega \end{aligned} \right\} \text{(im Inertialsystem)} \dots (6)$$

Man erhält auf die bekannte Weise als charakteristische Gleichung von (3)

$$\varrho_{1,2} = -(\delta + i\omega) \pm in\sqrt{1 - 2i\frac{\delta\omega}{n^2}}$$

und als solche von (4)

$$\sigma_{1,2} = -\delta \pm in\sqrt{1 - 2i\frac{\delta\omega}{n^2}},$$

wo überall $\frac{g}{l} - \delta^2 = n^2$ gesetzt ist. Da aber

$$\frac{\delta\omega}{n^2} \ll 1^*)$$

ist, so wird annähernd

$$\varrho_{1,2} = -[\delta_{1,2} + i(\omega \mp n)] \quad (7)$$

bzw.

$$\sigma_{1,2} = -\delta_{1,2} \pm in \quad \left\{ \delta_{1,2} = \delta \left(1 \mp \frac{\omega}{n} \right) \right\} \quad (8)$$

Das allgemeine Integral von (3) lautet also

$$x + iy = a_1 e^{\varrho_1 t} + a_2 e^{\varrho_2 t} \dots (9)$$

und von (4)

$$\xi + i\eta = b_1 e^{\sigma_1 t} + b_2 e^{\sigma_2 t} \dots (10)$$

wo a_1, a_2, b_1 und b_2 die Konstanten bedeuten, die erst auf Grund der Anfangsbedingungen (5) bzw. (6) zu ermitteln sind.

Durch Anwendung der Anfangsbedingungen (5) auf die allgemeine Lösung (9) ergibt sich

$$a_1 = -x_0 \frac{\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

$$a_2 = x_0 \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

*) $\omega = 5 \cdot 10^{-6}$ für $\psi = 45^\circ$ ($u = 7 \cdot 10^{-5}$), n ist der Größenordnung 10^6 oder 10^{-1} ; was die Größe von δ betrifft, vgl. den Text nach den Formeln (17).

und analog aus (10) und (6)

$$b_1 = -x_0 \frac{\sigma_2 - i\omega}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$b_2 = x_0 \frac{\sigma_1 - i\omega}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Setzt man nun diese Werte für die Konstanten in die Gleichungen (9) und (10) ein, so erhält man mit Berücksichtigung von (7) bzw. (8)

$$x + iy = \frac{x_0}{\delta_2 - \delta_1 + 2in} \left\{ \begin{aligned} & [(\delta_2 + i(\omega + n)) e^{-(\delta_1 - in)t} \\ & - (\delta_1 + i(\omega - n)) e^{-(\delta_2 + in)t}] e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

$$\xi + i\eta = \frac{x_0}{\delta_2 - \delta_1 + 2in} \left\{ \begin{aligned} & [(\delta_2 + i(\omega + n)) e^{-(\delta_1 - in)t} \\ & - (\delta_1 + i(\omega - n)) e^{-(\delta_2 + in)t}] \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (11) und (12) ersieht man sofort, daß

$$x + iy = (\xi + i\eta) e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (13)$$

ist, welche Formel als Evidenz auch zur Kontrolle der Richtigkeit unserer Lösungen dienen kann. Weiter bemerkt man, daß für $\delta = 0$ [was gemäß $\delta_{1,2} = \delta \left(1 \mp \frac{\omega}{n}\right)$ auch $\delta_1 = \delta_2 = 0$ bedeutet] die Lösungen (11) und (12) in die schon bekannten genäherten Lösungen des Foucaultschen Pendels ohne Dämpfung übergehen.

Wegen der Beziehung (13) werden wir uns weiter nur mit der Lösung (12) beschäftigen, die nach einigen Umrechnungen, wenn man dann wieder von der komplexen Gleichung zu den realen Gleichungen übergeht, ergibt

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \cos nt + C \sin nt \\ \eta &= B \sin nt + D \cos nt \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{x_0}{4n^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2} \{ [2n(\omega + n) + \delta_2(\delta_2 - \delta_1)] e^{-\delta_1 t} - [2n(\omega - n) + \delta_1(\delta_2 - \delta_1)] e^{-\delta_2 t} \} \\ C &= \frac{-x_0}{4n^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2} \{ [(\delta_2 - \delta_1)(\omega + n) - 2n\delta_2] e^{-\delta_1 t} + [(\delta_2 - \delta_1)(\omega - n) - 2n\delta_1] e^{-\delta_2 t} \} \\ B &= \frac{x_0}{4n^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2} \{ [2n(\omega + n) + \delta_2(\delta_2 - \delta_1)] e^{-\delta_1 t} + [2n(\omega - n) + \delta_1(\delta_2 - \delta_1)] e^{-\delta_2 t} \} \\ D &= \frac{x_0}{4n^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2} \{ [(\delta_2 - \delta_1)(\omega + n) - 2n\delta_2] e^{-\delta_1 t} - [(\delta_2 - \delta_1)(\omega - n) - 2n\delta_1] e^{-\delta_2 t} \} \end{aligned} \right\} (15)$$

bedeutet. Man kann aber die Faktoren A, B, C und D unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in den Nennern und in den eckigen Klammern annähernd berechnen; man erhält so:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{x_0}{2} (e^{-\delta_1 t} + e^{-\delta_2 t}) \\ C &= \frac{\delta}{n} \cdot \frac{x_0}{2} (e^{-\delta_1 t} + e^{-\delta_2 t}) \\ B = B' + B'' &= \frac{x_0}{2} \left[(e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) + \frac{\omega}{n} (e^{-\delta_1 t} + e^{-\delta_2 t}) \right] \\ D &= -\frac{\delta}{n} \cdot \frac{x_0}{2} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Man bemerkt sofort, daß $C = \frac{\delta}{n} A$ und $D = -\frac{\delta}{n} B'$ ist; deswegen kann man jetzt die Gleichungen (14) schreiben

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \left(\cos nt + \frac{\delta}{n} \sin nt \right) \\ \eta &= (B' + B'') \sin nt - \frac{\delta}{n} B' \cos nt \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Wir beschränken aber unsere Betrachtungen nur auf solche Fälle, in welchen δ sehr klein gegenüber n ist, was in der Praxis des Foucaultschen Pendels tatsächlich vorkommt; dann kann man in den letzten Gleichungen das Glied mit dem Faktor $\frac{\delta}{n}$ streichen, wodurch diese in die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \cos nt \\ \eta &= B \sin nt \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

übergehen.

Die Bewegung des Massenpunktes führt also eine Ellipse aus, deren große und kleine Halbachse sich fortwährend ändern, da A und B von t abhängen.

Der Flächeninhalt dieser (augenblicklichen) Ellipse ist zur Zeit t

$$AB\pi = \frac{x_0^2}{4} \left[(e^{-2\delta_1 t} - e^{-2\delta_2 t}) + \frac{\omega}{n} (e^{-\delta_1 t} + e^{-\delta_2 t})^2 \right] \pi \dots (19)$$

Aus dem Ausdruck für $AB\pi$ ist zu ersehen, daß von einer Konstanz der Flächenräume keine Rede sein kann; der Flächeninhalt der augenblicklichen Ellipse ist am größten zur Zeit $t = 0$ (d. h. am Anfang des Versuchs), nämlich

$$A_0 B_0 \pi = x_0^2 \frac{\omega}{n} \pi,$$

und von diesem Zeitpunkt nimmt sie ab bis zu Null für $\lim t = \infty$. Das ersieht man am einfachsten, wenn man in dem Ausdruck für $AB\pi$ aus (19) den Wert $t + \tau$ statt t einsetzt; es ergibt sich, daß für jedes t ($\tau > 0$)

$$A_{t+\tau} B_{t+\tau} \pi < A_t B_t \pi$$

ist, daß also $AB\pi$ beständig abnimmt. Übrigens kann man auch leicht zeigen, daß die Funktion $AB\pi$ im Zeitintervall $t = 0 \rightarrow \infty$ weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.

Ebenso kann man sich leicht überzeugen, daß der Ausdruck für B gemäß (16) sein Maximum zur Zeit $t = 0$ besitzt und im Zeitintervall $t = 0 \rightarrow \infty$ monoton abnimmt.

Die Bewegung des Massenpunktes findet also im Inertialsystem in einer ellipsenförmigen Spirale statt, die sich aber von einer geraden Linie kaum unterscheidet. Deswegen kann eine etwaige Entstehung der Vivianischen Spirale keinesfalls durch die Anwendung des Flächensatzes erklärt werden. Nur die Richtung der Bewegung des Massenpunktes in der hier beschriebenen ellipsenförmigen Spirale stimmt mit der Richtung der Bewegung in der Vivianischen Spirale*). Das ruft den Verdacht hervor, daß man die Entstehung der Vivianischen Spirale eventuell durch das etwaige seitliche Mitschwingen des Aufhängepunktes als ein Resonanzphänomen erklären könnte. Diese Meinung scheint mir nicht ganz grundlos, weil ich bei einem Versuch anwesend war, bei welchem sonst die Foucaultsche Ablenkung ganz gut gelang, jedoch keine Spirale Vivianis bemerkt wurde. Es müssen deshalb wahrscheinlich besondere Umstände vorhanden sein, die die Entstehung der Spirale bevorzugen, die aber bis heute experimentell noch nicht festgestellt sind.

Die Einwände, welche hier gegen die vorliegenden Ableitungen in Betracht kommen, könnten die Annahme der linearen Dämpfung und die Annahme einer ebenen Schwingung treffen. Dem zweiten Einwand kann man entgegenhalten, daß auch bei dem sphärischen Pendel unter der Annahme einer linearen Dämpfung für die Horizontalprojektion der Bewegung ein ebensolches Gesetz der Abnahme der Flächengeschwindigkeit gültig ist, wie bei den ebenen gedämpften Schwingungen**). Denn die kinetische, die potentielle Energie und die Rayleighsche Dissipationsfunktion $F = \frac{k}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ des sphärischen Pendels (Länge = l) lauten, in räumlichen Polarkoordinaten r, φ, ϑ ausgedrückt,

$$E_{kin} = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$E_{pot} = m g l \cos \vartheta + \text{const}$$

und

$$F = \frac{k}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2),$$

*) J. G. Hagen: Die Naturwissensch. **18**, 805—807, 1930.

***) Vgl. meine Abhandlung in der ZS. f. Phys. **67**, 289—291, 1931.

wo m die Masse der Pendelkugel bedeutet. Das eben genannte Gesetz erhält man aus der erweiterten Lagrangeschen Gleichung zweiter Art*)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} - \frac{\partial F'}{\partial \dot{\varphi}};$$

durch Einsetzen obiger Werte ergibt sich:

$$m \frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}) = - k l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}$$

und endlich durch beiderseitige Multiplikation mit dt und Integration von t_0 bis t

$$(l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi})_t = (l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi})_{t_0} - 2 \delta \int_{t_0}^t l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi} \cdot dt.$$

Hier ist, wie üblich, $\frac{k}{m} = 2 \delta$ gesetzt. Die Entstehung der Spirale Vivianis läßt sich also auch unter der Annahme eines sphärischen Pendels nicht durch Anwendung des Flächensatzes erklären.

*) Vgl. z. B. Enzyklopädie d. mathemat. Wissensch., Bd. IV, 1, S. 470, 1901—1908.

Zagreb, Februar 1931.